

Temperaturverteilung in tiefen und flachen Seen*

S. Bloß und U. Grigull, München

Temperature Distribution in Deep and Shallow Lakes

Abstract. For certain simplifications the temperature distribution in deep as well as shallow lakes can be treated as a non-steady, one-dimensional heat conduction problem. Convection in certain regions of the lake can be taken into account by averaging the internal energy corresponding to the calculated unstable profiles. The leading parameters for the spatial and temporal temperature distribution are the vertical absorption coefficient on one hand and the ratio of heat exchange at the surface to visible solar and sky radiation on the other. Transient energy exchange can be considered by stepwise calculation. Field measurements of other authors as well as own model experiments confirm the assumptions made in the theoretical model.

Zusammenfassung. Die Temperaturverteilung in tiefen und flachen Seen läßt sich unter gewissen Vereinfachungen als instationäres, eindimensionales Wärmeleitproblem behandeln. Konvektion in bestimmten Bereichen des Sees kann durch Mittelung der den instabilen Temperaturprofilen entsprechenden inneren Energie berücksichtigt werden. Maßgebliche Parameter für den örtlichen und zeitlichen Temperaturverlauf sind der vertikale Absorptionskoeffizient und das Verhältnis von Wärmeaustausch an der Oberfläche einerseits zur sichtbaren Sonnen- und Himmelsstrahlung andererseits. Zeitlich veränderlicher Energieaustausch läßt sich durch eine schrittweise Berechnung berücksichtigen. Messungen anderer Autoren an Seen sowie eigene Modellexperimente bestätigen die im theoretischen Modell enthaltenen Annahmen.

Formelzeichen

1 Lateinische Buchstaben

a	Temperaturleitzahl
c	spezifische Wärmekapazität
I	Intensität
L	Seetiefe
n	Brechungsindex
q	Energiestromdichte
q _g	Gesamtstrahlungsstromdichte an der Oberfläche
q ₀	sichtbare Strahlungsstromdichte an der Oberfläche
q _v	Wärmestromdichte an der Oberfläche (durch Konvektion, Verdunstung und/oder langwellige Zu- und Abstrahlung)
r	Reflexionsvermögen der Seeoberfläche
s	Strahlweg
t	Zeit
W	volumenbezogene Wärmequelle
z	vertikale Ortskoordinate

2 Griechische Buchstaben

α	Zenitwinkel
β	Zenitwinkel unter Wasser
δ	Absorptionskoeffizient
ζ	dimensionslose vertikale Ortskoordinate
η	dimensionslose Variable
ϑ	Temperatur
θ	dimensionslose Temperatur
λ	Wellenlänge
λ	Wärmeleitfähigkeit (Index 'eff' für turbulente Wärmeleitfähigkeit)
Λ	dimensionslose Tiefe
ρ	Dichte
σ	Energiestromdichteverhältnis
τ	dimensionslose Zeit
ψ_k	dimensionslose Variable

3 Indices

e	Epilimnion
h	Hypolimnion
0	Seeoberfläche
λ	spektrale Größe

* Auszug aus der vom Fachbereich Maschinenwesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs genehmigten Dissertation über "Temperaturverteilung in Seen" des Diplom-Ingenieurs Siegfried Bloß. Berichterstatter Prof. Dr.-Ing. U. Grigull und Prof. Dr. rer. nat. D. Vortmeyer. - Die Dissertation wurde am 27. Mai 1977 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch den Fachbereich Maschinenwesen am 19. Juli 1977 angenommen. Tag der Promotion 26. Juli 1977

1 Einleitung

Der jahreszeitliche Verlauf der vertikalen Temperaturverteilung in stehenden Gewässern, wie er in Bild 1 für einen See mittlerer geographischer Breite darge-

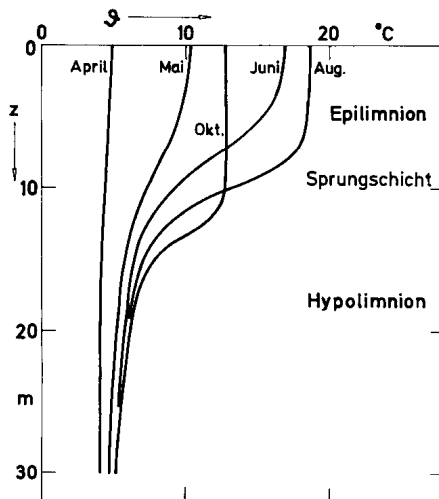


Bild 1. Temperaturverlauf in einem See

stellt ist, ist seit etwa 100 Jahren bekannt [1] und wurde in den letzten Jahrzehnten durch eine Vielzahl von Messungen an Seen auf der ganzen Erde bestätigt. Er ist gekennzeichnet durch die Ausbildung und Wiederauflösung eines Temperaturgradienten in einigen Metern Tiefe, der sogenannten Sprungschicht, die den See in zwei Bereiche aufteilt. Die gleichmäßig durchmischte Oberschicht, das Epilimnion, erwärmt sich rasch bis in den August hinein und kühlt sich dann wieder ab, wobei sie allmählich auf tiefere Bereiche des Sees übergreift. Im unteren Bereich, dem Hypolimnion, steigt die Temperatur nur wenig über die gleichmäßige Ausgangstemperatur des Frühjahrs, der geringe Anstieg hält jedoch auch im Herbst noch an, bis das tiefergreifende Epilimnion die jeweilige Schicht erfaßt.

Die Bedeutung des zwischen den beiden Schichten liegenden stabilen Temperaturgradienten liegt in seiner dämpfenden Wirkung auf turbulente Austauschvorgänge, wodurch ein Übergreifen der Konvektionsbewegung im Epilimnion auf das Hypolimnion weitgehend verhindert wird. Die Temperaturverteilung ist somit maßgebend nicht nur für die Entstehung und Umwandlung, sondern auch für die Verteilung von organischer und anorganischer Materie im See. Dieser Einfluß ist bei Einleitung von Abwässern und Abwärme in Seen von besonderer Wichtigkeit.

Modelle zur Berechnung der Temperaturverteilung und der Lage der Sprungschicht wurden deshalb gerade

in jüngerer Zeit in größerer Zahl entwickelt. Sie lassen sich an Hand der eindimensionalen turbulenten Wärmeleitungsgleichung mit inneren Wärmequellen in zwei Gruppen einteilen.

$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_{\text{eff}} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right) + \dot{w}(t, z) \quad (1)$$

Modelle der Gruppe I erklären die Ausbildung einer Sprungschicht mit der an der Seeoberfläche angreifenden Windschubspannung und der dadurch induzierten Turbulenz. Die Modelle von Munk und Anderson [2] und Sundaram und Rehm [3] geben die Ortsabhängigkeit der turbulenten Wärmeleitfähigkeit λ_{eff} als Funktion der Richardsonzahl Ri an, vernachlässigen jedoch den Wärmequellenterm $\dot{w}(t, z)$ ganz. Spalding und Svensson [4] berücksichtigen innere Wärmequellen, für die Berechnung von λ_{eff} verwenden sie ein k, ε -Turbulenzmodell. Ihr Differentialgleichungssystem ist nur numerisch lösbar und erlaubt keine explizite Angabe der für die Sprungschichtausbildung maßgeblichen Parameter. Ein Vergleich mit gemessenen Temperaturprofilen in Seen wurde nicht durchgeführt.

Modelle der zweiten Gruppe betonen den Einfluß der Wärmequellenverteilung durch Strahlungsabsorption auf die Temperaturverteilung im See. In den Modellen von Emden [5] und Snider und Viskanta [6] wird die Strahlungsverteilung im See sehr detailliert berechnet. Da sie jedoch nur molekularen Wärmetransport zulassen, bleibt die Anwendbarkeit ihrer Ergebnisse auf den Fall von Wärmezufuhr an der Seeoberfläche beschränkt. Dake und Harleman [7] berücksichtigen auch die bei Wärmeabfuhr einsetzende Konvektion im Epilimnion und erhalten dadurch Temperaturprofile, die von den beschriebenen Modellen am besten mit der Wirklichkeit übereinstimmen. Die Allgemeingültigkeit des Modells ist jedoch eingeschränkt durch die Vorgabe einfacher Potenzfunktionen für die Zeitabhängigkeit der Energieströme durch die Oberfläche des Sees.

In der vorliegenden Arbeit wird ein analytisch lösbares Modell beschrieben, das zur zweiten Gruppe gehört. Es erlaubt die Bestimmung der für die Sprungschichtausbildung maßgeblichen Parameter und die Berechnung des instationären Temperaturverlaufs für beliebigen, zeitabhängigen Energieaustausch.

2 Mathematische Formulierung des Modells

Die Temperatur- und Geschwindigkeitsfelder im See werden im allgemeinsten Fall durch ein dreidimensionales, instationäres Differentialgleichungssystem beschrieben, das sich aus den Erhaltungssätzen für Masse, Impuls und Energie ableiten läßt. Mit dem Ziel, eine analytische Lösung für die Temperaturverteilung im See zu erhalten, sollen einige vereinfachende Annahmen getroffen werden:

1. Das Problem wird als eindimensional betrachtet mit dem Ursprung der vertikal nach unten zeigenden Koordinatenachse z in der Seeoberfläche.

2. Alle Stoffwerte werden temperaturunabhängig angenommen.

3. Der Energieaustausch durch die Seeoberfläche wird in eine Wärmestromdichte q_v als Randbedingung an der Oberfläche und in die Strahlungsverteilung im See $q(z) = q_0 \cdot e^{-\delta z}$ aufgeteilt.

4. Für den Energieaustausch am Boden werden folgende Grenzfälle betrachtet: Beim tiefen See wird die am Boden ankommende Strahlung vernachlässigt (Fall I). Beim flachen See der Tiefe L soll sie entweder vollkommen absorbiert werden und als Wärmestrom in den See zurückfließen (Fall II) oder spiegelnd reflektiert werden (Fall III). Wärmeleitung aus dem Erdinneren wird vernachlässigt.

5. Die Wärmestromdichten q_0 und q_v werden zunächst zeitlich konstant angenommen.

6. Der konvektive Wärmetransport wird vorläufig vernachlässigt. Es wird nur Wärmeleitung angenommen.

Die Einschränkungen 5 und 6 werden zu Ergebnissen führen, die nur teilweise mit wirklichen Temperaturverläufen übereinstimmen. Die sich ergebenden Abweichungen werden in Abschnitt 3 in sinnvoller Weise korrigiert. Die Zulässigkeit der Vereinfachung 3 soll im folgenden begründet werden.

Schätzt man die vielfältigen Möglichkeiten des Sees, mit seiner Umgebung Energie auszutauschen, in ihrer Größenordnung ab, so ergeben sich als relevante Energieströme lediglich die Strahlung, die Verdunstung sowie der konvektive Austausch mit der Umgebungsluft. Verdunstung und Konvektion sind reine Randbedingungen und somit in q_v enthalten, Strahlung dagegen kann in den See eindringen und wird erst allmählich absorbiert.

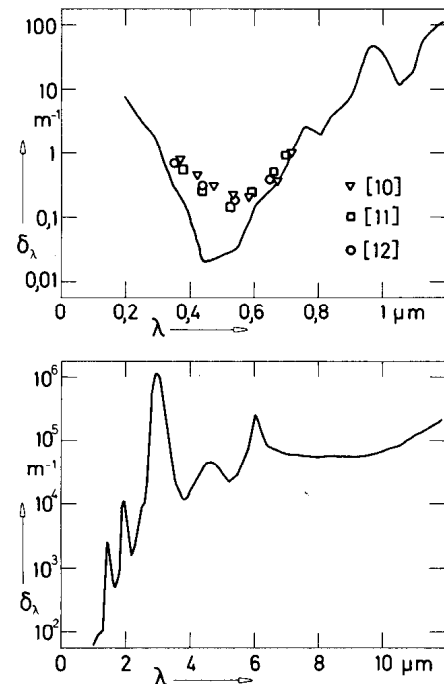


Bild 2. Spektraler Absorptionskoeffizient δ_λ von reinem Wasser und Seewasser [8, 9, 10, 11, 12]

Die auf der Seeoberfläche ankommende Strahlung setzt sich aus direkter paralleler Sonnenstrahlung, die unter tages- und jahreszeitlich wechselndem Winkel in einem großen Spektralbereich vom UV bis weit ins UR einfällt, und aus diffuser Himmelsstrahlung zusammen. Auch die Himmelsstrahlung enthält kurzwellige Anteile, die in der oberen Lufthülle gestreute Sonnenstrahlung, und langwellige Anteile durch die Emission absorbierender Gase wie Ozon, Kohlendioxid und Wasserdampf. Es wäre deshalb zu erwarten, daß die Strahlungs- und damit die Wärmequellenverteilung im See stark von Zeit, Ort und Wellenlänge abhängen.

Für die Absorption eines monochromatischen Strahlenbündels der Intensität I_λ längs der Strecke ds gilt

$$dI_\lambda = -\delta_\lambda I_\lambda ds \quad (2)$$

δ_λ ist der spektrale Absorptionskoeffizient, dessen Wellenlängenabhängigkeit in Bild 2 dargestellt ist [8, 9]. Man sieht, daß nur sichtbare Strahlung ($0,3 \mu\text{m} < \lambda < 0,8 \mu\text{m}$) tiefer in den See eindringen kann, während die UV- und UR-Anteile schon innerhalb einer Oberflächenschicht von etwa einem Meter zu 99 % und mehr absorbiert werden. Es ist deshalb üblich, die Absorption dieser Anteile als Randbedingung zu be-

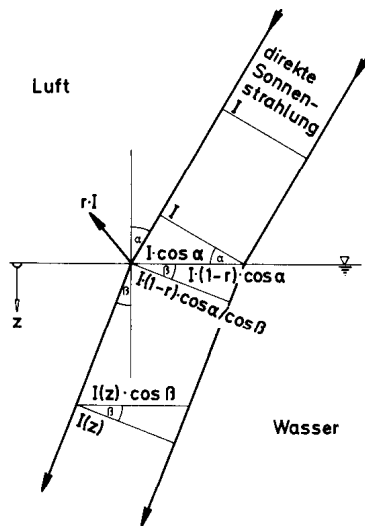


Bild 3. Verlauf der direkten Sonnenstrahlung in Luft und Wasser

trachten. Auch die eigene Strahlung des Sees kann in dieser Weise behandelt werden. Sie erfolgt als graue Strahlung im Bereich um $10 \mu\text{m}$ bei hohen Absorptionskoeffizienten und stammt deshalb nur aus einer dünnen Oberflächenschicht. Die Wärmestromdichte q_v an der Seeoberfläche enthält somit neben Verdunstung und konvektivem Austausch auch die Absorption und Emission von langwelliger Strahlung.

Das ausgeprägte Minimum des Absorptionskoeffizienten von destilliertem Wasser im sichtbaren Bereich wird bei Seewasser durch natürliche Verunreinigungen stark abgeflacht (Symbole in Bild 2 [10, 11, 12]), so daß man für diesen Strahlungsanteil in guter Näherung einen mittleren Absorptionskoeffizienten δ annehmen kann. Die Integration von Gl. (2) ergibt dann:

$$I(s) = I_0 e^{-\delta s} \quad (3)$$

I_0 ist die Strahlungsintensität an der Seeoberfläche.

Die Strahlrichtung s schließt mit der vertikalen Koordinatenachse z über Wasser den Zenitwinkel α , nach der Brechung unter Wasser den Winkel β ein. Zur Ermittlung der vertikalen Strahlungsverteilung ist deshalb eine Umformung von Gl. 3 nötig. Für die parallele direkte Sonnenstrahlung ist dies ohne Schwierigkeiten möglich (Bild 3). Es ergibt sich für die Strahlungsstromdichte durch eine horizontale Fläche in der Tiefe z

$$I(z) \cos \beta = I(\alpha) (1 - r(\alpha)) \cos \alpha e^{-\delta \sec \beta z} \quad (4)$$

Die rechte Seite vor der e-Funktion ist die durch die Oberfläche eintretende Strahlung unter Berücksichtigung des Reflexionsvermögens $r(\alpha)$ der Oberfläche. Das Produkt $\delta \sec \beta$ im Exponenten der e-Funktion kann als vertikaler Absorptionskoeffizient gedeutet werden. Der Einfluß schräg einfallender Parallelstrahlung kann also durch eine Erhöhung des Absorptionskoeffizienten δ erfaßt werden, die bei einem Brechungsindex $n = 1,33$ für Wasser maximal 51% bei horizontaler Einstrahlung beträgt ($\sec(\arcsin(1/n)) = \sec 48,6^\circ = 1,51$). Der größte Teil der täglichen Einstrahlung, ca. 80%, erfolgt jedoch in fast allen Breiten ($< 85^\circ$) über die Mittagszeit in einem Zeitraum etwa der halben Sonnenscheindauer [13]. In dieser Zeit ändert sich der Zenitwinkel nur wenig, so daß mit einem mittleren Wert für $\sec \beta$ gerechnet werden kann, der z.B. in unseren Breiten (47°) um 1,2 beträgt.

Zur Ermittlung der vertikalen Verteilung der diffusen Himmelsstrahlung im See ist eine Integration über den ganzen Halbraum nötig. Man kann jedoch zeigen, daß sich auch diese Verteilung näherungsweise durch eine e-Funktion beschreiben läßt, wenn man sich die Himmelsstrahlung ersetzt denkt durch ein schräg einfallendes, paralleles Bündel, das in der jeweiligen Tiefe z die gleiche Wirkung hervorruft. Für den Sekans des Einfallswinkels β dieses Bündels ergibt sich unter der Wasseroberfläche der Wert 1,19, in einer Tiefe, in der noch 1% der ursprünglichen Himmelsstrahlung vorhanden ist, der Wert 1,12 [13].

Die Ausbreitung sowohl schräg einfallender Sonnenstrahlung als auch diffuser Himmelsstrahlung läßt sich also durch die in Vereinfachung 3 angegebene, einfache Beziehung

$$q(z) = q_0 e^{-\delta z} \quad (5)$$

beschreiben, wenn man δ als vertikalen Absorptionskoeffizienten auffaßt, der gegenüber dem tatsächlichen Absorptionskoeffizienten um ca. 20% erhöht ist. Er kann direkt aus der Messung der vertikalen Strahlungsverteilung ermittelt werden. q_0 ist die Strahlungsstromdichte unmittelbar unter der Oberfläche.

Eine Reihe von Messungen an verschiedenen Seen bestätigen die in Gl. (5) enthaltenen Näherungen [14]. In Bild 4 ist die Strahlungsstromdichte $q(z)$, bezogen

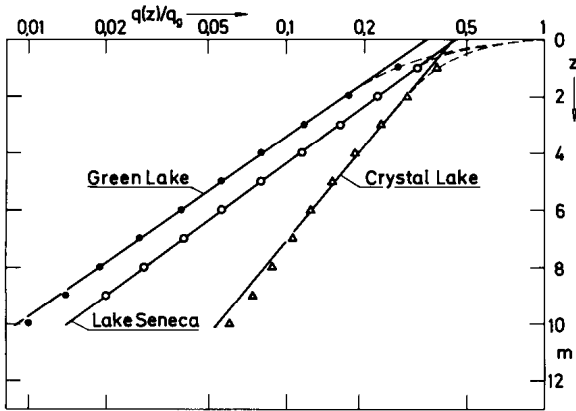


Bild 4. Strahlungsverteilung einiger Seen in den USA

auf die Gesamtstrahlungsstromdichte über alle Wellenlängen, q_g , halblogarithmisch über der Tiefe z aufgetragen. Verläufe nach Gl. (5) stellen sich dabei als Geraden dar. Die Meßwerte weichen nur in Tiefen kleiner als 1 m von der Näherungsgeraden ab, wo die UV- und UR-Anteile der einfallenden Strahlung absorbiert werden. Der Abszissenabschnitt gibt den bezogenen Anteil q_0 der kurzwelligen Strahlung an der Gesamtstrahlung an.

Auch der Einfluß der Lichtstreuung auf die Strahlungsverteilung wird durch Gl. (5) ausreichend berücksichtigt. Er ist bei den meisten Seen gegenüber der Absorption von untergeordneter Bedeutung und wird, da es sich primär um Vorwärtsstreuung an den Wassermolekülen handelt, in jedem Fall durch den aus der gemessenen Strahlungsverteilung bestimmten vertikalen Absorptionskoeffizienten δ erfaßt.

Mit den hier beschriebenen Vereinfachungen reduziert sich das Differentialgleichungssystem auf die eindimensionale Wärmeleitungsgleichung mit inneren Wärmequellen. Mit den dimensionslosen Variablen bzw. Parametern

$$\begin{aligned} \zeta &= \delta z & (6a) \\ \tau &= a \delta^2 t & (6b) \\ \theta &= (\delta \lambda \delta) / q_0 & (6c) \\ \sigma &= q_0 / q_v & (6d) \\ \Lambda &= \delta L & (6e) \end{aligned}$$

lautet sie im Fall I und II

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} + e^{-\zeta} \tag{7a}$$

bzw. im Fall III unter Berücksichtigung der zusätzlichen Wärmequelle durch die am Boden reflektierte Strahlung

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \zeta^2} + e^{-\zeta} + e^{-2\Lambda + \zeta}. \tag{7b}$$

Die Anfangsbedingung entspricht in allen drei Fällen dem gleichmäßig durchmischten See

$$\theta(\zeta) = 0 \quad \text{für} \quad \tau = 0 \tag{8}$$

wobei θ die dimensionslose Übertemperatur über dieser homogenen Ausgangstemperatur ist.

Die gemeinsame Randbedingung an der Oberfläche lautet

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = -\sigma \quad \text{für} \quad \zeta = 0 \tag{9}$$

Als Randbedingung am Boden gilt im Fall I

$$\theta \rightarrow 0 \quad \text{für} \quad \zeta \rightarrow \infty \tag{10a}$$

für Fall II

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = e^{-\Lambda} \quad \text{für} \quad \zeta = \Lambda \tag{10b}$$

und im Fall III

$$\frac{\partial \theta}{\partial \zeta} = 0 \quad \text{für} \quad \zeta = \Lambda \tag{10c}$$

Die Lösung der Gln. (7a) und (7b) ist mit Hilfe einer Laplace-Transformation geschlossen möglich. Es ergibt sich für den sehr tiefen See

$$\begin{aligned} \theta &= (\sigma + 1) 2\sqrt{\tau} \operatorname{erfc} \sqrt{\tau} - e^{-\zeta} + \\ &+ \frac{1}{2} e^{\tau} [e^{-\zeta} \operatorname{erfc}(\sqrt{\tau} - \sqrt{\eta}) + e^{\zeta} \operatorname{erfc}(\sqrt{\tau} + \sqrt{\eta})] \end{aligned} \tag{11a}$$

mit $\eta = \zeta^2 / (4\tau)$.

Der Temperaturverlauf im flachen See bei vollständiger Absorption (Fall II) lautet

$$\theta = \frac{\sigma + 1}{\Lambda} \left((\Lambda - \zeta)^2 / 2 + \tau - \Lambda^2 / 6 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{k^2 \pi^2 / \Lambda^2} \right) -$$

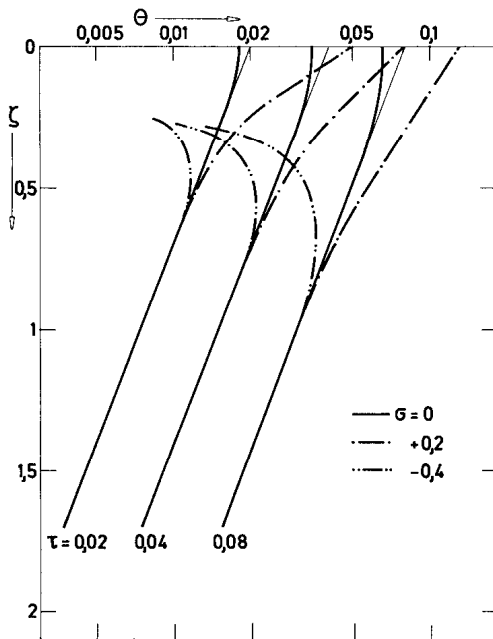


Bild 5. Dimensionsloser Temperaturverlauf $\theta(\zeta)$ nach Gl. (11a)

stellt. An ihm sollen die wesentlichen Eigenschaften der Lösung diskutiert werden. Man sieht, daß in den tieferen Bereichen der Temperaturverlauf unabhängig ist vom Energieaustausch an der Oberfläche, σ . Die stabilen Temperaturprofile in der Tiefe werden sich also durch eine einfachere Beziehung beschreiben lassen. Da Realzeiten von einigen Monaten dimensionslosen Zeiten von der Größenordnung 10^{-2} entsprechen, findet man diese Funktion durch eine Abschätzung für kleine Zeiten im Unterbereich der Laplace-Transformation.

Sie lautet:

$$\theta = \tau e^{-\zeta} \tag{12}$$

Der Temperaturverlauf in der Tiefe ist, in Übereinstimmung mit Bild 5, linear von der Zeit und exponentiell von der Tiefe abhängig. In dimensionsbehafteter Form besteht außerdem wegen Gl. (6c) eine lineare Abhängigkeit vom sichtbaren Strahlungsstrom q_0 . Gl. (12) ist die Lösung einer vereinfachten Form der Differentialgleichung (7a), nämlich

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = e^{-\zeta} \tag{13}$$

Die Temperaturentwicklung im Hypolimnion wird allein von der Absorption der sichtbaren Strahlung bestimmt.

Im oberen Bereich hängen die Temperaturverläufe stark von σ ab. Für positive Werte von σ , also bei Wärmezufuhr an der Oberfläche, ergeben sich stabile Profile in Übereinstimmung mit der Wirklichkeit. Negative Werte von σ , d.h. Wärmeabfuhr, liefern instabile Profile, die in Wirklichkeit nicht auftreten, da schon bei geringer Unterkühlung der Oberfläche eine Konvektionsbewegung einsetzt, die für eine gleichmäßig durchmischte Schicht sorgt. Bei einer solchen adiabaten Durchmischung muß die innere Energie konstant bleiben, d.h. die innere Energie der durchmischten Schicht muß gleich der inneren Energie dieser Schicht bei einem Temperaturverlauf nach Gl. (11a) sein. Da bei konstanten Stoffwerten die innere Energie der Fläche unter dem Temperaturprofil entspricht, läßt sich allgemein die Mischungstiefe ζ_e entsprechend Bild 6 aus der Gleichheit der schraffierten Flächen bestimmen. Man kann jedoch ζ_e aus einer einfachen Wärmebilanz ermitteln, wenn man berücksichtigt, daß ζ_e im Gültigkeitsbereich der Näherungsgleichung (12)

$$-e^{-\zeta} + \frac{1}{\Lambda} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{k^2 \pi^2 / \Lambda^2 + 1} \right) \tag{11b}$$

$$- \frac{e^{-\Lambda}}{\Lambda} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \psi_k}{k^2 \pi^2 / \Lambda^2 + 1} \right)$$

mit $\psi_k = \cos(k\pi\zeta/\Lambda) e^{-k^2 \pi^2 \tau / \Lambda^2}$.

Bei vollständiger Reflexion am Boden (Fall III) ergibt sich

$$\theta = \frac{\sigma + (1 - e^{-2\Lambda})}{\Lambda} \left((\Lambda - \zeta)^2 / 2 + \tau - \Lambda^2 / 6 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{k^2 \pi^2 / \Lambda^2} \right) - e^{-\zeta} - e^{-2\Lambda + \zeta} + \frac{1 - e^{-2\Lambda}}{\Lambda} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\psi_k}{k^2 \pi^2 / \Lambda^2 + 1} \right) \tag{11c}$$

3 Diskussion der Ergebnisse für den tiefen und flachen See

In Bild 5 ist der Temperaturverlauf $\theta(\zeta)$ im tiefen See nach Gl. (11a) halblogarithmisch für verschiedene Zeiten τ und Oberflächenrandbedingungen σ darge-

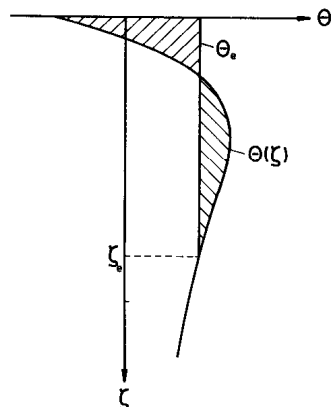


Bild 6. Bestimmung der Dicke ζ_e und der Temperatur θ_e des Epilimnions

liegt. Es ergibt sich als Bestimmungsgleichung für die Mischungstiefe ζ_e

$$(1 + \zeta_e) e^{-\zeta_e} = 1 + \sigma \tag{14}$$

Die Dicke des Epilimnions ζ_e und damit die Lage der Sprungschicht hängt nur von der Randbedingung an der Oberfläche σ , und wegen Gl. (6a) vom Absorptionskoeffizienten ab. Sie ist bei konstanten Randbedingungen keine Funktion der Zeit. Das rechtfertigt die angewandte Methode, die wirkliche kontinuierliche Mischung durch die energetische Mittelung des im Zeitraum τ entstandenen instabilen Temperaturprofils zu ersetzen.

Im Fall II entsteht durch die Wärmezufuhr am Boden (Randbedingung (10b)) ebenfalls eine Konvektionszone, dessen Dicke $\Lambda - \zeta_h$ sich wie die des Epilimnions bestimmen läßt:

$$\Lambda - \zeta_h = 1 \tag{15}$$

Sie ist nicht nur von der Zeit, sondern auch von den Randbedingungen an der Oberfläche unabhängig. In dimensionsbehafteter Form ist sie gleich dem Kehrwert des Absorptionskoeffizienten. Zwischen den beiden Konvektionsgebieten gilt im Fall II die gleiche Beziehung (12) wie im Fall I.

Im Fall III liefert Gl. (11c) in den tieferen Bereichen bis zum Boden stabile Profile. Sie lassen sich wie im Fall I vereinfacht darstellen und unterscheiden sich von Gl. (12) durch die zusätzliche Wärmequelle als Folge der reflektierten Strahlung.

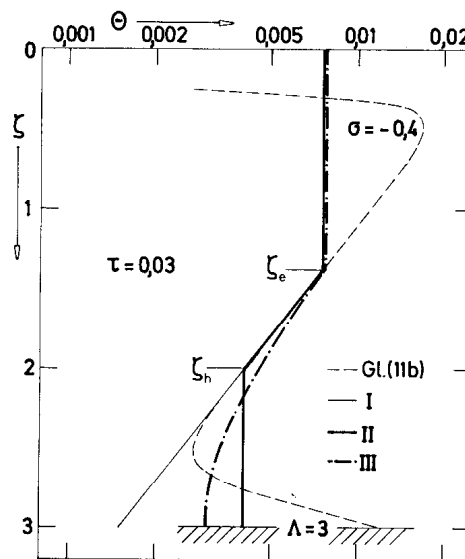


Bild 7. Vergleich der Temperaturverläufe nach Fall I bis III

$$\theta = \tau (e^{-\zeta} + e^{-2\Lambda + \zeta}) \tag{16}$$

Gleichung (16) erfüllt unter den gegebenen Bedingungen die Randbedingung (10c) identisch.

Durch die Gln. (12)-(16) werden Temperaturprofile beschrieben, die mit den wirklichen Temperaturprofilen übereinstimmen. (Vgl. auch Abschnitt 5 und 6). Sie sind in Bild 7 vergleichend zusammengestellt. Die Wahl der Parameter τ und σ entspricht den sommerlichen Gegebenheiten in unseren Breiten. An einen oberen Bereich ($0 - \zeta_e$) einheitlicher Temperatur (Epilimnion) schließt sich zunächst ein starker Gradient (Sprungschicht) und daran im Fall I ein exponentiell auf die Ausgangstemperatur des Frühjahrs abfallender Temperaturverlauf (Hypolimnion) an. Bodeneffekte in den Fällen II und III wirken sich in einer bodennahen Schicht von größenordnungsmäßig $1/\delta$ aus. Sie bleiben bereits ab einer Tiefe $\Lambda = 3$ ohne Einfluß auf die Vorgänge im Epilimnion. Das entspricht bei einem sauberen See mit $\delta = 0,2 \text{ m}^{-1}$ einer Tiefe $L = 15 \text{ m}$. Die maßgeblichen Parameter für die Ausbildung einer Sprungschicht und für die Form des Temperaturprofils sind das Verhältnis σ aus der Wärmeabfuhr q_v an der Oberfläche und dem sichtbaren Strahlungsstrom q_0 , und, in dimensionsbehafteter Form, der Absorptionskoeffizient δ .

In Hinblick auf Modelle der Gruppe I ist noch eine Diskussion der Lösungsgleichung (11a) in Bezug auf

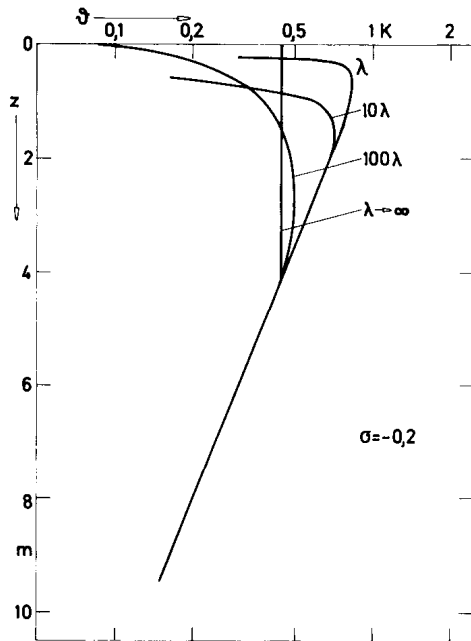


Bild 8. Einfluß der effektiven Wärmeleitfähigkeit

die Wärmeleitfähigkeit λ von Interesse. Diese Modelle berücksichtigen die Konvektion im Epilimnion durch eine effektive Wärmeleitfähigkeit λ_{eff} , die gegenüber λ um einen Faktor 10^2 und mehr erhöht ist. Der Einfluß von λ_{eff} ist in Bild 8 dargestellt. Man sieht, daß sich eine Erhöhung von λ im Epilimnion vergleichmäßig auswirkt, im Hypolimnion jedoch ohne Auswirkung bleibt. Man kann die Erhöhung von λ nicht beliebig fortsetzen, da mit λ auch die dimensionslose Zeit τ zunimmt und damit die Näherungsgleichung (12) ihre Gültigkeit verliert; man sieht jedoch, daß die Güte des verwendeten Turbulenzmodells in diesem Fall ohne Belang ist, solange es nur hohe Werte für λ_{eff} im Epilimnion und kleine Werte im Hypolimnion liefert. Das vorliegende Modell stellt mit $\lambda \rightarrow \infty$ im oberen Bereich und $\lambda \rightarrow 0$ im unteren Bereich den Grenzfall dar.

4 Rechenverfahren für beliebigen instationären Energieaustausch

Die Ergebnisse des vorhergehenden Abschnitts ermöglichen die Aufhebung der Einschränkung 5 und die Berücksichtigung instationärer Randbedingungen in einem schrittweisen Verfahren.

Im Epilimnion ergibt jede Mittelung nach Gl. (14) ein konstantes, der Anfangsbedingung (8) entsprechendes Temperaturprofil ϑ_e . Es kann also nach jedem Zeitschritt erneut die beschriebene Methode - Berechnung eines instabilen Temperaturprofils mit anschließender energetischer Mittelung - angewendet werden, die als Ergebnis die Temperaturerhöhung gegenüber dem vorhergehenden Zeitschritt liefert. Solange sich dabei die Sprungschicht nach oben verlagert, gibt Gl. (14) die Dicke des Epilimnions exakt an. Sinkt die Sprungschicht tiefer, bleibt zumindest die qualitative Aussage erhalten.

Im Hypolimnion ergibt sich die lokale Temperatur zu einem bestimmten Zeitpunkt t wegen der linearen Abhängigkeit ϑ von t und q_0 durch Summation einzelner Temperaturerhöhungen ϑ_i , die sich entsprechend Gl. (12) oder Gl. (16) für einen Zeitraum t_i und den in diesem Zeitraum herrschenden mittleren Strahlungsstrom q_{0i} berechnen lassen und zwar im Fall I und II aus

$$\vartheta(z, t) = \delta / (\rho c) e^{-\delta z} \sum_i q_{0i} t_i \quad (17)$$

und im Fall III aus

$$\vartheta(z, t) = \delta / (\rho c) (e^{-\delta z} + e^{-\delta(2L-z)}) \sum_i q_{0i} t_i \quad (18)$$

Da die Mischungszone am Boden im Fall II weder von der Zeit noch vom Strahlungsstrom q_0 abhängt, ist ihre Temperatur immer gleich $\vartheta(t, L - 1/\delta)$ und ergibt sich aus Gl. (17).

5 Vergleich mit gemessenen Temperaturprofilen von Seen

Die entsprechend Abschnitt 3 durch den mittleren Absorptionskoeffizienten δ und das Energiestromverhältnis σ bestimmte Form der Temperaturprofile in Seen und der von σ abhängige zeitliche Temperaturverlauf wird durch eine Vielzahl von Messungen an Seen unterschiedlichster geographischer Lage bestätigt [15]. Einige Beispiele sollen diesen Sachverhalt verdeutlichen. Die Temperaturverläufe im Hypolimnion müssen bei halblogarithmischer Auftragung $\ln \vartheta$ über ζ Geraden entsprechen, die für verschiedene Zeitpunkte bei Richtigkeit der Annahme eines mittleren, zeitlich konstanten Absorptionskoeffizienten wegen der linearen Ab-

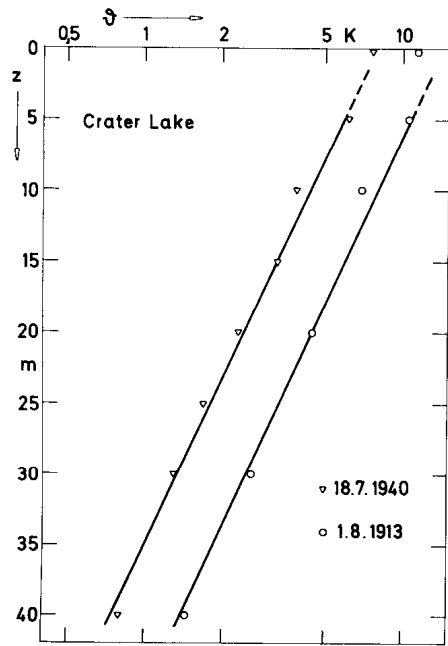


Bild 9. Crater Lake, Oregon, USA, 1913, 1940

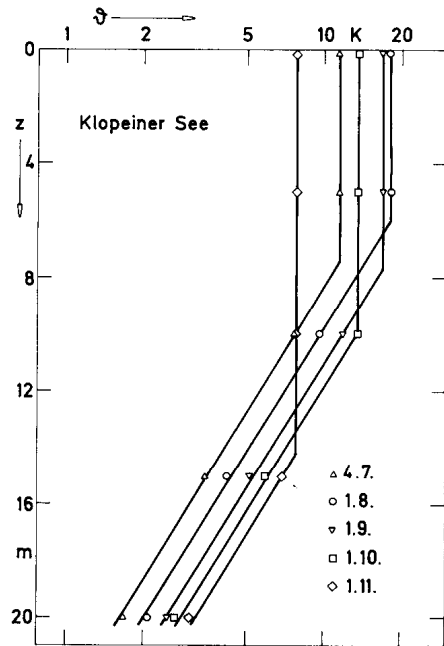


Bild 10. Klopeiner See, Kärnten, Österreich, 1933

hängigkeit von Zeit und sichtbarem Strahlungsstrom parallel verschoben sein müssen. Die Messungen am Crater Lake, USA [16] in Bild 9 liegen etwa 27 Jahre auseinander. Die Meßpunkte lassen sich bei beiden durch Geraden verbinden, deren Steigung $\delta = 0,062 \text{ m}^{-1}$ exakt dem von den Autoren gemessenen mittleren Absorptionskoeffizienten zwischen 0 und 60 m entspricht. Auch die Tiefentemperaturen der folgenden Bilder bestätigen qualitativ die Richtigkeit von Gl. (12).

Randbedingung am Boden. Nach Gl. (15) wirkt sich der Bodeneffekt bei einem Absorptionskoeffizienten $\delta = 0,22 \text{ m}^{-1}$ in einem Bereich $L - z_h$ von 4,55 m über dem Boden aus. Die Meßwerte bestätigen dieses Ergebnis.

Die dem jahreszeitlichen Gang des Temperaturverlaufs überlagerte tageszeitliche Temperaturentwicklung ist in Bild 12 am Beispiel des tropischen Ranu

Am Klopeiner See, Österreich in Bild 10 [17] und am Tachinger See, Bayern in Bild 11 [18] wird außerdem der Einfluß von σ auf die jahreszeitliche Temperaturentwicklung sichtbar. q_0 und q_v gehorchen in unseren Breiten näherungsweise Sinusfunktionen, die um etwa ein Vierteljahr phasenverschoben sind. Das Maximum von q_0 liegt im Hochsommer, das von q_v im Herbst. Der Quotient aus beiden, σ , durchläuft im März den Wert -1 (homogene Durchmischung des Sees nach Gl. (14)) und steigt dann rasch auf Werte um $-0,5$, die den Sommer über nur wenig variieren. Erst ab September sinkt σ wieder auf Werte unter -1 . In Übereinstimmung mit Gl. (14) ändert sich die Lage der Sprungschicht im Sommer nur wenig, um sich dann ab September rasch in die Tiefe zu verlagern.

Der 16 m tiefe Tachinger See in Bild 11 zeigt als Beispiel eines flachen Sees außerdem den Einfluß der

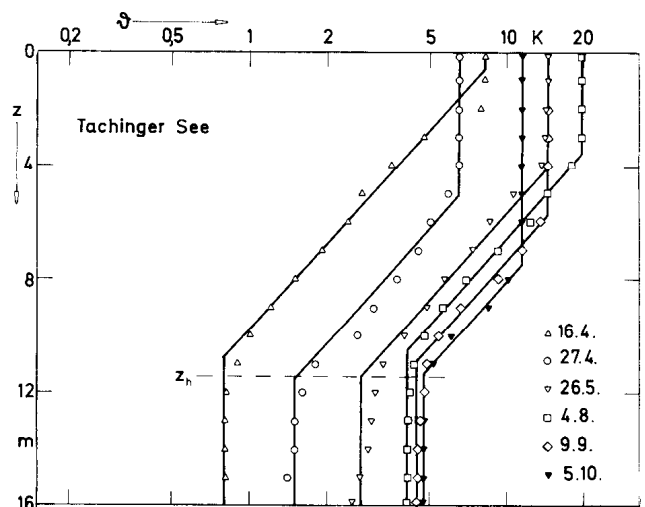


Bild 11. Tachinger See, Bayern, BRD, 1971

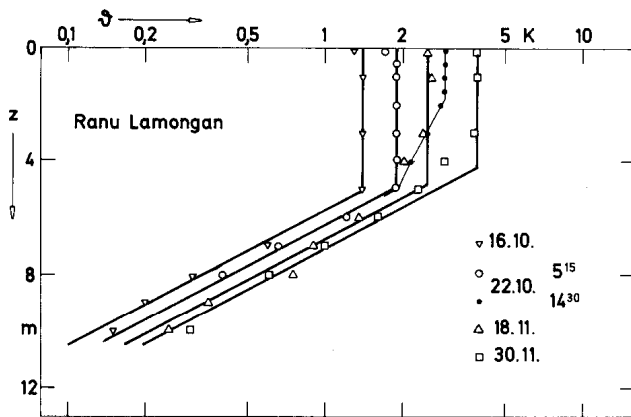


Bild 12. Ranu Lamongan, Java, Indonesien, 1928

Lamongan, Java, dargestellt [19]. Die Mächtigkeit des Epilimnions am frühen Morgen entspricht dem Tagesmittelwert von σ (Profile vom 22.10.1928). Nach Sonnenaufgang bildet sich mit zunehmender Einstrahlung, d.h. mit steigendem σ , eine überlagerte Schichtung aus. Unter Umständen kann dabei die Wärmezufuhr den Wärmeverlust überwiegen, σ also positive Werte annehmen, so daß vorübergehend stabile Profile entstehen. Die Erwärmung der Oberfläche ist dann sehr stark, darunter nimmt die Temperatur rasch ab, ein Effekt, der jedem Schwimmer bekannt ist. Am Abend und über Nacht löst sich diese Schichtung wieder auf, so daß am Morgen wieder ein durchmischtes Epilimnion vorliegt, dessen Dicke und Temperatur sich gegenüber dem Vortag entsprechend dem Tagesmittel von q_0 und q_v geändert hat.

6 Modellexperiment

In der Literatur finden sich keine Untersuchungen an Seen, in denen neben der Temperaturverteilung auch alle für die quantitative Überprüfung des Modells notwendigen Eingangsdaten, wie der Energiehaushalt und die Strahlungsverteilung zur Bestimmung des Absorptionskoeffizienten gemessen wurden. Es wurden deshalb Modellexperimente durchgeführt, in denen die Vorgänge im tiefen See (Fall I) simuliert wurden. Die Abmessungen des Modellsees betragen für Länge, Breite und Tiefe $300 \times 100 \times 450$ mm. Aus Gründen der geometrischen Ähnlichkeit mußte deshalb der maßgebliche Modellparameter, der Absorptionskoeffizient, Werte um 8 m^{-1} annehmen. Dadurch ließ sich ein

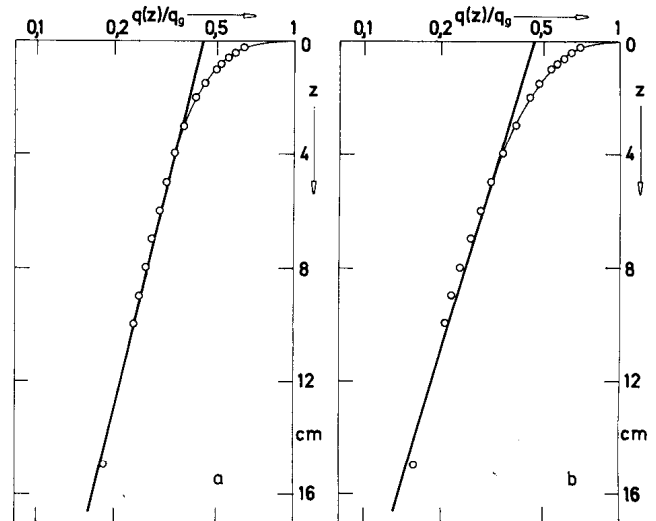


Bild 13. Strahlungsverteilung im Modellsee a) ohne Filter, b) mit Filter 212

Jahreszyklus in der Natur im Labor in einem Tag nachzubilden (vgl. Gln. (6a) und (6b)).

Als Versuchsmedium wurde destilliertes Wasser verwendet. Um den gewünschten Wert für δ zu erhalten, mußte deshalb die Einstrahlung in einem Spektralbereich um $0,9 \mu\text{m}$ erfolgen (vgl. Bild 2).

Als Strahlungsquelle diente eine Xenon-Langbogenlampe, Typ XQ0, der Firma Osram, die im Bereich zwischen $0,8 \mu\text{m}$ und $1 \mu\text{m}$, also im nahen UR mehrere Intensitätsmaxima hat. Die ebenfalls vorhandenen sichtbaren Strahlungsanteile wurden in einigen Versuchen durch Vorschaltung eines Reflexionsfilters ausgeblendet. Dadurch ließ sich der Wert des Absorptionskoeffizienten in begrenztem Umfang variieren. Mit Hilfe eines elliptischen Kollimatorspiegels und eines Parabolspiegels aus Aluminium wurde Parallelstrahlung gleichmäßiger Intensitätsverteilung erzeugt. Die sich ergebende Strahlungsverteilung in der Versuchsküvette ist in Bild 13 dargestellt, und zwar ohne Verwendung eines Filters (a) und bei Ausblendung des sichtbaren Anteils mit Hilfe eines Kaltlichtspiegels vom Typ 212 der Fa. Schott (b). Der Strahlungsverlauf ist mit den Verhältnissen im wirklichen See vergleichbar. Nach Absorption der (sehr) langwelligen Anteile auf den ersten Zentimetern gehorcht die Strahlungsverteilung Gl. (5). Als mittlere Absorptionskoeffizienten ergeben sich $\delta = 5,65 \text{ m}^{-1}$ (a) bzw. $\delta = 7,5 \text{ m}^{-1}$ (b).

Die Wärmeabfuhr an der Oberfläche erfolgte durch Verdunstung. Die Wärmestromdichte q_v wurde aus

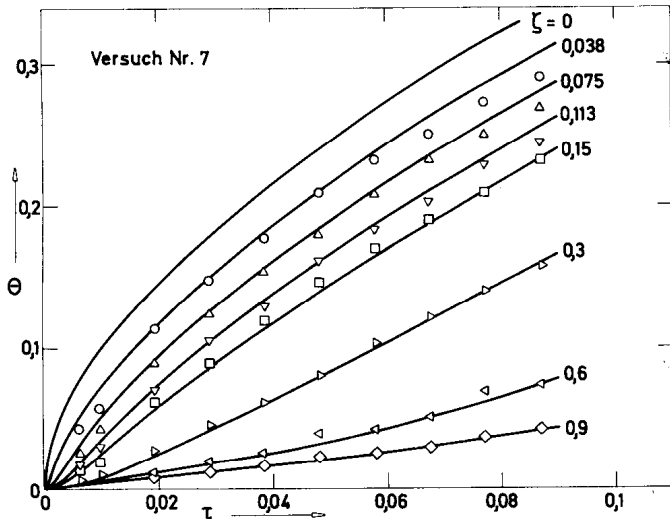


Bild 14. Temperaturverteilung $\theta(\tau)$ bei stabiler Schichtung (Versuchsdauer 3 h)

der Feuchtigkeitsaufnahme der über die Wasseroberfläche streichenden Luft mit Hilfe eines kapazitiven Feuchtigkeitsmeßgerätes bestimmt. Die Messung der Temperaturverteilung wurde mit Nickelchrom-Konstantan-Thermoelementen ausgeführt. In den durchgeführten Versuchsreihen wurden die beiden grundlegenden Annahmen des Modells überprüft, nämlich die Aufteilung des Strahlungsstroms in Randbedingung und Wärmequelle (Vereinfachung 3) und die Berücksichtigung der Konvektion im Epilimnion durch die in Gl. (14) enthaltene Mischungsregel. Bei der Auswertung der Versuche wurde durch Anpassung der berechneten Profile (ausgezogene Linien) an eine Temperaturmessung (Symbbole) ein theoretisches Wärmestromverhältnis σ' bestimmt und daraus durch Vergleich mit dem gemessenen σ der gesamte Meßfehler des Versuchs ermittelt. Bild 14 zeigt den zeitlichen Temperaturverlauf $\theta(\tau)$ mit ζ als Parameter bei der Erzeugung stabiler Profile zur Überprüfung von Vereinfachung 3. Gerechnete und gemessene Temperaturverläufe sind in guter Übereinstimmung, was die Richtigkeit des Modells bestätigt, der gesamte Meßfehler beträgt etwa 10% ($\sigma = 0,89$; $\sigma' = 0,80$).

In Bild 15 ist die instationäre Ausbildung einer Konvektionszone simuliert. Nach Ausbildung stabiler Profile im Bereich A ($\sigma = 0,9$; $\sigma' = 0,8$) wurde der Verdunstungswärmestrom erhöht (Bereich B, $\sigma = -0,63$; $\sigma' = -0,5$). Es bildet sich eine Konvektionszone aus, die sich rasch abkühlt und in tiefere Bereiche des Mo-

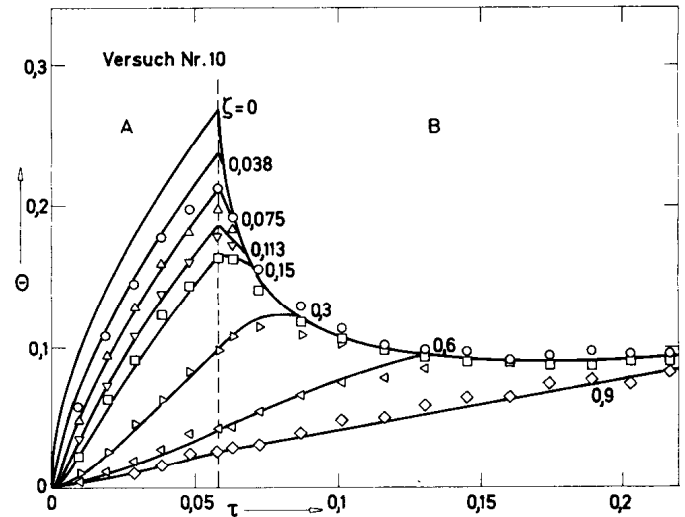


Bild 15. Instationäres Verhalten einer Konvektionszone (Epilimnion)

dellsees übergreift. Abkühlung und Absinken hören auf, sobald die Dicke des Epilimnions den sich aus Gl. (14) ergebenden Wert ζ_e erreicht hat. Danach erfolgt der Temperaturanstieg der Konvektionszone gemäß Gl. (12) (etwa ab $\tau = 0,2$). Auch in diesem Versuch bestätigt die gute Übereinstimmung zwischen Rechnung und Meßwerten die Brauchbarkeit des vorgestellten Modells.

Literatur

1. Hutchinson, G.E.: A Treatise on Limnology, Vol. 1, New York 1957
2. Munk, W.H.; Anderson, E.R.: Notes on a Theory of the Thermocline, J. Marine Res. 7 (1948), pp. 276/295
3. Sundaram, T.R.; Rehm, R.G.: The Seasonal Thermal Structure of Deep Temperate Lakes, Tellus 25 (1973) 157/167
4. Spalding, D.B.; Svensson, U.: The Development and Erosion of the Thermocline. Report No. 3004, Universität Lund, Schweden (1976)
5. Emden, R.: Zum Temperaturproblem der Seen. Helv. physica Acta 13 (1940) 396/434
6. Snider, D.M.; Viskanta, R.: Radiation Induced Thermal Stratification in Surface Layers of Stagnant Water. J. Heat Transfer (1975) 35/40
7. Dake, J.M.K.; Harleman, D.R.F.: Thermal Stratification in Lakes, Analytical and Laboratory Studies. Water Res. Res 5 (1969) 484/495
8. Irvine, M.W.; Pollack, J.B.: Infrared Optical Properties of Water and Ice Spheres. Icarus 8 (1968) 324/360
9. Hale, G.M.; Query, M.R.: Optical Constants of Water in the 200 nm to 200 μ m Wavelength Region. Applied Optics 12 (1973) 555/563
10. Czepa, O.: Strahlungsverhältnisse einiger Seen in Mecklenburg. Acta hydrophys. 3 (1955/56) 148/151

11. Sauberer, F.: Beiträge zur Kenntnis der optischen Eigenschaften der Kärntner Seen. Arch. Hydrobiol. 41 (1947) 259/314
12. Bachmann, R.W.; Goldman, Ch.R.: Hypolimnetic Heating in Castle Lake, California, Limnol. Oceanog. 10 (1965) 233/239
13. Lauscher, F.: Sonnen- und Himmelsstrahlung im Meer und in Gewässern, Handbuch der Geophysik, Bd. 8, S. 723/768 (1942-1961)
14. Birge, E.A.; Juday, Ch.: Transmission of Solar Radiation by the Water of Inland Lakes. Trans. Wiss. Acad. Sci. Arts. Lett. 24 (1929) 509/580, ibid. 1930, 1931, 1932
15. Bloß, S.: Temperaturverteilung in Seen, Dissertation, T.U. München 1977
16. Utterback, C.L., et al.: Some Chemical, Planktonic and Optical Characteristics of Crater Lake. Ecology 23 (1942) 97/103
17. Schmidt, W.: Temperaturmessungen in Ostalpenseen als Grundlage für eine Bestimmung des Klimas im Wasser. Met. Z. 37 (1935) 498/504
18. Näher, W.; Mangelsdorf, J.; Scheurmann, K.: Der Waginger-Tachinger See. Schriftenreihe der Bayerischen Landesstelle für Gewässerkunde, München, Heft 9 (1974)
19. Ruttner, F.: Hydrographische und hydrochemische Beobachtungen auf Java, Sumatra, Bali, Arch. Hydrobiol. Supp. 8 (1931) 197/454

Dr.-Ing. S. Bloß
Prof. Dr.-Ing. U. Grigull
Lehrstuhl A für Thermodynamik
Technische Universität München
Postfach 2022420, D-8000 München 2
Eingegangen am 17. August 1977