

DK 536.71

## Einige Umkehrfunktionen und Näherungsgleichungen zur „1967 IFC Formulation for Industrial Use“ für Wasser und Wasserdampf

Von R. Meyer-Pittroff, München, H. Vesper, Erlangen, und U. Grigull, München\*)

*In Ergänzung zu der international vereinbarten „1967 IFC Formulation for Industrial Use“ werden einige Näherungsgleichungen für den Sättigungszustand und das Naßdampfgebiet sowie drei Umkehrfunktionen für das Wassergebiet und das Gebiet des überhitzten Dampfes angegeben. Einige technisch wichtige Zustandsgrößen können mit den Näherungsgleichungen einfacher und mit den Umkehrfunktionen ohne Iterationen der Zustandsgleichungen der „Formulation“ berechnet werden.*

Die Teilnehmerländer der 6. Internationalen Konferenz über die Eigenschaften des Wasserdampfes (New York, 1963) haben im August 1968 die „1967 IFC Formulation for Industrial Use“ [1] — im Folgenden abgekürzt mit „Formulation“ bezeichnet — einstimmig für international gültig erklärt. Diese Formulation enthält Zustandsgleichungen, die im Wassergebiet und im Gebiet des überhitzten Dampfes die spezifischen Werte des Volumens  $v$ , der Enthalpie  $h$  und der Entropie  $s$  abhängig vom Druck  $p$  und der Temperatur  $t$  und im kritischen Gebiet  $p$ ,  $h$  und  $s$  abhängig von  $v$  und  $t$  wiedergeben, außerdem eine Gleichung für den Sättigungsdruck  $p_s$  abhängig von der Temperatur  $t$ .

Mit diesen Gleichungen läßt sich grundsätzlich jede der genannten Zustandsgrößen abhängig von jeweils zwei der übrigen berechnen. Wenn aber die in einem bestimmten Anwendungsfall vorgegebenen Zustandsgrößen nicht identisch sind mit den unabhängigen Veränderlichen der Zustandsgleichung, muß die Zustandsgleichung iterativ nach der gesuchten Größe aufgelöst werden. Da in wärmetechnischen Programmen die Berechnung der Zustandsgrößen meist einen erheblichen Anteil der Gesamtrechenzeit erfordert, führt die iterative Lösung zu einer empfindlichen Rechenzeitverlängerung.

Es ist deshalb wünschenswert, entsprechende Umkehrfunktionen zur Verfügung zu haben, aus denen die gesuchten Zustandsgrößen explizit berechnet werden können. Solche Umkehrfunktionen brauchen nicht unbedingt thermodynamisch konsistent zu sein, sie sollten aber die Werte der Grundfunktion mit einer Genauigkeit wiedergeben, die für die meisten Fälle ausreicht. Für Rechnungen im Naßdampfgebiet sind weiterhin einfache Näherungsgleichungen zur Ermittlung der Zustandsgrößen im Sättigungszustand von Nutzen. Die Sättigungswerte sind nur noch von jeweils einer anderen Zustandsgröße abhängig und lassen sich deshalb wesentlich einfacher als durch die zweiparametrischen Zustandsgleichungen abbilden.

Umkehr- und Näherungsfunktionen könnten im Idealfall zusammen mit den Grundfunktionen der Formulation ein System von Gleichungen bilden, aus dem alle

gesuchten Zustandsgrößen explizit und zeitsparend zu ermitteln sind. Im Folgenden werden solche Näherungsgleichungen für den Sättigungszustand von Wasser und

### Formelzeichen

$t$	Celsius-Temperatur <sup>1)</sup>
$T$	thermodynamische oder Kelvin-Temperatur <sup>1)</sup>
$p$	Druck
$v$	spezifisches Volumen
$h$	spezifische Enthalpie
$s$	spezifische Entropie
$g$	spezifische freie Enthalpie (Gibbs-Funktion)
$a_n, A_{m,n}, B_{m,n}, C_{m,n}, L_n$	Koeffizienten

### Indizes:

$s$	Index für Sättigungsdruck und -temperatur
	Indizes für andere Zustandswerte im Sättigungszustand:
$f$	für Wasser
$g$	für Dampf
$c_1$	Index für die Zustandsgrößen des kritischen Punktes, die auf der 6. Internationalen Wasserdampfkongferenz 1963 definiert worden sind
$L$	Index für die Grenze zwischen dem kritischen und dem überhitzten Zustandsgebiet

### Reduzierte Größen:

$\theta$	$= T/T_{c_1}$	reduzierte Temperatur
$\beta$	$= p/p_{c_1}$	reduzierter Druck
$\chi$	$= v/v_{c_1}$	reduziertes Volumen
$\varepsilon$	$= h/(p_{c_1} v_{c_1})$	reduzierte Enthalpie
$\sigma$	$= s/(p_{c_1} v_{c_1}/T_{c_1})$	reduzierte Entropie
$\zeta$	$= g/(p_{c_1} v_{c_1})$	reduzierte freie Enthalpie

### Definierte Werte:

$T_{c_1}$	$= 647,3$ K
$t_{c_1}$	$= 374,15$ °C
$\theta_0$	$= 273,15/647,3$
$p_{c_1}$	$= 221,2$ bar
$v_{c_1}$	$= 0,00317$ m <sup>3</sup> /kg
$p_{c_1} v_{c_1}$	$= 70,1204$ kJ/kg (genau)
$p_{c_1} v_{c_1}/T_{c_1}$	$= 0,1083275143$ kJ/kg K (gerundet)

\*) Prof. Dr.-Ing. Ulrich Grigull VDI und Dipl.-Ing. Roland Meyer-Pittroff VDI, Institut A für Thermodynamik der TH München; Dipl.-Ing. Horst Vesper, Kraftwerk Union AG, Erlangen.

<sup>1)</sup> Die Einheit der thermodynamischen Temperatur und der Temperaturdifferenzen ist das Kelvin (Einheitenzeichen K). Bei Angabe von Celsius-Temperaturen wird diese Einheit mit Grad Celsius (Einheitenzeichen °C) bezeichnet (vergl. DIN 1345).

Dampf, zwei Umkehrfunktionen für flüssiges Wasser und eine Umkehrfunktion für überhitzten Dampf angeben. Die Gleichungen wurden approximiert mit den Werten, die aus den Zustandsgleichungen der „1967 IFC Formulation for Industrial Use“ direkt oder iterativ mit hoher Genauigkeit ermittelt wurden. Die Koeffizienten der Gleichungen wurden teils nach der Methode der kleinsten Fehlerquadratsumme, teils nach der Approximationsmethode von *Tschebyscheff* auf einem Digitalrechner (Siemens 2002) bestimmt. Die Gleichungen entstanden in Anlehnung an diejenigen, die von *Zens* [2; 3] und *Vesper* [4] für die Werte der 6. Auflage der VDI-Wasserdampftafeln angegeben worden sind.

### Näherungsgleichungen für den Sättigungszustand Dampfdruckkurve

Für die Dampfdruckkurve nennt die Formulation die relativ einfache Beziehung  $p_s = p(t_s)$ . Doch läßt sich diese Gleichung nicht in die häufig gebrauchte Beziehung  $t_s = t(p_s)$  explizit umkehren, so daß bei gegebenem  $p_s$  die

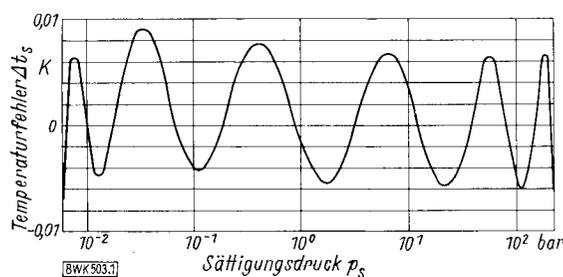


Bild 1. Fehler des Näherungspolynoms nach Gl. (1) für die Sättigungstemperatur gegenüber den Werten der Dampfdruckkurve der Formulation [1].

Temperatur  $t_s$  iterativ bestimmt werden müßte. Hierfür kann aber folgendes Näherungspolynom verwendet werden, das in dimensionsloser Schreibweise lautet:

$$\theta_s - \theta_0 = \frac{t_s}{647,3 \text{ K}} = \sum_{\nu=0}^{11} a_\nu (-\ln \beta_s)^\nu \dots (1),$$

mit den Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_0 &= 5,780259540 \cdot 10^{-1} & a_6 &= -4,192764190 \cdot 10^{-4} \\ a_1 &= -1,302648849 \cdot 10^{-1} & a_7 &= 6,406685324 \cdot 10^{-5} \\ a_2 &= 4,659619960 \cdot 10^{-3} & a_8 &= -6,502261324 \cdot 10^{-6} \\ a_3 &= 9,005176734 \cdot 10^{-3} & a_9 &= 4,196304894 \cdot 10^{-7} \\ a_4 &= -5,381994299 \cdot 10^{-3} & a_{10} &= -1,557203045 \cdot 10^{-8} \\ a_5 &= 1,847273054 \cdot 10^{-3} & a_{11} &= 2,528084026 \cdot 10^{-10} \end{aligned}$$

und dem Gültigkeitsbereich:  $0,006108 \text{ bar} \leq p_s \leq p_{c1}$ . Den Fehler des Näherungspolynoms zeigt Bild 1.

### Zustandswerte $v$ , $h$ , $s$ von siedendem Wasser und kondensierendem Dampf

Die Näherungsgleichungen für die Zustandswerte  $z_f = v_f$  bzw.  $h_f$  bzw.  $s_f$  für siedendes Wasser und  $z_g = v_g$  bzw.  $h_g$  bzw.  $s_g$  für kondensierenden Dampf sind in zwei Bereiche unterteilt. Der Bereich I läuft von  $0 \leq t_s \leq 350 \text{ }^\circ\text{C}$ , der Bereich II von  $350 \text{ }^\circ\text{C} < t_s \leq t_{c1}$ . Die Unterteilung entspricht der Teilung der Formulation und erlaubt im technisch wichtigen Bereich I eine einfache polynome Darstellung. Die Gleichungen haben folgende Form:

Bereich I :  $z = z(t_s)$

Bereich II:  $z = z[(t_{c1} - t_s)^{0,25}]$ .

Im Bereich II wurde eine Wurzelfunktion als Funktionsargument eingesetzt, um den senkrechten Anstieg der Zustandskurven im kritischen Punkt abzubilden. Alle Gleichungen sind in dimensionsloser Form geschrieben und in **Zahlentafel 1** zusammengestellt.

Zahlentafel 1. Näherungsgleichungen für die Zustandswerte für siedendes Wasser und für kondensierenden Dampf.

Siedendes Wasser	
Bereich I $0 \text{ }^\circ\text{C} \leq t_s \leq 350 \text{ }^\circ\text{C}$	Bereich II $350 \text{ }^\circ\text{C} < t_s \leq t_{c1}$
Spezifisches Volumen	
$z_f = \sum_{\nu=0}^{10} a_\nu (\theta_s - \theta_0)^\nu$	$z_f = \sum_{\nu=0}^8 a_\nu (1 - \theta_s)^{0,25 \nu}$
$a_0 = 0,3155901296$ $a_1 = -0,3592060636 \cdot 10^{-1}$ $a_2 = 0,2396625841 \cdot 10^1$ $a_3 = -0,3639240662 \cdot 10^2$ $a_4 = 0,4136745246 \cdot 10^3$ $a_5 = -0,2911342409 \cdot 10^4$ $a_6 = 0,1284466533 \cdot 10^5$ $a_7 = -0,3554355367 \cdot 10^5$ $a_8 = 0,5992507856 \cdot 10^5$ $a_9 = -0,5626661248 \cdot 10^5$ $a_{10} = 0,2258558000 \cdot 10^5$	$a_0 = 0,1000000272 \cdot 10^1$ $a_1 = 0,6434322470$ $a_2 = -0,2598811457 \cdot 10^2$ $a_3 = 0,1928271795 \cdot 10^3$ $a_4 = -0,9476312526 \cdot 10^3$ $a_5 = 0,3190638964 \cdot 10^4$ $a_6 = -0,6805842363 \cdot 10^4$ $a_7 = 0,8088134131 \cdot 10^4$ $a_8 = -0,4034574025 \cdot 10^4$
Fehler: bis $340 \text{ }^\circ\text{C} < 2,2 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{kg}$ über $340 \text{ }^\circ\text{C} < 6,6 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{kg}$	Fehler: bis $373 \text{ }^\circ\text{C} < 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{kg}$ über $373 \text{ }^\circ\text{C} < 3,5 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{kg}$
Spezifische Enthalpie	
$z_f = \sum_{\nu=0}^9 a_\nu (\theta_s - \theta_0)^\nu$	$z_f = \sum_{\nu=0}^7 a_\nu (1 - \theta_s)^{0,25 \nu}$
$a_0 = -0,1654903957 \cdot 10^{-2}$ $a_1 = 0,3917685214 \cdot 10^2$ $a_2 = -0,2188690656 \cdot 10^2$ $a_3 = 0,3756279695 \cdot 10^3$ $a_4 = -0,3515858806 \cdot 10^4$ $a_5 = 0,1958269621 \cdot 10^5$ $a_6 = -0,6501332671 \cdot 10^5$ $a_7 = 0,1274040873 \cdot 10^6$ $a_8 = -0,1359376648 \cdot 10^6$ $a_9 = 0,6112873019 \cdot 10^5$	$a_0 = 0,3005402200 \cdot 10^2$ $a_1 = 0,3597942941 \cdot 10^1$ $a_2 = -0,1532031419 \cdot 10^3$ $a_3 = 0,7986319398 \cdot 10^3$ $a_4 = -0,2594558237 \cdot 10^4$ $a_5 = 0,5006295761 \cdot 10^4$ $a_6 = -0,5230243037 \cdot 10^4$ $a_7 = 0,2020548837 \cdot 10^4$
Fehler: bis $320 \text{ }^\circ\text{C} < 7,0 \cdot 10^{-2} \text{ kJ/kg}$ über $320 \text{ }^\circ\text{C} < 2,4 \cdot 10^{-1} \text{ kJ/kg}$	Fehler: bis $373 \text{ }^\circ\text{C} < 3,5 \cdot 10^{-2} \text{ kJ/kg}$ über $373 \text{ }^\circ\text{C} < 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ kJ/kg}$
Spezifische Entropie	
$z_f = \sum_{\nu=0}^{10} a_\nu (\theta_s - \theta_0)^\nu$	$z_f = \sum_{\nu=0}^8 a_\nu (1 - \theta_s)^{0,25 \nu}$
$a_0 = -0,6785743368 \cdot 10^{-3}$ $a_1 = 0,9202466330 \cdot 10^2$ $a_2 = -0,1194517682 \cdot 10^3$ $a_3 = 0,2173387345 \cdot 10^3$ $a_4 = 0,4676361526 \cdot 10^5$ $a_5 = -0,1008136153 \cdot 10^5$ $a_6 = 0,6185728234 \cdot 10^5$ $a_7 = -0,2043498190 \cdot 10^6$ $a_8 = 0,3860518101 \cdot 10^6$ $a_9 = -0,3926007257 \cdot 10^6$ $a_{10} = 0,1673567598 \cdot 10^6$	$a_0 = 0,4101322000 \cdot 10^2$ $a_1 = 0,4341987634 \cdot 10^1$ $a_2 = -0,1774080960 \cdot 10^3$ $a_3 = 0,1120544741 \cdot 10^4$ $a_4 = -0,4854735620 \cdot 10^4$ $a_5 = 0,1418018802 \cdot 10^5$ $a_6 = -0,2670690476 \cdot 10^5$ $a_7 = 0,2900297482 \cdot 10^5$ $a_8 = -0,1413390279 \cdot 10^5$
Fehler: bis $320 \text{ }^\circ\text{C} < 6,0 \cdot 10^{-5} \text{ kJ/kg K}$ über $320 \text{ }^\circ\text{C} < 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ kJ/kg K}$	Fehler: $< 1,24 \cdot 10^{-4} \text{ kJ/kg K}$
Kondensierender Dampf	
Spezifisches Volumen	
$\ln z_g = \sum_{\nu=0}^{10} a_\nu (\theta_s - \theta_0)^\nu$	$z_g = \sum_{\nu=0}^9 a_\nu (1 - \theta_s)^{0,25 \nu}$
$a_0 = 0,1108333753 \cdot 10^2$ $a_1 = -0,4464350654 \cdot 10^2$ $a_2 = 0,1210778198 \cdot 10^3$ $a_3 = -0,2785153762 \cdot 10^3$ $a_4 = 0,3279464497 \cdot 10^3$ $a_5 = 0,1462514145 \cdot 10^4$ $a_6 = -0,1159355916 \cdot 10^4$ $a_7 = 0,3892219673 \cdot 10^5$ $a_8 = -0,7322967131 \cdot 10^5$ $a_9 = 0,7446637149 \cdot 10^5$ $a_{10} = -0,3196235787 \cdot 10^5$	$a_0 = 0,1000000272 \cdot 10^1$ $a_1 = 0,4026415669 \cdot 10^1$ $a_2 = -0,1299023268 \cdot 10^3$ $a_3 = 0,1867667009 \cdot 10^4$ $a_4 = -0,1384524815 \cdot 10^5$ $a_5 = 0,6182471587 \cdot 10^5$ $a_6 = -0,1715606251 \cdot 10^6$ $a_7 = 0,2903120606 \cdot 10^6$ $a_8 = -0,2742925181 \cdot 10^6$ $a_9 = 0,1112020970 \cdot 10^6$
Fehler: bis $320 \text{ }^\circ\text{C} < 1,0 \cdot 10^{-2} \%$ über $320 \text{ }^\circ\text{C} < 3,6 \cdot 10^{-2} \%$	Fehler: $< 6,8 \cdot 10^{-7} \text{ m}^3/\text{kg}$
Spezifische Enthalpie	
$z_g = \sum_{\nu=0}^{10} a_\nu (\theta_s - \theta_0)^\nu$	$z_g = \sum_{\nu=0}^8 a_\nu (1 - \theta_s)^{0,25 \nu}$
$a_0 = 0,3567374099 \cdot 10^2$ $a_1 = 0,1739414792 \cdot 10^2$ $a_2 = -0,2801525240 \cdot 10^2$ $a_3 = 0,6613183269 \cdot 10^3$ $a_4 = -0,8966974519 \cdot 10^4$ $a_5 = 0,6718723890 \cdot 10^5$ $a_6 = -0,3086805377 \cdot 10^6$ $a_7 = 0,8797038209 \cdot 10^6$ $a_8 = -0,1516683940 \cdot 10^7$ $a_9 = 0,1448691008 \cdot 10^7$ $a_{10} = -0,5890879741 \cdot 10^8$	$a_0 = 0,3005402200 \cdot 10^2$ $a_1 = 0,1763624936 \cdot 10^2$ $a_2 = -0,5115560422 \cdot 10^3$ $a_3 = 0,6957899680 \cdot 10^4$ $a_4 = -0,4476915664 \cdot 10^5$ $a_5 = 0,1636731055 \cdot 10^6$ $a_6 = -0,3474182116 \cdot 10^6$ $a_7 = 0,3999507020 \cdot 10^6$ $a_8 = -0,1929903187 \cdot 10^6$
Fehler: bis $330 \text{ }^\circ\text{C} < 1,3 \cdot 10^{-1} \text{ kJ/kg}$ über $330 \text{ }^\circ\text{C} < 2,6 \cdot 10^{-1} \text{ kJ/kg}$	Fehler: bis $373 \text{ }^\circ\text{C} < 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ kJ/kg}$ über $373 \text{ }^\circ\text{C} < 2,8 \cdot 10^{-1} \text{ kJ/kg}$

Spezifische Entropie	
$\sigma_g = \sum_{\nu=0}^{11} a_{\nu} (\Theta_s - \Theta_0)^{\nu}$ <p> <math>a_0 = 0,84538699469 \cdot 10^2</math>  <math>a_1 = -0,1598812786 \cdot 10^3</math>  <math>a_2 = 0,4759846681 \cdot 10^3</math>  <math>a_3 = -0,10888680848 \cdot 10^4</math>  <math>a_4 = 0,9000660030 \cdot 10^3</math>  <math>a_5 = 0,3646679644 \cdot 10^4</math>  <math>a_6 = 0,2630070860 \cdot 10^4</math>  <math>a_7 = -0,1528720393 \cdot 10^5</math>  <math>a_8 = 0,7238426463 \cdot 10^5</math>  <math>a_9 = -0,1595330649 \cdot 10^7</math>  <math>a_{10} = 0,1758861554 \cdot 10^7</math>  <math>a_{11} = -0,7842055818 \cdot 10^5</math> </p> <p>Fehler:                      bis 330 °C &lt; 2,0 · 10<sup>-4</sup> kJ/kg K                      über 330 °C &lt; 5,5 · 10<sup>-4</sup> kJ/kg K                 </p>	$\sigma_g = \sum_{\nu=0}^9 a_{\nu} (1 - \Theta_s)^{\nu,25} \nu$ <p> <math>a_0 = 0,4101322000 \cdot 10^2</math>  <math>a_1 = 0,3340308508 \cdot 10^2</math>  <math>a_2 = -0,1102316144 \cdot 10^4</math>  <math>a_3 = 0,1619289653 \cdot 10^5</math>  <math>a_4 = -0,1237348753 \cdot 10^6</math>  <math>a_5 = 0,5693184875 \cdot 10^6</math>  <math>a_6 = -0,1633677720 \cdot 10^7</math>  <math>a_7 = 0,2867289925 \cdot 10^7</math>  <math>a_8 = -0,2819790483 \cdot 10^7</math>  <math>a_9 = 0,1191323766 \cdot 10^7</math> </p> <p>Fehler: &lt; 1,55 · 10<sup>-4</sup> kJ/kg K</p>

**Naßdampfenthalpie abhängig von Temperatur und Entropie**

Bei isentropen Zustandsänderungen ist mit der Entropie meist der Druck und im Naßdampfgebiet damit auch die Temperatur bekannt, während z. B. die Enthalpie berechnet werden soll. Für diesen Fall läßt sich im Naßdampfgebiet eine sehr einfache Beziehung angeben, die aus der Definition des Gibbsschen Potentials folgt.

Es ist  $g = h - T s$  oder  $h = T s + g$ . Im Naßdampfgebiet gilt insbesondere z. B.:

$$g_t = h_t - T_s s_t, \text{ so daß}$$

$$h = T_s s + g_t = T_s s + (h_t - T_s s_t) \text{ ist.}$$

Nun läßt sich  $g_t$  mit den Sättigungswerten  $h_t, s_t$  und  $t_s$  nur abhängig von  $t_s$  angeben, wofür das folgende einfache Näherungspolynom gefunden wurde:

$$\zeta_t = \sum_{\nu=0}^6 a_{\nu} (\Theta_s - \Theta_0)^{\nu} \dots \dots \dots (2),$$

mit den Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 a_0 &= 0,2295206797 \cdot 10^{-3} & a_4 &= -0,3004205011 \cdot 10^{+2} \\
 a_1 &= -0,2617057106 \cdot 10^{-1} & a_5 &= 0,2261148113 \cdot 10^{+2} \\
 a_2 &= -0,4533104003 \cdot 10^{+2} & a_6 &= -0,9075359582 \cdot 10^{+1} \\
 a_3 &= 0,3331372969 \cdot 10^{+2} & &
 \end{aligned}$$

und dem Gültigkeitsbereich:  $0 \text{ °C} \leq t_s \leq t_{c1}$ .

Damit wird

$$\varepsilon = \Theta_s \sigma + \sum_{\nu=0}^6 a_{\nu} (\Theta_s - \Theta_0)^{\nu} \dots \dots \dots (3).$$

Der Absolutbetrag des Fehlers der Gl. (3) gegenüber den aus der Formulation ermittelten Werten ist zwischen

**Zahlentafel 2.** Zahlenwerte der Koeffizienten  $A_{m,n}$  der Umkehrfunktion (4).

$A_{0,0} = 4,073773869 \cdot 10^{-4}$ $A_{0,1} = 3,113360554 \cdot 10^{-1}$ $A_{0,2} = 1,949249972 \cdot 10^{-2}$ $A_{0,3} = -3,161776504 \cdot 10^{-2}$ $A_{0,4} = 2,080402430 \cdot 10^{-2}$ $A_{0,5} = -6,368280217 \cdot 10^{-3}$ $A_{0,6} = 7,419143406 \cdot 10^{-4}$	$A_{3,0} = 1,596075677 \cdot 10^{-5}$ $A_{3,1} = 1,683317983 \cdot 10^{-4}$ $A_{3,2} = -8,612363104 \cdot 10^{-4}$ $A_{3,3} = 1,322116529 \cdot 10^{-3}$ $A_{3,4} = -9,02505524 \cdot 10^{-4}$ $A_{3,5} = 2,886676356 \cdot 10^{-4}$ $A_{3,6} = -3,535750649 \cdot 10^{-5}$
$A_{1,0} = 4,210845049 \cdot 10^{-1}$ $A_{1,1} = 6,406791967 \cdot 10^{-3}$ $A_{1,2} = -3,318663793 \cdot 10^{-2}$ $A_{1,3} = 5,024193605 \cdot 10^{-2}$ $A_{1,4} = -3,359763784 \cdot 10^{-2}$ $A_{1,5} = 1,049538914 \cdot 10^{-2}$ $A_{1,6} = -1,252045221 \cdot 10^{-3}$	$A_{4,0} = 1,931060041 \cdot 10^{-6}$ $A_{4,1} = -6,570945363 \cdot 10^{-6}$ $A_{4,2} = 3,345052121 \cdot 10^{-5}$ $A_{4,3} = -5,176017003 \cdot 10^{-5}$ $A_{4,4} = 3,564516823 \cdot 10^{-5}$ $A_{4,5} = -1,150831757 \cdot 10^{-5}$ $A_{4,6} = 1,423620123 \cdot 10^{-6}$
$A_{2,0} = 5,732473874 \cdot 10^{-3}$ $A_{2,1} = -1,638828035 \cdot 10^{-3}$ $A_{2,2} = 8,933548995 \cdot 10^{-3}$ $A_{2,3} = -1,362204086 \cdot 10^{-2}$ $A_{2,4} = 9,209590102 \cdot 10^{-3}$ $A_{2,5} = -2,913424279 \cdot 10^{-3}$ $A_{2,6} = 3,525317402 \cdot 10^{-4}$	$A_{5,0} = -3,386877634 \cdot 10^{-8}$ $A_{5,1} = 9,005867457 \cdot 10^{-8}$ $A_{5,2} = -4,476129084 \cdot 10^{-7}$ $A_{5,3} = 6,979332242 \cdot 10^{-7}$ $A_{5,4} = -4,843674504 \cdot 10^{-7}$ $A_{5,5} = 1,575928112 \cdot 10^{-7}$ $A_{5,6} = -1,964842814 \cdot 10^{-8}$

0 und 320 °C kleiner als 0,02 kJ/kg und steigt bis 350 °C (Bereichsgrenze der Formulation) auf rd. 0,10 kJ/kg an, um dann wieder bis zur kritischen Temperatur auf 0,03 kJ/kg abzufallen.

**Umkehrfunktionen für flüssiges Wasser**

Zur Berechnung der Enthalpie von flüssigem Wasser nach einer isentropen Zustandsänderung, bei der Druck und Entropie im Anfangszustand bekannt sind, wurde Gl. (4)  $h = h(p, s)$  entwickelt:

$$\varepsilon = \sum_{m=0}^5 \left( \sum_{n=0}^6 A_{m,n} \beta^n \right) \sigma^m \dots \dots \dots (4).$$

Diese Gleichung gilt im Bereich:

$$\begin{aligned}
 0 \text{ °C} &\leq t \leq 340 \text{ °C} \\
 p_s(t) &\leq p \leq 500 \text{ bar.}
 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $A_{m,n}$  sind in **Zahlentafel 2** angegeben.

Der maximale absolute Fehler gegenüber den aus der Formulation auf iterativem Weg bestimmten Enthalpiewerten ist kleiner als 0,125 kJ/kg. Im Bereich von

**Zahlentafel 3.** Zahlenwerte der Koeffizienten  $B_{m,n}$  der Umkehrfunktion (5).

$B_{0,0} = -3,444174262 \cdot 10^{-5}$ $B_{0,1} = -8,146780446 \cdot 10^{-3}$ $B_{0,2} = -7,310113575 \cdot 10^{-4}$ $B_{0,3} = 7,729951536 \cdot 10^{-4}$ $B_{0,4} = -3,357281163 \cdot 10^{-4}$ $B_{0,5} = 3,601227690 \cdot 10^{-5}$ $B_{0,6} = 5,349819785 \cdot 10^{-6}$	$B_{4,0} = -3,754924903 \cdot 10^{-7}$ $B_{4,1} = 6,825891491 \cdot 10^{-6}$ $B_{4,2} = -3,154292470 \cdot 10^{-5}$ $B_{4,3} = 4,358800222 \cdot 10^{-5}$ $B_{4,4} = -2,602574119 \cdot 10^{-5}$ $B_{4,5} = 6,893734105 \cdot 10^{-6}$ $B_{4,6} = -6,434285551 \cdot 10^{-7}$
$B_{1,0} = 2,585230596 \cdot 10^{-2}$ $B_{1,1} = 4,851204925 \cdot 10^{-5}$ $B_{1,2} = 2,298866218 \cdot 10^{-3}$ $B_{1,3} = -2,875478637 \cdot 10^{-3}$ $B_{1,4} = 1,450975892 \cdot 10^{-3}$ $B_{1,5} = -2,705791877 \cdot 10^{-4}$ $B_{1,6} = 6,490712155 \cdot 10^{-6}$	$B_{5,0} = 2,518490213 \cdot 10^{-8}$ $B_{5,1} = -3,373124856 \cdot 10^{-7}$ $B_{5,2} = 1,473808144 \cdot 10^{-6}$ $B_{5,3} = -2,076036376 \cdot 10^{-6}$ $B_{5,4} = 1,277027847 \cdot 10^{-6}$ $B_{5,5} = -3,546269337 \cdot 10^{-7}$ $B_{5,6} = 3,581469782 \cdot 10^{-8}$
$B_{2,0} = 2,499175501 \cdot 10^{-5}$ $B_{2,1} = 2,399945375 \cdot 10^{-4}$ $B_{2,2} = -1,368731256 \cdot 10^{-3}$ $B_{2,3} = 1,784325209 \cdot 10^{-3}$ $B_{2,4} = -9,675392509 \cdot 10^{-4}$ $B_{2,5} = 2,144482146 \cdot 10^{-4}$ $B_{2,6} = -1,311066628 \cdot 10^{-5}$	$B_{6,0} = -8,352932818 \cdot 10^{-10}$ $B_{6,1} = 6,357046291 \cdot 10^{-9}$ $B_{6,2} = -2,595649700 \cdot 10^{-8}$ $B_{6,3} = 3,679785426 \cdot 10^{-8}$ $B_{6,4} = -2,315865189 \cdot 10^{-8}$ $B_{6,5} = 6,658834148 \cdot 10^{-9}$ $B_{6,6} = -7,087317210 \cdot 10^{-10}$
$B_{3,0} = -2,477708316 \cdot 10^{-6}$ $B_{3,1} = -6,178011485 \cdot 10^{-5}$ $B_{3,2} = 3,085386643 \cdot 10^{-4}$ $B_{3,3} = -4,162218770 \cdot 10^{-4}$ $B_{3,4} = 2,386022183 \cdot 10^{-4}$ $B_{3,5} = -5,894248656 \cdot 10^{-5}$ $B_{3,6} = 4,797764129 \cdot 10^{-6}$	$B_{7,0} = -6,378507579 \cdot 10^{-13}$ $B_{7,1} = -6,027623527 \cdot 10^{-14}$ $B_{7,2} = 5,931833896 \cdot 10^{-12}$ $B_{7,3} = -1,155299211 \cdot 10^{-11}$ $B_{7,4} = 8,940257306 \cdot 10^{-12}$ $B_{7,5} = -3,136025878 \cdot 10^{-12}$ $B_{7,6} = 4,148240446 \cdot 10^{-13}$

340 bis 350 °C treten in der Nähe der Grenzkurve Abweichungen bis 0,35 kJ/kg auf.

Für die Berechnung der Temperatur abhängig von Druck und Enthalpie eignet sich die Gl. (5)  $t = t(p, h)$ :

$$\Theta - \Theta_0 = \frac{t}{647,3 \text{ K}} = \sum_{m=0}^7 \left( \sum_{n=0}^6 B_{m,n} \beta^n \right) \varepsilon^m \dots \dots (5).$$

Der Gültigkeitsbereich ist:

$$\begin{aligned}
 0 \text{ °C} &\leq t \leq 330 \text{ °C} \\
 p_s(t) &\leq p \leq 500 \text{ bar.}
 \end{aligned}$$

Die Koeffizienten  $B_{m,n}$  zeigt **Zahlentafel 3**.

Der maximale absolute Fehler gegenüber den aus der Formulation iterativ bestimmten Temperaturwerten ist kleiner als 0,06 K. Nur für die Werte an der Grenzkurve steigt der absolute Fehler zwischen 326 und 330 °C von 0,055 K auf 0,091 K an. Im Bereich von 330 bis 350 °C ist der maximale absolute Fehler kleiner als 0,35 K, so daß die Gleichung in diesem Bereich noch gute Vorgabewerte für Iterationen liefert.

Wird die aus Gl. (5) bestimmte Näherungstemperatur benutzt, um aus der Formulation Werte des spezifischen Volumens und der spezifischen Entropie zu berechnen,

so verursacht die Temperaturungenauigkeit folgende maximale absolute Fehler:

Temperaturbereich °C	maximaler Fehler des spezifischen Volumens m <sup>3</sup> /kg	maximaler Fehler der spezifischen Entropie kJ/kg K
0 bis 324	2,82 · 10 <sup>-7</sup>	6,39 · 10 <sup>-4</sup>
324 bis 330	7,88 · 10 <sup>-7</sup>	1,09 · 10 <sup>-3</sup>

Die Volumenfehler sind wesentlich kleiner als die entsprechenden Toleranzen der Internationalen Rahmentafeln von 1963.

Soll die Temperatur von flüssigem Wasser in Abhängigkeit vom Druck und von der Entropie  $t = t(p, s)$  berechnet werden, kann zunächst aus Gl. (4) die Enthalpie berechnet und diese mit dem entsprechenden Druck in Gl. (5) eingesetzt werden. Dabei ist der maximale absolute Fehler gegenüber den aus der Formulation iterativ berechneten Temperaturen im Bereich von 0 bis 328 °C kleiner als 0,077 K. Zwischen 328 und 330 °C ist der maximale Fehler 0,092 K. Außerhalb des Gültigkeitsbereiches der Gl. (5) von 330 bis 350 °C steigt der absolute Temperaturfehler auf 0,363 K an.

Mit der aus den Gl. (4) und (5) bestimmten Näherungstemperatur  $t = t(p, s)$  liefert die Formulation Werte des spezifischen Volumens und der spezifischen Enthalpie mit folgenden, durch den Fehler der Näherungstemperatur verursachten maximalen absoluten Fehlern:

Temperaturbereich °C	maximaler Fehler des spezifischen Volumens m <sup>3</sup> /kg	maximaler Fehler der spezifischen Enthalpie kJ/kg
0 bis 325	3,57 · 10 <sup>-7</sup>	0,440
325 bis 330	7,92 · 10 <sup>-7</sup>	0,659

Im Gültigkeitsbereich der Gl. (5) sind sowohl die Volumen- als auch die Enthalpiefehler wesentlich kleiner als die entsprechenden Toleranzen der Rahmentafeln von 1963, ausgenommen die sehr kleinen Enthalpietoleranzen für den Sättigungszustand bei 0 °C und 0,01 °C und für die 0 °C-Isotherme bei Drücken bis 50 bar.

### Umkehrfunktion für überhitzten Wasserdampf

Zur Bestimmung der Enthalpie im Endpunkt einer isentropen Entspannung wurde analog zur Gl. (4) für das Wassergebiet auch für den technisch interessierenden Bereich des überhitzten Dampfes eine Umkehrfunktion entwickelt in der Form:

$$\varepsilon = \sum_{m=0}^3 \left[ \sum_{n=0}^{11} C_{m,n} (\beta^{0,05} - 0,81725)^n \right] (\sigma - 70)^m \quad (6)$$

Zahlentafel 4. Zahlenwerte der Koeffizienten  $C_{m,n}$  der Umkehrfunktion (6).

$C_{0,0} = 4,378106467 \cdot 10^{-1}$	$C_{2,0} = 2,337957563 \cdot 10^{-2}$
$C_{0,1} = 9,166217127 \cdot 10^{-1}$	$C_{2,1} = 1,114977505 \cdot 10^{-1}$
$C_{0,2} = 2,027203900 \cdot 10^{-2}$	$C_{2,2} = -1,384034875 \cdot 10^{-2}$
$C_{0,3} = 1,213201248 \cdot 10^{-2}$	$C_{2,3} = 3,669366799 \cdot 10^{-1}$
$C_{0,4} = -5,283971160 \cdot 10^{-2}$	$C_{2,4} = 8,561023559$
$C_{0,5} = 5,680693979 \cdot 10^{-3}$	$C_{2,5} = 2,937538529 \cdot 10^{-1}$
$C_{0,6} = 2,915670095 \cdot 10^{-4}$	$C_{2,6} = -1,298438161 \cdot 10^{-2}$
$C_{0,7} = 7,260796018 \cdot 10^{-4}$	$C_{2,7} = -1,521397141 \cdot 10^{-3}$
$C_{0,8} = -7,002861724 \cdot 10^{-5}$	$C_{2,8} = -3,163067070 \cdot 10^{-4}$
$C_{0,9} = -2,825613205 \cdot 10^{-6}$	$C_{2,9} = 1,244005439 \cdot 10^{-4}$
$C_{0,10} = 4,768340071 \cdot 10^{-6}$	$C_{2,10} = 4,946328881 \cdot 10^{-4}$
$C_{0,11} = 2,393482967 \cdot 10^{-7}$	$C_{2,11} = 2,126123308 \cdot 10^{-4}$
$C_{1,0} = 8,874756374 \cdot 10^{-1}$	$C_{3,0} = 4,003880080 \cdot 10^{-4}$
$C_{1,1} = 5,018858106$	$C_{3,1} = 6,704666297 \cdot 10^{-4}$
$C_{1,2} = 8,774288629$	$C_{3,2} = 4,683198438 \cdot 10^{-3}$
$C_{1,3} = -8,128857837$	$C_{3,3} = 2,252723857 \cdot 10^{-2}$
$C_{1,4} = 2,105749319 \cdot 10^{-1}$	$C_{3,4} = 7,757582345 \cdot 10^{-3}$
$C_{1,5} = 6,812050541 \cdot 10^{-2}$	$C_{3,5} = 1,420279119$
$C_{1,6} = 2,698765999 \cdot 10^{-3}$	$C_{3,6} = -8,289447074 \cdot 10^{-1}$
$C_{1,7} = -1,055929824 \cdot 10^{-4}$	$C_{3,7} = -1,069598773 \cdot 10^{-2}$
$C_{1,8} = -1,205965451 \cdot 10^{-5}$	$C_{3,8} = -8,945499543 \cdot 10^{-1}$
$C_{1,9} = -1,807398936 \cdot 10^{-6}$	$C_{3,9} = 2,112930033 \cdot 10^{-3}$
$C_{1,10} = 1,071540052 \cdot 10^{-6}$	$C_{3,10} = 1,346787503 \cdot 10^{-3}$
$C_{1,11} = 3,011461969 \cdot 10^{-6}$	$C_{3,11} = -1,447443850 \cdot 10^{-4}$

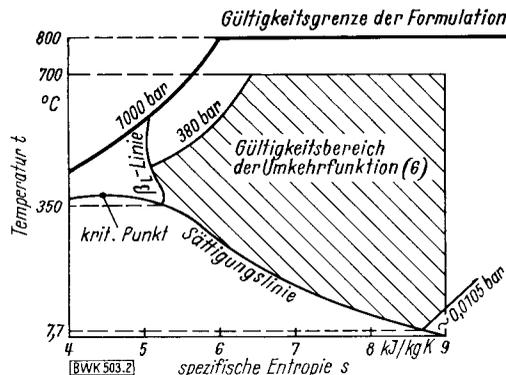


Bild 2. Gültigkeitsbereich der Umkehrfunktion (6).

Die Koeffizienten  $C_{m,n}$  zeigt **Zahlentafel 4**. Der Gültigkeitsbereich der Gl. (6) liegt zwischen den 0,0105 bar- und 380 bar-Isobaren, der 700 °C-Isotherme und der Sättigungslinie sowie der 9 kJ/kgK-Isentrope und der  $\beta_L$ -Linie, **Bild 2**. Die  $\beta_L$ -Linie ist die Grenze zwischen dem kritischen und überhitzten Gebiet der Formulation und ist dort definiert zu

$$\beta_L = \beta_L(\theta) = \frac{p_L}{p_{c1}} = L_0 + L_1 \theta + L_2 \theta^2,$$

worin  $L_0 = 15,743\ 733\ 27$ ;  $L_1 = -34,170\ 619\ 78$ ;  $L_2 = 19,313\ 807\ 07$ .

Der maximale absolute Fehler der Enthalpie der Gl. (6) gegenüber den durch Iteration aus der Formulation ermittelten Werten ist etwa 0,23 kJ/kg und damit erheblich geringer als die kleinste Toleranz im entsprechenden Zustandsgebiet der Internationalen Rahmentafeln 1963.

### Rechenzeiten

Die Rechenzeit zur Ermittlung der Sättigungswerte mit den Näherungsgleichungen verringert sich im Bereich I auf etwa 1/20 der Zeit, die bei Anwendung der Zustandsgleichungen der Formulation benötigt würde. Im Bereich II ist die Zeitersparnis noch etwa drei- bis fünfmal größer. Hier müßte nämlich bei Verwendung der Formulation zunächst die Zustandsgleichung  $p(v, t)$  iterativ nach dem Volumen  $v$  aufgelöst werden, was in der Nähe des kritischen Punktes mit hoher Genauigkeit erfolgen muß und damit zu einer größeren Zahl von Iterationsschritten führt. Erst dann könnten aus der Zustandsgleichung  $h(v, t)$  bzw.  $s(v, t)$  die Enthalpie bzw. Entropie im Sättigungszustand berechnet werden. Gl. (3) führt zu einer etwa fünfzigfachen Rechenzeitverkürzung gegenüber Rechnungen mit der Formulation im Bereich von 0 bis 350 °C. Für höhere Temperaturen bis zum kritischen Punkt ist die Einsparung aus den oben erwähnten Gründen ebenfalls noch größer.

Die Umkehrfunktionen (4), (5) und (6) benötigen etwa 10 bis 15% der Rechenzeit, die nötig wäre, um die jeweilige Zustandsgröße iterativ aus der entsprechenden Gleichung der Formulation zu berechnen, wenn angenommen wird, daß bei der Iteration im Mittel die Gleichung der Formulation viermal durchlaufen wird. BWK 503

### Schrifttum

- [1] The 1967 IFC Formulation for Industrial Use. Hrsg.: International Formulation Committee (IFC) der 6. Wasserdampfkongferenz, Februar 1967. Zu beziehen vom Verein Deutscher Ingenieure, Fachgruppe Energietechnik, Düsseldorf 1.
- [2] Zens, R.: Ein Programmsystem für die elektronische Berechnung von Kreisprozessen bei Dampfturbinenanlagen. Siemens-Z. **37** (1963) Nr. 7, S. 521/27, u. Nr. 8, S. 615/25.
- [3] Zens, R.: Näherungsgleichung für die Berechnung isentroper Wärmegefälle des überhitzten Wasserdampfes mit einer Datenverarbeitungsanlage. Siemens-Z. **38** (1964), Nr. 1, S. 32/36.
- [4] Vesper, H.: Näherungsgleichungen für die Zustandsgrößen des Wassers und des Dampfes an den Grenzkurven zur Verwendung in elektronischen Rechenmaschinen. BWK **15** (1963) Nr. 1, S. 20/23.