

Freie Konvektion in einem flachen Behälter mit und ohne Rotation*

G. P. Merker und U. Grigull, München

Zusammenfassung. Für eine horizontale Wasserschicht, deren isotherme Stirnflächen auf konstanten Temperaturdifferenzen im Bereich $0 \leq \Delta T \leq 50 \text{ K}$ gehalten werden und die um eine vertikale Achse rotiert, wird für die Winkelgeschwindigkeiten $\omega = 0, 0,934, 1,321$ und $1,868 \text{ 1/s}$ das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld experimentell ermittelt. Die dazu erstellte Versuchsanlage wird kurz beschrieben. Die beobachteten Strömungsformen lassen sich für $\omega \neq 0$ in ein $\text{Gr}/\text{Ta}^2 - \text{Ta}^2$ -Diagramm einordnen. Mit einer Stabilitätsrechnung kann die Ausbildung der Geschwindigkeitsprofile in Abhängigkeit der Temperaturdifferenz für $\omega = 0$ erklärt werden; für $\omega \neq 0$ liefert eine Stabilitätsrechnung qualitative Aussagen.

Natural Convection in a Shallow Cavity with and without Rotation

Abstract. For a horizontal water layer with isothermal vertical end walls kept at a constant temperature difference of $0 \leq \Delta T \leq 50 \text{ K}$ and rotating around its vertical axis, the temperature and velocity field was experimentally investigated at angular velocities of $\omega = 0, 0.934, 1.321$ and 1.868 1/s . The test facilities are described. The flow patterns found experimentally can be arranged in a $\text{Gr}/\text{Ta}^2 - \text{Ta}^2$ diagram. For $\omega = 0$ a stability analysis results in the prediction of the velocity profiles and their dependence on the temperature difference. For $\omega \neq 0$ a stability analysis leads to qualitative results.

Bezeichnungen

$c = c_r + ic_i$	komplexer Stabilitätsparameter
\vec{G}^*	dimensionsloser Coriolisvektor
H	Höhe der Wasserschicht
J_0, J_1, J_2	Integralfunktion
\vec{k}	Einheitsvektor in z-Richtung
n	Wellenzahl
t	Zeit
T	Temperatur
$\vec{u} = (u, v, w)$	Geschwindigkeitsvektor
$\vec{x} = (x, y, z)$	Längenvektor
α	Wellenzahl
β	thermischer Ausdehnungsbeiwert
$\Delta T = T_H - T_K$	Temperaturdifferenz
$\Theta = (T - T_K)/\Delta T$	dimensionslose Temperatur

$$\vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$$

v	kinematische Zähigkeit
ρ	Dichte
τ	dimensionslose Zeit
Φ	komplexe Störfunktion
Ψ	Stromfunktion
Ω	Kreisfrequenz
Δ	Laplace Operator
∇	Nabla Operator

Indizes

K	Kühlplatte
H	Heizplatte
-	Vektor
2	zweidimensionaler Operator (Δ_2)

1. Einleitung

Der Einfluß der Rotation bzw. der Corioliskräfte auf Fluid-Systeme ist prinzipiell seit Newton und Laplace untersucht worden. Aber erst die fundamentalen theoretischen Arbeiten von Proudman [1] Anfang dieses Jahrhunderts und die umfassenden experimentellen Untersuchungen von Taylor [2] haben die spezifischen Effekte einer Strömung mit überlagerter Rotation aufgezeigt. Von Taylor [3] stammt die grundlegende Arbeit

über die Stabilität einer isothermen Strömung im Ringspalt zweier Zylinder.

In jüngster Zeit kamen Anregungen für weitere Untersuchungen hauptsächlich von der Geophysik im Hinblick auf das Studium atmosphärischer und ozeanischer Strömungen. Baker Jun. und Robinson [4] haben ein Modell zur Untersuchung der Zirkulation in den Ozeanen entwickelt und eine durch Windscherkräfte angeregte isotherme Strömung in einer kugelförmig gekrümmten dünnen Wasserschicht untersucht.

* Auszug aus der vom Fachbereich Maschinenwesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines Doktor-Ingenieurs genehmigten Dissertation über "Freie Konvektion in einem rechteckigen Trog mit und ohne Rotation" des Diplom-Ingenieurs Günter P. Merker. Berichterstatter Prof. Dr.-Ing. U. Grigull und Prof. Dr. E.R.F. Winter. - Die Dissertation wurde am 19. September 1974 bei der Technischen Universität eingereicht und durch den Fachbereich Maschinenwesen am 6. Dezember 1974 angenommen. Tag der Promotion 12. Dezember 1974.

Hide [5] hat wohl als erster die freie Konvektion infolge horizontaler ¹ Temperaturgradienten mit überlagerter Rotation untersucht. Er verwendete im Prinzip die Versuchsanordnung von Taylor [3] und studierte die Stabilität einer durch freie Konvektion entstehenden Strömung im Ringspalt zweier sich starr drehender Zylinder wobei der äußere Zylinder beheizt und der innere gekühlt war. Dabei stellte er in Abhängigkeit der Rayleigh- und Taylor-Zahl Bereiche mit verschiedenen stabilen Strömungsmustern fest. Weitere Untersuchungen dieser Ringspaltströmung stammen von Bowden und Eden [6] und von Fowlis und Hide [7].

In der vorliegenden Arbeit wird der Einfluß der Corioliskräfte auf die durch horizontale Temperaturgradienten erzeugte freie Konvektion einer in einem rechtwinkligen Trog sich befindenden Wasserschicht untersucht. Dieses Problem unterscheidet sich in zwei wesentlichen Punkten von den oben zitierten Arbeiten:

- a) aufgrund des rechtwinkligen Trogs ist die entstehende Strömung nicht rotationssymmetrisch;
- b) das Verhältnis Abstand der isothermen Stirnflächen zu Höhe der Fluidschicht ist mit 15 : 1 wesentlich größer als 1 : 1 bzw. 5 : 1, wie das bei den zitierten Arbeiten der Fall ist.

Die Arbeit soll ein Beitrag zur Klärung der Frage sein, inwieweit durch die Wirkung der Coriolisbeschleunigung auf Strömungen, die durch Temperatur bzw. Dichtegradienten entstehen, typische Strömungsformen auftreten, wie sie unter wesentlich komplizierteren Randbedingungen in der Atmosphäre und in den Ozeanen beobachtet werden.

2. Aufgabenstellung

Bild 1 zeigt schematisch das der Untersuchung zugrunde gelegte Modell. Die sich in einem rechtwinkligen Trog befindende Wasserschicht konstanter Tiefe wird an einer Stirnfläche, $\xi = 0$, beheizt und an der anderen, $\xi = 15$, gekühlt. Diese isothermen Stirnflächen werden auf konstanten Temperaturdifferenzen im Bereich $0 \leq \Delta T \leq 50 \text{ K}$ gehalten. Alle übrigen Berandungen seien adiabatisch. Der sich einstellenden Strömung infolge freier Konvektion wird eine Corioliskraft, hervorgerufen durch Rotation Ω des Troges um die in der Heizfläche liegende Z-Achse, überlagert.

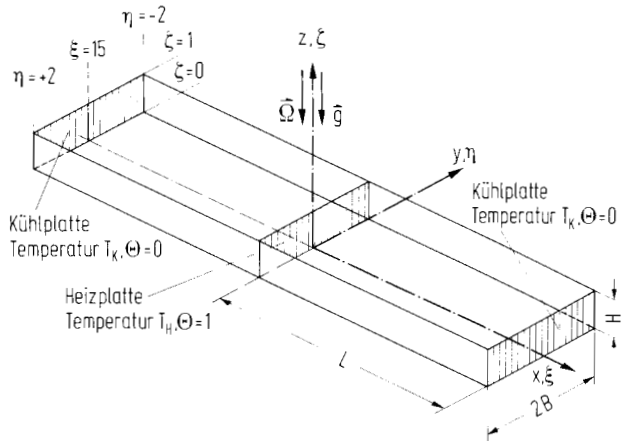


Bild 1. Schematische Darstellung des Versuchsmodells, ξ , η und ζ sind die auf die Höhe der Wasserschicht H bezogenen dimensionslosen Längen.

3. Versuchsanlage

Im folgenden wird die konstruktive Ausführung der Versuchsanlage, die im wesentlichen aus einem Drehtisch und dem Wassertrog besteht, kurz beschrieben.

3.1. Drehtisch

Der Rahmen (a) des Drehtisches (Bild 2) war aus Vierkantprofilen der Abmessung $100 \times 100 \times 5$ geschweißt. In der Lagerwelle (b), die im Lagergehäuse (c) durch

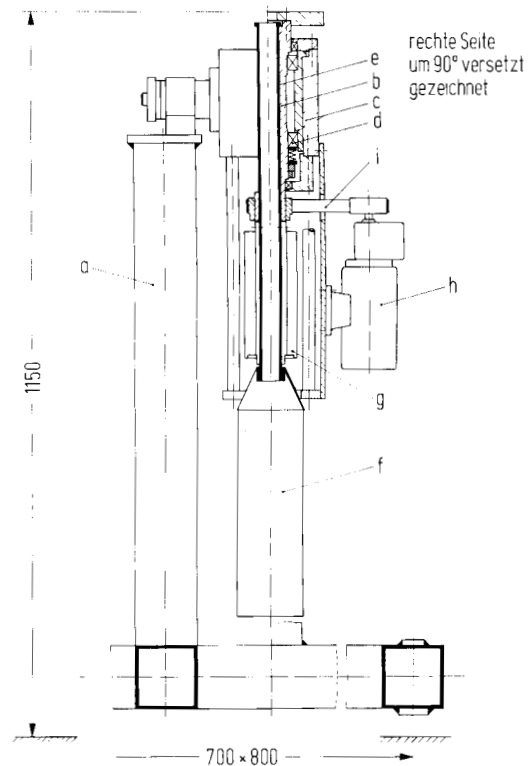


Bild 2. Drehtisch

¹ Das anders gelagerte Problem der Freien Konvektion infolge vertikaler Temperaturgradienten, das sog. Bénard-Problem, soll hier nicht weiter betrachtet werden.

zwei verspannte Zylinderrollenlager (d) gehalten war, steckte eine Führungshülse (e), zur Durchführung der Meßleitungen für den Wassertrog. Am unteren Ende der Führungshülse war eine Thermosflasche (f) als Nullpunktgefäß für die Thermolemente angebracht. Von dieser Thermosflasche führten Kupferleitungen zum Schleifringübertrager (g), dort wurden die zu messenden Thermospannungen mittels Bronzebürsten abgegriffen. Als Antrieb wurde der Getriebemotor (h) 4-V30M der Firma Heynau verwendet, bestehend aus einem Drehstrommotor mit 1400 U/min Antriebsdrehzahl und 250 W Antriebsleistung, einem Stirnradvorgelege mit der Gesamtübersetzung 48 : 1 und einem stufenlos verstellbaren Reibradgetriebe mit dem Regelverhältnis 1 : 9; die Abtriebsdrehzahl des Getriebemotors war somit stufenlos zwischen 9,5 und 87 U/min verstellbar. Über 3 Keilriemen (i) wurde die Lagerwelle (b) angetrieben. Durch die Kombination Reibradgetriebe - Keilriemen-verspannte Kegelrollenlager wurden insbesondere vom Antrieb herrührende Schwingungen gedämpft. Die Drehzahlschwankungen waren stets kleiner als $\pm 0,1\%$.

3.2 Wassertrog

Als Wassertrog diente ein rechtwinkliger Plexiglasbehälter mit den Abmessungen: Länge $L = 750$ mm und Breite $B = 200$ mm. Alle Versuche wurden mit einer konstanten Wassertiefe $H = 50$ mm durchgeführt. Da eine freie Flüssigkeitsoberfläche in einem rotierenden Behälter parabolisch gekrümmt ist, mußte, um eine über den Radius konstante Wasserhöhe zu erzielen, der Behälterboden ebenfalls parabolisch gekrümmt sein. Der Boden war deshalb so verstellbar angeordnet, daß entsprechend den 3 Kreisfrequenzen $\Omega = 0,934, 1,321$ und $1,868$ 1/s, verschiedene Parabeln in radialer Richtung eingestellt werden konnten. Auf die Ausbildung einer parabolischen Krümmung in Umfangsrichtung wurde verzichtet. Der Trog war zur Drehachse (Heizplatte) symmetrisch, in einer Hälfte wurden Temperaturen und in der anderen Strömungsgeschwindigkeiten gemessen.

Die isotherme Fläche der Temperatur T_H (warme Seite) in der Drehachse wurde durch eine elektrisch heizbare Kupferplatte dargestellt. Für die Ausbildung der isothermen Flächen der Temperatur T_K (kalte Seite) an den beiden Stirnseiten des Trogs wurden Halbleiter-Kühlsegmente (Peltierelemente) SIRIGOR-PKE 36 B 02 der Firma Siemens verwendet.

Im Flächenschwerpunkt der Heiz- und Kühlplatte waren Thermolemente zur Messung der beiden Tempera-

turen T_H und T_K angebracht. Bei den Versuchen wurde die Heiz- und Kühlleistung so geregelt, daß sich eine konstante Temperaturdifferenz ($\Delta T = T_H - T_K$) einstellte.

Temperaturmessung

Alle Temperaturen wurden mit Nickelchrom-Nickel-Thermolementen mit 0,2 mm Drahtdurchmesser (Thermospannung etwa 0,405 mV/K) gemessen. Zur Bestimmung der Temperaturfeldes waren 6 Thermolemente in den Abständen $x = 50, 200, 350, 500, 600$ und 700 mm auf einer Schiene montiert. Über die Breite des Trogs konnte die Schiene kontinuierlich verschoben werden, über die Höhe der Wasserschicht war eine diskrete Verstellung möglich, so daß hier die Temperaturen an den Stellen $z = 5, 15, 25, 35$ und 45 mm über dem Trogboden gemessen werden konnten.

Geschwindigkeitsmessung

Zur Bestimmung des Geschwindigkeitsfeldes mußte einmal der Verlauf der Stromlinien festgestellt und außerdem die tatsächliche Strömungsgeschwindigkeit gemessen werden. Die gemessenen Geschwindigkeiten lagen, abgesehen von der Grenzschichtströmung an der Heiz- bzw. Kühlplatte, im Bereich $0 \leq u \leq 2$ mm/s. Ein Verfahren zur Messung von Strömungsgeschwindigkeiten im Bereich $0,1 < u < 5$ mm/s hat Baker [8] angegeben. Das Verfahren beruht auf der Farbänderung eines pH-Indikators und ist im folgenden kurz beschrieben. In 1000 ml aqua dest. werden etwa 10 mg Thymolblau (Thymolsulfonephthalein) gelöst. Dieser Lösung werden solange Tropfen (etwa 0,25 ml) 1n-NaOH zugegeben, bis die ursprüngliche gelbe Farbe in dunkelblau umschlägt. Gibt man einen Tropfen 1n-HCL zu, so schlägt die Farbe der Lösung wieder in gelb um. Bringt man in diese Lösung zwei Elektroden in Form zweier blanker Platin- oder Kupferdrähte (hier mit einem Durchmesser von etwa 0,02 mm) und legt kurzzeitig (etwa 1 s) eine Gleichspannung von 10 bis 20 V bei einer Stromstärke von 5 bis 20 mA an, so wird an der Kathode eine Protonenreaktion ausgelöst; der pH-Wert ändert sich und damit die Farbe der Lösung. Der Farbumschlag von gelb nach blau ist verbunden mit einer pH-Wert-Änderung von etwa 8,0 nach 9,6. Die an der Kathode entstehende blaue Flüssigkeit wird von der Strömung mitgenommen, ihre zeitliche Verschiebung ist ein Maß für die Strömungsgeschwindigkeit. Diese von der Strömung mitgeführten Farbstreifen wurden mit einem Agfa-Agepe FF-Film, einem für Kontrastaufnahmen be-

sonders gut geeigneten Film mit geringer Rot- und hoher Blauempfindlichkeit, fotografiert. Die Auswertung dieser Fotografien gestattete eine Aussage über den Verlauf der Stromlinien bzw. der Strömungsgeschwindigkeiten.

4. Versuchsergebnisse

4.1. Ergebnisse für $\Omega = 0$, ohne Rotation

Bild 3 zeigt die an der Stelle $\xi = 7,5$ fotografierten, von der Kathode der Geschwindigkeitsmeßsonde ab schwimmenden Farbfäden für die Temperaturdifferenzen $\Delta T = 3, 10$ und 50 K. Die daraus resultierenden Geschwindigkeitsprofile zeigt Bild 4.

Man erkennt, daß bereits für kleine Temperaturdifferenzen, $\Delta T = 3$ K, ein klar ausgeprägtes Geschwindigkeitsprofil $u(\xi)$ vorliegt. Mit zunehmender Tempe-

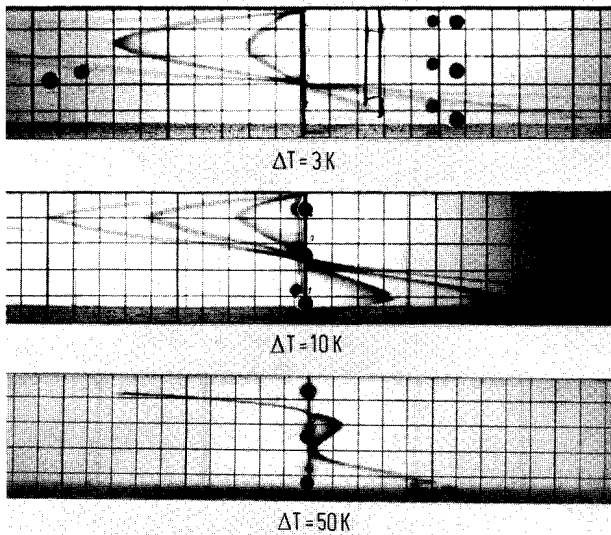


Bild 3. In Seitenansicht, x-z-Ebene, an der Stelle $x = L/2$ ($\xi = 7,5$) fotografierte, von der Kathode ab schwimmende, Farbfäden bei $\Omega = 0$ für $\Delta T = 3, 10$ und 50 K.

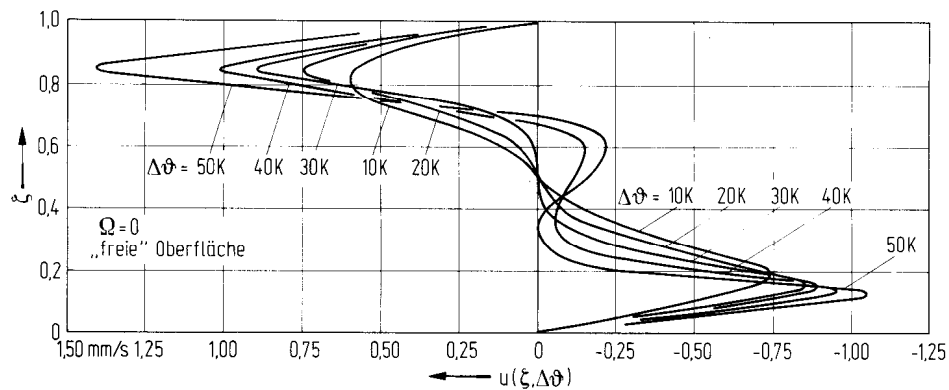


Bild 4. Geschwindigkeitsprofile $u(\xi)$ für $\Omega = 0$ in Abhängigkeit der Temperaturdifferenz ΔT .

raturdifferenz steigt die Strömungsgeschwindigkeit an. Ab $\Delta T > 30$ K bildet sich bei $\zeta \approx 1/2$ eine Rückströmung aus, deren Auftreten als Instabilität der Strömung gedeutet werden kann, (siehe Kap. 6.) Auffallend ist die Tatsache, daß die Strömungsgeschwindigkeit an der freien Oberfläche praktisch gleich Null ist (siehe dazu Kap.5.). In Bild 5 sind die Temperaturprofile $\Theta(\xi)$ dargestellt. Abweichungen von der Symmetriebedingung nach Gl.(18) sind auf die verstärkte Wärmeabfuhr infolge Konvektion und Verdunstung an der freien Oberfläche zurückzuführen.

4.2. Ergebnisse bei $\Omega \neq 0$, mit Rotation

Für die drei Winkelgeschwindigkeiten $\Omega = 0,934, 1,321$ und $1,868$ 1/s wurde das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld untersucht. Das Temperaturfeld läßt sich

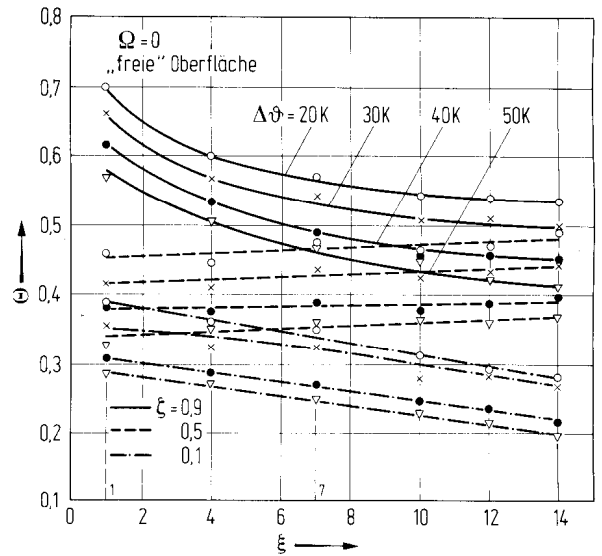


Bild 5. Temperaturprofile $\Theta(\xi)$ für $\Omega = 0$ in Abhängigkeit der Temperaturdifferenz ΔT .

durch Kurvenscharen $\Theta(\xi)$ analog zum Fall $\Omega = 0$ darstellen.

Das Strömungs- bzw. Geschwindigkeitsfeld läßt sich am Besten durch Darstellung des Verlaufs von Stromlinien in den oberen, $0,5 \leq \zeta \leq 1$, und unteren, $0 \leq \zeta \leq 0,5$, Wasserschichten wiedergeben. Diese Skizzen werden durch Fotografien typischer Strömungsformen ergänzt. Die Flüssigkeitsteilchen bewegen sich analog zum Fall $\Omega = 0$ in den oberen Schichten von der Heiz- zur Kühlplatte und in den unteren Schichten zurück. Dieser Strömung sind jedoch typische Strömungen überlagert.

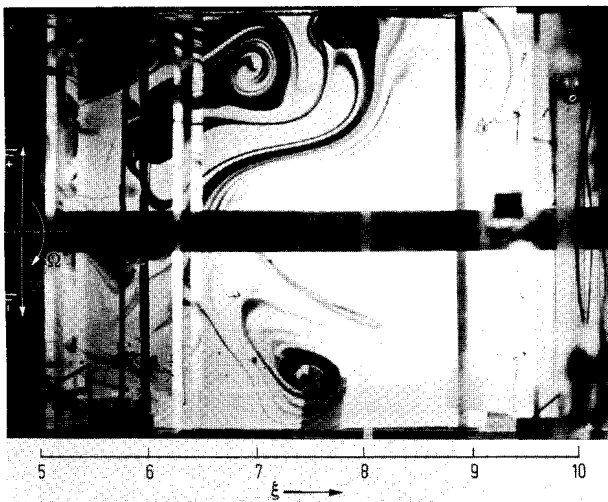


Bild 6. Wirbelformen bei $\Omega = 0,934 \text{ 1/s}$ und $\Delta T = 20 \text{ K}$ im Bereich $5 < \xi < 10$. Ansicht von oben auf die x-y-Ebene.

$$\Omega = 0,934 \text{ 1/s}$$

Bei kleinen Temperaturdifferenzen $\Delta T = 20 \text{ K}$ beobachtet man ausgeprägte Wirbel, wie sie Bild 6 für $\Delta T = 20 \text{ K}$ zeigt. Mit zunehmender Temperaturdifferenz verschwinden diese Wirbel und die mäanderförmigen Schleifen, Bild 7, überwiegen. Bei weiterer Erhöhung der Temperaturdifferenz wird die Querausbildung dieser mäanderförmigen Schleifen immer kleiner, bis sie schließlich bei $\Delta T = 50 \text{ K}$ vollständig verschwinden und die Strömung einen ähnlichen Verlauf wie für $\Omega = 0$ annimmt (Walzenströmung).

Dieser Umschlag von der mäanderförmigen zur walzenförmigen Strömung findet im Bereich $45 \leq \Delta T \leq 50 \text{ K}$ statt und ist insbesondere anhand der gemessenen Temperaturen deutlich zu erkennen. Infolge der sich von der Heiz- zur Kühlplatte bewegendem mäanderförmigen Schleifen schwankt die Temperatur an einer bestimmten Stelle unregelmäßig um einen mittleren Wert, Bild 8a. Verschwinden die Mäanderstrukturen, so müssen auch die Temperaturschwankungen verschwinden. Dies wird durch Bild 8b gut bestätigt. Dieser Übergang von einer Strömungsstruktur zu einer anderen bei einem bestimmten Wert der Grashof- und Taylor-Zahl ist bei Versuchen mit einem zylindrischen Ringspalt unter anderem auch von Hide [5] beobachtet worden und kann als Instabilität gedeutet werden.

Die Bilder 9a und 9b zeigen den Temperaturverlauf für $\Delta T = 20 \text{ K}$ und 50 K . Man erkennt, daß sich der Temperaturverlauf mit steigendem ΔT dem Verlauf für $\Omega = 0$ nähert. Im Bereich der Kühlplatte ist das Wasser auf der negativen η -Seite kälter als auf der positiven Seite.

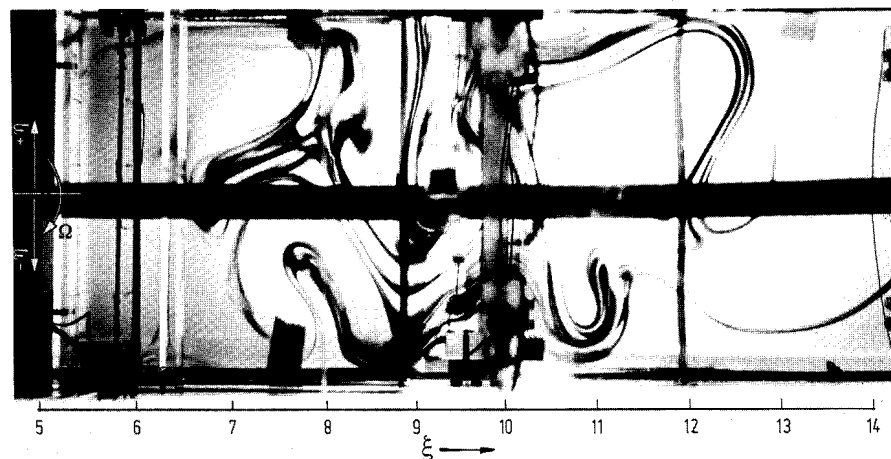


Bild 7. Mäanderförmige Schleifen für $\Omega = 0,934 \text{ 1/s}$ und $\Delta T = 30 \text{ K}$ im Bereich $5 < \xi < 14$, Ansicht von oben auf die x-y-Ebene.

$\xi < 10$: Strömung zur Heizplatte ($\xi = 0$)
 $\xi > 10$: Strömung zur Kühlplatte ($\xi = 15$)

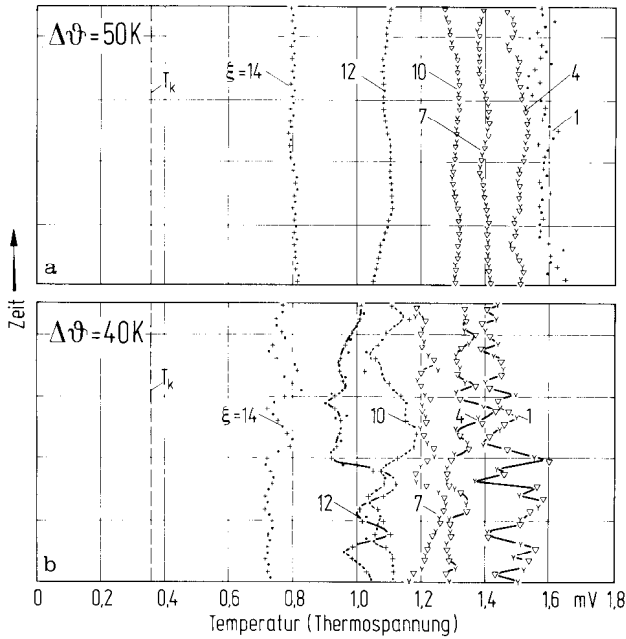


Bild 8a,b. Gemessene Thermospannung als Funktion der Zeit an den Stellen $\xi = 1, 4, 7, 10$ und 12 bei $\eta = 0$ und $\zeta = 0,1$ für $\Omega = 0,934$ 1/s und $\Delta T = 40$ bzw. 50 K. Zeitdauer pro Schub etwa 18 min.

Dies ist auf eine stärkere Rückströmung zurückzuführen. Die Bilder 10a und 10b zeigen qualitativ den Verlauf der Stromlinien für $\Delta T = 40$ und 50 K.

$\Omega = 1,321$ 1/s

Der in Bild 11 skizzierte Verlauf der Stromlinien stellt sich für Temperaturdifferenzen $30 < \Delta T < 50$ K ein. Die Hauptströmung zwischen Heiz- und Kühlplatte erfolgt auf der negativen η -Seite. In den oberen Wasserschichten beobachtet man dabei eine mäanderförmige Strömung mit Querbewegungen zwischen 10 und 40 mm. Interessant ist die Ausbildung eines sog. "Totwassergebiet" mit einer ungeordneten Strömung und Geschwindigkeiten, die etwa um den Faktor 10 kleiner sind als im Hauptstrom. Im Bereich der Heizplatte, $\xi < 2$, erfolgt bei höheren Temperaturdifferenzen eine intensive Verwirbelung, die Temperatur ist kaum von der Höhe abhängig, s. Bild 12. Der im Vergleich zu $\Omega = 0,934$ völlig andere Temperaturverlauf erklärt auch das beobachtete unterschiedliche Strömungsmuster.

$\Omega = 1,868$ 1/s

Den skizzierten Verlauf der Stromlinien zeigt Bild 13. Der Einfluß der Temperaturdifferenz auf die Struktur der Strömung ist wesentlich geringer als bei $\Omega = 0,934$

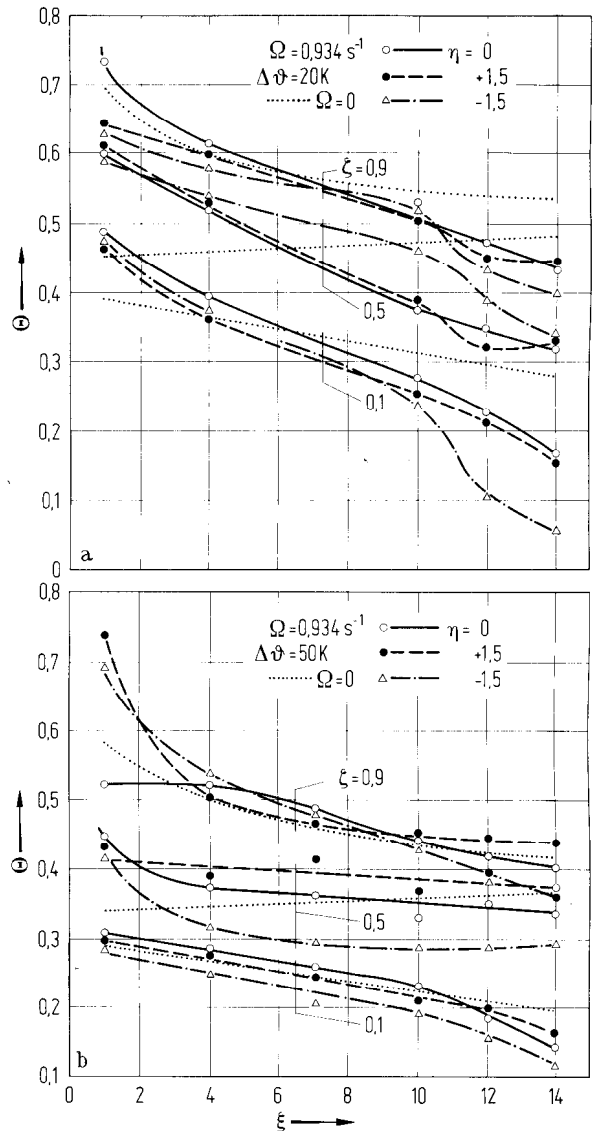


Bild 9a,b. Temperaturprofile $\theta(\xi)$ für $\Omega = 0,934$ 1/s und $\Delta T = 20$ bzw. 50 K.

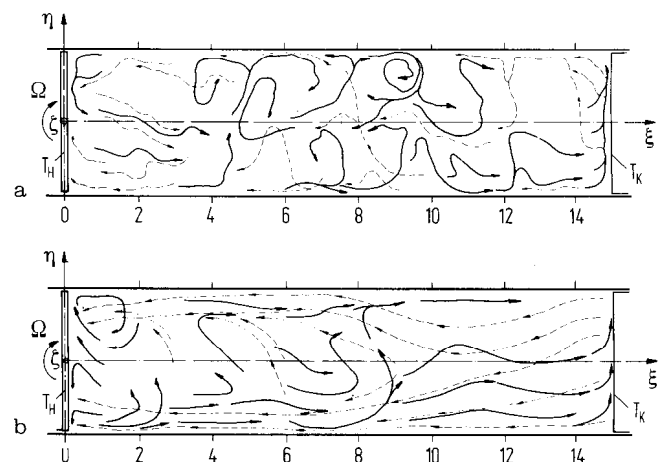


Bild 10a,b. Skizzierter Verlauf der Stromlinien für $\Omega = 0,934$ 1/s und $\Delta T = 30$ bzw. 50 K in den oberen und ----- unteren Wasserschichten

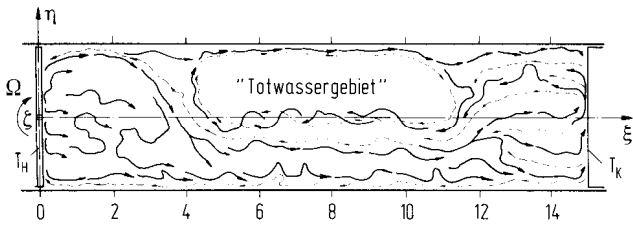


Bild 11. Skizzierter Verlauf der Stromlinien für $\Omega = 1,321 \text{ 1/s}$ und $\Delta T \approx 30 \text{ K}$ in den — oberen und - - - - unteren Wasserschichten

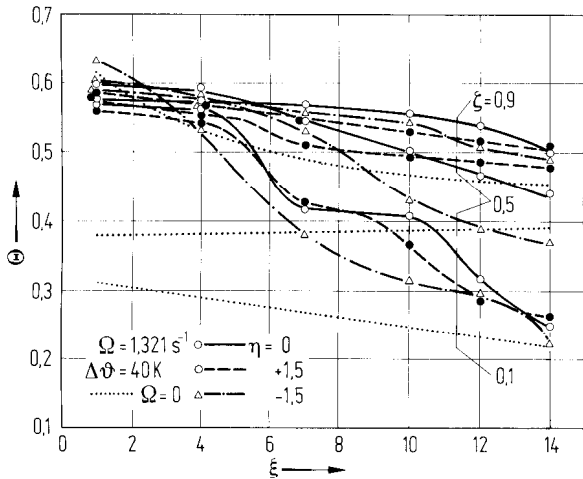


Bild 12. Temperaturprofile $\Theta(\xi)$ für $\Omega = 1,321 \text{ 1/s}$ und $\Delta T = 40 \text{ K}$

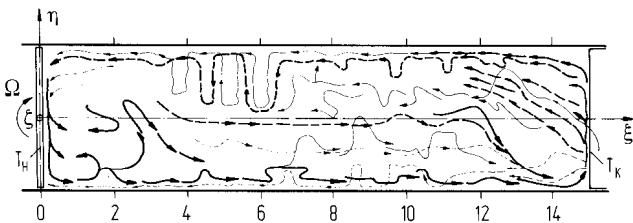


Bild 13. Skizzierter Verlauf der Stromlinien bei $\Omega = 1,868 \text{ 1/s}$ und $\Delta T = 30 \text{ K}$ in den — oberen und - - - - unteren Wasserschichten

und $1,321 \text{ 1/s}$. Mit steigendem ΔT nehmen natürlich die Strömungsgeschwindigkeiten zu und die mäanderförmigen Querbewegungen werden geringer, bei $\Delta T \approx 50 \text{ K}$ sind diese Querbewegungen fast vollständig verschwunden. Die Hauptströmung von der Heiz- zur Kühlplatte erfolgt wieder auf der negativen η -Seite, die Rückströmung aber, im Gegensatz zu den beiden kleineren Winkelgeschwindigkeiten, zum größten Teil auf der positiven η -Seite. Auffallen ist die Strömung von der Heiz- zur Kühlplatte in Bodennähe im Bereich $\eta \approx 0$. Bei $\xi \approx 10$ steigt dieser Strom nach oben und vereinigt sich mit der warmen Strömung zur Kühlplatte. Die mäan-

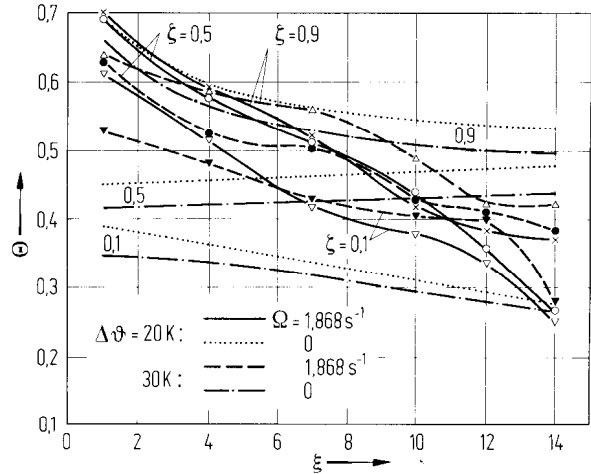


Bild 14. Temperaturprofile $\Theta(\xi)$ für $\Omega = 1,868 \text{ 1/s}$ und $\Delta T = 20$ und 30 K

derförmigen Querbewegungen sind bei der Rückströmung im Bereich $4 < \xi < 8$ stark ausgeprägt.

In Bild 14 ist der Temperaturverlauf $\Theta(\xi)$ für $\Delta T = 20$ und 30 K dargestellt. Die mittleren Temperaturdifferenzen zwischen Heiz- und Kühlplatte sind gegenüber den beiden vorher besprochenen Winkelgeschwindigkeiten größer geworden, der Temperaturunterschied zwischen den oberen und unteren Wasserschichten dagegen wesentlich geringer. Dies unterstützt die Beobachtung, daß hier ein senkrechter Austausch stattfindet.

4.3. π - Ta^2 -Diagramm

Verwendet man ein bereits von Fowlis und Hide [7] angegebenes Stabilitätsdiagramm, so lassen sich die beobachteten Strömungsformen in Abhängigkeit der Grashof- und Taylor-Zahl darstellen. Auf der Ordinate wird dabei

$$\pi = \frac{Gr}{Ta^2} = \frac{g \cdot \beta \cdot \Delta T}{4\Omega^2 H} = \frac{\text{Auftriebskraft}}{\text{Corioliskraft}}$$

und auf der Abszisse das Quadrat der Taylor-Zahl

$$Ta^2 = \frac{4\Omega^2 H^4}{\nu^2} = \frac{\text{Corioliskraft}}{\text{Zähigkeitskraft}}$$

aufgetragen.

Die in Bild 15 angegebenen Bereiche lassen sich wie folgt beschreiben:

Bereich A: Symmetrische Walzenströmung

Diese Strömungsform liegt streng nur bei

$\Omega = 0$ und mit guter Näherung bei $\Omega =$

$0,934 \text{ 1/s}$ für $\Delta T \geq 50 \text{ K}$ vor.

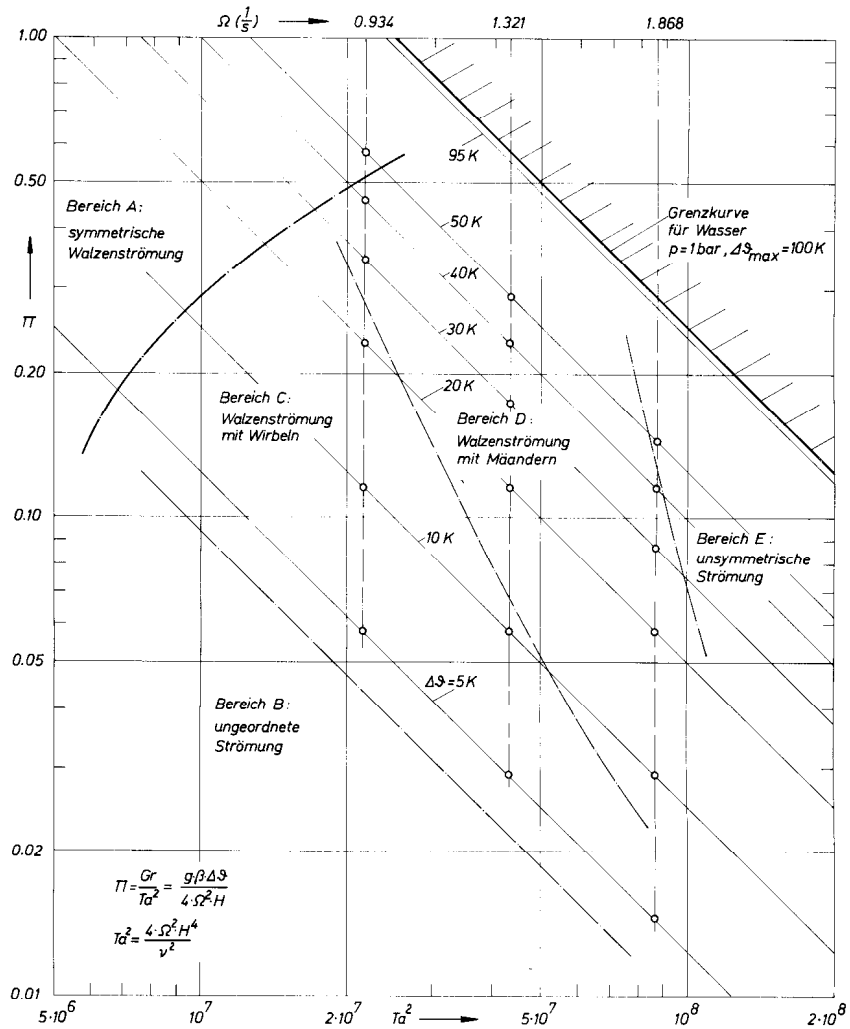


Bild 15. π - Ta^2 -Diagramm

Bereich B: Ungeordnete Strömung

Bei $\omega \neq 0$ sind für $\Delta T < 5\text{ K}$ die irregulären Bewegungen der Wasserteilchen dominierend, eine geordnete Strömungsform läßt sich nicht feststellen.

Bereich C: Walzenströmung mit Wirbeln

Für $\omega = 0,934\text{ 1/s}$ und $5 < \Delta T < 25\text{ K}$ und für $\omega = 1,321\text{ 1/s}$ und $5 < \Delta T < 15\text{ K}$

Bereich D: Walzenströmung mit mäanderförmigen Schleifen

für $\omega = 1,321\text{ 1/s}$ und $\Delta T > 15\text{ K}$
für $\omega = 1,868\text{ 1/s}$ und $5 < \Delta T < 40\text{ K}$

Bereich E: Unsymmetrische Strömung

Diese entspricht dem in Bild 13 dargestellten Stromlinienverlauf, aber ohne die mäanderförmigen Querbewegungen.

Wie bereits erwähnt wurde, ist der Übergang zwischen den Bereichen A und D für $\omega = 0,936\text{ 1/s}$ sehr klar ausgeprägt, so daß man hier von einer Stabilitätsgrenze $\pi_{\text{Krit}} = f(Ta^2)$ sprechen kann. Es ist hier anzunehmen, daß dieser Umschlagspunkt, der für $\omega = 0,934\text{ 1/s}$ bei etwa $\pi = 0,5$ liegt, bei kleineren Kreisfrequenzen bei niedrigeren Temperaturdifferenzen bzw. kleineren π -Werten liegt. Unterstützt wird diese Vermutung durch die Tatsache, daß bei den Versuchen mit höheren Kreisfrequenzen kein Übergang zur Walzenströmung beobachtet wurde.

Allgemein kann man feststellen, daß die Strömung mit steigender Temperaturdifferenz infolge der höheren Strömungsgeschwindigkeit stabiler wird. Ferner nimmt der Einfluß der Temperaturdifferenz auf die Gestalt der Stromlinien mit steigender Kreisfrequenz ab.

5. Mathematische Formulierung

Das Temperatur- und Geschwindigkeitsfeld wird durch den Energie-, Impuls- und Massenerhaltungssatz der Physik beschrieben. Folgende, die mathematische Behandlung des Problems wesentlich vereinfachende Annahmen sollen als zulässig getroffen werden:

1. Die parabolisch gekrümmte Wasserschicht wird als eben betrachtet, damit wird die Corioliskraft unabhängig von der x- bzw. ξ -Koordinate, der damit verbundene Fehler bleibt stets kleiner 3%.

2. Im vorliegenden Temperaturbereich werden die Stoffwerte als konstant betrachtet.

3. Das Wasser wird als inkompressibel angesehen.

4. In den Bewegungs-Gleichungen wird die Boussinesq-Approximation verwendet, d.h., die Dichte wird außer im Auftriebsterm als konstant angesehen.

5. Energiedissipation wird vernachlässigt.

Man erhält damit ein System von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, die in vektorieller Schreibweise lauten:

Bewegungsgleichungen:

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} g\vec{k} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \vec{u} - 2\vec{\omega} \times \vec{u} \quad (1)$$

Energiegleichung

$$\frac{DT}{Dt} = a\Delta T \quad (2)$$

Kontinuitätsgleichung

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad (3)$$

Zustandsgleichung

$$\rho - \rho_0 = -\rho_0 \beta (T - T_0) \quad (4)$$

Eliminiert man mit der Zustandsgleichung die Dichte und führt die dimensionslosen Kenngrößen

$$\begin{aligned} (\xi, \eta, \zeta) &= (x, y, z)/H, \quad \Theta = (T - T_K)/(T_H - T_K) \\ \vec{u}^* &= \vec{u}/u_0, \quad p^* = p/\rho_0 u_0^2, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\tau = \nu \cdot t/H^2, \quad \rho^* = (\rho - \rho_K)/(\rho_H - \rho_K)$$

ein, dann ergibt sich folgendes Gleichungssystem

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial \tau} + \text{Re} \cdot \vec{u}^* \nabla \vec{u}^* = \frac{\text{Gr}}{\text{Re}} \cdot \Theta \cdot \vec{k} - \text{Re} \nabla p^* + \Delta \vec{u}^* - \text{Ta} \cdot \vec{G}^* \quad (6)$$

$$\text{Pr} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \text{Re} \vec{u}^* \nabla \Theta = \Delta \Theta \quad (7)$$

$$\text{div } \vec{u}^* = 0 \quad (8)$$

mit den Kennzahlen

$$\text{Re} = \frac{u_0 \cdot H}{\nu}, \quad \text{Gr} = \frac{g \cdot H^3}{\nu^2} \beta (T_H - T_K), \quad \text{Ta} = \frac{2\omega H^2}{\nu}, \quad \text{Pr} = \frac{\nu}{a} \quad (9)$$

und dem dimensionslosen Vektor

$$\vec{G}^* = (\nu^*, -u^*, 0) = \frac{1}{u_0 \omega} [\vec{\omega} \times \vec{u}] \quad (10)$$

Die Gl.(6), (7) und (8) dienen als Ausgangspunkt für die in Kap.6 durchgeführte Stabilitätsanalyse.

Liegt keine ausgezeichnete Geschwindigkeit u_0 vor, wie das bei freier Konvektion der Fall ist, so folgt mit der Bezugsgeschwindigkeit $u_0 = a/H$ und der

$$\text{Rayleigh-Zahl } \text{Ra} = \frac{gH^3}{a \cdot \nu} \beta (T_H - T_K) \quad (11)$$

aus Gln.(6) und (7)

$$\frac{\partial \vec{u}^*}{\partial \tau} + \frac{1}{\text{Pr}} \vec{u}^* \nabla \vec{u}^* = \text{Ra} \cdot \Theta \cdot \vec{k} - \frac{1}{\text{Pr}} \nabla p^* + \Delta \vec{u}^* - \text{Ta} \cdot \vec{G}^* \quad (12)$$

$$\text{Pr} \frac{\partial \Theta}{\partial \tau} + \vec{u}^* \nabla \Theta = \Delta \Theta \quad (13)$$

Die Randbedingungen lassen sich im vorliegenden Fall formulieren zu

$$\xi = 0: \Theta = 1 \quad \text{und} \quad \xi = 15: \Theta = 0$$

$$\eta = \pm 2: \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} = 0$$

$$\zeta = 0 \quad \text{und} \quad 1: \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = 0 \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi = 0 \quad \text{und} \quad 15 \\ \eta = \pm 2 \\ \zeta = 0 \end{aligned} \right\} u^* = v^* = w^* = 0$$

Kenning und Cooper [9] haben für die freie Wasserfläche, unter der Annahme eines dünnen, aus oberflächenaktiven Mitteln ("surface-active-agent") bestehenden Films die Randbedingung

$$\zeta = 1: \frac{\partial}{\partial \zeta} [(\text{rot } \vec{u}^*)_{\zeta}] = 0 \quad (15)$$

abgeleitet und gezeigt, daß damit die Strömungsgeschwindigkeit an der freien Oberfläche eines offenen geneigten Wasserkanals nahezu Null wird. Deshalb wurde für die Stabilitätsrechnung die Randbedingung nach Gln. (15) durch die Randbedingungen für eine feste Oberfläche

$$\zeta = 1: u^* = v^* = w^* = 0 \quad (16)$$

ersetzt, da die beobachteten Strömungsgeschwindigkeiten an der freien Oberfläche nahezu Null waren.

Betrachtet man nur den zweidimensionalen Fall, mit den x- und z- bzw. ξ und ζ Koordinaten, so läßt sich unter Verwendung der Stromfunktion $\Psi(\xi, \zeta)$

$$u^* = \frac{\partial \Psi}{\partial \zeta} \quad \text{und} \quad w^* = -\frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \quad (17)$$

zeigen, daß die Lösung der Differentialgleichungen (12), (13) und (8) unter Beachtung der Randbedingungen nach Gln. (14) und (16) für den Fall $\Omega = 0$ folgende Symmetriebedingungen erfüllen muß

$$\begin{aligned} \psi(\xi, \zeta) &= \psi(15 - \xi, 1 - \zeta) \\ \Theta(\xi, \zeta) &= 1 - \Theta(15 - \xi, 1 - \zeta) \end{aligned} \quad (18)$$

Eine allgemeine Lösung dieser Differentialgleichungen ist bis heute nicht bekannt geworden. Numerische Lösungen für den Fall $\Omega = 0$ bei $H/L \ll 1$ haben u.a. Merker [10] und Cormack, Leal und Seinfeld [11] angegeben.

6. Stabilitätsbetrachtungen

Die experimentellen Ergebnisse lassen vermuten, daß die bei höherer Temperaturdifferenz auftretende Rückströmung bei $\Omega = 0$ und der Übergang von der mäanderförmigen zur Quasi-Walzenströmung bei $\Omega = 0,936$ 1/s und $\Delta T \approx 50$ K Stabilitätsprobleme sind, d.h., die Struktur der Ausgangsströmung ändert sich an einer sog. Stabilitätsgrenze.

Denkt man sich die Heiz- und Kühlplatte durch geeignete Zu- und Abflüsse ersetzt, so würden sich für $\Omega = 0$ auf halber Troglänge ähnliche Geschwindigkeitsprofile $u(\xi)$ wie die beobachteten einstellen. Berücksichtigt man ferner, daß aufgrund der Versuchsergebnisse die Strömungsgeschwindigkeit an der freien Oberfläche praktisch gleich Null ist, so kann das Problem

wesentlich vereinfacht werden; der Stabilitätsanalyse für den Fall $\Omega = 0$ wird eine zweidimensionale isotherme und parallele Strömung zwischen zwei ebenen Wänden zugrunde gelegt. Der Zusammenhang zwischen Strömungsgeschwindigkeit (Reynoldszahl) und Temperaturdifferenz (Rayleigh-Zahl) wird über die experimentell ermittelte Abhängigkeit

$$u_{\max} = f_1(\Delta T) \quad \text{bzw.} \quad Re = f_2(Ra) \quad (19)$$

berücksichtigt.

Aus den Gln. (6) und (8) folgt damit für die zweidimensionale und isotherme Strömung ¹

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial \tau} + Re \cdot \vec{u} \cdot \nabla_2 \vec{u} = -Re \cdot \nabla_2 p + \Delta_2 \vec{u} \quad (20)$$

$$\text{div} \vec{u} = 0 \quad (21)$$

Wie Lin [12] und Betchov und Criminale [13] gezeigt haben, läßt sich aus den Gln. (20) und (21) eine Stördifferentialgleichung, die sog. Orr-Sommerfeld-Gleichung

$$i \cdot \alpha \cdot Re[(U - c)(\Phi'' - \alpha^2 \Phi) - U'' \Phi] = \Phi^{IV} - 2\alpha^2 \Phi'' + \alpha^4 \Phi \quad (22)$$

für die komplexe Störfunktion $\Phi(z)$ ableiten.

α ist dabei die Wellenzahl und $c = c_r + i \cdot c_i$ ein komplexer Stabilitätsparameter.

Für $c_i > 0$ wachsen die Störungen mit der Zeit an, für $c_i < 0$ werden sie gedämpft; $c_i = 0$ stellt deshalb die Stabilitätsgrenze dar.

Die allgemeine Lösung dieser Stördifferentialgleichung bereitet beträchtliche mathematische Schwierigkeiten und analytische Lösungen sind nur für wenige Fälle bekannt geworden. Für den Fall, daß nur eine sog. kritische Größe einer Kennzahl zur Festlegung der Stabilitätsgrenze und nicht die allgemeine Lösung interessiert, hat Lin [12] eine ausreichende Bedingung für die Stabilität angegeben, die im folgenden kurz erläutert wird.

Die Stördifferentialgleichung (20) wird mit der konjugiert komplexen Störfunktion $\Phi^*(z)$ multipliziert und in den Grenzen $z = 0$ bis $z = 1$ integriert. Die dabei auftretenden Integrale können durch partielle Integration unter Beachtung der Randbedingung für die Störfunktion

$$\begin{aligned} \Phi(0) = \Phi(1) = \Phi^*(0) = \Phi^*(1) = 0 \\ \Phi'(0) = \Phi'(1) = \Phi^{*'}(0) = \Phi^{*'}(1) = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

¹ Im folgenden werden die dimensionslosen Koordinaten ξ und ζ wieder mit x und z bezeichnet, bei den übrigen dimensionslosen Variablen wird der * weggelassen.

gelöst werden. Nach einigen Umformungen erhält man die ausreichende Stabilitätsbedingung

$$\alpha \cdot Re \cdot U'_{\max} < \text{MIN} \left\{ \frac{J_2^2 + 2\alpha^2 J_1^2 + \alpha^4 J_0^2}{J_0 J_1} \right\} \quad (24)$$

mit den Funktionen

$$J_0^2 = \int_0^1 \bar{\phi} \bar{\phi}^* dz$$

$$J_1^2 = \int_0^1 \bar{\phi}' \bar{\phi}'^* dz \quad (25)$$

$$J_2^2 = \int_0^1 \bar{\phi}'' \bar{\phi}''^* dz$$

Als Information über das Geschwindigkeitsprofil $U(z)$ der ungestörten Ausgangsströmung geht lediglich der Maximalwert der Ableitung U'_{\max} ein. Die Integrale J_0 , J_1 und J_2 der Störfunktion sind so gesucht, daß die linke Seite von Gl.(24) ein Minimum wird.

Dies könnte z.B. durch Lösen eines entsprechenden Variationsintegrals geschehen. Für den vorliegenden Fall bietet sich jedoch eine einfachere Möglichkeit an.

Das Geschwindigkeitsprofil $U(z)$ der ungestörten Ausgangsströmung soll näherungsweise durch die Funktion

$$U(z) = \sin(2\pi z) \text{ mit } U'_{\max} = 2\pi \quad (26)$$

approximiert werden.

Die experimentellen Beobachtungen legen es nahe, dem sinusförmigen Geschwindigkeitsprofil höherfrequente Sinusschwingungen als Störgeschwindigkeiten zu überlagern. Unter Beobachtung der Randbedingungen nach Gln.(23) erhält man somit für die Störfunktion

$$\bar{\phi}(z) = 1 - \cos(2\pi n z); \quad n = 2, 3, 4, \dots \quad (27)$$

Damit läßt sich, wie in Bild 16 gezeigt, der Verlauf der Reynoldszahl als Funktion der Wellenzahl $Re = Re(\alpha)$ darstellen.

Für die minimale Reynoldszahl erhält man damit $Re_{th} \approx 49$.

Die Übereinstimmung mit dem experimentell ermittelten Wert $Re_{exp} \approx 44$, siehe Bild 17, ist sehr gut, wenn man bedenkt, daß, einmal mit den für diese Stabi-

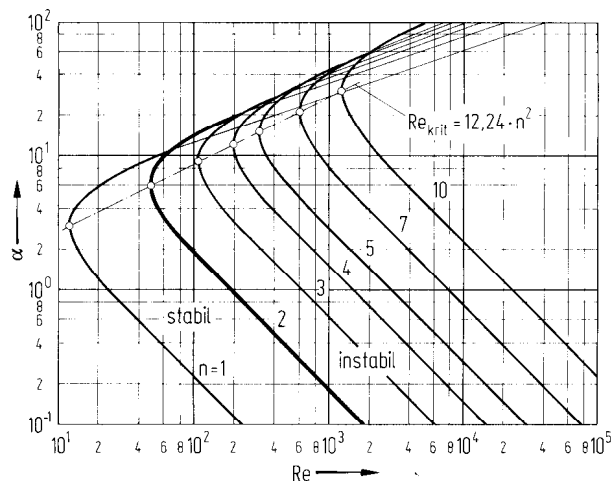


Bild 16. Stabilitätsdiagramm $Re = Re(\alpha)$ für $\Omega = 0$

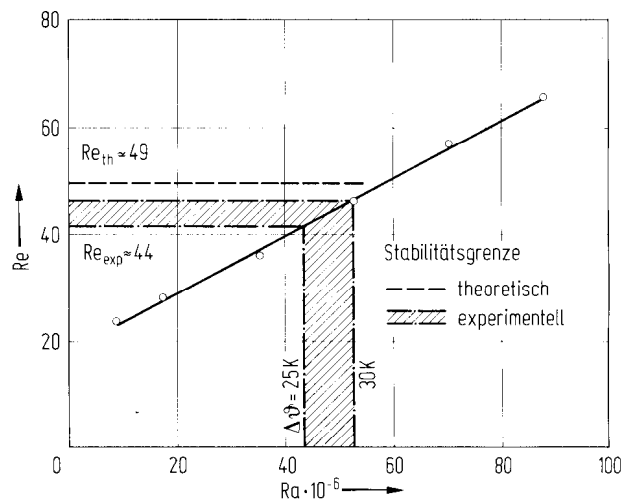


Bild 17. Vergleich zwischen theoretisch und experimentell ermittelter Stabilitätsgrenze für $\Omega = 0$

litätsanalyse getroffenen Annahmen die tatsächlichen Strömungsverhältnisse nur näherungsweise wiedergegeben werden und ferner die experimentellen Ergebnisse keine scharfe Grenze für die kritische Reynoldszahl erkennen lassen. Über die Form des Geschwindigkeitsprofils für $Re > 49$ kann die Stabilitätsanalyse keine Aussage liefern.

Analoge Untersuchungen für den Fall $\Omega \neq 0$ ergaben, daß hier wegen des wesentlich komplexeren Verhaltens der Strömung nur qualitative Aussagen gemacht werden können. Die für eine stabile Strömung (Walzenströmung) zulässige Taylor-Zahl nimmt mit steigender Reynoldszahl ab, dieses Ergebnis erscheint sinnvoll, denn bei $Re \approx 5300$ wird die ebene Poiseuille-Strömung für $Ta = 0$ instabil, d.h., die laminare Strömung wird turbulent. Für kleine Reynoldszahlen scheint die Walzen-

strömung für Taylor-Zahlen $Ta < 1,5 \cdot 10^3$ stabil zu sein, ein Wert, der in der Größenordnung mit den experimentellen Beobachtungen übereinstimmt.

Literatur

1. Proudman, J.: On the motion of solids in liquids possessing vorticity. *Proc. Roy. Soc. A*, 92 (1916) 408/424
2. Taylor, G.I.: Experiments with rotating fluids. *Proc. Roy. Soc. A*, 100 (1921) 114/121
3. Taylor, G.I.: Stability of a viscous liquid contained between two rotating cylinders. *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 223 (1923) 289/343
4. Baker, D.J.; Robinson, A.R.: A laboratory model for the general ocean circulation. *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 265 (1969) 533/566
5. Hide, R.: An experimental study of thermal convection in a rotating liquid. *Phil. Trans. Roy. Soc. A*, 250 (1958) 441/478
6. Bowden, M.; Eden, H.F.: Thermal convection in a rotating fluid annulus: Temperature, Heat flow and flow field observation in the upper symmetric regime. *J. Atmos. Sci.* 22 (1965) 185/195
7. Fowlis, W.W.; Hide, R.: Thermal convection in a rotating annulus of liquid: Effect of viscosity on the transition between axisymmetric and nonsymmetric flow regimes. *J. Atmos. Sci.* 22 (1965) 541/558
8. Baker, J.D.: A technique for the precise measurement of small fluid velocities. *J. Fluid Mech.* 26 (1966) 573/575
9. Kenning, D.B.R.; Cooper, M.G.: Interfacial circulation due to surface-active agent in steady two-phase flows. *J. Fluid Mech.* 24 (1966) 293/306
10. Merker, G.P.: Freie Konvektion in einem rechtwinkligen Trog mit und ohne Rotation. Dissertation T.U. München, 1974
11. Cormack, D.E.; Leal, L.G.; Seinfeld, J.H.: Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. Part 2. Numerical solutions. *J. Fluid Mech.* 65 (1974), Part 2, 231/246
12. Lin, C.C.: The Theory of hydrodynamic stability. Cambridge University Press 1967
13. Betchov, R.; Criminale, Jr., W.O.: Stability of parallel flows. New York-London: Academic Press 1967

Dr.-Ing. G.P. Merker
 Prof. Dr.-Ing. U. Grigull
 Lehrstuhl A für Thermodynamik
 Technische Universität München
 D-8000 München 2, Postfach 202420
 (Deutschland)

Eingegangen am 18. Februar 1975