

# Wärmeübergang bei freier Konvektion um elliptische Rohre

S. Y. Huang, Wuhan und F. Mayinger, München

## Heat transfer with natural convection around elliptical tubes

**Abstract.** An interferometric study of heat transfer with free convection around elliptical axisymmetric bodies is presented. Measurements of local and average heat transfer coefficients were performed with horizontally orientated elliptical cylinders of various slenderness. The orientation of the major axis of the ellipse was changed between zero and vertical inclination. For comparison some measurements were also done with cylindrical tubes.

Based on the experimental data, empirical correlations were elaborated, describing the local and the global heat transfer around a cylindrical tube. For elliptical tubes an equation is given for the average heat transfer coefficient, in which a geometrical coefficient takes in account the slenderness of the ellipse.

**Zusammenfassung.** Es wird über interferometrische Messungen des Wärmeübergangs bei freier Konvektion um achsensymmetrische elliptische Körper berichtet. In den Messungen wurde sowohl der örtliche als auch der mittlere Wärmeübergangskoeffizient für verschiedene Schlankheitsgrade des elliptischen Querschnittes bei horizontaler Rohrachse erfaßt. Variiert wurde auch die Orientierung der Hauptachse der Ellipse zwischen horizontaler und vertikaler Ausrichtung. Zum Vergleich wurden auch Messungen an zylindrischen Rohren durchgeführt.

Aufbauend auf den experimentellen Ergebnissen wurden empirische Gleichungen entwickelt, die den örtlichen und den mittleren Wärmeübergangskoeffizienten an horizontalen, runden Zylindern bei freier Konvektion vorhersagen lassen. Für elliptische Zylinder wird eine einfache Gleichung mitgeteilt, die den mittleren Wärmeübergangskoeffizienten abhängig von einem Formkoeffizienten angibt.

## Formelzeichen

$a$	Temperaturleitfähigkeit
$a$	große Achse der Ellipse
$b$	kleine Achse der Ellipse
$c_p$	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
$D$	gleichwertiger Durchmesser $D = \frac{4F}{U}$
$F$	Ellipsenfläche
$g$	Erdbeschleunigung
$T$	thermodynamische Temperatur
$T_m$	mittlere Temperatur $T_m = \frac{T_w + T_u}{2}$
$S$	Bogenlänge der Ellipse
$r$	Radius
$L$	charakteristische Länge
$U$	Ellipsenumfang

$\alpha_\phi$	örtlicher Wärmeübergangskoeffizient
$\alpha$	mittlerer Wärmeübergangskoeffizient
$\beta$	volumetrischer (thermischer) Ausdehnungskoeffizient
$\nu$	kinematische Zähigkeit
$\rho$	Dichte
$\lambda$	Wärmeleitfähigkeit
$\Phi$	der vom unteren Stagnationspunkt gerechnete Rohrumfangwinkel
$\psi$	Winkel zwischen der großen Achse der Ellipse und der horizontalen Richtung
$\varepsilon$	Formkoeffizient der Ellipse, d. h. Verhältnis von senkrechter Achse zu horizontaler Achse der Ellipse

## Indizes

$w$	Wand
$u$	Umgebung

## Kennzahlen

$$Nu_\phi = \frac{\alpha_\phi L}{\lambda} \text{ örtliche Nußeltzahl}$$

$$Nu = \frac{\alpha L}{\lambda} \text{ mittlere Nußeltzahl}$$

$$Ra = Gr \cdot Pr = g \beta L^3 (T_w - T_u) / \nu \cdot a \text{ Rayleighzahl}$$

$$Gr = \beta g L^3 (T_w - T_u) / \nu^2 \text{ Grashofzahl}$$

$$Pr = \nu / a \text{ Prandtlzahl}$$

## 1 Einleitung

Rohre elliptischen Querschnitts werden verschiedentlich in der Klimatechnik, aber auch in der Energietechnik für Wärmetauscher verwendet. Kühlaggregate werden dabei auch mit freier Konvektion betrieben. Für die Auslegung dieser Apparate interessieren die Einflüsse von Schlankheitsgrad und Orientierung des elliptischen Querschnitts der Rohre auf den örtlichen und globalen Wärmeübergang.

In der Literatur ist eine große Zahl von experimentellen und theoretischen Arbeiten über die freie Konvektion um kreisförmige Zylinder zu finden. McAdams [1] gibt eine zusammenfassende Übersicht zahlreicher Messungen. Grundlegende Untersuchungen stammen von Eckert [2] und Jones [3], die mit Luft als Konvektionsme-

dium das Temperaturfeld um Kreisrohre untersuchten. Theoretische Betrachtungen gehen meist aus von Grenzschichtansätzen für das Geschwindigkeits- und das Temperaturfeld und versuchen daraus Ansätze für den Verlauf des örtlichen Wärmeübergangskoeffizienten über den Umfang des Zylinders zu konstruieren.

Hermann [4] nahm dabei an, daß die Temperaturgrenzschicht sehr dünn im Vergleich zum Durchmesser des Zylinders ist und erarbeitete für zweiatomige Gase und sehr kleine Temperaturdifferenzen zwischen Zylinderoberfläche und anströmendem Gas eine analytische Lösung der Differentialgleichungen. Ein etwas abgeändertes Analysenverfahren verwendete Mark [5], der seine Ansätze auch auf Kugeln ausdehnte. Chiang [6] verwendete eine Reihenentwicklung nach Blasius.

Mit großen Grenzschichtdicken im Vergleich zum Zylinderdurchmesser befaßten sich Nakai und Okazaki [7], welche den Wärmeübergang an dünnen Drähten allerdings beschränkt auf kleine Reynolds- und Grashofzahlen untersuchten. Numerische Lösungen der Grenzschichtgleichungen für freie Konvektion wurden von Chen [8], Merkin [9], Fujii [10] angegeben. Kuehn [11, 25] löste die Navier-Stokes- und Energiegleichung ebenfalls auf numerischem Wege. Die Methode der finiten Elemente setzte Holster [12] für das numerische Lösungsverfahren ein. Zu erwähnen sind noch die Analysen von Peterka [31], Elliot [32] und Wilks [33]. Nicht Newtonsche Flüssigkeiten unter freier Konvektion um kreisförmige Zylinder waren das Untersuchungsziel von Levy [13] und Gentry [14].

Mindestens ebenso zahlreich wie die theoretischen Bemühungen zur Klärung der fluidodynamischen Vorgänge und der örtlichen Wärmeübergangsverteilung am Umfang waagrechter Zylinder sind die experimentellen Arbeiten in der Literatur. Churchill und Chu [15] sichteten eine Vielzahl experimenteller Ergebnisse und entwickelten daraus eine Gleichung für die freie Konvektion um den horizontalen Zylinder, speziell für große Rayleigh-Zahlen. In jüngerer Zeit befaßte sich Farouk [16] mit der inhomogenen Temperaturgrenzschicht sowie mit dem Verlauf der Wandtemperatur um Zylinder in freier Konvektion und gab hierfür analytische Beziehungen an.

Elliptische Zylinder wurden bisher nur wenig untersucht. Zu nennen ist die Arbeit von Lin [17] sowie die theoretische Analyse von Raithby [18], der sich aber im wesentlichen auf schlanke Ellipsen beschränkte und damit von der längsangeströmten Platte ausgehen konnte. Er benützte die Platte als eine und den kreisförmigen Zylinder als andere Grenzbedingung und definierte daraus eine Exzentrizität für die Ellipse, wobei bei der Platte diese Exzentrizität gegen unendlich geht. Merkin [9] gibt numerische Lösungen der Erhaltungssätze für den „spitzen“ und den „stumpfen“ elliptischen Zylinder an. Lee [19] schloß von Untersuchungen an horizontalen elliptischen Ringen auf das Verhalten der freien Konvektion an elliptischen Zylindern. Extrapolationen von zylindrischen achsensymmetrischen und rotationssymmetrischen Kör-

pern auf Rohre elliptischen Querschnittes führten unter anderem Krause [21], Cremers [22] und Chiang [20] durch.

Vergleicht man die Ergebnisse analytischer Lösungen, so stellt man selbst für den einfachen Fall achsensymmetrischen Querschnittes stark unterschiedliche Ergebnisse fest. Die Unterschiede rühren hauptsächlich daher, daß die Autoren verschiedenen Ansätze für den Einfluß der Oberflächenkrümmung und den des Nachlaufes nach der Ablösung der Grenzschicht von der Heizfläche machten. All diese Arbeiten zielen nur auf die Vorhersage des globalen Wärmeübergangsverhaltens. Örtliche Wärmeübergangskoeffizienten, insbesondere auch für elliptische Rohre, wurden unter freier Konvektion kaum gemessen.

Ziel dieser Arbeit ist es deshalb, Meßergebnisse über den Verlauf des Wärmeübergangskoeffizienten über den Umfang elliptischer Rohre, abhängig von dem Verhältnis der Ellipsenachsen und von der Orientierung der Hauptachse zu vermitteln. Die Messungen wurden mit Hilfe der holographischen Interferometrie durchgeführt, die gleichzeitig auch einen anschaulichen Eindruck über die thermische Grenzschicht vermittelt.

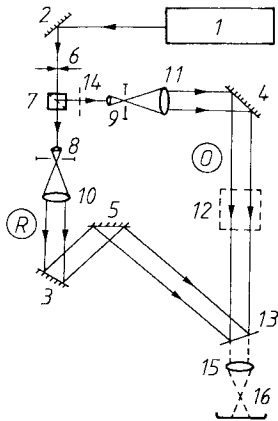
## 2 Versuchsaufbau

Optische Meßverfahren haben den Vorteil, daß sie berührungsfrei arbeiten und damit den physikalischen Vorgang nicht verfälschen. Für Messungen des Wärmeübergangs haben sich vor allem interferometrische Verfahren bewährt, da sie ein hohes Auflösungsvermögen für die thermische Grenzschicht und damit für die Bestimmung des Temperaturverlaufes in unmittelbarer Nähe der Heizfläche besitzen. Innerhalb der interferometrischen Verfahren hat sich in jüngster Zeit vor allem die holographische Interferometrie als leistungsfähige und zugleich bequeme Meßmethode durchgesetzt.

Den für die hier mitgeteilten Untersuchungen verwendeten holographischen Aufbau zeigt Bild 1. Er besteht im wesentlichen aus einem Helium-Neon-Laser (1), einem Strahlteiler (7), der das aus dem Laser kommende Licht in den das Versuchsobjekt (12) durchlaufenden Objektstrahl und in den Vergleichsstrahl splittet, sowie der fotografischen Platte (13), auf der das Hologramm gespeichert wird. Dieses Hologramm wird schließlich mit einer herkömmlichen Kamera (16) abfotografiert.

Das Versuchsobjekt – zylindrische und elliptische Rohre einer Länge von 350 mm – liegt, wie erwähnt, horizontal im Objektstrahl des Interferometers. Bei kreisförmigem Querschnitt hatte der Versuchszylinder einen Durchmesser von 30 mm. Bei elliptischem Querschnitt wurden drei verschiedene Schlankheitsgrade der Ellipsen untersucht. Sie lassen sich am einfachsten über die Maße der beiden Achsen – große Achse  $a$  und kleine Achse  $b$  – ausdrücken. Ellipsen der Achsenverhältnisse

$a/b = 36/24, 36/14$  und  $44/16$



**Bild 1.** Aufbau des holographischen Interferometers. 1 He-Ne Laser, 2, 3, 4 und 5 Umlenkspiegel, 6 Verschuß, 7 Strahlteiler, 8 und 9 Strahlauflweitungs optik, 10 und 11 achromatische Linsen, 12 Versuchsobjekt, 13 holographische Platte, 14 Filter, 15 Abbildungsobjektiv, 16 Kamera, R Referenzstrahl, O Objektstrahl

standen zur Verfügung. Die obengenannten Zahlen für  $a$  und  $b$  geben die Längen der Achsen in mm an.

Es ist leicht einsichtig, daß der Wärmeübergang bei elliptischen Zylindern von der Orientierung der Achsen gegenüber der Auftriebsrichtung abhängt. Eine Ellipse mit senkrechter Hauptachse wird ein anderes Wärmeübergangsverhalten aufweisen als eine mit horizontaler. In der Literatur wird häufig nicht von senkrechter und horizontaler Orientierung der Hauptachse gesprochen, sondern es wird zwischen einer „spitzen“ Ellipse (senkrechte Orientierung der Hauptachse) und einer „stumpfen“ Ellipse unterschieden. Führt man den Winkel  $\psi$  zwischen der Hauptachse der Ellipse und der Horizontalen ein, so beträgt dieser Winkel für die spitze Ellipse  $90^\circ$ .

Das Verhältnis der vertikalen zur horizontalen Achse sei schließlich als Formkoeffizient  $\varepsilon$  bezeichnet und es gilt dann für spitze elliptische Zylinder

$$\varepsilon > 1$$

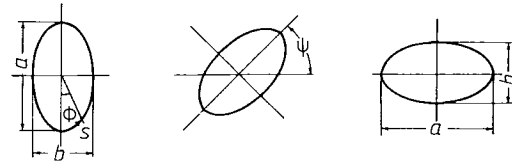
und für stumpfe

$$\varepsilon < 1.$$

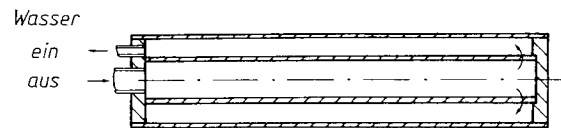
Für den kreisförmigen Zylinder wird  $\varepsilon = 1$ .

Neben diesen beiden Extremlagen der Ellipse wurden aber auch die Wärmeübergangsverhältnisse bei Orientierungen zwischen  $\psi = 0$  und  $\psi = 1$  untersucht.

Die Versuchsobjekte waren innen von warmem, thermostatisierten Wasser durchflossen, dessen Mengenstrom so eingestellt wurde, daß der Temperaturabfall zwischen Ein- und Austritt zum Versuchszyylinder kleiner als  $0,1\text{ K}$  und damit vernachlässigbar klein war, so daß von der Annahme konstanter Heizflächentemperatur ausgegangen werden konnte. Die Versuchsrohre waren einseitig gelagert, so daß – wie in Bild 3 skizziert – sowohl die Zu- als auch die Abfuhr der Heizflüssigkeit an ein und derselben



**Bild 2 a und b.** Orientierung der elliptischen Zylinder. a „spitzer“ elliptischer Zylinder, b „stumpfer“ elliptischer Zylinder



**Bild 3.** Beheizung des Versuchszyinders

Stirnfläche erfolgte. Dies hatte eine konzentrische Strömungsführung zur Folge, wodurch sich an der wärmeabgebenden Wand hohe Wassergeschwindigkeiten mit sehr guten Wärmeübergangsbedingungen erzielen ließen. Dies wiederum hatte den Vorteil, daß ein sehr geringer Temperaturabfall zwischen dem Heizfluid, d. h. dem Wasser und der Zylinderwand auftrat. Dadurch ließen sich Meßunsicherheiten verringern. Die Energiebilanz über die Abkühlung des Wassers im Versuchsobjekt dient ohnehin nur der Kontrolle der Meßergebnisse, da sowohl die lokalen als auch über deren Integration die globalen Wärmeübergangskoeffizienten mit der holographischen Interferometrie ermittelt werden, die nicht die Kenntnis des Wärmestromes voraussetzt, wie dies bei herkömmlichen Messungen notwendig ist, sondern unmittelbar den Temperaturgradienten an der Wand aus dem Verlauf der wandnahen Isothermen als Meßgröße ermittelt.

### 3 Versuchsergebnisse

#### 3.1 Kreiszyylinder

Die freie Konvektion bei laminarer Grenzschichtströmung am waagrechten Kreiszyylinder behandelte, wie erwähnt, schon sehr früh Hermann [4]. Er fand die theoretische Lösung der Grenzschichtgleichung

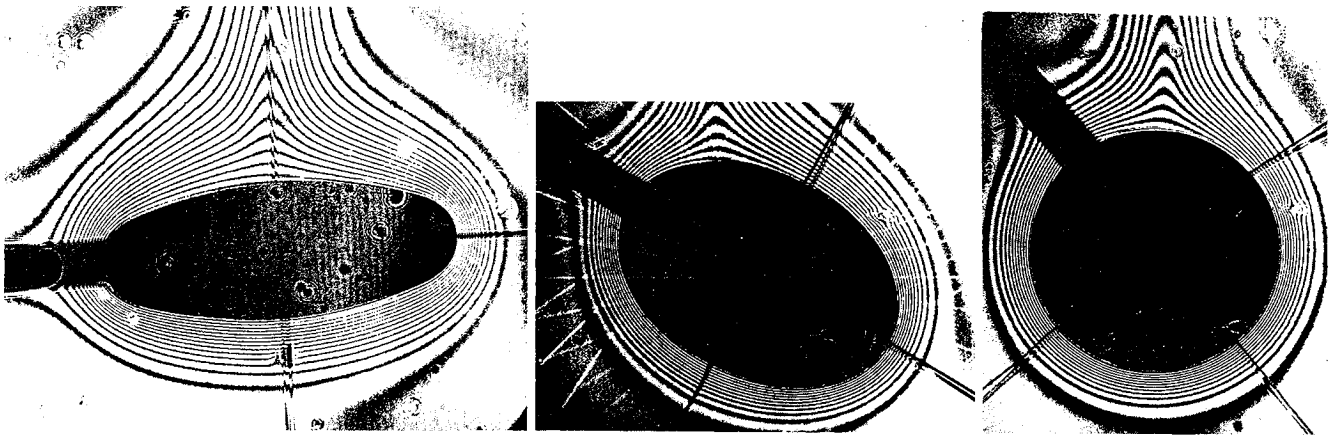
$$Nu_D = \frac{\alpha D}{\lambda} = 0,372 Gr_D^{1/4}; \quad (1)$$

wobei die Lösung zunächst auf Luft beschränkt ist. Für andere Stoffe wurde diese Beziehung in Anlehnung an die Ansätze für die senkrechte Platte mit der Prandtl-Zahl erweitert und man kann dann schreiben

$$Nu_D = C Gr^{1/4} Pr^{1/3}; \quad (2)$$

Für große Grashof- und Prandtl-Zahlen ( $Gr Pr > 10^5$ ) geht Gl. (2) über in

$$Nu_D = C (Gr Pr)^{1/4}. \quad (3)$$

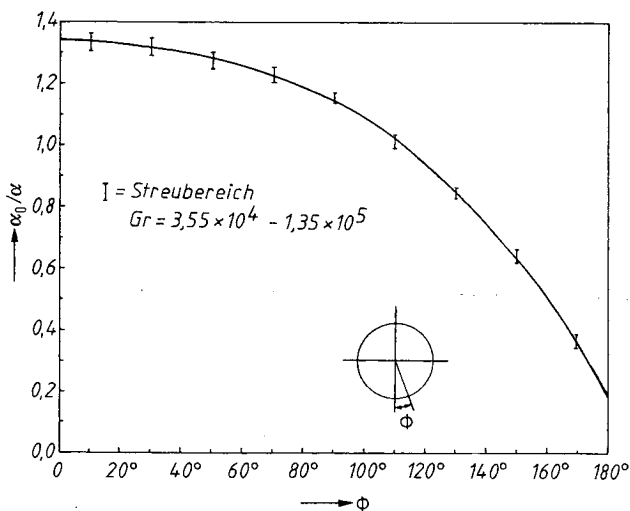


**Bild 4.** Interferogramme am kreisförmigen und an elliptischen Zylindern

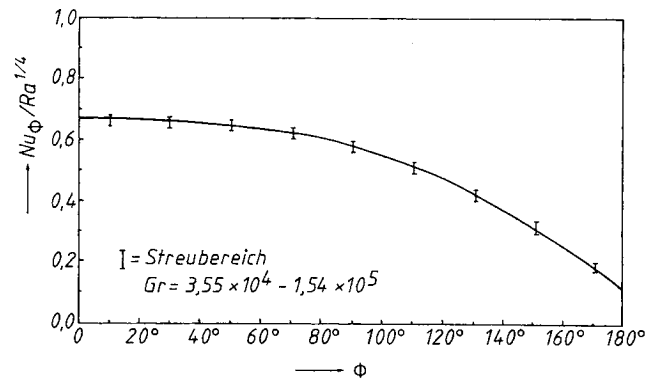
Das Produkt aus der Grashof- und der Prandtl-Zahl wird bekanntlich als Rayleigh-Zahl bezeichnet.

$$Gr Pr = Ra.$$

Dieses Gesetz der  $\frac{1}{4}$ -Potenz für die Rayleigh-Zahl kann man aber auch schon bei niedrigeren Werten als  $10^5$  anwenden. Deshalb lag es nahe, die Versuchsergebnisse in Form des Quotienten  $Nu/Ra^{0,25}$  aufzutragen, wie dies in Bild 5 über den Umfang des Zylinders für verschiedene Grashof-Zahlen geschehen ist. Man erkennt, daß die Meßwerte in guter Näherung auf einer Linie liegen, was das  $\frac{1}{4}$ -Potenzgesetz bestätigt. Wegen des Anwachsens der Grenzschicht über den Umfang, wie aus dem unteren Interferogramm von Bild 4 ersichtlich, nimmt der Wärmeübergang, ausgehend vom unteren Staupunkt, stetig zunächst langsam und nach Überschreiten des  $90^\circ$ -Wertes rascher ab.



**Bild 5.** Relativer Wärmeübergangskoeffizient über den Umfang des Kreiszyllinders



**Bild 6.** Verlauf der auf die Rayleigh-Zahl bezogenen Nusselt-Zahl über den Umfang des Kreiszyllinders

Wenn die Grenzschicht laminar bleibt, was man aus Bild 4 sieht und das  $\frac{1}{4}$ -Potenzgesetz für den gesamten Verlauf des örtlichen Wärmeübergangskoeffizienten gilt, so muß auch das Verhältnis des örtlichen zum mittleren Wärmeübergangskoeffizienten über den gesamten Umfang für verschiedene Grashof-Zahlen auf einem Kurvenzug liegen. Dies bestätigt Bild 6.

Die Meßwerte in Bild 4 lassen sich mit der einfachen Funktion

$$Nu_\phi = (1 - 0,333 e^{0,31\phi} + 0,11 \sin \phi) Ra^{1/4} \quad (4)$$

beschreiben, worin

$$Nu_\phi = \frac{\alpha_\phi D}{\lambda};$$

$$Ra = Gr Pr = \frac{g \beta D^3 (T_w - T_u)}{\nu \cdot a}$$

$$Pr = \frac{\nu}{a};$$

$$Gr = \frac{g \beta D^3 (T_w - T_u)}{\nu^2}$$

ist. Der Umfangswinkel  $\Phi$  ist im Exponenten der Gl. 4 im Bogenmaß gerechnet vom unteren Staupunkt einzusetzen. Die Stoffwerte sind auf die mittlere Temperatur  $T_m$  der Grenzschicht

$$T_m = (T_w + T_u)/2 \tag{5}$$

zu beziehen.

Das  $\frac{1}{4}$ -Potenzgesetz kommt noch anschaulicher zum Ausdruck, wenn man den Logarithmus der Nußelt-Zahl über dem der Rayleigh-Zahl wie in Bild 7 aufträgt. Die dort gezeichnete Gerade läßt sich mit der bekannten Beziehung

$$Nu = 0,5 Ra^{1/4} \tag{6}$$

mit sehr guter Genauigkeit approximieren.

Gl. (4) geht in Gl. (6) über, d.h. der dort gemachte Ansatz für die Abhängigkeit vom Umfangswinkel  $\Phi$  nimmt den Wert 0,5 an, wenn man über  $\Phi$  integriert.

$$Nu = \int_0^\pi Nu_\Phi d\Phi/\pi. \tag{7}$$

Da die Ergebnisse in Bild 7 mit der Energiebilanz über das wärmeabgebende Wasser gewonnen wurden, die Meßwerte der örtlichen Wärmeübergangskoeffizienten aber aus den interferometrischen Aufnahmen stammen, ist damit gleichzeitig die gute Übereinstimmung zwischen beiden Meßverfahren erwiesen.

### 3.2 Elliptische Zylinder

Da in der Literatur sowohl für die senkrechte Platte als auch für den Kreiszyylinder der Wärmeübergang mit dem Ansatz

$$Nu = CGr^{1/4} Pr^{1/3}; \text{ bzw } Nu = CRa^{1/4} \tag{8}$$

beschrieben wird, liegt es nahe, das Potenzprodukt auch für den elliptischen Zylinder zu verwenden und die Nußelt-Zahl als Funktion der Rayleigh-Zahl zu beschreiben. Auch hier müssen deshalb, weitgehend unabhängig von der Grashof-Zahl, die Meßwerte auf einem Kurvenzug liegen, wenn man als Ordinate den Quotienten aus  $Nu/Ra^{0,25}$  wählt. In dieser verallgemeinerten Form ist in

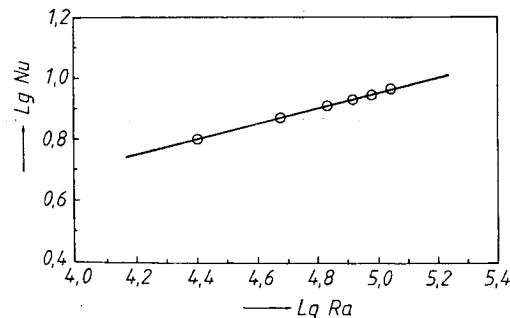


Bild 7. Zusammenhang zwischen Nusselt-Zahl und Rayleigh-Zahl für den Kreiszyylinder

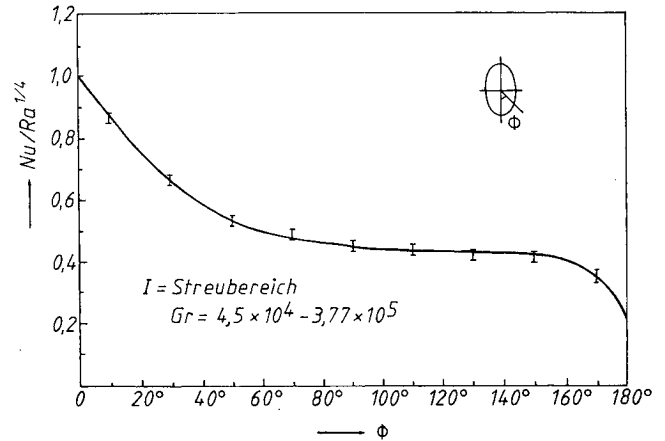


Bild 8. Verlauf der auf die Rayleigh-Zahl bezogenen Nusselt-Zahl über den Umfang „spitzer“ elliptischer Zylinder

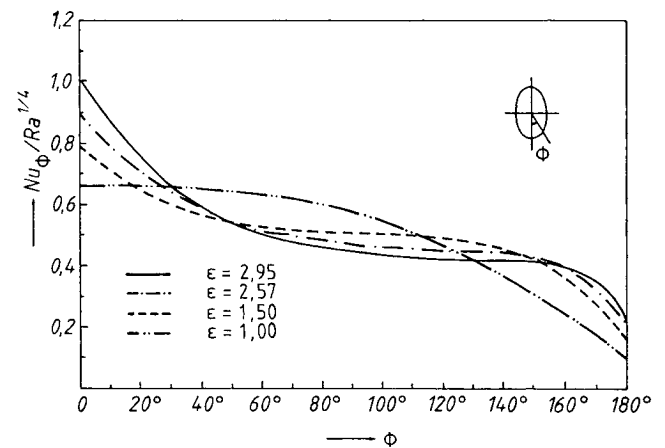


Bild 9. Einfluß des Formkoeffizienten  $\epsilon$  auf den örtlichen Wärmeübergang beim „spitzen“ Zylinder

Bild 8 der Wärmeübergang an einem sogenannten „spitzen“ elliptischen Zylinder des Achsenverhältnisses  $\epsilon = 2,75$  über den Umfang aufgetragen. Der Umfangswinkel  $\Phi$  wird auch hier vom unteren Staupunkt gezählt.

Den Einfluß des Formkoeffizienten bzw. Achsenverhältnisses, d.h. des Schlankheitsgrades des elliptischen Querschnittes auf den Verlauf des Wärmeübergangs über den Umfang zeigt Bild 9. Zum Vergleich sind dort auch die Verhältnisse für das zylindrische Rohr mit angegeben. Ohne Kenntnis der Meßwerte wäre man bei einer ersten überschlagsmäßigen Betrachtung vielleicht versucht anzunehmen, daß sich der Wärmeübergang in der Nähe des vorderen Staupunktes beim Kreiszyylinder und beim elliptischen Zylinder analog verhält. Die Bilder 8 und 9 zeigen aber gerade in diesem Bereich einen starken Abfall, dessen Gradient um so ausgeprägter wird, je größer der Formkoeffizient ist, d.h. je mehr sich der elliptische Zylinder in seiner Form der Platte annähert. Die Dicke der Grenzschicht wächst also beim elliptischen Zylinder wesentlich rascher an als beim zylindrischen.

Völlig – aber nicht unerwartet – anders sind die Verhältnisse beim stumpfen Zylinder. Wie man aus dem oberen Interferogramm von Bild 4 ersehen kann, ist die Grenzschicht am unteren Staupunkt dicker als im Äquatorbereich. Die Grenzschichtströmung läuft vom unteren Staupunkt ausgehend wesentlich langsamer an als beim kreisförmigen Zylinder und beim spitzen elliptischen Zylinder und erfährt erst beim Umfangswinkel  $\Phi = 90^\circ$  eine merkliche Beschleunigung. Dahinter verzögert sich die Strömung wieder und die Grenzschichtdicke wächst an. Den aus diesen einfachen Überlegungen und Beobachtungen zu erwartenden Verlauf des örtlichen Wärmeübergangs über den Umfang zeigt Bild 10. Auch hier ist zum Vergleich wieder der Kurvenzug für den Kreiszyylinder eingetragen. Die Werte in der Nähe des unteren Staupunktes nähern sich hier – besonders für kleine Formkoeffizienten, also für schlanke, waagrecht orientierte Ellipsen – denen der horizontalen Platte. Bei  $\Phi = 90^\circ$  kann man ein deutliches Maximum im Wärmeübergang beobachten und dahinter fallen die Kurven zunächst steiler ab als beim Kreiszyylinder, um am hinteren Staupunkt dann wieder etwas über dem Kreiszyylinder zu liegen. Dieser Verlauf auf der Leeseite läßt sich aus der Veränderung des Krümmungsradius der Ellipsenoberfläche erklären, die dazu führt, daß zunächst die Strömung stärker verzögert wird als beim Kreiszyylinder, wodurch sich die Grenzschicht verdickt, am hinteren Staupunkt dann dafür die Ablöseerscheinung stärker ausgeprägt ist.

Durch Integration über den Umfang oder aus der Abkühlung des beheizenden Wassers über eine Energiebilanz läßt sich auch der über den Umfang gemittelte Wert des Wärmeübergangskoeffizienten bzw. der Nußelt-Zahl gewinnen. Bild 11 gibt eine Eindruck von der Abhängigkeit des mittleren Wärmeübergangs vom Formkoeffizienten. Die dort aufgetragenen Werte sind eigentlich nichts anderes als der Faktor  $C_2$  in Gl. (3), der – wie wir aus Gl. (6) gelernt haben – für kreisförmige Zylinder zu 0,5 wird. Mit zunehmender Abflachung gegenüber der Form des Kreiszyinders – also für stumpfe elliptische Zylinder – nimmt

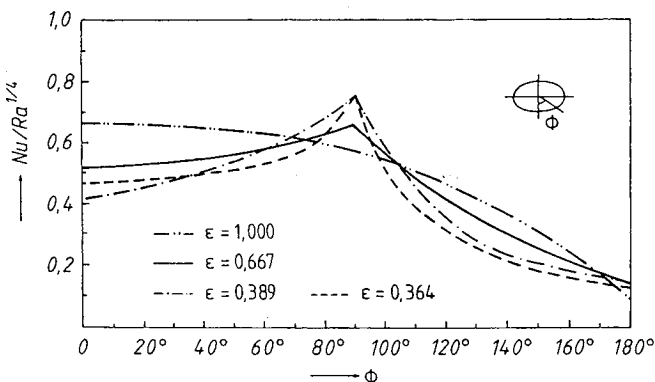


Bild 10. Verlauf der auf die Rayleigh-Zahl bezogenen Nusselt-Zahl über den Umfang des „stumpfen“ elliptischen Zylinders

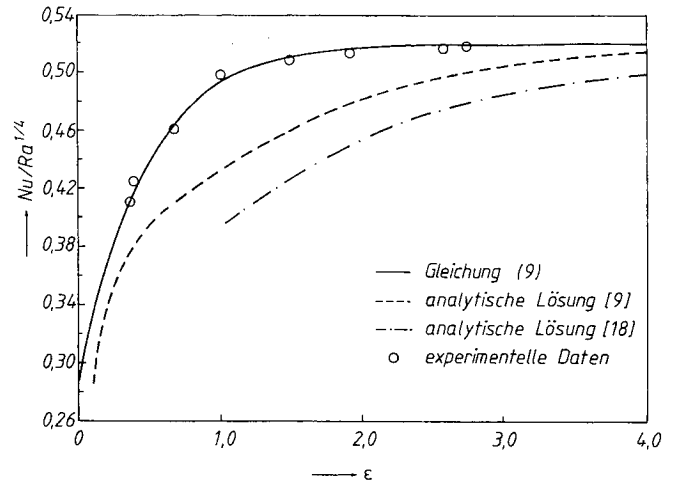


Bild 11. Vergleich von Meßwerten und theoretischen Ansätzen sowie der empirischen Gl. (9) für die mittlere Nusselt-Zahl an elliptischen Zylindern in Abhängigkeit vom Formkoeffizienten

dieser Faktor und damit der mittlere Wärmeübergang rasch ab, während der Übergang zu schlanken Profilen, also zum spitzen elliptischen Zylinder, nurmehr wenig Verbesserung bringt.

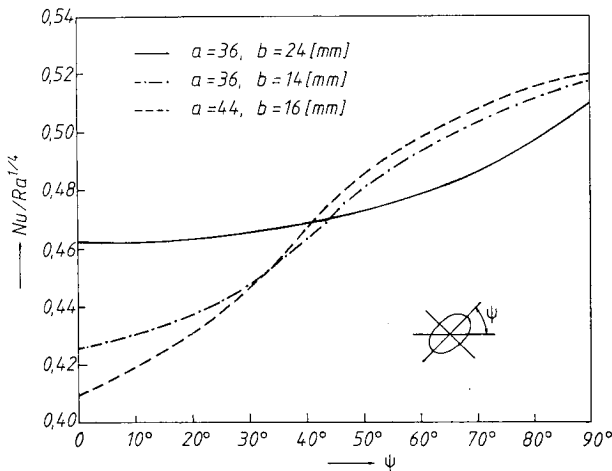
Man könnte jetzt versucht sein daraus abzuleiten, daß die Verwendung elliptischer Rohre anstelle kreiszylindrischer keine Vorteile bringt. Dabei ist jedoch zu beachten, daß im selben Wärmeaustauschervolumen mit elliptischen Rohren eine größere wärmeübertragende Fläche unterzubringen ist als mit zylindrischen, ohne daß sich der Strömungswiderstand, der ja den Auftrieb behindert, unzulässig vergrößert. Für Wirtschaftlichkeitsbetrachtungen dürfen aber die höheren Fertigungskosten der elliptischen Rohre nicht außer acht gelassen werden.

Die Abhängigkeit des Wärmeübergangs vom Formkoeffizienten  $\epsilon$  läßt sich in der einfachen Exponentialfunktion

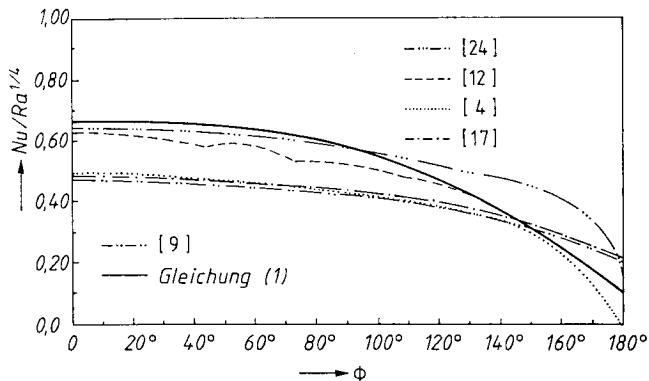
$$Nu = [0,52 - 0,21 e^{-(2,2\epsilon - 0,1)}] Ra^{1/4} \quad (9)$$

darstellen. Die Stoffgrößen sind auf die mittlere Temperatur  $T_m$  (Gl. (5)) zu beziehen. Zum Vergleich sind in Bild 11 auch Kurvenzüge eingetragen, die sich aus analytischen Ansätzen aus der Literatur ergeben, nämlich nach einem Ansatz vom Merklin [9] und nach einer Korrelation von Raithby [18].

Man kann schließlich noch fragen, wie sich der Wärmeübergang verändert, wenn die Ellipse schräg angeströmt wird oder bei vertikaler Strömung schräg eingebaut ist. Die Empfindlichkeit gegen Schräganströmung ist naturgemäß vom Achsenverhältnis abhängig. Sehr schlanke Ellipsen weisen – wie Bild 12 verdeutlicht – die größte Abhängigkeit vom Anströmwinkel  $\psi$  auf. Schräganströmung verschlechtert aber in jedem Fall den Wärmeübergang im Vergleich zur Strömung längs der großen Hauptachse, d. h. einer senkrecht gestellten spitzen Ellipse.



**Bild 12.** Änderung der über den Umfang gemittelten und auf die Rayleigh-Zahl bezogenen Nusselt-Zahl mit Drehung des elliptischen Zylinders von vertikaler in horizontale Orientierung



**Bild 13.** Literaturvergleich für die Vorhersage des örtlichen Wärmeübergangs über den Umfang kreisförmiger Zylinder

## 4 Vergleich der Ergebnisse mit der Literatur

### 4.1 Kreisförmiger Zylinder

In der Literatur findet man – wie bereits erwähnt – viele experimentelle und theoretische Arbeiten über den Wärmeübergang an kreiszylindrischen waagrecht Rohren bei freier Konvektion. Die Ergebnisse stimmen zwar für die mittlere Nußeltzahl gut überein, starke Abweichungen treten aber – wie man aus Bild 13 ersieht – bei der Vorhersage des Verlaufes des örtlichen Wärmeübergangs über den Umfang auf. Der Vergleich in Bild 13 gilt für eine Rayleigh-Zahl von  $10^4$ . Würde man unter Beibehaltung der Auftragungsweise in Bild 13 den Vergleich für unterschiedliche Rayleigh-Zahlen anstellen, so ergäben sich, wenn man z. B. die Arbeiten von Farouk [16] und von Kuehn [25] heranzieht, größere Abweichungen. Nach den eigenen experimentellen Ergebnissen läßt sich sowohl der mittlere als auch der örtliche Wärmeübergangskoeffizient mit dem Potenzgesetz  $Ra^{0,25}$  gut darstellen. Diese einfache

Darstellung stimmt auch mit dem frühen Ansatz von Hermann [4] überein, der aufgrund seiner Messungen in Luft die Gleichung

$$Nu = 0,372 Gr^{1/4} \quad (10)$$

vorschlug, die er dann auf andere Fluide, deren Prandtl-Zahl von 1 stark abweicht, auf

$$Nu = 0,41 (Gr Pr)^{1/4} \quad (11)$$

erweiterte.

Spätere sorgfältige Messungen zeigten, daß der Faktor 0,41 zu klein war und Fishenden [27] empfahl hierfür die Zahl 0,47. Bei Jakob [28] findet sich schließlich 0,52 und McAdams [1] schlug für den Bereich  $10^4 < Gr \cdot Pr < 10^9$  die Zahl 0,54 vor. Der in dieser Arbeit verwendete Wert von 0,5, der am besten mit den hier mitgeteilten Meßergebnissen übereinstimmt, stellt also auch im Vergleich zur Literatur einen guten Mittelwert dar.

Muxeew [30] empfiehlt bei starkem Temperaturgefälle in der wandnahen Grenzschicht eine Korrektur über die Prandtl-Zahl an der Wand und die des Gases der Umgebung.

$$Nu = 0,50 (Gr Pr)^{1/4} \cdot (Pr_u/Pr_w)^{1/4}; \quad (12)$$

Etwas aufwendigere Beziehungen geben Hsu [29]

$$Nu = 0,53 \left( \frac{Pr}{0,952 + Pr} \cdot Gr Pr \right)^{1/4}; \quad (13)$$

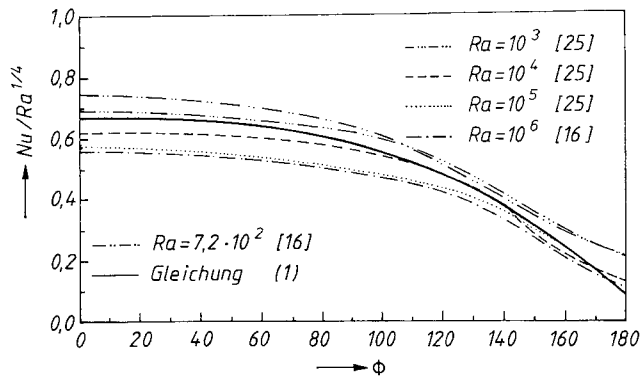
und Churchill [13]

$$Nu^{0,5} = 0,60 + 0,387 \left( \frac{Gr Pr}{[1 + (0,559/Pr)^{9/16}]^{16/9}} \right)^{1/6}; \quad (14)$$

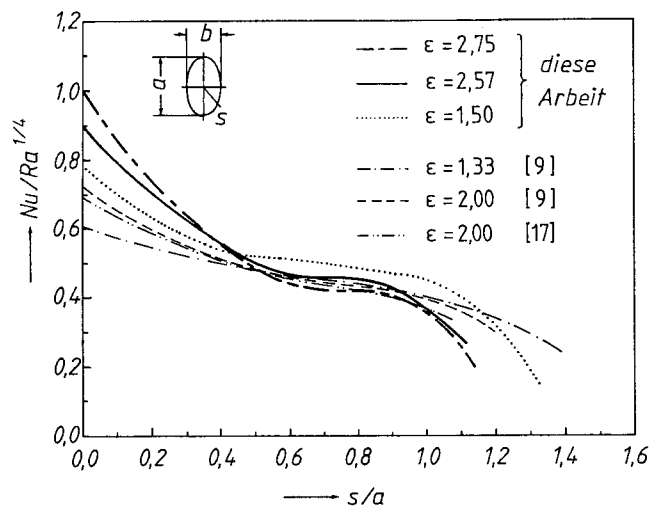
an. Hsu hat seine Gleichung an Messungen mit einer Vielzahl verschiedener Fluide, einschließlich Flüssigkeiten bis hin zu flüssigen Metallen, angepaßt.

### 4.2 Elliptische Zylinder

In der Literatur gibt es zwar analytische Ansätze [9, 18] für die Berechnung des Wärmeübergangs an elliptischen Zylindern bei freier Konvektion, aber kaum experimentelle Daten. Raithby [18] ging bei seinen Überlegungen davon aus, daß das Wärmeübergangsverhalten – auch das örtliche – des spitzen elliptischen Zylinders zwischen dem einer senkrechten Platte und dem eines kreisförmigen Zylinders liegen muß. Er wandelte entsprechend die bekannten Ansätze für Platte und Kreiszyylinder auf die elliptische Geometrie ab. Generelle Betrachtungen zur freien Konvektion über zweidimensionale achsensymmetrische Körper finden sich auch bei Lin [17] und dort kann man auch Angaben über den zu erwartenden Verlauf der Wärmeübergangszahl längs der Oberfläche einer spitzen Ellipse finden. Schließlich ist hier auch nochmals die Arbeit von Merklin [9] zu erwähnen.



**Bild 14.** Literaturvergleich zum Einfluß der Rayleigh-Zahl auf den örtlichen Wärmeübergang über den Umfang kreisförmiger Zylinder



**Bild 15.** Literaturvergleich für die örtliche Nusselt-Zahl über den Umfang „spitzer“ elliptischer Zylinder

In Bild 15 sind die Vorhersagen nach den Theorien von Merkin [9] und Lin [17] mit eigenen Messungen für verschiedene Formkoeffizienten, d.h. Schlankheitsgrade der Ellipse verglichen. Als Abszisse wurde dabei nicht der Umfangswinkel der Ellipse gewählt, sondern wegen der speziellen Schreibweise in den Ansätzen von Merkin [9] und Lin [17] das Verhältnis von durchlaufener Bogenlänge zur großen senkrechten Achse der Ellipse.

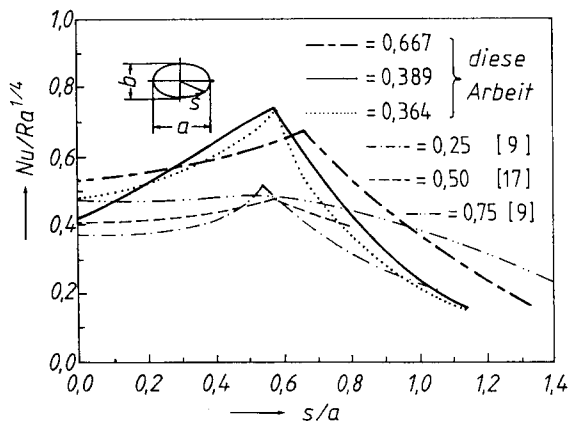
Ein ähnlicher Vergleich ist in Bild 16 für stumpfe Ellipsen angestellt. Auch hier ist in der Abszisse die durchlaufene Bogenlänge wieder auf die große Achse bezogen, die aber hier waagrecht liegt. Sowohl für spitze als auch für stumpfe Ellipsen geben Theorie und Experiment qualitativ ähnlichen Verlauf. Bei den stumpfen Ellipsen liegen aber die gemessenen Werte nahezu im gesamten Umfangsbereich merklich über den berechneten. Dies mag daran liegen, daß die Wirkung der Ablösefahne am hinteren Staupunkt in den Grenzschichtglei-

chungen nicht richtig berücksichtigt werden kann. Diese Ablösung beeinflusst über eine Sogwirkung auch die Strömung in der Äquatorialebene, weshalb die gemessenen Maxima des örtlichen Wärmeübergangskoeffizienten wesentlich höher sind als die theoretisch vorausgesagten

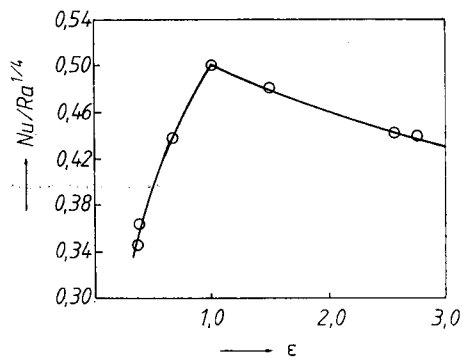
Bei den bisherigen Betrachtungen wurde als geometrischer Bezugswert, also als charakteristische Länge, immer die vertikale Achse gewählt. Der charakteristische Kurvenverlauf – bei gleicher Basis an Meßwerten – verändert sich grundlegend, wenn man statt dessen die kleine Achse oder einen äquivalenten Durchmesser, z. B. gebildet aus der Ellipsenfläche  $A$  und dem Ellipsenumfang  $U$

$$D = 4A/U$$

heranzieht. Bei Verwendung des äquivalenten Durchmessers erhält man einen Kurvenverlauf für die Abhängigkeit des Wärmeübergangskoeffizienten vom Formkoeffizienten der Ellipse, wie ihn Bild 17 zeigt und dem der Verlauf in Bild 11 gegenübergestellt werden muß. In Bild 11 hatten wir gesehen, daß die spitze Ellipse gegenüber dem Kreisquerschnitt kaum mehr Verbesserungen zeigt. Dabei



**Bild 16.** Literaturvergleich für die örtliche Nusselt-Zahl über den Umfang „stumpfer“ elliptischer Zylinder



**Bild 17.** Mittlerer Wärmeübergang am „spitzen“ und „stumpfen“ elliptischen Zylinder im Vergleich zum Kreiszyylinder ( $\epsilon = 1$ ) bei gleichem äquivalenten Durchmesser



war die große Achse Bezugsgröße. Man kann dies anschaulich so interpretieren, daß das seitliche Flachdrücken eines Kreiszyinders – der Durchmesser bleibt näherungsweise erhalten – keinen Gewinn im Wärmeübergangskoeffizienten bringt. Derselbe Vergleich zwischen Ellipse und Kreiszyinder stellt sich nun in Bild 17 ganz anders dar. Sowohl der stumpfe als auch der spitze Zylinder weisen gegenüber dem kreisrunden Zylinder niedrigere Nußelt-Zahlen auf.

## Literatur

1. McAdams, W. H.: Heat transmission. 3rd ed., New York: McGraw-Hill 1954
2. Eckert, E. R. G.; Soehngen, E.: Studies on heat transfer in laminar free convection with Zehnder-Mach interferometer. USAF Tech. Report 5747, Dec. 1948
3. Jones, C. O.; Masson, D. J.: An interferometric study of free convection heat transfer from enclosed isothermal surfaces. Trans. ASME (1953) 1275–1281
4. Hermann, R.: Heat transfer by free convection from horizontal cylinders in Diatomic gases. NACA TM 1366 (1954)
5. Mark, H. J.; Prins, J. A.: Thermal convection in laminar boundary layers. I, II, III. Appl. Sci. Res. 4A (1953–54) 11–24, 195–206, 207–224
6. Chiang, T.; Kay, J.: On laminar free convection from a horizontal cylinder. Proc. of 4th National Congress of Appl. Mech. (1962) 1213–1219
7. Nakai, S.; Okazaki, T.: Heat transfer from a horizontal circular wire at small Reynolds and Grashof numbers. Pts. I and II. Int. J. Heat Mass Transfer 18 (1975) 387–413
8. Mucoglu, A.; Chen, T. S.: Analysis of combined forced and free convection across a horizontal cylinder. Can. J. Chem. Eng. 5 (1977) 265–279
9. Merkin, J. H.: Free convection boundary layers on cylinders of elliptic cross-section. ASME J. Heat Transfer 99 (1977) 453–457
10. Fujii, T.; Fujii, M.: A numerical analysis of laminar free convection around an isothermal horizontal circular cylinder. J. Heat Transfer 2 (1979) 329–344
11. Kuehn, T. H.; Goldstein, R. J.: Correlating equations for natural convection heat transfer between horizontal circular cylinders. Int. J. Heat Mass Transfer 19 (1976) 1127–1134
12. Holster, J. L.; Hale, L. A.: Finite element simulation of transient free convection from a horizontal cylinder. ASME Paper 79-HT-49
13. Levy, S.: Integral methods in natural convection flow. J. Appl. Mech. (1955) 512–522
14. Gentry, C. C.; Wollersheim, D. E.: Local free convection to Non-Newtonian fluids from a horizontal, isothermal cylinder. J. Heat Transfer ASME 96 (1974) 3–8
15. Churchill, S. W.; Chu, H. H. S.: Correlating equations for laminar and turbulent free convection from a horizontal cylinder. Int. J. Heat Mass Transfer 18 (1975) 1049–1053
16. Farouk, B.: Natural convection from a horizontal cylinder – laminar regime. J. Heat Transfer ASME 103 (1981) 522–527
17. Lin, F. N.; Chao, B. T.: Laminar free convection over two-dimensional and axisymmetric bodies of arbitrary contour. J. of Heat Transfer ASME 96 (1974) 435–442
18. Raithby, G. D.; Hollands, K. G. T.: Laminar and turbulent free convection from elliptic cylinders, with a vertical plate and horizontal circular cylinder as special cases. J. of Heat Transfer ASME 98 (1976) 72–80
19. Lee, J. H.; Lee, T. S.: Natural convection in the annuli between horizontal confocal elliptic cylinders. Int. J. Heat Mass Transfer 24 (1981) 1739–1742
20. Chiang, T.; Ossin, A.; Tien, C. L.: Laminar free convection from a sphere. Transactions of the ASME, Series C 86 (1964) 537–542
21. Krause, A. A.; Schenk, J.: Thermal free convection from a solid sphere. Appl. Sci. Res. A15 (1965) 397–405
22. Cremers, C. J.; Finley, D.: Natural convection about isothermal spheres. 4th Int. Heat Transfer Conference, Paris-Versailles IV (1970) 1–11
23. Kim, C. B.; Pontikos, T. J.; Wollersheim, D. E.: Free convection from a horizontal cylinder with isothermal and constant heat flux surface conditions. ASME J. of Heat Transfer 97 (1975) 129–130
24. Akagi, S.: The effect of curvature on free convection around a horizontal cylinder. Trans. ASME 31 (1965) 1327–1335
25. Kuehn, T. H.; Goldstein, R. J.: Numerical solution to the Navier-Stokes equation for laminar natural convection about horizontal isothermal circular cylinders. Int. J. Heat Mass Transfer 23 (1980) 971–979
26. Didon, D. A.; Oh, Y. H.: A quantitative Grid-Schlieren method for temperature measurement in a free convection field. Technical Report No. 1, The Catholic University of America, Washington, D.C., 1966
27. Fishenden, M.; Saunders, O. A.: An introduction to heat transfer. London: Oxford University Press 1950
28. Jakob, M.: Heat transfer. New York: 1950
29. Hsu, S. T.: Engineering heat transfer. Princeton: Van Nostrand 1963
30. Muxeev, M. A.: „Kratni Kyre Teploperedayn“. Moskau: 1960
31. Peterka, J. A.; Richardson, P. O.: Natural convection from a horizontal cylinder at moderate Grashof numbers. Int. J. Heat Mass Transfer 12 (1969) 749–752
32. Ellioth, L.: Free convection on a two-dimensional or axisymmetric body. Q. J. Mech. Appl. Math. 23 (1970) 153–162
33. Wilks, G.: External natural convection about two-dimensional bodies with constant heat flux. Int. J. Heat Mass Transfer 15 (1972) 351–354
34. Raithby, G. D.; Hollands, K. G. T.: Laminar and turbulent free convection. Adv. Heat Transfer 11 (1975) 275–281
35. Chao, B. T.; Fagbenle, R. O.: On Mark's method of calculating boundary layer transfer. Int. J. Heat Mass Transfer 17 (1974) 223–240
36. Fand, R. M.; Ross, J.: The local heat-transfer coefficient around a heated horizontal cylinder in an intensive sound field. ASME J. Heat Transfer (1962) 245–250
37. Stelzer, F.: Wärmeübertragung und Strömung. München: Thieme 1971
38. Van Leyen, D.: Wärmeübertragung. München: Siemens 1971

Prof. Su Yi. Huang  
Dynamic Engineering Department  
Huazhong University of  
Science and Technology  
Wuhan  
Volksrepublik China

Prof. Dr.-Ing. F. Mayinger  
Lehrstuhl A für Thermodynamik  
Technische Universität München  
Arcisstraße 21  
8000 München 2

Eingegangen am 21. Februar 1983