

Analytische Untersuchung von freier Konvektion und Filmsieden in laminaren Grenzschichten mit temperaturabhängigen Stoffwerten*

M. Reimann und U. Grigull, München

Analytical Investigation of Free Convection and Film Boiling in Laminar Boundary Layers with Temperature Dependent Properties

Abstract. A two-dimensional, stationary boundary layer model is derived which allows the treatment of free convection and film boiling on vertical plate and horizontal cylinder under complete consideration of temperature dependent thermophysical properties. Some qualities of these boundary layer solutions are discussed by eliminating the influences of geometry. For horizontal cylinders, a correction of heat transfer for small diameters is given.

Zusammenfassung. Ein zweidimensionales, stationäres Grenzschichtmodell wird entwickelt, das in geschlossener Form die Behandlung von freier Konvektion und Filmsieden an vertikaler Platte und horizontalem Zylinder unter vollständiger Berücksichtigung der Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte gestattet. Einige Eigenschaften der Grenzschichtlösungen werden unter Eliminierung der durch die Geometrie bedingten Einflüsse besprochen. Für den horizontalen Zylinder wird eine Korrektur des Wärmeübergangs für kleine Durchmesser angegeben.

<u>Bezeichnungen</u>			
A	Auftriebsglied	δ^*	Ersatzdicke für den Wärmeübergang
a, b, c	Konstanten	ΔT	Temperaturdifferenz $T - T_u$
C_P	spezifische Wärme bei konstantem Druck	$\tilde{e}(\kappa)$	Substitutionsfunktion (Gl. (17b))
d	Zylinderdurchmesser	$\tilde{e}(\kappa)$	Substitutionsfunktion (Gl. (12b))
$F(\xi), G(\xi)$	Funktionen der affinen Verzerrung	η	dimensionslose Koordinate normal zur Wand
g	Erdbeschleunigung	$\vartheta(\kappa)$	Grundfunktion des Auftriebsgliedes
\bar{G}	integraler Mittelwert von $G(\xi)$	κ	dimensionslose Koordinate der affinen Verzerrung
Gr	Grashof-Zahl	λ	Wärmeleitfähigkeit
h	Plattenhöhe	μ	dynamische Viskosität
H_{fd}	spezifische Verdampfungswärme	ν	kinematische Viskosität
k	Konstante	ξ	dimensionslose Koordinate in Wandrichtung
L	charakteristische Länge	π	3,14159 ...
n	Koordinate normal zur Wand	ρ	Dichte
Nu	Nußelt-Zahl	$\sigma(\kappa)$	Substitutionsfunktion (Gl. (19))
$p(\kappa)$	Grundfunktion der Stromfunktion	$\tau(\kappa)$	Substitutionsfunktion (Gl. (17a))
P	Druck	ψ	Stromfunktion
Pr	Prandtl-Zahl	$\chi(\kappa)$	Substitutionsfunktion (Gl. (12a))
q	Wärmestromdichte	$\dot{\omega}(\kappa)$	Substitutionsfunktion (Gl. (12c))
r	Zylinderradius		
s	Koordinate in Wandrichtung	Indizes	
t	Celsius-Temperatur	f	Zustand der gesättigten Flüssigkeit
T	absolute Temperatur	korr	korrigierter Wert für kleine Durchmesser
u	Geschwindigkeitskomponente in Wandrichtung	L	Bezug auf die charakteristische Länge
v	Geschwindigkeitskomponente normal zur Wand	Pl.	vertikale Platte
x	beliebige Koordinate	s	Sättigungszustand
α	Wärmeübergangskoeffizient	sd	Zustand des gesättigten Dampfes
β	isobarer Ausdehnungskoeffizient	u	Umgebungszustand
$\Gamma(\xi)$	charakt. Funktion für die Geometrie	w	Wert an der Wand
δ	Dampfschichtdicke beim Filmsieden, Grenzschichtdicke	Zyl.	horizontaler Zylinder
		∞	Grenzschichtlösung (Gr $\rightarrow \infty$ beim horiz. Zyl.)

* Auszug aus der von der Fakultät für Maschinenwesen und Elektrotechnik der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs genehmigten Dissertation über "Wärmeübergang bei freier Konvektion und Filmsieden - Allgemeines theoretisches Berechnungsverfahren und experimentelle

Überprüfung im kritischen Gebiet" des Diplom-Ingenieurs Michael Reimann. Berichterstatte Prof. Dr.-Ing. U. Grigull und Prof. Dr.-Ing. E. Winter. Die Dissertation wurde am 15. Juli 1974 bei der Technischen Universität eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen und Elektrotechnik am 6. November 1974 angenommen. Tag der Promotion 8. November 1974.

1. Einleitung

Durch die experimentelle Feststellung, daß Strömung und Temperaturfeld an einer genügend großen beheizten, vertikalen Platte Grenzschichtcharakter besitzen, hatten Schmidt und Beckmann [1] die Berechtigung nachgewiesen, die Ausgangsgleichungen für freie Konvektion in Grenzschichtgleichungen umzuformen. Unter mathematischer Unterstützung von Pohlhausen gelang den genannten Autoren eine Lösung dieses Gleichungssystems. In Anlehnung an diese Arbeit wurde von Herman [2] die Zylindergeometrie durch geeignete Verzerrungsfunktionen näherungsweise auf den Fall der vertikalen Platte zurückgeführt.

In beiden Fällen lassen sich die partiellen, nichtlinearen Differentialgleichungen auf den gleichen Satz gewöhnlicher, nichtlinearer Differentialgleichungen zurückführen. Dabei werden die Ausgangsgleichungen in geeigneter Weise dimensionslos gemacht. In dem zur Lösung anstehenden Satz gewöhnlicher Differentialgleichungen repräsentiert danach allein die Prandtl-Zahl die Eigenschaften des verwendeten Stoffes. Von Schmidt und Beckmann wurde eine Lösung für Luft ($Pr = 0,72$) angegeben.

Die recht aufwendigen numerischen Methoden, die mit diesem Verfahren verbunden sind, verhinderten zunächst eine systematische Behandlung. Nach Einführung der elektronischen Datenverarbeitungsanlagen gelang es Ostrach [3], Lösungen für zahlreiche Prandtl-Zahlen $0,01 \leq Pr \leq 1000$ anzugeben.

Es liegt nahe, die Gesetzmäßigkeiten für freie Konvektion auf das Filmsieden zu übertragen, wobei man zwei Differentialgleichungssysteme für Flüssigkeit und überhitzten Dampf betrachtet, die durch bestimmte physikalische Bedingungen miteinander verknüpft sind. Ein Lösungsverfahren der beiden Grenzschichtgleichungssysteme wurde von Koh [4] für die vertikale Platte angegeben. Diese Lösung für Filmsieden entspricht der Lösung für freie Konvektion von Schmidt und Beckmann [1].

Fritsch und Grosh [5] fanden, daß im kritischen Gebiet mit stark veränderlichen Stoffwerten die Theorie für freie Konvektion mit konstanten Stoffwerten nach Ostrach [3] Ergebnisse lieferte, die nur schlecht mit Wärmeübergangsmessungen übereinstimmen. Sie führten deshalb eine Erweiterung der Theorie von Schmidt und Beckmann durch, wobei Dichte und spezifische Wärme bei konstantem Druck als Funktionen der Temperatur in die Grenzschichtgleichungen eingeführt wurden, die restlichen Stoffwerte jedoch bei gemittelten Temperaturen errechnet und im weiteren Lösungsweg als Konstanten behandelt wurden. Dieses Verfahren wurde auch von No-

wak und Konanur [6] angewendet, die auch erstmals eine allgemeine Berücksichtigung der veränderlichen Stoffwerte versuchten. Ein wesentlicher Nachteil der beiden letztgenannten Untersuchungen scheint zu sein, daß in den zu lösenden Gleichungssystemen Ableitungen der Stoffwerte nach der Temperatur vorkommen, die selbst aus sehr genauen Zustandsgleichungen nur mit großen Unsicherheiten ermittelt werden können.

Mit einem neuartigen Substitutionsverfahren, das im folgenden dargestellt wird, sollen diese Schwierigkeiten umgangen werden. Es ist beabsichtigt, die Temperaturveränderlichkeit der Stoffwerte möglichst weitgehend und genau zu berücksichtigen, wobei die Fälle der freien Konvektion und des Filmsiedens an vertikaler Platte und horizontalem Zylinder in einem geschlossenen Lösungsverfahren zusammengefaßt werden sollen.

Bei dem eigenen Lösungsweg wie auch bei allen anderen bisher zitierten Untersuchungen wird vorausgesetzt, daß die Wandtemperatur T_w konstant ist. Im Schrifttum liegen für konstante Stoffwerte weitere Arbeiten mit verschiedenen Oberflächenbedingungen vor, wie z. B. örtlich veränderliche Temperatur oder Wärmestromverteilung [7]. Weiter setzen alle erwähnten Verfahren Grenzschichtströmung voraus, die Ergebnisse gelten also streng nur für den Grenzfall $Gr \rightarrow \infty$. Untersuchungen, die von dieser Voraussetzung abgehen, liegen für konstante Stoffwerte für die vertikale Platte von Yang und Jerger [8] und für den horizontalen Zylinder von Peterka und Richardson [9] vor. Aus Gründen, die im Laufe der Ableitung des Lösungsweges ersichtlich werden und um auch zu möglichst allgemein anwendbaren Aussagen zu kommen, werden in der vorliegenden Untersuchung nur beheizte Körper mit $T_w = \text{const.}$ und Strömung mit Grenzschichtcharakter betrachtet.

2. Ausgangsgleichungen

Die wesentlichen physikalischen Schlußfolgerungen bei laminarer Grenzschichtströmung lauten:

1. Der Außendruck P_u wird der Grenzschicht aufgeprägt;
2. Die Geschwindigkeit in Wandrichtung dominiert: $u \gg v$;
3. Bei Übertragung von Schubspannung verlaufen die Stromfäden parallel;
4. Wärmeleitung in Wandrichtung wird vernachlässigt. Ferner wird vorausgesetzt, daß die Energiedissipation vernachlässigbar ist. Beim Filmsieden findet der gesamte Temperaturabfall in der Dampfschicht statt,

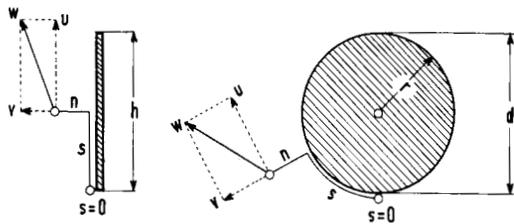


Bild 1. Koordinatensysteme

die Flüssigkeit sei auf $T = T_f = \text{const.}$ Weiter sollen beim Filmsieden Oberflächenkräfte an der Phasentrennfläche unberücksichtigt bleiben.

Unter diesen Voraussetzungen lauten die Ausgangsgleichungen mit den in Bild 1 eingetragenen Bezeichnungen für freie Konvektion und für die Dampfschicht beim Filmsieden:

1. Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial s} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial n} (\rho v) = 0 ; \tag{1}$$

2. Bewegungsgleichung

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial s} + v \frac{\partial u}{\partial n} \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial n} \right) + \rho g A \Gamma(s/L) \tag{2}$$

mit den geometrischen Bedingungen

$$L = h ; \quad \Gamma(s/L) = 1 \tag{2a}$$

für die vertikale Platte,

$$L = r = d/2 ; \quad \Gamma(s/L) = \sin s/r \tag{2b}$$

für den horizontalen Zylinder und mit dem Auftriebsglied

$$A = \frac{\rho u - \rho}{\rho} ; \tag{2c}$$

3. Energiegleichung

$$C_P \left(u \frac{\partial T}{\partial s} + v \frac{\partial T}{\partial n} \right) = \frac{\partial}{\partial n} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right) . \tag{3}$$

Für die mitgeschleppte Flüssigkeit beim Filmsieden gelten die Ausgangsgleichungen:

1. Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial s} u_f + \frac{\partial}{\partial n} v_f = 0 ; \tag{4}$$

2. Bewegungsgleichung

$$u_f \frac{\partial u_f}{\partial s} + v_f \frac{\partial u_f}{\partial n} = \nu_f \frac{\partial^2 u_f}{\partial n^2} . \tag{5}$$

Bei Grenzschichtströmung wird der Außendruck der Grenzschicht aufgeprägt. Das Gleichungssystem (1,2,3) ist nur dann lösbar, wenn Rechenvorschriften für die Temperaturveränderlichkeit der thermodynamischen Zustandsgrößen und Transportgrößen bei $P_u = \text{const.}$ vorliegen. Das Gleichungssystem (4,5) der mitgeschleppten Flüssigkeit beim Filmsieden ist zusätzlich isotherm. Der Lösungsweg dieser Gleichungen soll hier nicht weiter verfolgt werden, da eine starke Vereinfachung des Gleichungssystems (1,2,3) vorliegt.

Das Gleichungssystem (1,2,3) stellt, zusammen mit Gleichungssystemen für die thermodynamischen Zustandsgrößen und Transportgrößen, einen Satz von drei gekoppelten partiellen Differentialgleichungen für die unbekannt Felder $u, v, T(s, n)$ dar. Führt man eine Stromfunktion Ψ so ein, daß

$$u = \frac{\rho w}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial n} ; \quad v = -\frac{\rho w}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial s} \tag{6a, b}$$

ist, so wird die Kontinuitätsgleichung (1) identisch erfüllt und es verbleiben zwei Differentialgleichungen für die unbekannt Felder $\Psi, T(s, n)$. Diese partiellen Differentialgleichungen können durch Einführung einer Ähnlichkeitsvariable in gewöhnliche Differentialgleichungen übergeführt werden.

3. Einführung neuer Variablen, Lösungsansätze und Substitutionen

Zunächst wird eine auf die charakteristische Länge L bezogene Grashof-Zahl definiert, deren Stoffwerte bei der Wandtemperatur T_w ermittelt werden:

$$Gr_L = \frac{L^3 g A_w}{\nu w} ; \tag{7}$$

weiter werden die folgenden dimensionslosen Variablen eingeführt:

$$\xi = \frac{s}{L} ; \quad \eta = \frac{n}{L} Gr_L^{1/4} ; \tag{8a, b}$$

$$\bar{\Psi} = \frac{\Psi}{\nu} Gr_L^{-1/4} ; \quad \bar{A} = \frac{A}{A_w} . \tag{9a, b}$$

Die Lösungsansätze

$$\kappa = \eta G(\xi) ; \tag{10}$$

$$\bar{\Psi}(\xi, \eta) = p(\kappa) F(\xi) ; \quad \bar{A}(\xi, \eta) = \theta(\kappa) \tag{11a, b}$$

haben den Inhalt, daß die Strömungs- und Temperaturprofile durch affine Verzerrung aus jeweiligen Grundpro-

filen hervorgehen. Von besonderer Wichtigkeit ist der Ansatz (11 b), der eine unerläßliche Voraussetzung für den weiteren Lösungsweg darstellt: Das Auftriebsglied A, die Temperatur T und damit alle anderen Stoffwerte hängen nur von der Variablen κ ab.

Mit diesen Voraussetzungen werden die folgenden Substitutionsfunktionen eingeführt:

$$\chi(\kappa) = \frac{\rho}{\rho(\kappa)} \frac{w}{w(\kappa)} p(\kappa); \tag{12 a}$$

$$\dot{\zeta}(\kappa) = \frac{\rho}{\rho(\kappa)} \frac{w}{w(\kappa)} \dot{p}(\kappa); \tag{12 b}$$

$$\ddot{w}(\kappa) = \frac{v(\kappa) \rho(\kappa)}{v \rho w} \ddot{\zeta}(\kappa). \tag{12 c}$$

Damit folgt für die Geschwindigkeitskomponenten und ihre Ableitungen:

$$u = v_w Gr_L^{1/2} \frac{1}{L} \dot{\zeta} F G; \tag{13 a}$$

$$v = -v_w Gr_L^{1/4} \frac{1}{L} \left(\dot{\zeta} \kappa \frac{F G'}{G} + \chi F' \right); \tag{13 b}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} = v_w Gr_L^{3/4} \frac{1}{L^2} \ddot{\zeta} F G^2; \tag{13 c}$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = v_w Gr_L^{1/2} \frac{1}{L^2} \left[\ddot{\zeta} \kappa F G' + \dot{\zeta} (F' G + G' F) \right]; \tag{13 d}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial n} \right) = \rho_w v_w^2 Gr_L \frac{1}{L^3} \ddot{\zeta} F G^3. \tag{13 e}$$

Hier bedeutet, wie auch stets in der weiteren Entwicklung, der Punkt Differentiation nach der Variablen κ ($\dot{} \equiv \frac{\partial}{\partial \kappa}$) und der Strich Differentiation nach der Variablen ξ ($' \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}$). Durch Einsetzen der Beziehungen (13) formt sich die Bewegungsgleichung (2) um zu

$$\dot{\zeta}^2 (G' F + F' G) F G - \dot{\zeta} \chi F F' G^2 = \frac{\rho}{\rho} \ddot{\zeta} F G^3 + \vartheta \Gamma(\xi). \tag{14}$$

Aus der in (2 c) angegebenen Definition des Auftriebsgliedes A folgt unmittelbar

$$\frac{dA}{dT} = \frac{\rho u}{\rho(T)} \beta(T). \tag{15}$$

Die Ableitung des Auftriebsgliedes nach einer beliebigen Ortskoordinate x lautet

$$\frac{\partial A}{\partial x} = \frac{dA}{dT} \frac{\partial T}{\partial x}. \tag{16}$$

Damit und mit den Substitutionsfunktionen

$$\dot{\tau}(\kappa) = \frac{\rho(\kappa) \beta_w}{\rho_u \beta(\kappa)} \dot{\vartheta}(\kappa); \tag{17 a}$$

$$\dot{\varepsilon}(\kappa) = \frac{\lambda(\kappa)}{\lambda_w} \dot{\tau}(\kappa) \tag{17 b}$$

gilt für die Übertemperatur $\Delta T = T - T_u$ sowie für die in der Energiegleichung (3) vorkommenden Ableitungen der Temperatur T

$$\Delta T = \frac{A_w}{\beta_w} \tau; \tag{18 a}$$

$$\frac{\partial T}{\partial n} = \frac{A_w}{\beta_w} Gr_L^{1/4} \frac{1}{L} \dot{\tau} G; \tag{18 b}$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = \frac{A_w}{\beta_w} \frac{1}{L} \kappa \dot{\tau} \frac{G'}{G}; \tag{18 c}$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \right) = \frac{\lambda_w}{\beta_w} A_w Gr_L^{1/2} \frac{1}{L^2} \varepsilon G^2. \tag{18 d}$$

Durch Einsetzen der Beziehungen (18) in die Energiegleichung (3) folgt mit der Abkürzung

$$\sigma(\kappa) = \frac{v_w}{v(\kappa)} Pr(\kappa) \chi(\kappa); \tag{19}$$

$$\ddot{\varepsilon} = -\sigma \dot{\varepsilon} \frac{F'}{G}. \tag{20 a}$$

Gl. (20 a) läßt sich einmal elementar integrieren:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_w \exp \left(- \frac{F'}{G} \int_0^\kappa \sigma d\kappa \right). \tag{20 b}$$

4. Rückführung der Ausgangsgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen

Eine Trennung nach Funktionen der beiden unabhängigen Variablen ξ und κ , d.h., eine erfolgreiche Anwendung der Lösungsansätze (10, 11) ist dann erreicht, wenn es gelingt, die beiden Funktionen F(ξ) und G(ξ) aus den vier Differentialgleichungen

$$F' = a G; \tag{21 a} \quad F F' G^2 = c \Gamma; \tag{21 c}$$

$$F^2 G G' = b \Gamma; \tag{21 b} \quad F G^3 = d \Gamma; \tag{21 d}$$

die aus den Gln. (14, 20) folgen, trotz der Überbestimmung eindeutig zu bestimmen, wobei a, b, c, d vorerst noch frei verfügbar sind. Durch (21 a) kann G(ξ) ele-

miniert werden, es verbleiben die beiden Differentialgleichungen

$$F^2 F' F'' = a^2 b \Gamma; \quad F F'^3 = a^2 c \Gamma, \quad (22a, b)$$

die gleiche oder zumindest angenähert gleiche Lösungen aufweisen müssen, und die Beziehung

$$d = c/a. \quad (22 c)$$

Nach (2 a) gilt für die vertikale Platte $\Gamma_{Pl.} = 1$. Durch Einsetzen des Lösungsansatzes

$$F_{Pl.}(\xi) = k \xi^m \quad (23)$$

in die Differentialgleichungen (22) und Wahl der freien Konstanten zu

$$a = 3; \quad b = -1; \quad c = 3; \quad (24)$$

folgt:

$$F_{Pl.}(\xi) = 2\sqrt{2}\xi^{3/4}; \quad G_{Pl.}(\xi) = \frac{\sqrt{2}}{2}\xi^{-1/4}. \quad (25a, b)$$

Für den horizontalen Zylinder gilt nach (2 b) $\Gamma_{Zyl.} = \sin \xi$, die Ermittlung der Funktionen $F_{Zyl.}(\xi)$ erfolgt in Übereinstimmung mit dem von Hermann [2] angegebenen Weg. Es ergeben sich durch numerische Integration der Differentialgleichungen (22) mit einem Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung Lösungen für $F_{Zyl.}$ und $G_{Zyl.}$, die an der Stelle $\xi = \pi/2$ in Funktionswert, Steigung und Krümmung exakt übereinstimmen, bei $\xi = 0$ bzw. $\xi = \pi$ jedoch voneinander abweichen. Die Konstanten a, b, c nehmen damit für den horizontalen Zylinder die gleichen Werte an, wie sie für die vertikale Platte in (24) wiedergegeben sind.

Im folgenden werden die Lösungen der Differentialgleichung (22 b) weiterverwendet. Die numerischen Ergebnisse sind in [10], dort Anhang A1, zusammengestellt. Diese Ergebnisse stimmen gut mit den von Hermann [2] angegebenen Werten überein.

Es konnte nachgewiesen werden, daß die vier Differentialgleichungen (21) für die vertikale Platte identisch gleiche und für den horizontalen Zylinder angenähert gleiche Lösungen aufweisen. Mit den Werten (24) für die Konstanten a, b, c und mit (22 c) folgt für die Ausgangsgleichungen:

$$\ddot{w} = \frac{\rho}{\rho_w} (2 \dot{\zeta}^2 - 3 \ddot{\zeta} \chi - \vartheta); \quad (26 a)$$

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_w \exp\left(-3 \int_0^\kappa \sigma \, d\kappa\right). \quad (26 b)$$

Durch eine analoge Betrachtung ergibt sich für die mitgeschleppte Flüssigkeit beim Filmsieden:

$$\ddot{p}_f = \frac{v_w}{v_f} (2 \dot{p}_f^2 - 3 \ddot{p}_f p_f). \quad (27)$$

Zur Auswertung des Wärmeüberganges werden integrale Mittelwerte der Funktion $G(\xi)$ benötigt. Für die vertikale Platte folgt

$$\bar{G}_{Pl.} = \int_0^1 G_{Pl.}(\xi) \, d\xi = 0,9428; \quad (28 a)$$

für den horizontalen Zylinder ergibt sich

$$\bar{G}_{Zyl.} = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi G_{Zyl.}(\xi) \, d\xi = \frac{F(\pi)}{a\pi} = 0,6120. \quad (28 b)$$

5. Rand- und Verknüpfungsbedingungen für die Ausgangsgleichungen

5.1. Randbedingungen an der Wand

An der Wand ($n = 0$) gilt $T = T_w$; $A = A_w$ und $u = v = 0$, oder, in den transformierten Koordinaten:

$$\kappa = 0: \quad \dot{p}_w = \dot{\zeta}_w = \dot{\varepsilon}_w = 0; \quad p_w = \chi_w = \sigma_w = 0; \quad (29a, b)$$

und mit Gleichung (18 a)

$$\tau_w = \frac{\Delta T_w \beta_w}{A_w}. \quad (29 c)$$

Durch Einsetzen in Gl. (26a) folgt ferner

$$\ddot{w}_w = 1. \quad (29 d)$$

Eigenwerte des Gleichungssystems sind

$$\dot{\vartheta}_w = \dot{\tau}_w = \dot{\varepsilon}_w; \quad \ddot{w}_w = \dot{\zeta}_w. \quad (29e, f)$$

5.2. Randbedingungen im Unendlichen bei freier Konvektion

Das Strömungsfeld und das Temperaturfeld muß für $n \rightarrow \infty$ abklingen, deshalb folgt $u = 0$; $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ und $T = T_u$;

$A_w = 0$; $\frac{\partial A_w}{\partial n} = 0$. In den transformierten Koordinaten

gilt:

$$\kappa \rightarrow \infty: \quad \dot{\zeta}_u = 0; \quad \dot{\zeta}_u = 0; \quad (30a, b)$$

$$\dot{\vartheta}_u = \tau_u = 0; \quad \dot{\vartheta}_u = \dot{\tau}_u = \dot{\varepsilon}_u = 0. \quad (30c, d)$$

5.3. Verknüpfungs- und Randbedingungen an der Phasentrennfläche beim Filmsieden

Beim Filmsieden findet voraussetzungsgemäß der gesamte Temperaturabfall in der Dampfschicht statt, die Flüssigkeit (Index f) befindet sich im Sättigungszustand. Der Sättigungszustand des Dampfes an der Phasentrennfläche wird durch den Index "s" charakterisiert. Die Phasentrennfläche stellt die Isotherme $T_f = T_{sd}$ dar. Die erste Randbedingung lautet:

$$\underline{\kappa_f = \kappa_{sd}}; \quad \tau_{sd} = 0; \quad \dot{\vartheta}_{sd} = \frac{\rho_w}{\rho_{sd}} \frac{\rho_f - \rho_{sd}}{\rho_f - \rho_w}. \quad (31a, b)$$

Nun wird eine Energiebilanz an der Phasentrennfläche aufgestellt, die besagt, daß die Energie, die durch Verdampfung verbraucht wird, gleich der zur Phasentrennfläche hintransportierten Wärmemenge ist. Diese Energiebilanz lautet mit den in Bild 2 eingetragenen Bezeichnungen

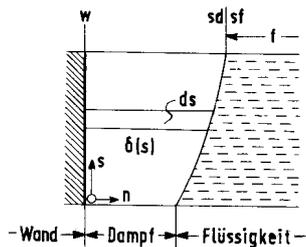


Bild 2. Kontrollelement für Energiebilanz

$$H_{fd} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^{\delta} \rho u \, dn = \lambda_{sd} \left[- \left(\frac{\partial T}{\partial n} \right)_{n=\delta} \right]. \quad (32)$$

Für das Integral auf der linken Seite von Gl. (32) folgt:

$$\int_0^{\delta} \rho u \, dn = v_w Gr_L^{1/4} F(\xi) \int_0^{\kappa_{sd}} \rho \zeta \, d\kappa \quad (33)$$

$$= v_w Gr_L^{1/4} \rho_{sd} \kappa_{sd} F(\xi).$$

Mit dieser Beziehung und mit (18 b) gilt:

$$\frac{\dot{\tau}_{sd}}{3 \kappa_{sd}} = - \frac{v_w \beta_w \rho_{sd} H_{fd}}{A_w \lambda_{sd}}; \quad (34)$$

diese Beziehung stellt die 2. Randbedingung an der Phasentrennfläche dar.

Zur Verknüpfung der für die Dampfschicht gültigen Bewegungsgleichung (26 a) mit der für die mitgeschleppte Flüssigkeit gültigen Gl. (27) wird die Haftbedingung $u = u_f$ und das Schubspannungsgleichgewicht $\mu_{sd} \frac{\partial u}{\partial n} = \mu_f \frac{\partial u_f}{\partial n}$ an der Phasentrennfläche herangezogen. Aus diesen Bedingungen folgt in den transformierten Koordinaten:

$$\dot{p}_{f, sd} = \dot{\zeta}_{sd}; \quad \ddot{p}_{f, sd} = \frac{\rho_{sd} v_{sd}}{\rho_f v_f} \ddot{\zeta}_{sd}. \quad (35 a, b)$$

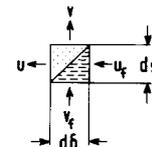


Bild 3. Kontrollelement für Massenbilanz

Darüber hinaus kann an der Phasentrennfläche noch eine Kontinuitätsgleichung aufgestellt werden, die mit den Bezeichnungen von Bild 3

$$d\delta (\rho_f u_f - \rho_{sd} u) = ds (\rho_f v_f - \rho_{sd} v). \quad (36)$$

lautet.

Unter Verwendung von

$$\frac{d\delta}{ds} = - Gr_L^{1/4} \kappa_{sd} \frac{G'}{G^2} \quad (37)$$

folgt

$$p_{f, sd} = \frac{\rho_{sd}}{\rho_f} \kappa_{sd}. \quad (38)$$

Die Beziehungen (35, 38) stellen die notwendigen Verknüpfungsbedingungen zwischen Dampf und Flüssigkeit dar.

5.4 Randbedingungen im Unendlichen für Filmsieden

Das Strömungsfeld muß beim Filmsieden für $n \rightarrow \infty$ ebenfalls abklingen; es muß also $u_f = 0$ und $\frac{\partial u_f}{\partial n} = 0$ sein. In den transformierten Koordinaten gilt:

$$\underline{\kappa \rightarrow \infty}: \dot{p}_f = 0; \quad \ddot{p}_f = 0. \quad (39)$$

6. Durchführung der Berechnungen

Die genaue Kenntnis des Verlaufs der Stoffwerte ist für das in den letzten Abschnitten skizzierte Verfahren eine wesentliche Voraussetzung. Die Eigenschaften der in

den Berechnungen herangezogen Stoffe Wasser und Kohlendioxid sind wohl am besten erforscht worden.

Gleichgewichtszustandsgrößen können am sichersten mit einem thermodynamisch konsistenten Gleichungssystem errechnet werden. Wie in [11] durch Vergleich verschiedener darartiger für Wasser gültige Gleichungssysteme gezeigt wurde, lassen sich neben der Dichte ρ auch höhere Ableitungen des Ausgangspotentials wie der isobare Ausdehnungskoeffizient β oder die spezifische isobare Wärmekapazität C_p sicher berechnen. Zur Berechnung dieser Zustandsgrößen wurde für Wasser die international vereinbarte Formulation [12] herangezogen, für Kohlendioxid fand das Gleichungssystem [13] Verwendung. Die Transportgrößen, also die dynamische Zähigkeit μ und die Wärmeleitfähigkeit λ , wurden für Wasser nach [14, 15] berechnet und für Kohlendioxid nach [16, 17].

Um die starke Temperaturabhängigkeit der Stoffwerte zu illustrieren, zeigen die Bilder 4 a, b die Prandtl-Zahl in Abhängigkeit von der Temperaturdifferenz $\Delta T = T - T_u$; und zwar in Bild 4 a für die bei freier Konvektion gewählten Drücke P_u und in Bild 4b für die gewählten Sättigungszustände bei Filmsieden. Zusätzlich wurden bei Filmsieden in Kohlendioxid Berechnungen bei den Sättigungstemperaturen $t_s = 10^\circ\text{C}$ und $t_s = 30,7^\circ\text{C}$ durchgeführt. Alle Umgebungszustände wurden ausgewählt, um einen Vergleich mit experimentellen Ergebnissen für den Wärmeübergang zu ermöglichen.

Mit diesen Voraussetzungen konnte die Lösung des Differentialgleichungssystems (26, 27) mit den entsprechenden Randbedingungen durch ein Runge-Kutta-Integrationsverfahren 4. Ordnung auf einer elektronischen Datenverarbeitungsanlage erfolgen. Zunächst wurden alle interessierenden Stoffwerte für $P_u = \text{const.}$ als Funk-

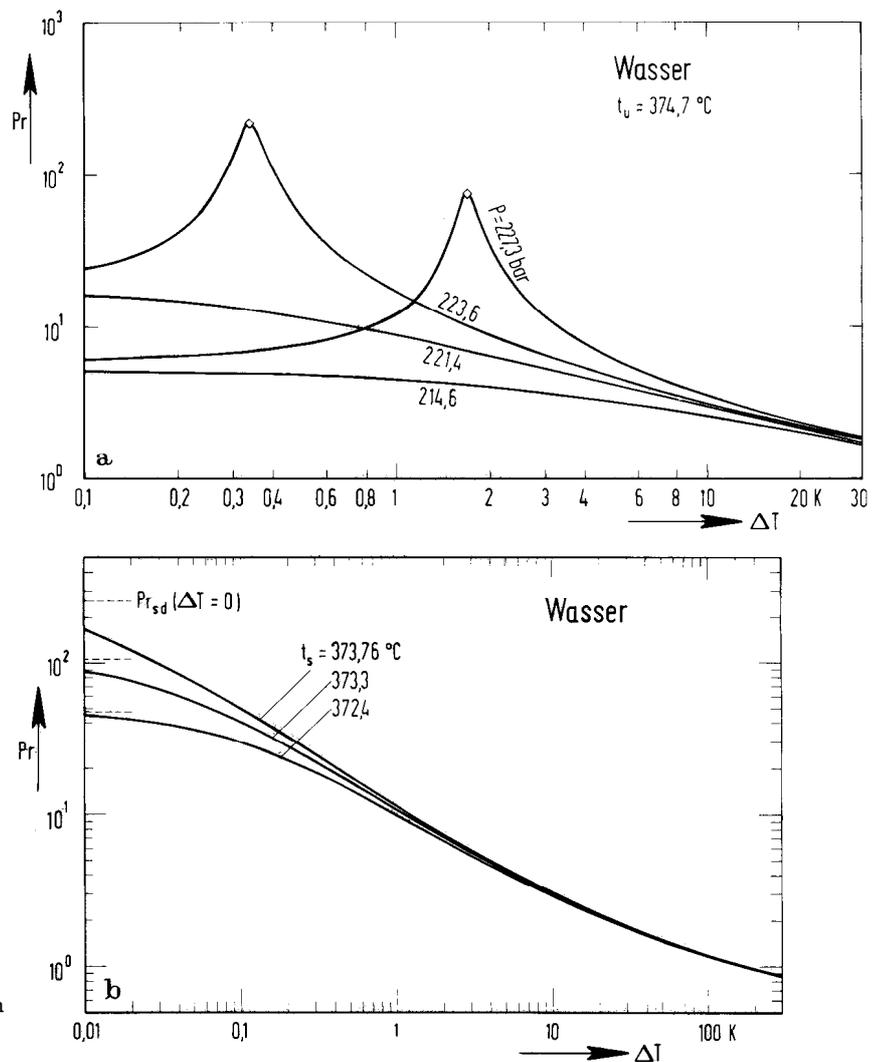


Bild 4. Abhängigkeit der Prandtl-Zahl von der Temperaturdifferenz $\Delta T = T - T_u$ · a) freie Konvektion, b) Filmsieden

tion der Temperatur T berechnet und abgespeichert. Zur Lösung der Ausgangsgleichungen wurden dann bei gewählten ΔT_w die Eigenwerte ζ_w und τ_w so lange variiert, bis alle Randbedingungen erfüllt waren.

Eine ausführliche Beschreibung des Integrationsverfahrens und des Verhaltens bei der Iteration der Eigenwerte kann [10] entnommen werden. Dort werden auch in Anhang A4 und Anhang A5 Stoffwerte und Eigenwerte tabellarisch wiedergegeben.

7. Eigenschaften der berechneten Grenzschichten

Aus den Bildern 4 a, b kann die starke Abhängigkeit der Stoffwerte von der Temperatur entnommen werden. Während beim Filmsieden Stoffwerte wie die Prandtl-Zahl Pr , die isobare spezifische Wärmekapazität C_p oder der isobare Ausdehnungskoeffizient β mit zunehmender Temperatur monoton fallend sind, können diese Stoffwerte bei freier Konvektion im überkritischen Gebiet Maxima durchlaufen. Die Kurven, auf denen diese Extremalstellen in einer P, t -Ebene liegen, stellen Verlängerungen der Sättigungslinie dar, die bei höheren Drücken divergieren. Bei den hier betrachteten Drücken ist die Übereinstimmung dieser verschiedenen ausgezeichneten Temperaturen jedoch so gut, daß für jeden überkritischen Druck von einer "pseudokritischen" Temperatur gesprochen werden kann, der für unterkritische Drücke die Sättigungstemperatur entspricht. Sofern in den folgenden Bildern die pseudokritische Temperatur bzw. die Sättigungstemperatur in der Grenzschicht durchlaufen wird, wird ihre Lage durch ein quadratisches Symbol (\diamond) markiert.

Zur Darstellung der Eigenschaften der hydrodynamischen und thermischen Grenzschichten ist es zweckmäßig, einige Größen zu definieren, die es gestatten, den Einfluß der temperaturabhängigen Stoffwerte unter Eliminierung der durch die Geometrie verursachten Einflüsse zu untersuchen.

Diese Größen lauten für den Wandabstand

$$\frac{n G(\xi)}{L^{1/4}} = \kappa \left(\frac{Gr_L}{L^3} \right)^{-1/4} = \kappa \left(\frac{A_w g}{\nu_w^2} \right)^{-1/4}, \quad (40 a)$$

die Tangentialgeschwindigkeit

$$\frac{u}{L^{1/2} F(\xi) G(\xi)} = \nu_w \left(\frac{Gr_L}{L^3} \right)^{1/2} \zeta = (A_w g)^{1/2} \zeta, \quad (40 b)$$

und den Temperaturgradienten

$$\frac{(\partial T / \partial n) L^{1/4}}{G(\xi)} = - \frac{A_w}{\beta_w} \left(\frac{Gr_L}{L^3} \right)^{1/4} \tau = - \frac{A_w}{\beta_w} \left(\frac{A_w g}{\nu_w^2} \right)^{1/4} \tau, \quad (40 c)$$

wobei sich aus (40 c) mit den allgemeinen Definitionen für Wärmestromdichte q und den Wärmeübergangskoeffizienten α entsprechende Größen ableiten lassen.

Die Bilder 5a, b stellen Profile dar, die für die über dem Wandabstand aufgetragene Tangentialgeschwindigkeit charakteristisch sind. Bei freier Konvektion (Bild 5a) verursacht das Durchlaufen der pseudokritischen Temperatur keine Deformation der Geschwindigkeitsprofile. Beim Filmsieden (Bild 5b) tritt durch Erreichen der Sättigungstemperatur eine Phasentrennfläche zwischen Dampfschicht und Flüssigkeit auf. Die Geschwindigkeitsprofile weisen an dieser Stelle einen Knick auf, der umso stärker ausfällt, je weiter die Sättigungstemperatur von der kritischen Temperatur entfernt ist (s. dazu Gl. (35 b)).

In den Bildern 6 a, b werden die für den Temperaturgradienten charakteristischen Profile dargestellt. Das Durchlaufen der pseudokritischen Temperatur bei freier Konvektion (Bild 6 a) verursacht bei diesen Profilen einen Wendepunkt, dessen Steigung umso größer ausfällt, je größer das Temperaturgefälle ΔT_w ist. Die Profile für Filmsieden (Bild 6 b) brechen bei Erreichen der Sättigungstemperatur ab, der verbleibende Anteil entspricht der Verdampfungswärme. Vergleicht man Bild 6a mit Bild 6b, so erscheinen die Profile für Filmsieden wie Profile der freien Konvektion, die bei Erreichen der pseudokritischen Temperatur abgebrochen werden.

In Bild 7 ist für freie Konvektion die aus Gl. (40 c) abgeleitete, den Wärmeübergangskoeffizienten α charakterisierende Größe über dem Temperaturgefälle ΔT_w dargestellt; alle Kurven zeigen die Tendenz, daß für $\Delta T_w \rightarrow 0$ auch $\alpha \rightarrow 0$ geht, was auch durch eine Grenzwertbetrachtung nachgewiesen werden kann. Außerdem ist zu erkennen, daß die pseudokritische Temperatur nicht mit dem Ort des maximalen Wärmeübergangs übereinstimmt. Die starke Abhängigkeit des Wärmeübergangskoeffizienten vom Umgebungszustand P_u , T_u und vom Temperaturgefälle ΔT_w ist klar ersichtlich.

Die für die Wärmestromdichte charakteristische, aus Gl. (40 c) abgeleitete Größe ist bei Filmsieden in Wasser in Bild 8a und bei Filmsieden in Kohlendioxid in Bild 8b jeweils über dem Temperaturgefälle ΔT_w für die

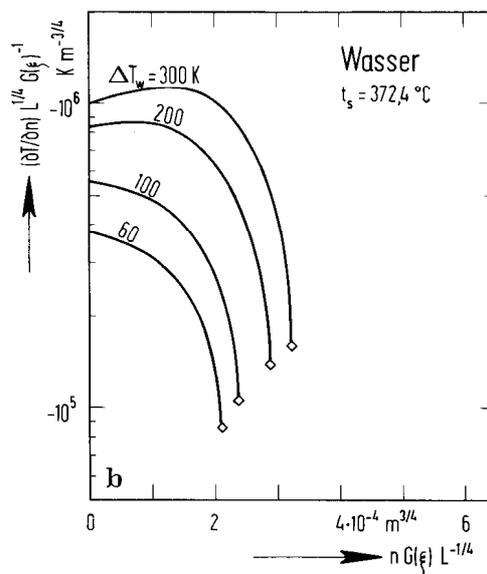
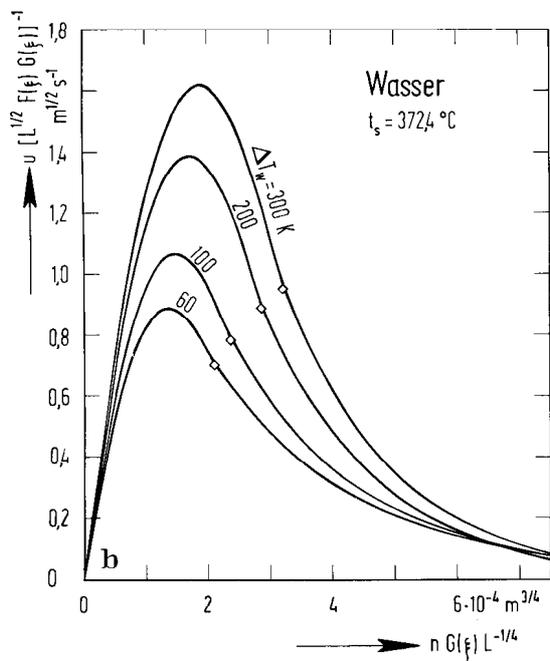
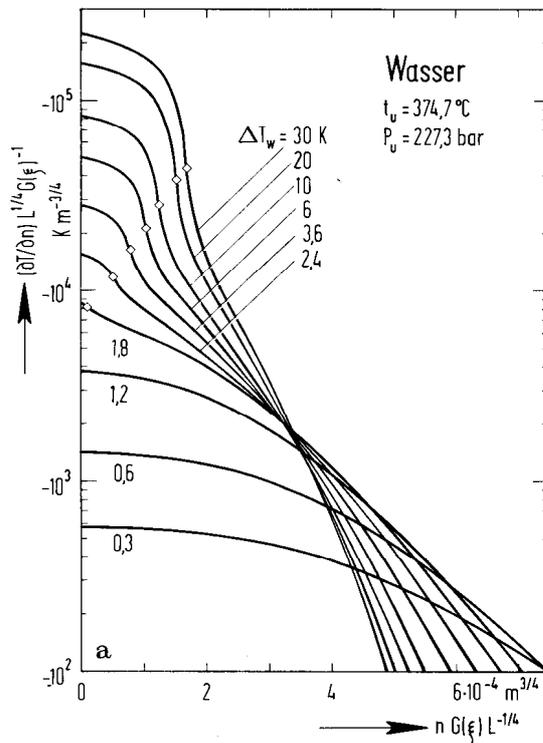
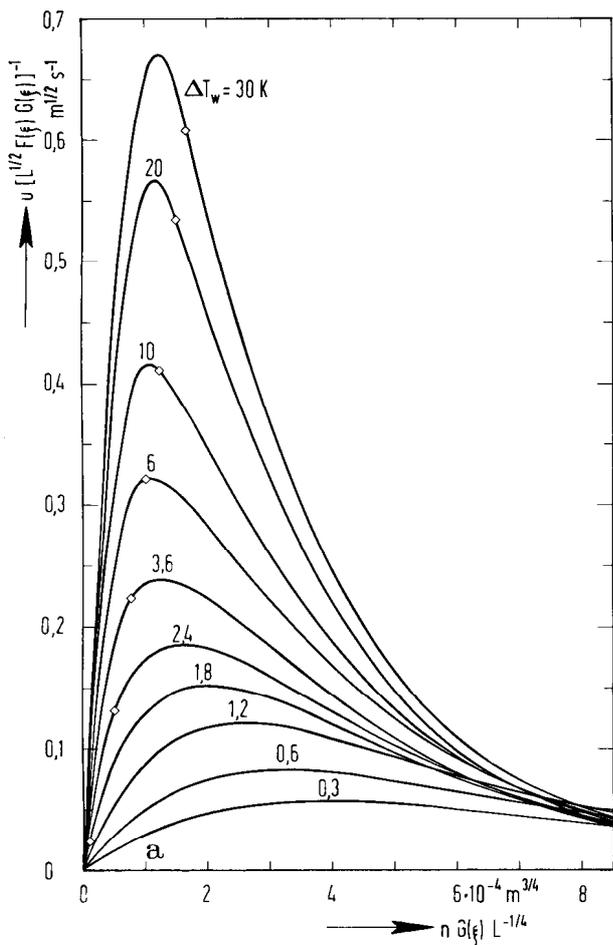


Bild 5. Profile der Tangentialgeschwindigkeit. a) freie Konvektion, b) Filmsieden

Bild 6. Profile des Temperaturgradienten. a) freie Konvektion, b) Filmsieden

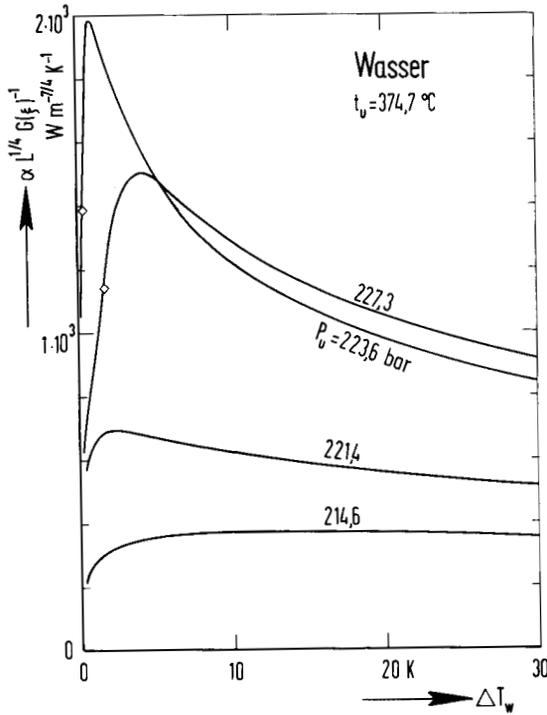


Bild 7. Wärmeübergang bei freier Konvektion

untersuchten Sättigungstemperaturen aufgetragen. Die gestrichelten Linien stellen den Verdampfungsanteil dar, während die durchgezogenen Linien für den gesamten, durch Konvektion und Verdampfung abgeführten Wärmestrom charakteristisch sind. Es ergibt sich das überraschende Ergebnis, daß beim Filmsieden der gesamte abgeführte Wärmestrom vom Sättigungszustand unabhängig ist, während die Anteile von Verdampfung und Konvektion starke Druckabhängigkeiten aufweisen. Dieses Verhalten kann, wie in Bild 8 b für Kohlendioxid gezeigt, auch für eine Sättigungstemperatur bestätigt werden, die relativ weit vom kritischen Zustand entfernt liegt. Hierbei wird fast der gesamte Wärmestrom durch Verdampfung abgeführt, während bei Sättigungszuständen in der Nähe des kritischen Punktes nur ein Bruchteil des gesamten Wärmestromes durch Verdampfung abgeführt wird und der konvektive Anteil dominiert.

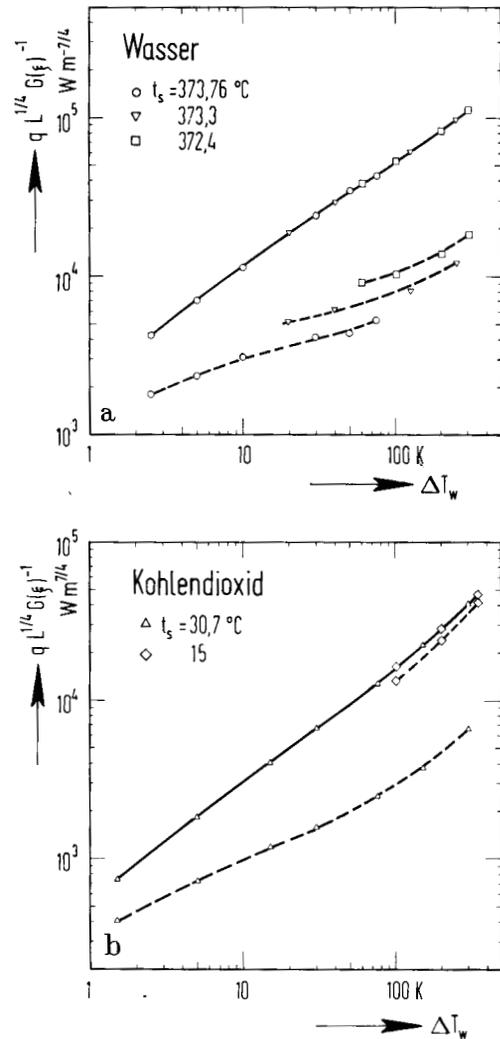


Bild 8. Wärmeübergang bei Filmsieden. a) Wasser, b) Kohlendioxid

Dieses Verhalten legt den Schluß nahe, daß die Wärmeübergangsverhältnisse beim Filmsieden, stets unter der Voraussetzung, daß das zugrunde gelegte Grenzschichtmodell gültig ist, durch die Gesetzmäßigkeiten der freien Konvektion mit dem kritischen Punkt als Umgebungszustand wiedergegeben werden können.

8. Korrektur der Ergebnisse für den Wärmeübergang für Zylinder mit kleinen Durchmessern

Das Beispiel eines Stromlinien- und Isothermenbild bei Filmsieden um einen horizontalen Zylinder wird in Bild 9 wiedergegeben. Dieses Bild ist maßstäblich für die angegebenen thermischen Bedingungen und für den Durchmesser $d = 0,1 \text{ mm}$. Nimmt man den Durchmesser zu $d = 2,154 \text{ mm}$ an, und ändert man den Abbildungsmaßstab so, daß in Bild 9 die Zylinderkontur erhalten bleibt, so wird die Grashof-Zahl um den Fak-

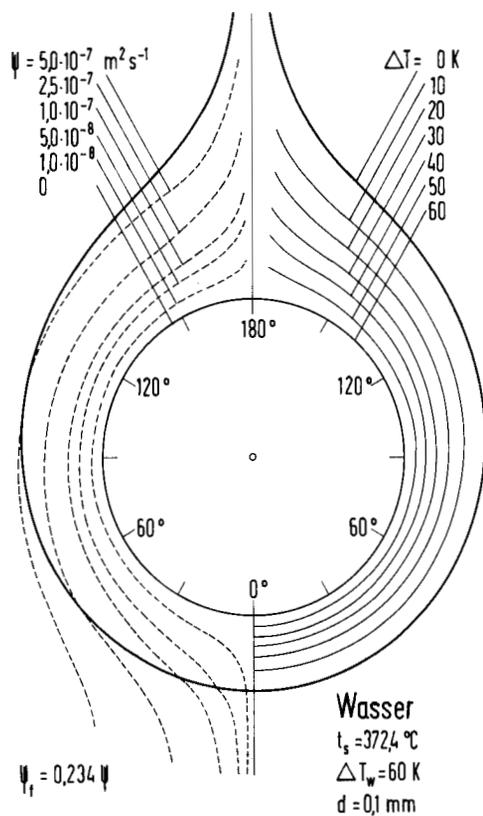


Bild 9. Stromlinien und Isothermen bei Filmsieden

tor 10^4 erhöht, die Wandabstände werden um den Faktor 10 verkürzt und der Stromlinienparameter Ψ wird mit dem Faktor 10 multipliziert.

Bei der Aufstellung der Ausgangsgleichungen wurde jedoch Grenzschichtströmung vorausgesetzt, die theoretischen Lösungen gelten streng nur für $Gr \rightarrow \infty$ oder für $\delta/d \rightarrow 0$. Aus dem angegebenen Beispiel ist ersichtlich, daß mit wachsendem Durchmesser der Grenzschichtcharakter asymptotisch angenähert wird. Für $d = 0,1 \text{ mm}$ ist die Schichtdicke δ , in der der Wärmeübergang stattfindet, von vergleichbarer Größenordnung wieder Zylinderdurchmesser. Die fundamentalen Grenzschichtvoraussetzungen treffen für diesen Fall nicht zu.

Mit Hilfe einer einfachen Methode, die auf einen Vorschlag von Langumir [18] zurückgeht, läßt sich eine Korrektur für den Wärmeübergang bei Zylindern mit kleinen Durchmessern angeben. Der Definition der Nußelt-Zahl liegt die Vorstellung zugrunde, daß ein Quotient zweier Längen vorliegt, nämlich des Durchmessers d und einer Schichtdicke $\delta^* = \lambda/a$, die sodefiniert ist, daß der Wärmeübergang als lediglich durch Wärmeleitung in einer planparallelen Schicht erfolgend angenommen wird. Diese Voraussetzung ist beim Zylinder mit Grenzschichtströmung erfüllt.

Es folgt:

$$Nu_{\infty} = d/\delta^* = -2 \frac{A_w}{\beta_w \Delta T_w} Gr_L^{1/4} \tau \bar{C}_{Zyl.} \quad (41)$$

Gilt diese Voraussetzung nicht, so liegt Wärmeleitung im Ringspalt vor und es gilt

$$Nu_{\text{korr}} = \frac{2}{\ln\left(1 + \frac{2\delta^*}{d}\right)} \quad (42a)$$

oder, mit Gl. (41)

$$q_{\text{korr}} = \frac{2\lambda_w \Delta T_w}{d \ln\left[1 - \frac{\beta_w \Delta T_w}{A_w Gr_L^{1/4} \tau \bar{C}_{Zyl.}}\right]} \quad (42b)$$

Die Korrektur bewirkt eine Übertragung der Ergebnisse für den Wärmeübergang der theoretischen Lösung, für die $\delta/d \rightarrow 0$ vorausgesetzt wurde, auf den Fall, daß δ/d endliche Werte annimmt. Das bedeutet, daß alle Einflüsse der Geometrie zwar streng berücksichtigt werden, die anderen Grenzschichtvereinfachungen jedoch bestehen bleiben, unerachtet, ob dies physikalisch sinnvoll ist oder nicht. Die Korrektur muß dort ihre Grenzen finden, wo diese Vereinfachungen nicht mehr vernachlässigbar sind. Es wurde jedoch in Experiment [1] und Theorie [8] nachgewiesen, daß diese Vereinfachungen wesentlich stärkere Auswirkungen auf die hydrodynamischen Profile als auf die thermischen haben. Eine genaue Grenze für die Anwendbarkeit der Korrektur kann nach dem vorliegende Material nicht ermittelt werden, es konnte jedoch festgestellt werden, daß noch für $d = 0,1 \text{ mm}$ brauchbare Ergebnisse erzielt werden.

9. Ausblick

Bisher wurde die Ableitung eines theoretischen Grenzschichtmodells für freie Konvektion und Filmsieden an vertikaler Platte und horizontalem Zylinder angegeben, das in Gebieten mit stark temperaturabhängigen Stoffwerten anwendbar ist. Einige Eigenschaften der hydrodynamischen und der thermischen Grenzschichten wurden diskutiert. Wie weit die theoretischen Lösungen für den Wärmeübergang mit Versuchen übereinstimmen, soll in einer weiteren Untersuchung überprüft werden, die in Vorbereitung ist [19]. Da die Lösung der Grenzschichtgleichungen nach dem angegebenen Verfahren sehr aufwendig ist, sollen dort ferner Wege zur vereinfachten Berechnung des Wärmeübergangs angegeben werden.

Literatur

1. Schmidt, E.; Beckmann, W.: Techn. Mech. Thermodyn. 1 (1930) 341/349 u. 391/406
2. Hermann, R.: Forsch. Heft 379, Beilage zu Forsch. a.d.Geb.d.Ing.Wes. 7 (1936)
3. Ostrach, S.: NACA Report 1111 (1952)
4. Koh, J.C.Y.: Trans. ASME, J. Heat Transf. (1962) 55/62
5. Fritsch, C.A.; Grosh, R.J.: Proc. 1961 Int. Heat Transf. Conf., Pt. V, Paper 121 (1961) 1010/1016
6. Nowak, E.S.; Konanur, A.K.: Trans. ASME, J. Heat Transf. (1970) 345/350
7. Chiang, T.; Kaye, J.: Proc. 4th US Nat. Congr. Appl. Mech. (1962) 1213/1219
8. Yang, Kwang-Tzu; Jerger, E.W.: Trans. ASME, J. Heat Transf. (1964) 107/115
9. Peterka, J.A.; Richardson, P.D.: Int. J. Heat Mass Transf. 12 (1969) 749/752
10. Reimann, M.: Wärmeübergang bei freier Konvektion und Filmsieden. - Allgemeines theoretisches Berechnungsverfahren und experimentelle Überprüfung im kritischen Gebiet-Diss. T.U. München 1974
11. Reimann, M.; Meyer-Pittroff R.; Grigull, U.: Brennst-Wärme-Kraft 22 (1970) 8, 373/378
12. "The 1968 IFC Formulation for Scientific and General Use". Zu beziehen von ASME, 345 East 47 Street, New York, N.Y. 10017, USA
13. Meyer-Pittroff, R.; Grigull, U.: Wärme- u. Stoffüb. 3 (1973) 134/145
14. Tanishita, I.; Watanabe, K.; Oguchi, K.: Bericht B-7 der 7th Int. Conf. on the Prop. of Steam", Tokio (1968)
15. Tanishita, I.; Watanabe, K.; Oguchi, K.: Bericht C-7 der 7th Int. Conf. on the Prop. of Steam", Tokio (1968)
16. Kamenetzkiy, W.R.: Teplofisitscheskije swojstwa gasow. Vlg. "Nauka", Moskau (1970) 60/63
17. Kesselman, P.M.; Kamenetzkiy, W.R.: "Fisitscheskije konstany i swojstwa weschtschestw" in der Sammlung der GSSSD "Teplofisitschekije swostwa weschtschestw i materialow" Ausg. 2 (1970) 220/226
18. Langmuir, I.: Phys. Rev. 34 (1912) 401.
19. Reimann, M.; Grigull, U.: Wärmeübergang bei freier Konvektion und Filmsieden im kritischen Gebiet von Wasser und Kohlendioxid. Erscheint demnächst in dieser Zeitschrift.

Dr.-Ing. Michael Reimann
 Lehrstuhl A f. Thermodynamik
 Techn. Universität München
 D-8 München 2, Postfach
 (Deutschland)
 ab 1. Mai 1975
 Institut für Reaktorbauelemente
 Gesellschaft für Kernforschung mbH
 D-75 Karlsruhe, Weberstraße 2
 (Deutschland)

Prof. Dr.-Ing. U. Grigull
 Lehrstuhl A f. Thermodynamik
 Techn. Universität München
 D-8 München 2, Postfach
 (Deutschland)

Eingegangen am 30. 4. 1975