

# Experimentelle und numerische Untersuchung laminarer, axisymmetrischer Freistrahlen mit und ohne Auftrieb

K. Küblbeck, J. Straub, S. Bloß\* und U. Grigull, München

Experimental and Numerical Study of Laminar, Axisymmetrical Jets with and without Buoyancy

**Abstract.** Axisymmetrical, laminar and incompressible jets with and without buoyancy in homogeneous surroundings are investigated experimentally and numerically. The experimental set up is described. Characteristics of jets without buoyancy are presented in a parameterless form. Buoyancy - induced jets are completely determined by three parameters, the Reynolds-Number, the Grashof-Number and the Prandtl-Number. The influence of the characteristic numbers to the numerical solution is discussed. On the other hand this result is controlled by analytical solutions. The experimental results are in good agreement with the predicted values. The experiments for stability of laminar jets are correlated with a parameter of momentum.

**Zusammenfassung.** Das Verhalten axisymmetrischer, laminarer und inkompressibler Freistrahlen mit und ohne Auftrieb in einer homogenen Umgebung wird experimentell und numerisch untersucht. Die dazu erstellte Versuchsanlage wird kurz beschrieben. Charakteristische Größen von Fluidstrahlen ohne Auftrieb lassen sich unter Beachtung der beschreibenden Kenngrößen parameterfrei darstellen. Auftriebsbehaftete Fluidstrahlen werden durch drei Parameter, die Reynoldszahl, die Grashofzahl und die Prandtlzahl vollständig beschrieben. Die Einflüsse der einzelnen Größen werden anhand der numerischen Lösung diskutiert, welche ihrerseits mit asymptotischen Verfahren kontrolliert wird. Die experimentellen Ergebnisse stimmen mit den berechneten Werten sehr gut überein. Die Versuche zur Stabilität laminarer Strahlen lassen sich gut mit einem Impulsstromparameter korrelieren.

Formelzeichen

a	Temperaturleitfähigkeit
$a_1 \dots a_4$	Polynomkoeffizienten
b	Breite
$c_p$	spez. Wärmekapazität bei konstantem Druck
D	Durchmesser
E	kinetische Energie
g	Erdbeschleunigung
l	Länge
L	laminare Lauflänge
$\dot{m}$	Massenstrom
p	Parameter
Q	Energiestrom
R	Radius
T	Temperatur
$\vec{u} = (u, v, w)$	Geschwindigkeitsvektor
$\vec{u}^* = (u^*, v^*, w^*)$	dimensionsloser Geschwindigkeitsvektor
U	Parameter
$\vec{x} = (x, y, \varphi)$	Längenvektor
$x_0$	Korrekturlänge
X	Parameter
$\beta$	thermischer Ausdehnungsbeiwert
$\delta$	Grenzschichtdicke
$\eta$	dynamische Viskosität
$\Delta T = T_0 - T_\infty$	Übertemperatur

$\Theta = (T - T_\infty) / \Delta T$	dimensionslose Temperatur
$\nu$	kinematische Viskosität
$\vec{\xi} = (\xi, \chi, \phi)$	dimensionsloser Längenvektor
$\rho$	Dichte
$\psi$	Stromfunktion
$\Omega$	Funktion
$\omega$	dimensionslose Stromfunktion

Indizes

A	außen
I	innen
m	Werte auf Symmetrieachse
Th	Thermoelement
-	Mittelwert
o	Düsenaustrittsgrößen
$\infty$	Umgebung
$\rightarrow$	Vektor
*	dimensionslose Größen

Kenngrößen

$Re = u_o \cdot R / \nu$	Reynoldszahl (Radius)
$Re_D = \vec{u} \cdot D / \nu$	Reynoldszahl (Durchmesser)
$Pr = \nu / a$	Prandtlzahl
$Pe = u_o \cdot R / a$	Pécletzahl
$Gr = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T \cdot R^3}{\nu^2}$	Grashofzahl

\* Z.Zt. Massachusetts, Inst. of Technology, Cambridge (Mass.) USA

## 1 Einleitung

Die Ausbreitung von Fluidstrahlen beim Eintritt in eine anders temperierte Umgebung ist ein Strömungsvorgang, der in Umwelt und Technik gleichermaßen von Bedeutung ist. So spielt er bei der Ausbreitung von Kaminfahnen in der Atmosphäre oder Kraftwerkabwärme in Seen und Flüssen ebenso eine Rolle wie in durchströmten verfahrenstechnischen Apparaturen.

Schon sehr früh versuchte man dieses Problem der Strahlenausbreitung analytisch zu behandeln. Entgegen der chronologischen Reihenfolge seien zuerst die Arbeiten von Landau [1] und Squire [2] genannt. Sie konnten durch Auswahl eines dem physikalischen Problem adäquaten Koordinatensystems eine analytische Lösung der vollen Navier-Stokes-Gleichungen erzielen. Dieses Ergebnis ist jedoch weitgehend von theoretischem Interesse, da nur ein aus einer Punktquelle austretender Strahl mit der Lösung verträglich ist, was Beran [3] fünf Jahre später exakt nachwies. Unter gleichen Voraussetzungen und Verwendung der Prandtl'schen Grenzschnittnäherungen erhält Schlichting [4] eine geschlossene Lösung für das Geschwindigkeitsfeld des axisymmetrischen Strahls. Das analoge Problem für den ebenen Strahl wurde von Bickley [5] gelöst. Neueren Arbeiten liegen letztere Lösungen meist zugrunde. Andrade und Tsien [6] bestätigen die Ergebnisse von Schlichting experimentell, geraten aber in Schwierigkeiten, weil sie eine Konstanz des Impulsstromes nur durch eine Ursprungsverschiebung erfüllen können.

Yih [7] und Loitsianski [8] haben die Arbeit von Schlichting weitergeführt. Durch Vernachlässigung des Auftriebsterms und der daraus resultierenden Entkopplung der Differentialgleichungen konnten sie das Temperaturfeld berechnen, das einer punktförmigen Energiequelle entspricht.

Erste numerische Untersuchungen stammen von Pai [9] und du Plessis [10]. Diese beschränken sich jedoch darauf, die Bewegungsgleichung zu integrieren und ihre Ergebnisse mit experimentellen Daten zu vergleichen.

In dieser Arbeit werden die bisher bekannten Ergebnisse wie folgt erweitert:

In einer Versuchsanlage wurden die Temperaturprofile laminarer, auftriebsbehafteter, axisymmetrischer Fluidstrahlen vermessen. Die numerische

Nachrechnung des gekoppelten Differentialgleichungssystems erfolgte mit einem von Patankar et al. [11] beschriebenen Verfahren, das für auftriebsbehaftete Strömungen erweitert wurde. Eine Kontrolle der Ergebnisse erfolgte durch Vergleich mit Schlichtings Ähnlichkeitshypothese. Der Einfluß des Auftriebs wurde untersucht und die Ergebnisse mit einer Strömungsrechnung nach Mollendorf und Gebhart [12] verglichen.

Die Arbeit soll ein Beitrag zur Klärung der Frage sein, inwieweit durch die Wirkung von Auftriebskräften Geschwindigkeits- und Temperaturfeld, Strahlform und Strahlverhalten beeinflusst werden, was unter meist wesentlich komplizierteren Bedingungen in der Natur beobachtet werden kann.

## 2 Die Versuchsanlage

Im folgenden wird die Versuchsanlage kurz beschrieben, deren Prinzipskizze in Bild 1 dargestellt ist.

Kernstück dieser Apparatur ist der Wasserbehälter mit den Abmessungen  $400 \times 400 \times 462 \text{ mm}^3$ . An der Bodenplatte des Behälters ist der doppelwandige Düsenvorbehälter befestigt. Darin eingeschraubt ist die auswechselbare Glasdüse, durch die das erwärmte Wasser in einem laminaren Strahl in eine homogene oder geschichtete Umgebung austritt. Das Geschwindigkeitsprofil in den Düsen entspricht einem voll ausgebildeten Parabelprofil, da deren Länge mit der empirischen Beziehung von Schiller [13] bestimmt wurde:

$$l/D = 0,015 \cdot Re .$$

Um eine möglichst konstante Austrittsgeschwindigkeit zu erhalten, wird das erwärmte Wasser von der Pumpe des Thermostaten zuerst in einen Hochbehälter gefördert, und strömt von dort durch eine Heizschlange im Thermostat in den Behälter. Ein Überlauf im Hochbehälter sorgt für einen konstanten Flüssigkeitsstand. Zur Regelung des Massenstroms dient ein stufenloses Ventil.

### Massenstrommessung

Die Messung des Massenstroms und damit die Bestimmung der mittleren Austrittsgeschwindigkeit er-

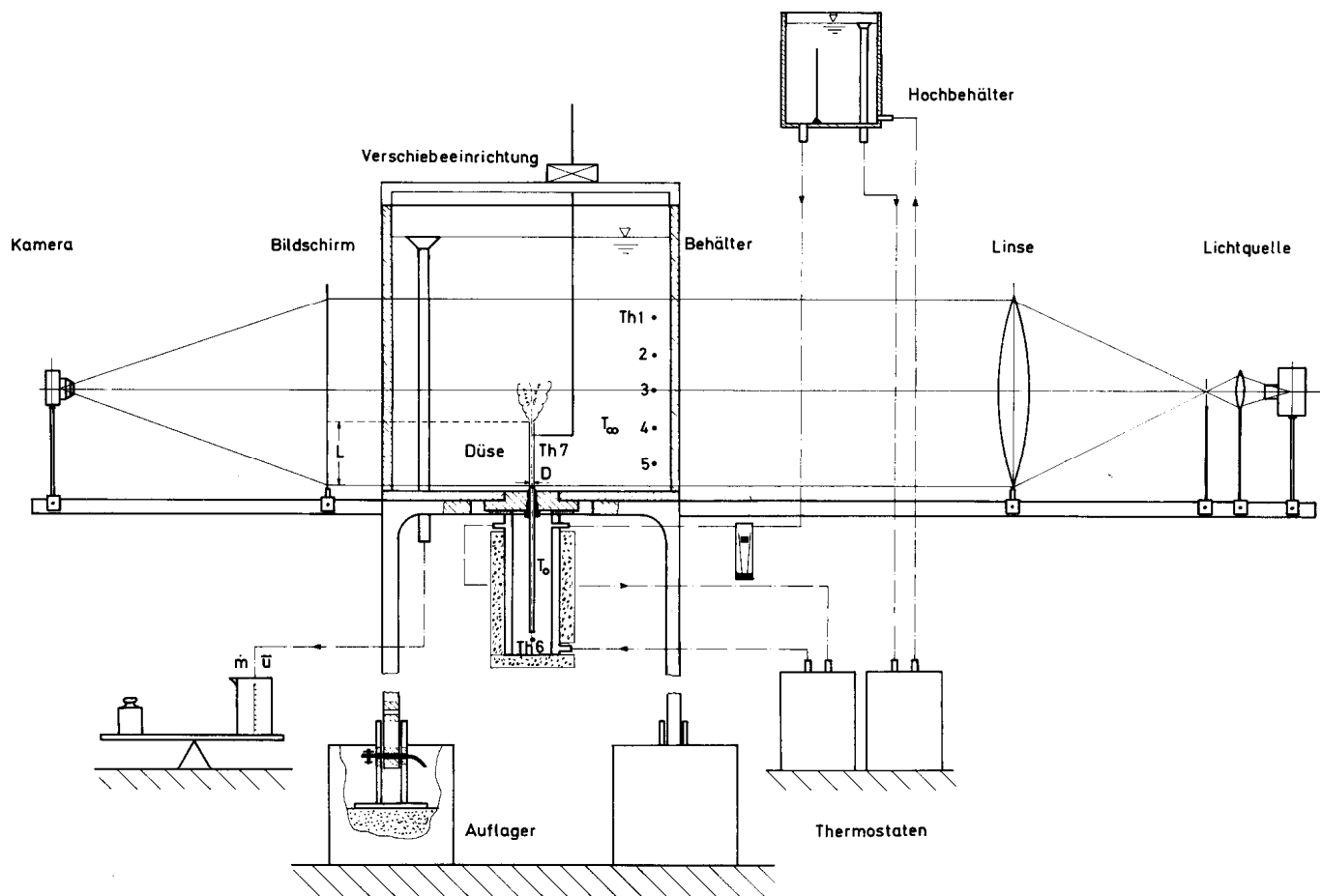


Bild 1. Schematische Darstellung der Versuchsanlage

folgte durch Wägung des Wassers, das im Zeitintervall  $\Delta t$  durch einen Überlauf aus dem Behälter abfließt. Diese einfache Meßmethode liefert sehr genaue Meßergebnisse, mit Fehlern kleiner 1%. Eine weitere Kontrolle des Massenstroms erfolgt durch einen installierten Durchflußmesser.

#### Temperaturmessung

Alle Temperaturen wurden mit Chromnickel-Konstantan-Thermoelementen von 0,1 mm Drahtdurchmesser (Thermospannung etwa 0,0562 mV/K) gemessen. Zur Überwachung der Umgebungstemperatur dienen die fünf Thermoelemente (Th 1-5) nahe der Behälterwand, die in verschiedenen Höhen angebracht sind. Eine Vermessung der Temperaturprofile ermöglichte ein Koordinatenschlitten. Dieser konnte in radialer Richtung kontinuierlich verschoben werden, über der Höhe der Wasserschicht war eine diskrete Verstell-

lung möglich, so daß hier die Temperaturprofile bei  $x = 5, 15, 40, 80, 110, 220$  mm über dem Behälterboden gemessen werden konnten. Ferner wurde die mittlere Eintrittstemperatur  $T_0$  im Düsenvorbehälter (Th 6) gemessen, deren Verteilung durch konstruktive Maßnahmen (Wasserführung und Schutzheizung) einem Rechteckprofil entsprach.

#### Die Sichtbarmachung

Zur optischen Sichtbarmachung des Freistrahls wurde ein Schattenverfahren nach E. Schmidt verwendet, das in Theorie und experimenteller Ausführung u. a. von Killermann [20] beschrieben wird. Damit konnte das Verhalten des warmen Strahls beobachtet werden, sowohl im Hinblick auf seine laminare Lauflänge als auch auf die Auswirkung des Auftriebs.

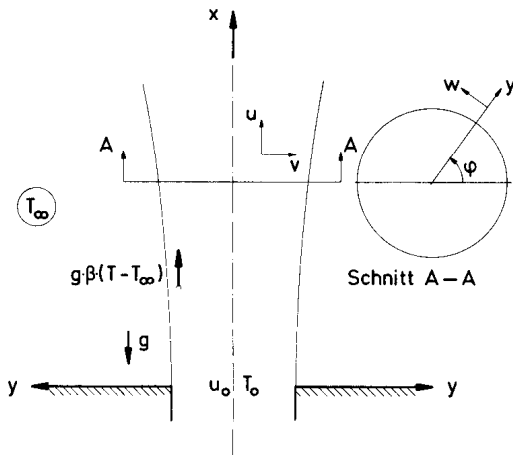


Bild 2. Koordinatensystem eines axisymmetrischen Strahls

### 3 Mathematische Formulierung

Zur Ableitung des beschreibenden Differentialgleichungssystems soll das in Bild 2 dargestellte Koordinatensystem zugrunde gelegt werden.

Das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld des gezeigten Freistrahls wird durch den Energie-, Impuls- und Massenerhaltungssatz beschrieben. Die folgenden, das mathematische System wesentlich vereinfachenden Annahmen werden getroffen:

1. Es wird Rotationssymmetrie vorausgesetzt.
2. Das Wasser wird als inkompressibel angesehen.
3. Die Strömung sei laminar und stationär.
4. In der Bewegungsgleichung wird die Boussinesq-Approximation verwendet, d.h. die Dichte wird außer im Auftriebsterm als konstant angesehen.
5. Die Strahlströmung ist eine Grenzschichtströmung und es ist daher zulässig, die Prandtl'schen Grenzschichtvereinfachungen zu verwenden.
6. Die Energiedissipation wird vernachlässigt.

Man erhält damit ein System von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen:

Kontinuitätsgleichung:

$$u \frac{\delta}{\delta x} (yu) + v \frac{\delta}{\delta y} (yv) = 0 \quad (1)$$

Bewegungsgleichung:

$$u \frac{\delta u}{\delta x} + v \frac{\delta u}{\delta y} = \nu \frac{1}{y} \frac{\delta}{\delta y} \left( y \frac{\delta u}{\delta y} \right) + g\beta(T - T_{\infty}) \quad (2)$$

Energiegleichung:

$$u \frac{\delta T}{\delta x} + v \frac{\delta T}{\delta y} = a \frac{1}{y} \frac{\delta}{\delta y} \left( y \frac{\delta T}{\delta y} \right) \quad (3)$$

Mit den dimensionslosen Größen

$$(\xi, \chi) = (x, y)/R, \quad \Theta = (T - T_{\infty}) / (T_0 - T_{\infty}),$$

$$\vec{u}^* = \vec{u} / u_0 \quad (4)$$

ergibt sich dann folgendes Gleichungssystem:

$$\frac{\delta}{\delta \xi} (\chi u^*) + \frac{\delta}{\delta \chi} (\chi v^*) = 0 \quad (5)$$

$$u^* \frac{\delta u^*}{\delta \xi} + v^* \frac{\delta u^*}{\delta \chi} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{1}{\chi} \frac{\delta}{\delta \chi} \left( \chi \frac{\delta u^*}{\delta \chi} \right) + \frac{\text{Gr}}{\text{Re}^2} \Theta \quad (6)$$

$$u^* \frac{\delta \Theta}{\delta \xi} + v^* \frac{\delta \Theta}{\delta \chi} = \frac{1}{\text{RePr}} \frac{1}{\chi} \frac{\delta}{\delta \chi} \left( \chi \frac{\delta \Theta}{\delta \chi} \right) \quad (7)$$

Als dimensionslose Kennzahlen ergaben sich dabei die Reynolds-, Prandtl-, Grashof- und Pécletzahl, welche bereits definiert wurden.

Im vorliegenden Fall gelten die Randbedingungen:

$$\chi = 0 : v^* = 0, \quad \frac{\delta u^*}{\delta \chi} = 0, \quad \frac{\delta \Theta}{\delta \chi} = 0 \quad (8)$$

$$\chi \rightarrow \infty : u^* \rightarrow 0, \quad \Theta \rightarrow 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\delta \Theta}{\delta \chi} \rightarrow 0$$

Eine allgemeine Lösung dieser Differentialgleichungen ist bis heute nicht bekannt. Allein Mollendorf und Gebhart [12] haben eine Störungsrechnung durchgeführt, um spezielle Effekte des Systems zu untersuchen. Numerische Lösungen sind nur für die entkoppelten Differentialgleichungen ohne Auftriebsterm angeben.

### 4 Das numerische Verfahren

Die Gültigkeit der Grenzschichtgleichungen (2) - (3) für das Strahlausbreitungsproblem wurde vorausgesetzt. Eine allgemeingültige Integrationsmethode dieses parabolischen Differentialgleichungssystems kann nicht angegeben werden. So werden häufig explizite Verfahren wie nach Bellmann und Cooke [14] angewandt, oder auch implizite wie sie Flugge-Lotz et al. [15] entwickelt haben. Explizite numerische Integrationsmethoden unterliegen starken Stabilitätsbedingun-

gen und sind deshalb für schwierigere Probleme unwirtschaftlich. Implizite hingegen müssen keine Bedingungen für Orts- und Zeitschritte erfüllen, erfordern allerdings größeren Programmieraufwand.

Auch das hier erstellte Programm enthält eine implizite Integration der beschreibenden Differentialgleichungen. Es stellt eine Erweiterung des bei Patankar et al. [11] angegebenen Verfahrens, durch die Einführung der Stromfunktion als Koordinate dar, wodurch in den Gleichungen jeweils ein konvektiver Term eliminiert werden kann.

$$u^*(\xi, \chi) \rightarrow u^*(\xi, \psi[\xi, \chi]) \quad (9)$$

Unter Verwendung der Definitionsgleichungen

$$u^* = \frac{1}{\chi} \frac{\delta \psi}{\delta \chi}, \quad v^* = -\frac{1}{\chi} \frac{\delta \psi}{\delta \xi} \quad (10)$$

ergibt sich für die Impuls- und Energiegleichung:

$$u^* \frac{\delta u^*}{\delta \xi} = \frac{1}{Re} u^* \frac{\delta}{\delta \psi} \left( \chi^2 u^* \frac{\delta u^*}{\delta \psi} \right) + \frac{Gr}{Re^2} \Theta \quad (11)$$

$$\frac{\delta \Theta}{\delta \xi} = \frac{1}{Pe} \frac{\delta}{\delta \psi} \left( \chi^2 \Theta \frac{\delta \Theta}{\delta \psi} \right) \quad (12)$$

Die Gleichungen (11) und (12) dienen als Ausgangspunkt für die weitere Berechnung. Die vorher in (8) zusammengestellten Randbedingungen müssen dem numerischen Verfahren angepaßt werden. Analog einem Integralverfahren (z.B. v. Kármán-Pohlhausen) wird die Geschwindigkeit  $u^*$  an der Stelle  $\delta(\xi)$  Null gesetzt:

$$\chi = 0: v^* = 0, \quad \frac{\delta u^*}{\delta \chi} = 0, \quad \frac{\delta \Theta}{\delta \chi} = 0 \quad (13)$$

$$\chi = \delta(\xi): u^* = 0, \quad \Theta = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{\delta \Theta}{\delta \chi} = 0 .$$

Zur Rücktransformation der Querkoordinate wird die Integralbedingung

$$\chi^2 = \int_{\psi=0} \frac{1}{u^*} \delta \psi \quad (14)$$

benötigt. Die Temperaturabhängigkeit der dynamischen Viskosität und der Prandtlzahl  $Pr$  von Wasser werden durch die Polynome

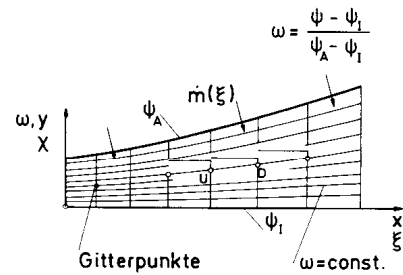


Bild 3. Modell für die numerische Berechnung einer Grenzschichtströmung

$$\Omega = \Omega(T) = a_1 + a_2 T + a_3 T^2 + a_4 T^3$$

Temperatur T in °C

$\Omega$	$\eta[\text{kg}/(\text{ms})]$	$Pr[-]$
$a_1$	$1,7336 \cdot 10^{-3}$	$1,2839 \cdot 10^1$
$a_2$	$-4,6822 \cdot 10^{-5}$	$-3,8125 \cdot 10^{-1}$
$a_3$	$5,9682 \cdot 10^{-7}$	$5,0896 \cdot 10^{-3}$
$a_4$	$-2,8193 \cdot 10^{-9}$	$-2,4592 \cdot 10^{-5}$

berücksichtigt.

Die Differenzengleichungen werden durch Integration über ein Kontrollvolumen erhalten, wodurch die Kontinuitätsgleichung identisch erfüllt wird. Zusätzlich liegen dieser Ableitung noch folgende Annahmen zugrunde:

- Die abhängigen Variablen verlaufen in  $\omega$ -Richtung linear.
- Der Wert der Variablen in  $\xi$ -Richtung ändert sich sprunghaft.
- Aus Stabilitätsgründen werden für Ableitungen ersten Grades vordere Differenzenquotienten gebildet.

Eine Prinzipskizze dazu zeigt Bild 3.

Nach einer Anfangsverteilung bei  $x = 0$  werden die Gitterpunkte nur einmal durchlaufen. Es findet also keine Iteration statt, d.h. nur zurückliegende Gitterpunkte beeinflussen das Geschehen in der nächsten Gitterreihe. Der Auftriebsterm in Gleichung (11) wird ähnlich einem negativen Druckgradienten in axialer Richtung behandelt. Eine Taylorsche Reihenentwicklung liefert den gewünschten Formalismus für eine numerische Behandlung.

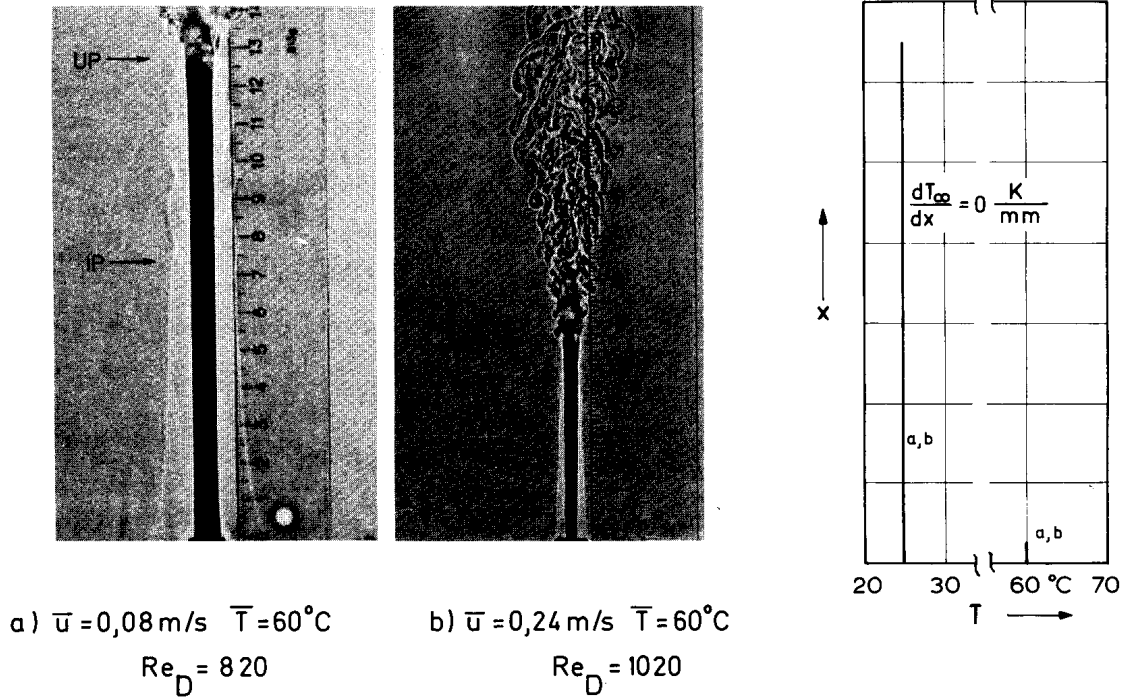


Bild 4. Auftriebsbehaftete Freistrahlen in homogener Umgebung (UP-Umschlagpunkt laminar-turbulent, IP = Indifferenzpunkt)

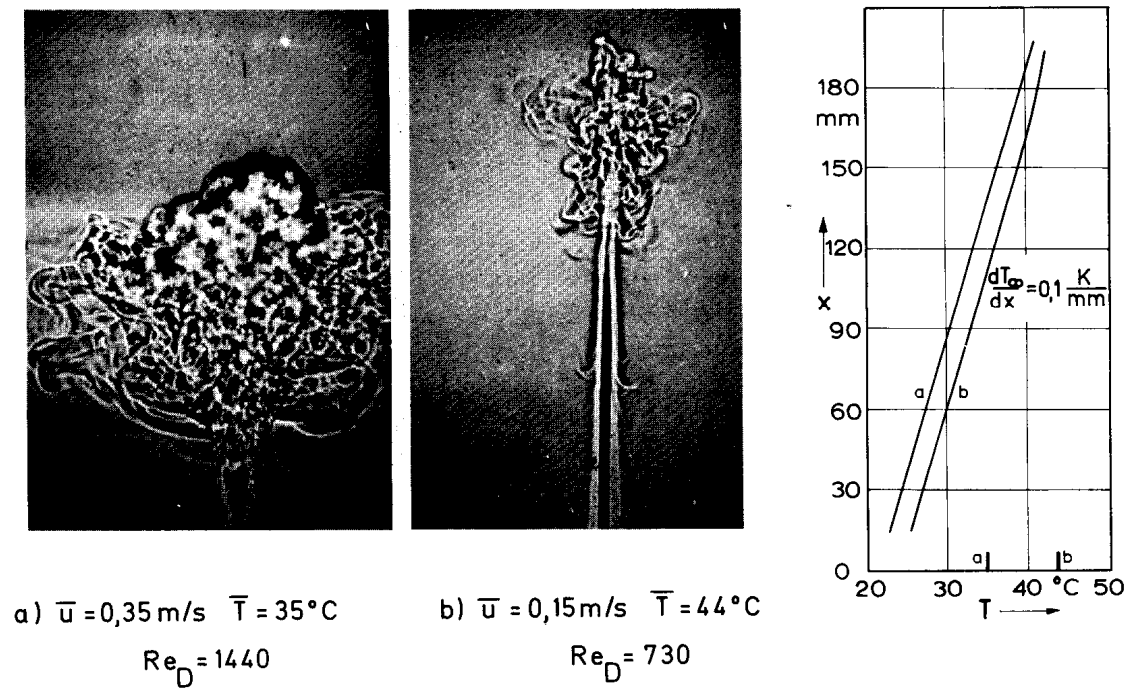


Bild 5. Auftriebsbehaftete Freistrahlen in geschichteter Umgebung

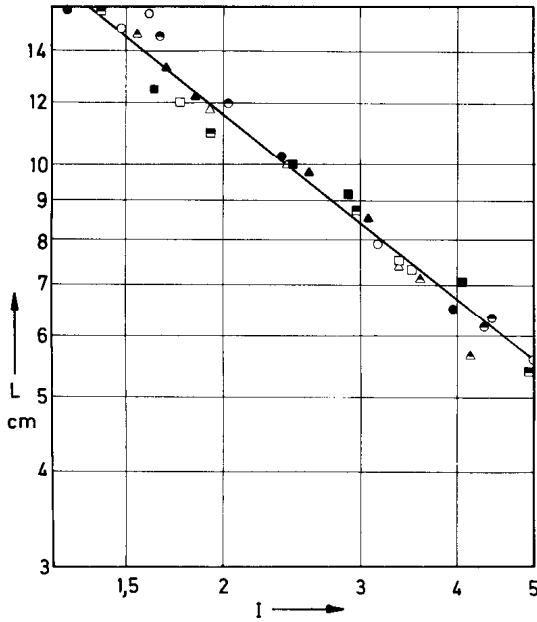
4 Ergebnisse

4.1 Experimentelle Stabilitätsuntersuchungen

In der vorher beschriebenen Versuchsanordnung wurde die Stabilität der laminaren Lauflänge des axisymme-

trischen, auftriebsbehafteten Freistrahls experimentell untersucht.

Wie die Bilder 4 und 5 zeigen, bilden sich bei mäßigen Reynoldszahlen immer laminare Lauflängen aus, gleichgültig, ob der Strahl in eine homogene oder geschichtete Umgebung eintritt.



$\frac{D}{T_0}$	3,0	4,1	5,7	mm	$T_\infty = 25^\circ\text{C}$
30	▲	■	●		
40	▲	■	●		
50	▲	■	●		
$^\circ\text{C}$	zylindrische Düsen				

Bild 6. Darstellung der laminaren Laufänge in Abhängigkeit des Impulsstromparameters I

Die in der vorhandenen Literatur [16] - [19] angegebenen Meßwerte der Laufängen L werden meist als Korrelation zwischen  $L/D$  und  $Re_D$  angegeben. Unterschiedliche Versuchsbedingungen wie z.B. Geschwindigkeitsprofil, Anfangsturbulenz, Dichteunterschiede am Eintritt, Behältergeometrie und Störhintergrund beeinflussen aber die Ergebnisse sehr stark. Daher ist eine einheitliche Darstellung der Experimente in Abhängigkeit dieser einfachen Parameter nicht möglich. Jedoch führt eine Betrachtung der integralen Grenzschichtgleichung zu einem Zusammenhang, der physikalisch anschaulich gedeutet werden kann.

Der Impulsstrom eines Freistrahls in einer Umgebung ohne Dichtegradient bleibt konstant. Zu dieser Trägheitskraft kommt bei Dichteunterschieden gegenüber der Umgebung eine Auftriebskraft. Diesen beiden Kräften entgegen wirken Zähigkeitskräfte. Setzt man diese Kräfte zueinander ins Verhältnis,

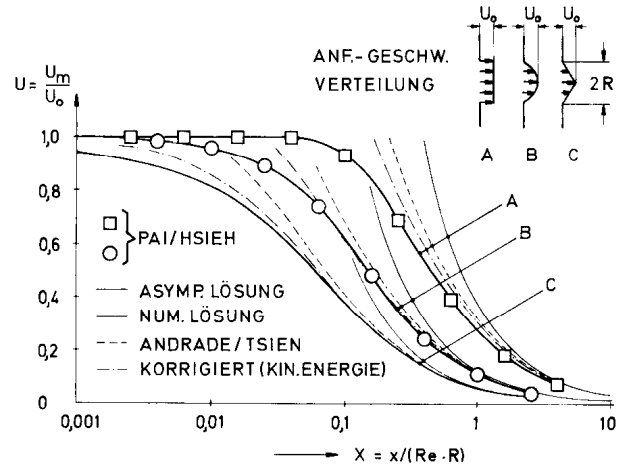


Bild 7. Abfall der Strahlmittengeschwindigkeit längs der Strahlachse

so ergibt sich eine dimensionslose Variable, die als Impulsstromkennzahl gedeutet werden kann.

$$I = p Re_D^2 + Gr_{D^2, L} = \frac{\rho \bar{u}^2 D^2}{\nu^2} + \frac{g \beta \Delta T D^2 L}{\nu^2} \quad (16)$$

$$= \frac{\text{Trägheitskraft}}{\text{Zähigkeitskraft}} + \frac{\text{Auftriebskraft}}{\text{Zähigkeitskraft}}$$

$p = 1$  für Rechteckgeschwindigkeitsprofil

$p = 4/3$  für Parabelgeschwindigkeitsprofil

Mit dem Impulsstromparameter I lassen sich die laminaren Lauflängen L für zylindrische Düsen nach Bild 6 korrelieren. Es zeigt sich keine systematische Aufspaltung der Ergebnisse nach Strahldurchmesser und Übertemperatur. Die Streuungen von  $\pm 7\%$  sind auf den Einfluß des Störhintergrundes zurückzuführen. Die Kenngröße I berücksichtigt offenbar in richtiger Weise die Auftriebskräfte, die bei kleineren Reynoldszahlen wesentlich die laminare Lauflänge beeinflussen. Der beherrschende Einfluß des Impulsstromes bei größeren Reynoldszahlen wird durch deren quadratische Abhängigkeit deutlich.

#### 4.2 Der Freistrahls ohne Auftrieb

Ist die Wirkung des Impulsstromes sehr viel größer als die des Auftriebs, so ist das Gleichungssystem (11) und (12) durch Vernachlässigen des Auftriebsterms zu vereinfachen. Integriert man diese entkoppelten Gleichungen numerisch, so sind charakteri-

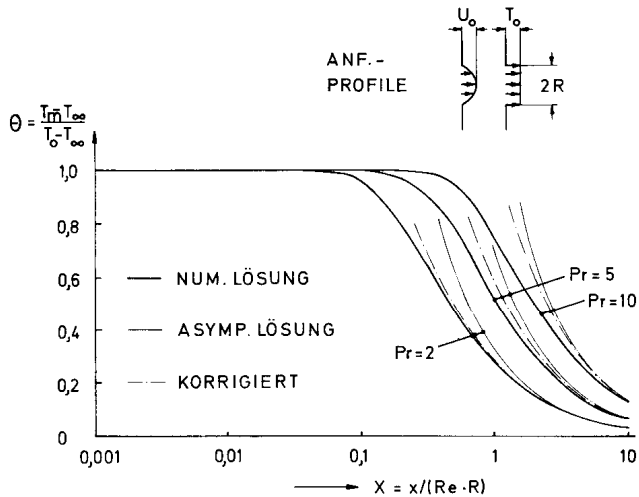


Bild 8. Abfall der Strahlmittentemperatur längs der Strahlachse

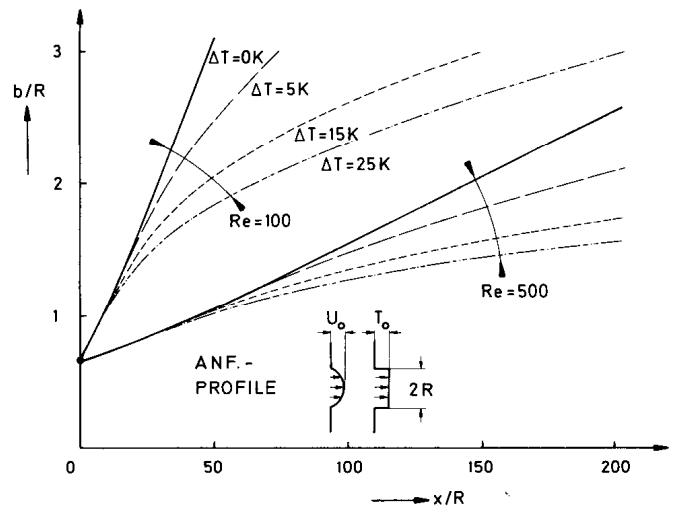


Bild 9. Breitenzunahme der Geschwindigkeitsgrenzschicht von Freistrahlen mit und ohne Auftrieb

stische Größen des Strahlausbreitungsproblems darstellbar. Solche beschreibenden Parameter sind der Abfall der Strahlmittengeschwindigkeit bzw. -Temperatur oder die Ausbreitung des Strahls längs seiner Achse.

Für die drei Anfangsprofile (Rechteck, Parabel, Dreieck) wurde der Abfall der Mittengeschwindigkeit untersucht (Bild 7). Eine geeignete Darstellung bietet sich mit dem Parameter  $U$  und  $X$  an.  $U$  ist mit einer Bezugsgeschwindigkeit  $U_0$  normiert, die Größe  $X$  leitet sich aus einer Betrachtung der Differentialgleichung ab. Die Fälle A und B konnten mit Daten von Pai und Hsieh [9] verglichen werden und zeigen sehr gute Übereinstimmung. Ferner ist die asymptotische Lösung von Schlichting [4] aufgetragen, wobei durch den logarithmischen Maßstab deren Gültigkeitsbereich besonders deutlich wird. Bekanntlich beruht diese Lösung auf der Annahme, daß die Geschwindigkeitsprofile ähnlich sind, was aber zur Folge hat, daß die exakten Randbedingungen nicht zu erfüllen sind.

Eine Verbesserung dieser Lösungen geben Andrade und Tsien [6] an, indem sie aus ihren Versuchsergebnissen eine Reduktionslänge ermitteln. Zusätzliche Information liefert eine Bilanz der kinetischen Energie  $E$

$$E = \pi \rho \int_0^\infty u^3 y dy \quad (17)$$

womit sich die beste Näherungslösung ergibt.

Zur Ermittlung des Verlaufs der Strahlmittentemperatur längs der Strahlachse wurde für das entkoppelte System die Energiegleichung gelöst. Die Darstellung (Bild 8) erfolgt analog dem Geschwindigkeitsverlauf. Die Prandtlzahl tritt als weiterer Parameter auf, welche das Verhältnis von Strömungsgrenzschicht zu Temperaturgrenzschicht angibt. Die über eine Ähnlichkeitsbetrachtung von Yih [7] gewonnene asymptotische Lösung geht bei genügend großer Lauflänge in die exakte Lösung über. Eine Korrekturlänge  $x_0$  errechnet sich über eine Betrachtung der Energieströme:

$$x_0 = R Re \frac{(2 Pr - 1)}{(2 Pr + 1)} \frac{1}{4} \quad (18)$$

Dabei ist die Integralbedingung

$$Q = \pi \rho c_p \int_0^\infty (T - T_\infty) u y dy = \text{const.} \quad (19)$$

zu beachten.

Eine weitere interessierende Größe ist die Ausbreitung des Strahls stromabwärts. Dabei wird die Breite  $b(x)$  der Vermischungszone so definiert, daß sie die Entfernung quer zur Achse angibt, wo die Mittengeschwindigkeit auf die Hälfte abgefallen ist. Die Breitenzunahme der Geschwindigkeitsgrenzschicht ist für den axisymmetrischen laminaren Strahl linear mit dem Abstand  $x$  vom Ursprung verknüpft. Bild 9 zeigt diese Abhängigkeit für verschiedene Reynolds-



zahlen mit einem parabolischen Anfangsprofil der Geschwindigkeit.

Der universelle Parameter  $X$  für die Abszisse wurde hierbei nicht verwendet, da sich eine unübersichtlichere Darstellung der Breite  $b$  für auftriebsbehaftete Strahlen ergäbe. Isotherme Strahlen (Übertemperatur  $\Delta T = 0\text{ K}$ ) bleiben mit zunehmender Reynoldszahl schlanker.

#### 4.3 Der Freistrahls mit Auftrieb

Eine ähnliche Abschätzung wie für den Strahl ohne Auftrieb läßt sich für den auftriebsbehafteten Fall durchführen. Die zusätzliche Kraft in axialer Richtung, herrührend vom Auftrieb der erwärmten Flüssigkeitsteile muß in der Impulsgleichung nur berücksichtigt werden, wenn

$$\frac{Gr}{Re^2} \approx 1 \quad \text{gilt.}$$

Dies ist bei kleinen Geschwindigkeiten und beträchtlichen Temperaturdifferenzen der Fall. Konvektive Terme, Zähigkeits- und Auftriebsglieder sind dann von gleicher Größenordnung.

Für die Übertemperaturen 15 und 25 K wurden die Geschwindigkeits- und Temperaturverteilungen untersucht. Die mittlere Eintrittsgeschwindigkeit wurde dabei in zwei Bereichen variiert. Eine weitere Differenzierung erfolgte durch die Vermessung der Temperaturprofile in verschiedenen Abständen vom Ursprung. Als Anfangsprofile lagen der numerischen Nachrechnung ein Rechteck für die Temperaturverteilung und eine Parabel für die Geschwindigkeitsverteilung zugrunde.

a) Die erste Meßreihe wurde mit einer mittleren Eintrittsgeschwindigkeit von 0,35 m/s durchgeführt (Bild 10/11). Die resultierenden Reynoldszahlen lagen in einem Bereich von  $\approx 200$ . Die Streuung ist durch die Temperaturabhängigkeit der kinematischen Zähigkeit bedingt. Zusätzlich sind in den Bildern die asymptotischen Lösungen von Yih [7] und Schlichting [4] eingetragen. Der Fehler der gezeigten Meßpunkte ist in der Größe der Darstellung berücksichtigt. Den errechneten Geschwindigkeitsverläufen ist der Verlauf ohne Auftriebseffekten gegenübergestellt.

aa) Bild 10 zeigt die Entwicklung des Strahls bei einer Übertemperatur von 15 K. Anfängliche Unterschiede in den Temperaturprofilen deuten auf eine nicht exakte Verwirklichung der Anfangsverteilung im Experiment hin. Mit zunehmender Entfernung vom Ursprung werden diese Fehler geringer. Auftriebsinflüsse sind im Temperaturverlauf noch nicht darstellbar. Hingegen weist der Geschwindigkeitsverlauf auf den beschleunigenden Einfluß des Auftriebs hin.

aaa) Eine analoge Betrachtung wurde bei einer Übertemperatur von 25 K angestellt (Bild 11). Wegen des früher eintretenden Umschlags von laminar nach turbulent, mußte dabei auf die Meßstelle  $x/D = 220$  verzichtet werden. Die größten Unterschiede im Temperaturprofil von numerischer zu experimenteller Lösung ergeben sich wieder bei einem Abstand von  $x/D = 5$ . Weiter ist die numerische Lösung des Temperaturprofils ohne Auftrieb aufgetragen. Diese muß oberhalb der auftriebsbehafteten Lösung liegen, was bei Betrachtung der Integralgleichung (19) offensichtlich wird. Infolge der erhöhten Temperaturdifferenz werden die Flüssigkeitsteile stärker beschleunigt. Mit zunehmender Entfernung geht die Lösung von Schlichting in die numerische Lösung ohne Auftrieb über.

b) Bei einer zweiten Versuchsreihe wurde die Geschwindigkeit auf 0,7 m/s erhöht (Bilder 12 u. 13). Wegen der sich daraus ergebenden verkürzten laminaren Lauflänge wurde das Temperaturprofil des Strahls an den Stellen  $x/D = 5, 15, 40, 80$  mm vermessen. Bei Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der kinematischen Zähigkeit variierte die Reynoldszahl in einem Bereich von 400 - 500. Für den Vergleich mit bekannten Lösungen gilt das unter a) Gesagte.

bb) Durch den erhöhten Impulsstrom fallen Temperatur und Geschwindigkeit erheblich langsamer ab als bei  $Re \approx 200$  (Bild 12). Der Strahl bleibt im Vergleich zu Bild 10 wesentlich schlanker. Das Temperaturprofil zeigt keine Änderung bei einer Übertemperatur von  $\Delta T = 15\text{ K}$ . Der Einfluß auf das Geschwindigkeitsfeld ist sehr gering.

bbb) Ein letztes Beispiel ist in Bild 13 dargestellt. Die Reynoldszahl beträgt ungefähr 500, die Temperaturdifferenz 25 K. Vergleicht man die Entwicklung des Strahls stromab mit den vorangegangenen Versuchen, so zeigt der Fluidstrahl hier die geringste Aufweitung.

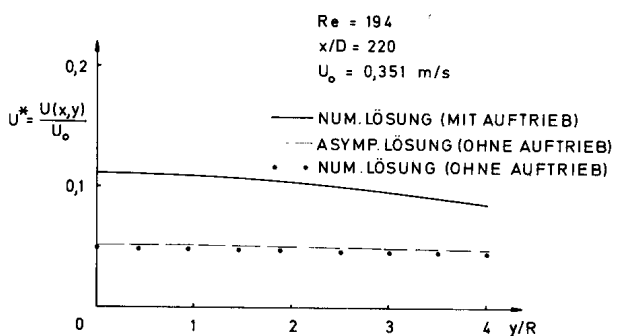
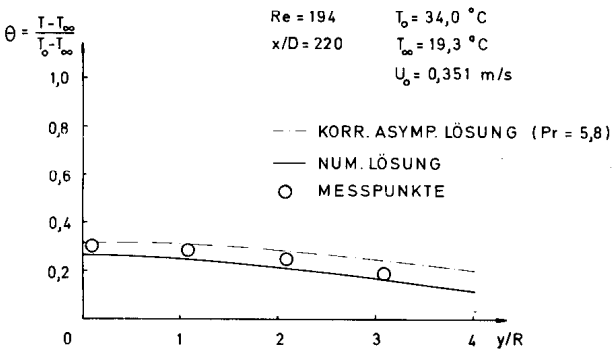
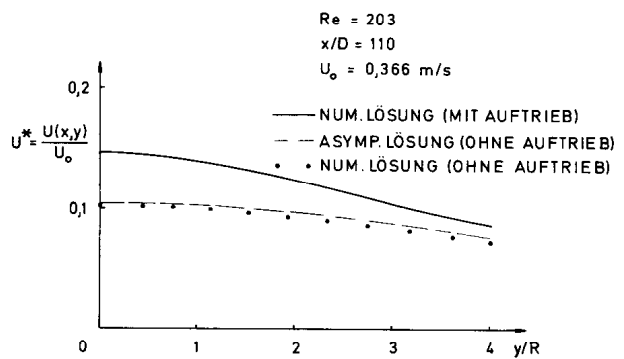
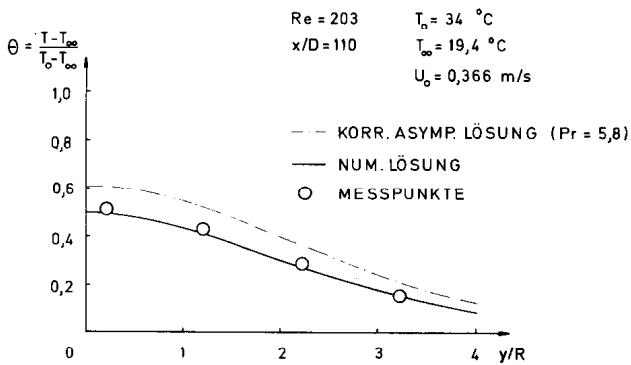
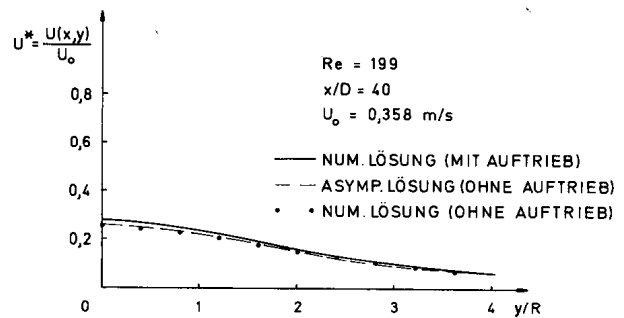
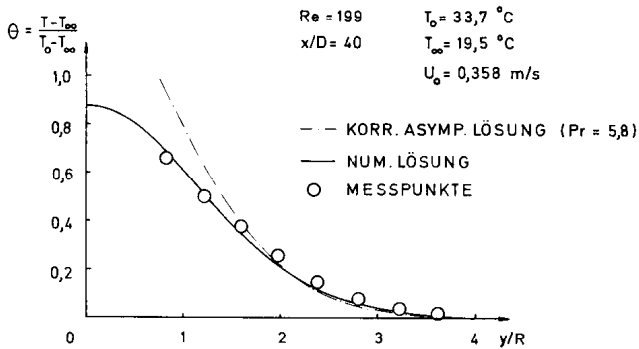
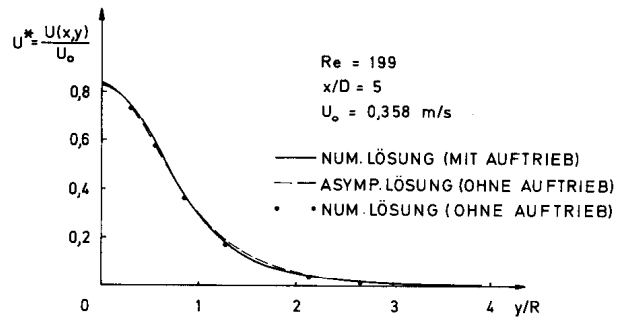
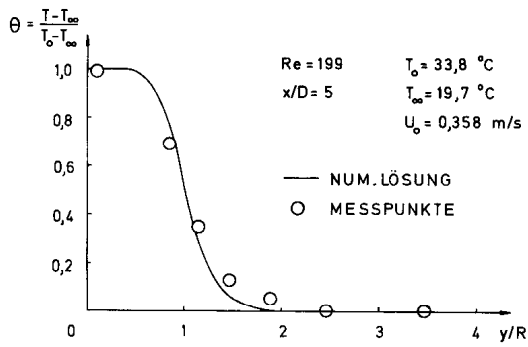


Bild 10. Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile auftriebsbehafteter Freistrahlen bei  $\bar{u} = 0,35 \text{ m/s}$  und  $\Delta T = 15 \text{ K}$

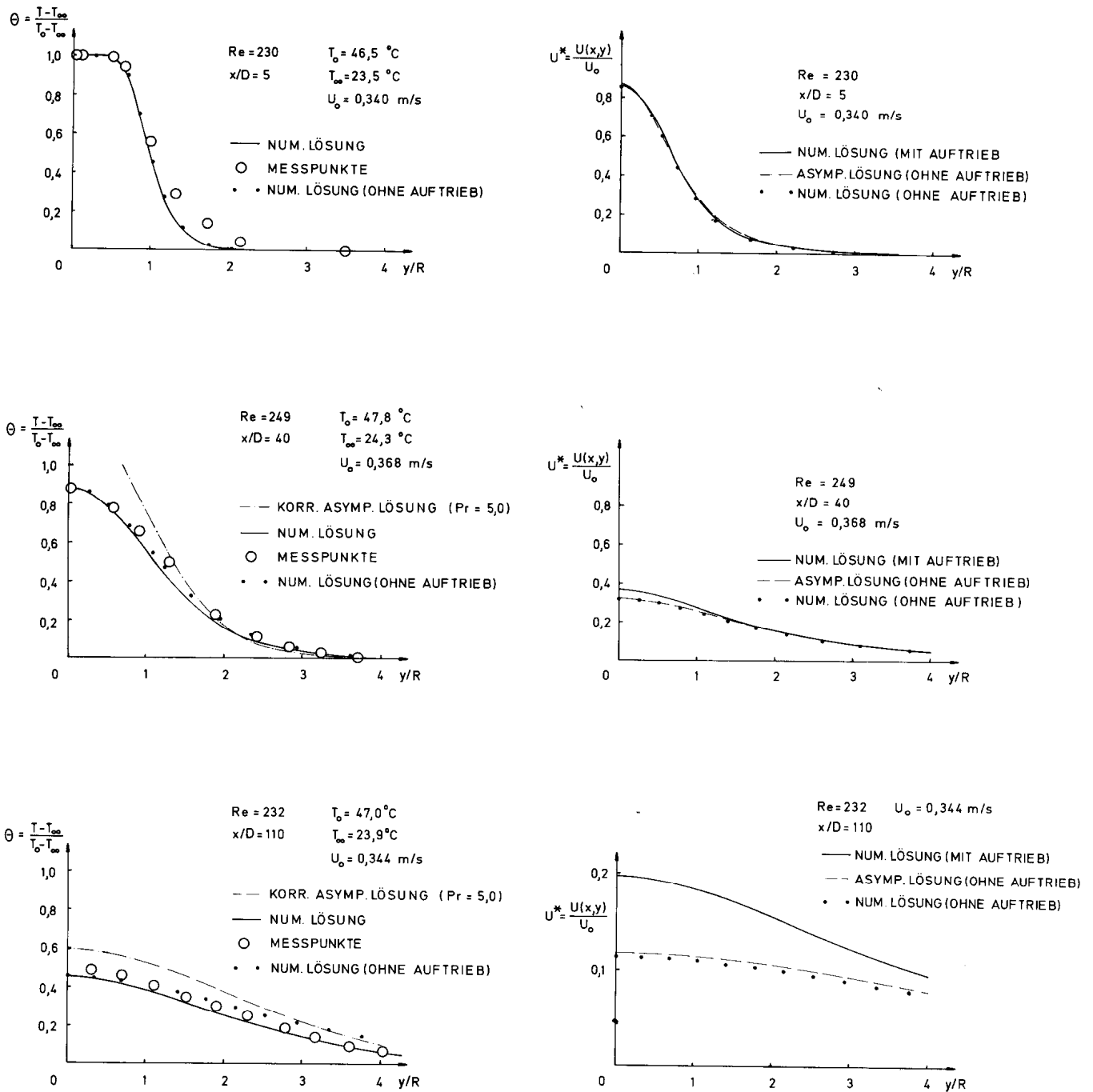


Bild 11. Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile auftriebsbehafteter Freistrahlen bei  $\bar{u} = 0,35\text{ m/s}$  und  $\Delta T = 25\text{ K}$

Dies ist sowohl auf die große Reynoldszahl als auch auf die große Übertemperatur zurückzuführen. Der Einfluß des Auftriebs wird bei einer Gegenüberstellung der Geschwindigkeitsprofile mit und ohne Auftrieb sichtbar. Ein Vergleich der Temperaturprofile zeigt nur noch ein tendenzmäßig richtiges Verhalten, die Unterschiede infolge des Auftriebs sind wegen des großen Impulsstromes nicht mehr darstellbar.

Bei der Diskussion um die Aufweitung eines Fluidstrahls sei nochmals auf Bild 9 verwiesen. Als repräsentative Größe ist hier die Breite über die Lauflänge  $x$  dargestellt. Reynoldszahl und Übertemperatur sind dabei Parameter. Allgemein ist daraus abzuleiten, daß mit Zunahme beider Parameter der Strahl schlanker bleibt. Jedoch bewirken auch beide Größen, daß die laminare Lauflänge verkürzt wird und der Strahl turbulent wird (Bild 6).

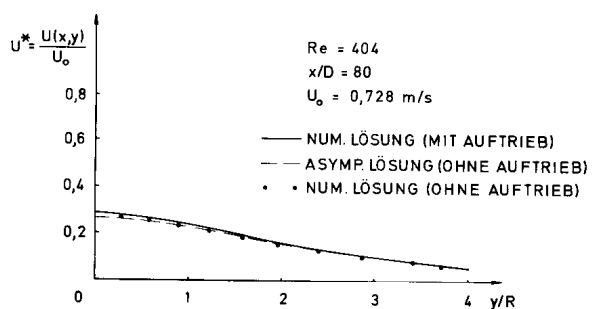
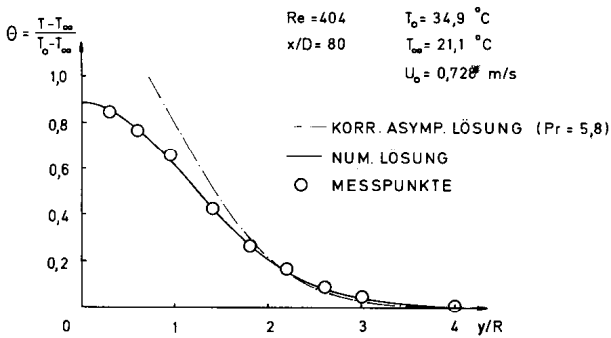
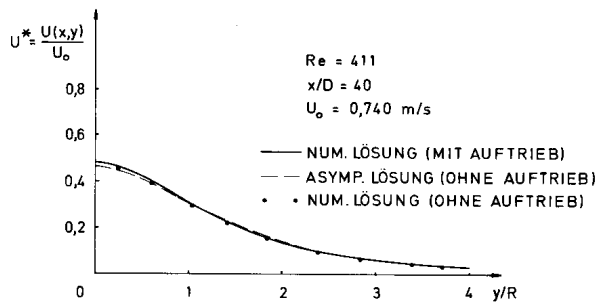
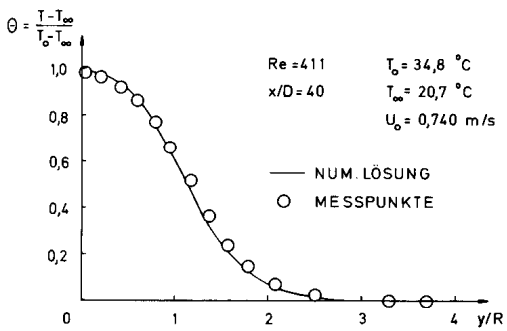
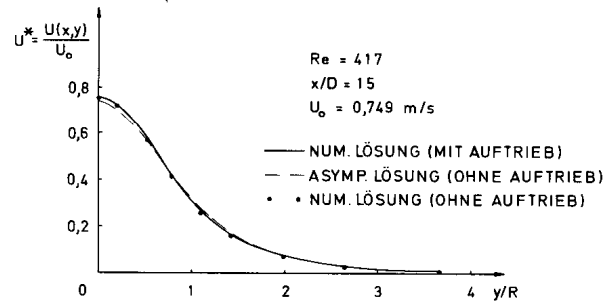
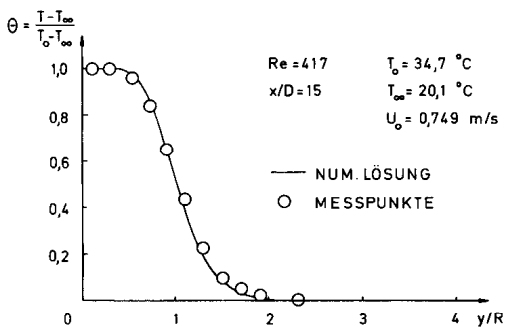
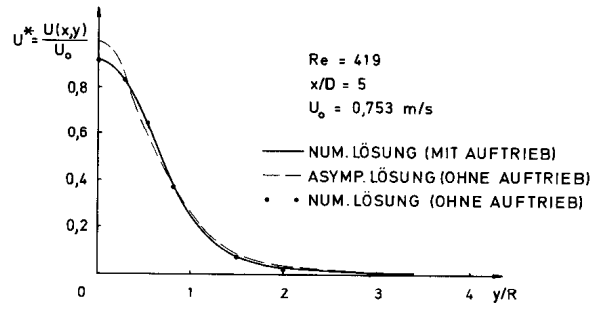
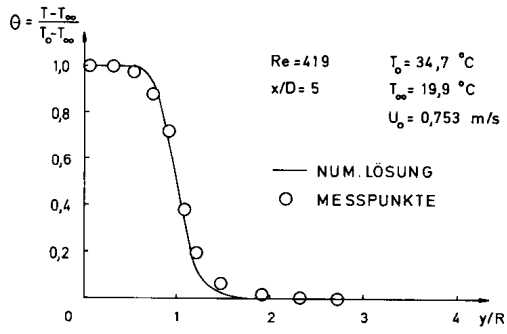


Bild 12. Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile auftriebsbehafteter Freistrahlen bei  $\bar{u} = 0,7 \text{ m/s}$  und  $\Delta T = 15 \text{ K}$

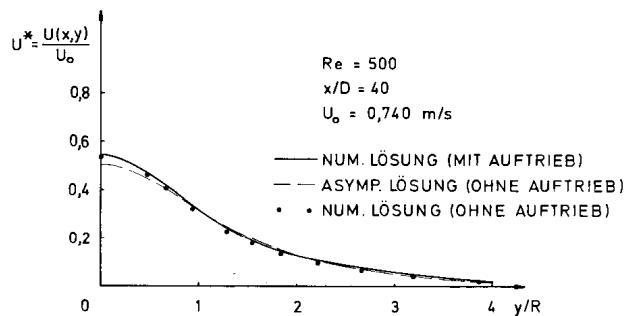
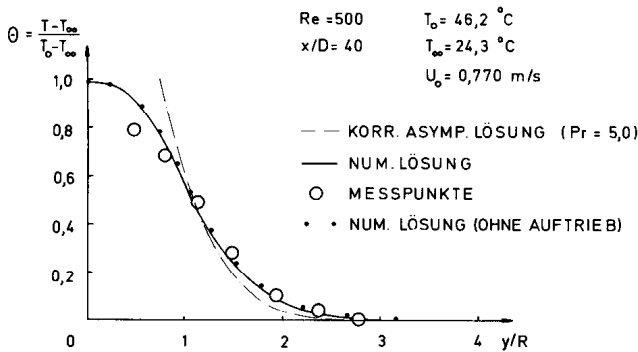
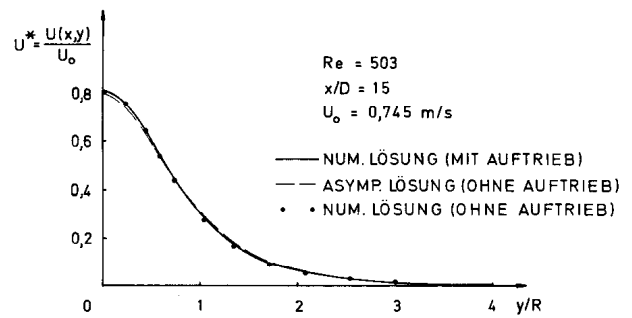
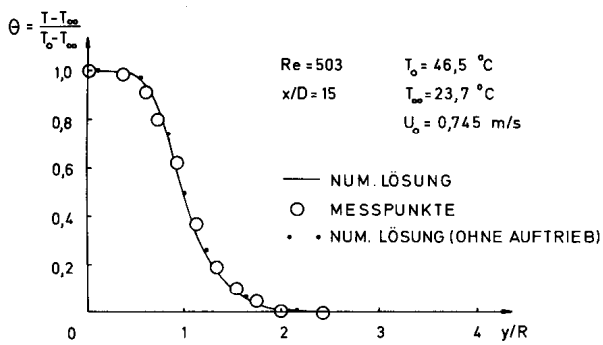
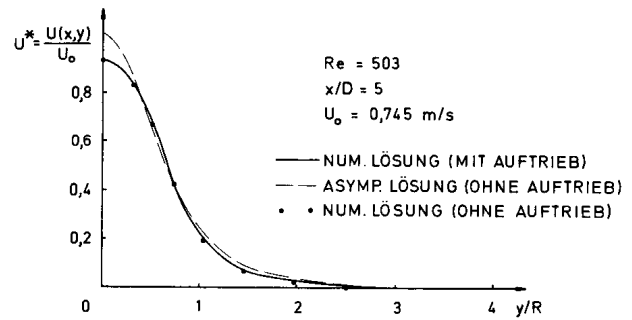
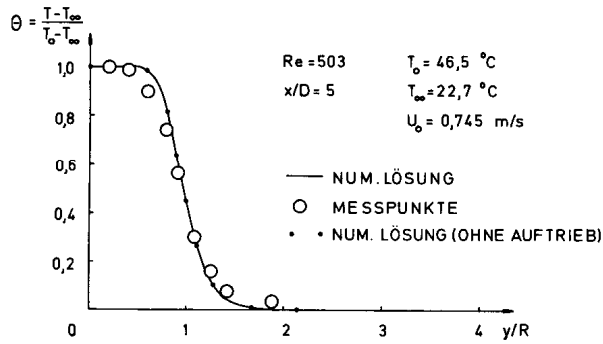


Bild 13. Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile auftriebsbehafteter Freistrahlen bei  $\bar{u} = 0,7 \text{ m/s}$  und  $\Delta T = 25 \text{ K}$

5 Schlußbetrachtung

Bei der Untersuchung laminarer Freistrahlen ohne Auftrieb sind zwei Einflußgrößen von entscheidender Bedeutung. Die Bewegungs- und Energiegleichung liefern als Kennzahlen den Kehrwert der Reynolds- und der Pécletzahl ( $Re \cdot Pr$ ), welche eine parameterfreie Darstellung erlauben. Charakteristische Eigenschaf-

ten eines Fluidstrahls, wie die Mittentemperatur, die Mittengeschwindigkeit und die Ausbreitung können damit in einfacher Weise dargestellt werden.

Während sich der Freistrahls ohne Auftrieb durch zwei Kennzahlen vollständig beschreiben läßt, sind zur Darstellung des auftriebsbehafteten Strahls drei dimensionslose Größen, die Prandtl-, Reynolds- und Grashofzahl notwendig. Die Prandtl-Zahl läßt sich

als das Verhältnis von Strömungs- zu Temperaturgrenzschicht deuten, was sich in der Darstellung mit  $Pr = 5-6$  in einem breiten Geschwindigkeitsverlauf und einer eng begrenzten Temperaturgrenzschicht niederschlägt (Bilder 10-13).

Die Reynoldszahl ist bei mäßigem Auftrieb die dominierende Einflußgröße. Übertemperaturen bedingen zwar durch den thermischen Auftrieb (Grashofzahl) zusätzliche axiale Kräfte, die die erwärmten Fluidteile beschleunigen, jedoch ist eine Veränderung des Temperaturprofils kaum zu erkennen. Quantitative Aussagen dazu liefern die gezeigten numerischen Berechnungen. Eine qualitative Bestätigung erbringen Mollendorf und Gebhart [12] mit einer linearen Strömungsrechnung.

Eine gesonderte Untersuchung galt dem Einfluß der Prandtlzahl auf das Auftriebsverhalten. Es konnte festgestellt werden, daß mit zunehmender Prandtlzahl Auftriebseffekte begünstigt werden. Hohe Prandtlzahlen erlauben es, daß Strömungsvorgänge überwiegen und verhindern ein "Zerfließen" des Temperaturprofils, was indirekt eine beschleunigte Strömung zur Folge hat.

Die Stabilität axisymmetrischer Freistrahlen wurde experimentell untersucht. Mit zunehmenden Grashofzahlen werden die laminaren Lauflängen verkürzt. Der Ort des Umschlags von laminar nach turbulent läßt sich gut mit einem Impulsstromparameter, der das Zusammenwirken von Impuls- und Auftriebskraft beschreibt, darstellen.

#### Literatur

1. Landau, L.D.; Lifschitz, E.M.: Lehrbuch der theoretischen Physik. Bd. 6: Hydrodynamik, 2. Aufl., S. 95-97, Berlin: Akademie-Verlag 1971
2. Squire, H.B.: The round laminar jet. Quart. J. Mech. Appl. Math. 4, (1951) 321-329
3. Beran, M.: Quart. Appl. Math. 14 (1956) 213-214
4. Schlichting, H.: Laminare Strahlausbreitung. ZAMM 13 (1933) 260-263
5. Bickley, W.G.: The plane jet. Phil. Mag. 23 (1937) 7
6. Andrade, E.N. da C.; Tsien, L.C.: The velocity - distribution on a liquid - into - liquid jet. Proc. Phys. Soc. 49 (1937) 381-391
7. Yih, C.S.: Temperature distribution in a steady, laminar, preheated air jet. J. Appl. Mech. 17, (1950) 381-382
8. Loitsianski, L.G.: Laminare Grenzschichten, S. 318-321. Berlin: Akademie 1967
9. Pai, S.I.; Hsieh, T.: Numerical solution of laminar jet mixing with and without free stream. Appl. Sci., Res. 27 (1972) 39-62
10. du Plessis, M.P.; Wang, R.L.; Tsang, S.: Development of a Submerged Round Laminar Jet From An Initially Parabolic Profile. Trans. of Profile. Trans. of ASME 6 (1973) 148-154
11. Patankar, S.V.; Spalding, D.B.: Heat and Mass Transfer in Boundary Layers. London: Intertext Books 1970
12. Mollendorf, J.C.; Gebhart, B.: Thermal Buoyancy in round laminar vertical Jets. Int. J. Heat Mass Transfer 16 (1973) 735-745
13. Schiller, L.: Untersuchungen über laminare und turbulente Strömung. ZAMM 2 (1922) 96
14. Bellman, R.; Cooke, K.L.: Existence of Uniqueness Theorems in Invariant Imbedding - II, Convergence of a New Difference Algorithm. Math. Anal. Appl. 12 (1965) 247-253
15. Flugge-Lotz, I.; Blöttner, F.G.: Numerical Solution of Compressible Boundary Layer. Div. of Eng. Mech., Stanford University, TR 131, January 1952
16. McKenzie, C.P.; Wall, D.B.: Transition from Laminar to Turbulent in submerged and bounded jets. Fluidics Quart. 4, (1968) 38-47
17. Marsters, G.F.: Some observations on the transition to turbulence in small, unconfined free jets. Queen's University, Kingston, Ontario Rep. No. 1-69 (1969)
18. McNaughton, K.J.; Sinclair, C.G.: Submerged jets in short cylindrical flow vessels. J. Fluid Mech. 25 (1966) 367-375
19. Mollendorf, J.C.; Gebhart, B.: An experimental and numerical study of the viscous stability of a round laminar vertical jet with and without thermal buoyancy for symmetric and asymmetric disturbances. J. Fluid Mech. 61 (1973) 367-399
20. Killermann, F.: Wärmeabgabe von waagrechten, beheizten Rohren bei freier Konvektion in Luft unter dem Einfluß von parallel zur Rohrachse verlaufenden Begrenzungswänden. Dissertation, TU München 1971

Dipl.-Ing. K. Küblbeck  
 Dr.-Ing. habil. J. Straub  
 Dr.-Ing. S. Bloß  
 Prof. Dr.-Ing. U. Grigull

Lehrstuhl A für Thermodynamik  
 Technische Universität München  
 Postfach 202 420, D-8000 München 2

Eingegangen am 20. Dezember 1977