

Abschätzung der Unsicherheiten des Enthalpiegefälles bei der isentropen Entspannung von Wasserdampf

Von **M. Reimann** und **U. Grigull**, München*)

Es wird gezeigt, daß die Unsicherheit eines Enthalpiegefälles mit verschwindendem Gefälle Null wird, sofern die Enthalpie mit Hilfe der thermodynamischen Konsistenz berechnet wurde. Für den im Dampfturbinenbau interessierenden Bereich ergibt die Abschätzung der relativen Unsicherheit nach verschiedenen Verfahren Werte von der Größenordnung einiger Zehntel Prozent.

Ursache und Bedeutung der Unsicherheiten

Die heute bekannten Bestwerte des spezifischen Volumens v und der spezifischen Enthalpie h von Wasser und Wasserdampf sind für bestimmte Wertepaare des Druckes p und der thermodynamischen Temperatur T in der Rahmentafel von 1963 niedergelegt [1]. Um die Unsicherheiten dieser Werte v und h zu kennzeichnen, enthält die Rahmentafel zu jedem Wert die sogenannten Toleranzen δv und δh . Diese Toleranzen sind keine Meßunsicherheiten im Sinne der Fehlerrechnung, denn die Zustandsgrößen sind meist von verschiedenen Verfassern nach verschiedenen Methoden gemessen, deren systematische Fehler nicht genau genug bekannt sind. Die Toleranzen der Rahmentafel bedeuten vielmehr, daß nach Würdigung aller Umstände nach dem heutigen Stand der Kenntnis die wahren (unbekannten) Zustandswerte in den Bereichen $(v \pm \delta v)$ und $(h \pm \delta h)$ vermutet werden.

Bei der Berechnung von Dampfturbinen ebenso wie bei Abnahmeversuchen ist es von entscheidender Bedeutung, bei der Expansion die Unsicherheiten der Enthalpiegefälle

$$y = h_1 - h$$

zu kennen¹⁾. Es bedeuten h_1 und h die spezifischen Enthalpien des Wasserdampfes bei Beginn und am Ende der Expansion. Für den Wert der Unsicherheit δy gibt es zwei extreme Auffassungen. Nach der einen sollte man die Summe der Toleranzen für h_1 und h in Anspruch nehmen, also

$$\delta y = |\delta h_1| + |\delta h|$$

setzen können. Das würde, wie noch gezeigt werden wird, bei kleinen Enthalpiegefällen y relative Unsicherheiten $\delta y/y$ von der Größenordnung 100% und mehr ergeben. Nach einer anderen Auffassung sollten, insbesondere bei kleinen Enthalpiegefällen y , die Werte der die Rahmentafel erfüllenden Zustandsgleichung als absolut genau angesehen, also $\delta y = 0$ gesetzt werden.

Dazwischen gibt es Vorschläge, die relative Unsicherheit $\delta y/y$ als Funktion des Gefälles y oder bereichsweise als Konstante anzusehen. Die heutige Kenntnis der Eigenschaften von Wasser und Wasserdampf erlaubt keine vollständige Beantwortung dieser wichtigen Frage. Die folgenden Betrachtungen sollen der Abschätzung dieser Unsicherheiten dienen.

Thermodynamische Konsistenz

Die Thermodynamik erlaubt es, zwischen den Zustandsgleichungen beliebiger Zustandsgrößen streng gültige Beziehungen aufzustellen. Würden wir etwa für irgend eine Zustandsgröße eine genaue Gleichung haben und wären außerdem alle bei etwaigen Integrationen auftretenden Konstanten genau bekannt, so wäre damit das gesamte thermodynamische Verhalten eines Stoffes genau berechenbar. Dieses Ziel ist unerreichbar, da eine Zustandsgleichung nur an Meßwerten nachprüfbar ist und Meßwerte notwendigerweise mit Unsicherheiten behaftet sind.

Einen Satz von zwei oder mehr Zustandsgleichungen für verschiedene Zustandsgrößen, zwischen denen die Beziehungen der Thermodynamik gelten, bezeichnet man als **thermodynamisch konsistent**. Dabei spielt es keine Rolle, daß die einzelne Zustandsgleichung nur empirisch oder halbempirisch aufgestellt sein kann. Die thermodynamische Konsistenz erlaubt es zwei oder mehr Zustandsgleichungen durch Vergleich mit Meßwerten gegeneinander abzugleichen und damit zu verbessern. Dazu sei folgendes Beispiel betrachtet:

Aus einer vorgegebenen Zustandsgleichung für das spezifische Volumen $v(p, T)$ läßt sich mit Hilfe der thermodynamischen Beziehung

$$\left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T = v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \dots \dots \dots (1)$$

eine Zustandsgleichung für die spezifische Enthalpie $h(p, T)$ auf folgende Weise ableiten:

$$h = \int_0^p \left(\frac{\partial h}{\partial p}\right)_T dp = h_0 + \int_0^p \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \right] dp \dots (2)$$

Die Integrationskonstante h_0 (die spezifische Enthalpie beim Druck Null) ist eine reine Temperaturfunktion. Der Integrand in Gl. (2) ist bei der gewünschten Temperatur T zu nehmen. Die Zustandsgleichung $h(p, T)$ kann durch Vergleich mit Enthalpie-Messungen verbessert werden. Dadurch ändert sich auch die Ausgangsgleichung $v(p, T)$, die nun ihrerseits wiederum an vorhandene Meßwerte von v möglichst gut anzupassen ist. Die Fortsetzung dieses Verfahrens liefert zwei thermodynamisch konsistente Zustandsgleichungen mit bestmöglicher Wiedergabe der Meßwerte.

Es ist allerdings nicht gesagt, daß die so gewonnene Zustandsgleichung $h(p, T)$ auch andere meßbare Zustandsgrößen befriedigend wiedergibt, z. B. die isobare spezifische Wärmekapazität $c_p = (\partial h/\partial T)_p$. Durch Erfüllung derartiger zusätzlicher Forderungen verbessert man die Güte des Gleichungssystems beträchtlich, im wesentlichen deshalb, weil man nun auch die höheren Ableitungen zwischen den Variablen der Ausgangsgleichung, die unmittelbar nicht meßbar sind, der Wirklichkeit anpaßt. Auf diesem Wege kann man zu einem Gleichungssystem mit fast universeller Verwendbarkeit gelangen.

Die Zustandsgrößen in Gl. (2) weichen wegen der Unsicherheit der Meßwerte und der Unvollkommenheit der Zustandsgleichungen von den wahren (unbekannten) Werten um einen bestimmten Betrag mit bestimmten Vorzeichen ab. Bezeichnen wir diese Abweichungen mit δ , so läßt sich aus Gl. (2) folgende Beziehung ableiten:

$$\delta h = \delta h_0 + \int_0^p \delta \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \right] dp \dots \dots (3)$$

Hiermit ließe sich die Abweichung δh aus den Abweichungen der Ausgangsgleichung und der Integrationskonstanten berechnen. Leider ist diese Methode zur Zeit noch nicht anwendbar. Man könnte zwar unter δv die Toleranzen der Rahmentafel verstehen (in diesem Falle müßte Gl. (3) mit Betragszeichen geschrieben werden) und man könnte

*) Prof. Dr.-Ing. Ulrich Grigull VDI ist Direktor, Dipl.-Ing. Michael Reimann ist wissenschaftlicher Mitarbeiter des Instituts für Technische Thermodynamik der TH München.
¹⁾ In der voranstehenden Arbeit von L. S. Dzung wird das Zeichen y nur für isentropen Enthalpiegefälle verwendet. (D. Schriftl.)

weiterhin annehmen, daß δh_0 vernachlässigbar klein ist. Wir kennen aber die Werte $\delta(\partial v/\partial T)_p$ nicht zuverlässig genug, um Gl. (3) numerisch auswerten zu können. Immerhin kann man vermuten, daß beim Vorliegen weiterer Meßwerte, insbesondere von Differentialquotienten der Zustandsgrößen, diese Methode anwendbar wird.

Die thermodynamische Konsistenz kann aber dazu benutzt werden, um eine exakte Aussage über die Unsicherheit einer Differenz einer Zustandsgröße, eines „Gefälles“, zu gewinnen. Das sei an folgendem einfachen Beispiel gezeigt:

Eine Zustandsgröße x sei als Funktion $x(y, z)$ der beiden unabhängigen Variablen y und z gegeben. Mit Hilfe einer thermodynamischen Beziehung φ berechnen wir eine weitere Zustandsgröße $u(y, z)$. Bei der Anwendung der Beziehung φ treten außer den Werten von x auch Funktionen $f(x)$, z. B. Ableitungen von x nach y und z , sowie Integrationskonstanten u_0 auf. Wir geben daher der Funktion φ drei Argumente und schreiben die zu $x(y, z)$ thermodynamisch konsistente Zustandsgleichung $u(y, z)$ in folgender Form an:

$$u = \varphi [x, f(x), u_0] \dots \dots \dots (4)$$

Statt der genauen Werte u können wir nur fehlerhafte Werte u^* aus fehlerhaften Argumenten x^* , $f^*(x^*)$ und u_0^* berechnen, für die sich die zu Gl. (4) analoge Beziehung

$$u^* = \varphi [x^*, f^*(x^*), u_0^*] \dots \dots \dots (5)$$

ergibt, da die Funktion φ in beiden Fällen dieselbe ist. Die Abweichungen δ zwischen den genauen (unbekannten) und den berechneten Werten definieren wir in der Form $\delta u = u - u^*$; $\delta x = x - x^*$ usw. und erhalten aus Gl. (5) die Beziehung

$$\delta u = \frac{\partial \varphi}{\partial x^*} \delta x + \frac{\partial \varphi}{\partial f^*} \delta f + \frac{\partial \varphi}{\partial u_0^*} \delta u_0 \dots \dots \dots (6)$$

Die numerische Auswertung dieser Gleichung scheidert vor allem an der mangelnden Kenntnis der Abweichungen δf , wie bereits ausgeführt. Zwischen den Werten der Zustandsgröße u bzw. u^* in den Zuständen 1 und 2 lassen sich die Differenz der genauen Werte $\Delta u = u_1 - u_2$ und die Differenz der berechneten Werte $\Delta u^* = u_1^* - u_2^*$ bilden. Die Abweichung $\delta \Delta u$ und damit der bei der Berechnung von Δu^* begangene Fehler ergibt sich aus der Beziehung

$$\delta \Delta u = \Delta u - \Delta u^* = \delta u_1 - \delta u_2 \dots \dots \dots (7)$$

Hierfür erhält man aus Gl. (6):

$$\delta \Delta u = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^*}\right)_1 \delta x_1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^*}\right)_2 \delta x_2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial f^*}\right)_1 \delta f_1 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial f^*}\right)_2 \delta f_2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_0^*}\right)_1 \delta u_{0,1} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u_0^*}\right)_2 \delta u_{0,2} \dots \dots (8)$$

Die Indizes 1 und 2 bezeichnen zwei Zustände, gekennzeichnet durch zwei Wertepaare der unabhängigen Veränderlichen y und z . Rücken die beiden Zustände 1 und 2 mehr und mehr zusammen, so geht mit der Differenz Δu^* auch die Abweichung $\delta \Delta u$ gegen Null. Hierbei ist angenommen, daß die partiellen Ableitungen in Gl. (8) nicht unendlich groß werden.

Diese Betrachtung setzte die Existenz der Funktion φ voraus und damit die thermodynamische Konsistenz zwischen den Zustandsgleichungen $x(y, z)$ und $u(y, z)$ sowie zwischen $x^*(y, z)$ und $u^*(y, z)$. Würden die δ -Werte auf der rechten Seite von Gl. (8) bekannt sein, so ließe sich die relative Abweichung $\delta \Delta u / \Delta u^*$ als Funktion von Δu^* berechnen.

Berechnung der isentropen Enthalpiedifferenz

Bei den vorstehenden Betrachtungen haben wir dem Symbol δ drei verschiedene Begriffe zugeordnet: eine Toleranz im Sinne der Tafeltoleranz von 1963, eine Un-

sicherheit und die Abweichung zwischen genauem und berechnetem Wert. Die Tafeltoleranzen sind zwar in den Rahmentafeln dem Betrage nach festgelegt, jedoch ist ihre physikalische Bedeutung nicht genau angegeben. Der Begriff Unsicherheit ist nur unscharf definiert. Der an dritter Stelle genannte Begriff ist exakt definiert, aber weder dem Betrage noch dem Vorzeichen nach angebar. Die Interpretation der Tafeltoleranz als Meßunsicherheit ist zur Zeit noch nicht einwandfrei möglich. Die Richtigkeit der vorstehenden Betrachtungen wird durch diesen Sachverhalt aber nicht beeinträchtigt. Im folgenden soll δ vorwiegend als Unsicherheit aufgefaßt werden.

Bei der isentropen Entspannung eines Arbeitsmediums in einer Turbine ist die Enthalpiedifferenz $y = h_1 - h$ durch die Gleichung

$$y = h_1 - h = - \int_{p_1}^p v dp \dots \dots \dots (9)$$

gegeben, in der der Index 1 den Zustand bei Beginn der Entspannung kennzeichnet. Das spezifische Volumen v als Funktion des Druckes p muß bei konstanter Entropie eingesetzt werden. Die Zustandsgrößen ohne Index (h, p) kennzeichnen den Endzustand der Expansion.

Um einen Überblick über die mit verschiedenen Zustandsgleichungen berechneten isentropen Enthalpiedifferenzen zu erhalten, wurden diese Differenzen y nach drei Gleichungen folgender Herkunft ermittelt:

- 1) VDI-Wasserdampfatafel von 1963 [2]
- 2) First IFC Master Formulation [3]
- 3) 1967 IFC Formulation for Industrial Use [4].

In allen drei Fällen handelte es sich um Gleichungen für die spezifische Enthalpie, die zu je einer Zustandsgleichung $f(p, v, T) = 0$ thermodynamisch konsistent waren. Die aus diesen Gleichungen ermittelten Enthalpien lagen in allen Fällen innerhalb der Toleranzen der Rahmentafel von 1963. Es wurden mit jeder Gleichung drei Beispiele isentroper Entspannung berechnet, die bei der gleichbleibenden Temperatur 550 °C und den drei Drücken 250, 80 und 25 bar begannen, um damit die im Dampfturbinenbau interessierenden Bereiche zu untersuchen.

Als Ergebnis dieser Berechnungen sind in **Zahlentafel 1** die zu den gewählten Druckstufen gehörenden Temperaturen t , die spezifischen Enthalpien h und die konstant gehaltenen spezifischen Entropien s des Ausgangszustands

Zahlentafel 1. Vergleich der nach verschiedenen Gleichungen berechneten Temperaturen und spezifischen Enthalpien.

Gleichung	VDI [2]			Master [3]			Industrial [4]		
	p	t_v	h_v	t_M	h_M	s_M	t_i	h_i	s_i
bar	°C	kJ/kg	kJ/kgK	°C	kJ/kg	kJ/kgK	°C	kJ/kg	kJ/kgK
250	550.000	3345.502	6.18995	550.000	3337.245	6.17987	550.000	3337.030	6.18009
200	509.386	3276.238	6.18995	508.668	3268.100	6.17987	508.374	3267.913	6.18009
175	485.959	3236.371	6.18995	484.807	3228.396	6.17987	484.386	3228.244	6.18009
150	459.700	3191.728	6.18995	458.099	3184.039	6.17987	457.594	3183.941	6.18009
125	429.724	3140.825	6.18995	427.696	3133.523	6.17987	427.182	3133.485	6.18009
100	394.581	3081.206	6.18995	392.291	3074.411	6.17987	391.866	3074.443	6.18009
80	361.093	3024.423	6.18995	359.088	3018.094	6.17987	358.604	3018.198	6.18009
60	320.303	2955.218	6.18995	318.705	2949.348	6.17987	318.567	2949.545	6.18009
50	295.845	2913.591	6.18995	294.644	2907.944	6.17987	294.714	2908.163	6.18009
40	267.462	2864.891	6.18995	266.829	2859.429	6.17987	266.967	2859.656	6.18009
35	251.390	2836.884	6.18995	250.976	2831.491	6.17987	251.062	2831.718	6.18009
80	550.000	3520.343	7.46328	550.000	3520.411	7.46328	550.000	3519.748	7.46328
75	538.412	3497.224	7.46328	538.312	3497.276	7.46328	538.257	3496.626	7.46328
60	499.356	3419.697	7.46328	498.953	3419.736	7.46328	498.701	3419.136	7.46328
50	468.587	3359.060	7.46328	467.987	3359.116	7.46328	467.594	3358.572	7.46328
40	432.292	3288.044	7.46328	431.533	3288.143	7.46328	431.009	3287.679	7.46328
30	387.662	3201.488	7.46328	386.883	3201.649	7.46328	386.248	3201.293	7.46328
25	360.607	3149.433	7.46328	360.095	3149.616	7.46328	359.263	3149.337	7.46328
25	550.000	3572.216	7.46328	550.000	3573.289	7.46328	550.000	3572.892	7.46328
20	511.150	3490.746	7.46328	511.052	3491.781	7.46328	510.978	3491.417	7.46328
17.5	488.583	3443.830	7.46328	488.441	3444.850	7.46328	488.321	3444.509	7.46328
15	463.159	3391.334	7.46328	462.979	3392.341	7.46328	462.807	3392.028	7.46328
12.5	433.950	3331.489	7.46328	433.742	3332.484	7.46328	433.516	3332.207	7.46328
10	399.453	3261.454	7.46328	399.242	3262.435	7.46328	398.962	3262.203	7.46328
8	366.314	3194.825	7.46328	366.230	3195.786	7.46328	365.819	3195.691	7.46328
6	325.560	3132.739	7.46328	325.501	3134.662	7.46328	325.139	3134.539	7.46328
5	300.858	3065.041	7.46328	300.839	3065.937	7.46328	300.527	3065.845	7.46328
4	271.789	3008.159	7.46328	271.858	3009.020	7.46328	271.611	3008.957	7.46328
3	236.161	2939.051	7.46328	236.376	2939.859	7.46328	236.233	2939.820	7.46328
2	189.577	2849.257	7.46328	189.831	2849.944	7.46328	189.850	2849.949	7.46328
1.5	158.554	2790.595	7.46328	159.168	2791.270	7.46328	159.276	2791.214	7.46328
1	118.561	2714.491	7.46328	-	-	7.46328	119.265	2715.007	7.46328

Zahlentafel 2. Vergleich der nach verschiedenen Gleichungen berechneten Enthalpiegefälle.

p	y_V	y_M	y_I	$y_V - y_I$		$y_M - y_I$		$ \delta h_1 + \delta h_2 $
				$y_V - y_I$	$y_M - y_I$	$\frac{y_V - y_I}{y_I}$	$\frac{y_M - y_I}{y_I}$	
bar	kJ/kg							
250	0	0	0	0	0	—	—	16.0
200	69.265	69.146	69.116	0.149	0.030	2,149	0,427	14.2
175	109.131	108.849	108.785	0.346	0.064	3,176	0,585	13.6
150	153.775	153.206	153.088	0.687	0.118	4,480	0,771	13.0
125	204.677	203.722	203.544	1,133	0.178	5,563	0,874	12.5
100	264.296	262.834	262.586	1.710	0.248	6,511	0,943	12.0
80	321.079	319.151	318.831	2,248	0.320	7,049	1,003	12.5
60	390.284	387.897	387.485	2,799	0.412	7,225	1,065	13.0
50	431.911	429.302	428.866	3.045	0.436	7,100	1,015	13.0
40	480.611	477.816	477.373	3.238	0.443	6,783	0,928	13.0
35	508.618	505.754	505.311	3.307	0.443	6,545	0,877	12.6
80	0	0	0	0	0	—	—	11.6
75	23.120	23.134	23.122	-0.002	0.012	-0,120	0,520	11.3
60	100.646	100.675	100.612	0.034	0.063	0,332	0,622	10.4
50	161.283	161.294	161.176	0.107	0.118	0,669	0,736	9.8
40	232.299	232.268	232.059	0.230	0.199	0,992	0,859	9.8
30	318.855	318.762	318.455	0.400	0.307	1,259	0,965	9.8
25	370.911	370.795	370.411	0.500	0.384	1,348	1,036	9.8
25	0	0	0	0	0	—	—	10.0
20	81.470	81.509	81.475	-0.005	0.034	-0,060	0,420	9.3
17.5	128.386	128.439	128.383	0.003	0.056	0,021	0,436	9.0
15	180.882	180.949	180.863	0.019	0.086	0,101	0,473	9.0
12.5	240.726	240.805	240.685	0.041	0.120	0,174	0,500	9.0
10	310.762	310.854	310.689	0.073	0.165	0,235	0,533	9.0
8	377.391	377.503	377.290	0.101	0.213	0,266	0,564	9.0
6	458.476	458.628	458.353	0.123	0.275	0,289	0,599	9.0
5	507.175	507.352	507.047	0.128	0.306	0,253	0,603	9.0
4	564.057	564.269	563.935	0.122	0.334	0,216	0,593	8.5
3	633.165	633.431	633.072	0.093	0.359	0,147	0,567	8.0
2	722.959	723.351	722.943	0.016	0.408	0,023	0,515	7.5
1.5	781.621	782.049	781.678	-0.057	0.371	-0,073	0,475	7.2
1	857.725	—	857.885	-0.150	—	-0,186	—	7.0

eingetragen. Die Indizes V, M und I beziehen sich auf die VDI-Wasserdampfafeln von 1963 [2], die Master Formulation [3] und die Industrial Formulation [4].

Obwohl die nach den drei Gleichungen berechneten Enthalpiewerte h z. T. nicht unbeträchtlich voneinander abweichen, zeigen die Enthalpiedifferenzen $y = h_1 - h$ eine bessere Übereinstimmung, wie **Zahlentafel 2** zeigt. Außer den Werten y_V , y_M und y_I sind hier noch die Differenzen $y_V - y_I$ und $y_M - y_I$ sowie die relativen, auf y_I bezogenen Differenzen $(y_V - y_I)/y_I$ und $(y_M - y_I)/y_I$ eingetragen. Bei der Beurteilung dieser Ergebnisse ist zu beachten, daß die drei Zustandsgleichungen unabhängig voneinander zu verschiedenen Zeiten, nach verschiedenen Methoden und vorwiegend von verschiedenen Autoren aufgestellt sind. Ihr gemeinsames Kennzeichen ist, daß alle drei zu je einer Zustandsgleichung $f(p, v, T) = 0$ thermodynamisch konsistent sind. (Es sei hier bemerkt, daß die thermodynamische Konsistenz nicht nur analytisch, sondern auch graphisch berücksichtigt werden kann, wie es bei den VDI-Wasserdampfafeln 1963 teilweise geschehen ist.)

Besonders auffällig ist in Zahlentafel 2 die gute Übereinstimmung zwischen y_M und y_I in allen drei Entspannungsbereichen, die zu relativen Differenzen zwischen etwa 0,05 und 0,1% führt. Dieses Ergebnis ist mindestens zum Teil darauf zurückzuführen, daß die h -Werte nach beiden Gleichungen die Werte der Rahmentafel gut wiedergeben, die Toleranzen also nicht ausnützen. Die größten Abweichungen treten zwischen y_V und y_I bei der Hochdruckentspannung auf mit relativen Abweichungen bis etwa 0,7%. Hierzu ist zu bemerken, daß die VDI-Gleichung zu einer Zeit aufgestellt wurde, als noch die Rahmentafel von 1934 Gültigkeit hatte.

Betrachtet man diese Berechnungen als repräsentativ für den heutigen Stand der Kenntnis bei der Ermittlung von Enthalpiegefällen, so kann man zusammenfassend sagen, daß die relative Unsicherheit der Enthalpiegefälle y höchstens etwa 0,7%, in weiten Bereichen aber 0,1% oder erheblich geringer ist.

In Zahlentafel 2 ist noch die Summe der Tafeltoleranzen $|\delta h_1| + |\delta h_2|$ eingetragen. Deren Zahlenwerte liegen im ganzen Bereich erheblich über jenen der nach den drei Gleichungen berechneten Gefälledifferenzen. Ihre Inanspruchnahme als Unsicherheit δy des Gefälles y ist also keineswegs vertretbar. Das würde auch gegen die im vorigen Abschnitt bewiesene Forderung verstoßen, wonach die Unsicherheit δy mit y gegen Null gehen muß, wenn y mit Hilfe der thermodynamischen Konsistenz berechnet wurde.

Abschätzung der Gefälleunsicherheit nach Dzung

Im folgenden sei die Gefälleunsicherheit δy nach einem von *Dzung* [5] angegebenen Näherungsverfahren berechnet. Aus Gl. (9) folgt für die isentrope Entspannung

$$\delta y = - \int_{p_1}^p \delta v \, dp \quad (10)$$

wobei die Unsicherheit $\delta v = \delta'v + \delta v^*$ ist. Unter $\delta'v$ versteht man die Tafeltoleranz, während δv^* jene zusätzliche Unsicherheit ist, die durch die Unvollkommenheit der Zustandsgleichung $v^*(p, T)$ bei der Berechnung der isentropen Entspannung entsteht. Hierdurch wird für einen gegebenen Druck p eine fehlerhafte Temperatur berechnet, wobei die Unsicherheit δT aus der Beziehung

$$\delta v^* = \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \delta T \quad (11)$$

zu entnehmen ist. Die Unsicherheit δT erzeugt bei gegebener Entropie s eine Unsicherheit δh^* gemäß der Beziehung

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial h} \right)_s \delta h^* \quad (12)$$

Integriert man statt über den Druck p über das Gefälle y durch die Transformation

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial h} \right)_s dy = \frac{dy}{v} \quad (13)$$

so erhält man schließlich aus den Gl. (10) bis (13)

$$\delta y = \int_0^y \left(\left| \frac{\delta'v}{v} \right| + \left| \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial h} \right)_s \frac{\delta h^*}{v} \right| \right) dy \quad (14)$$

Mit Hilfe bekannter thermodynamischer Beziehungen lassen sich die in Gl. (14) vorkommenden partiellen Differentialquotienten in der Form

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial h} \right)_s = \frac{\alpha^2 v}{c_p T} \quad (14a)$$

schreiben mit $\alpha = T (\partial v / \partial T)_p / v$ als dem dimensionslosen isobaren Ausdehnungskoeffizienten. Damit erhält man für die Gefälleunsicherheit

$$\delta y = \int_0^y \left(\left| \frac{\delta'v}{v} \right| + \left| \frac{\alpha^2}{c_p T} \delta h^* \right| \right) dy \quad (15)$$

In Gl. (15), die von *Dzung* thermodynamisch exakt abgeleitet ist, tritt die zunächst unbekannte Unsicherheit δh^* der Enthalpie h auf. Diesen Wert δh^* bringt *Dzung* in Zusammenhang mit der Tafeltoleranz δh der Enthalpie und macht für δh^* den Ansatz

$$\left(\frac{\delta h^*}{y} \right)^2 = \left(\frac{\delta h_1}{h_1} \right)^2 + \left(\frac{\delta h}{h} \right)^2 = e^2 \quad (16)$$

wobei der Index 1 wieder den Zustand zu Beginn der Expansion bezeichnet. Aus Gl. (16) folgt

$$\delta h^* = e y \quad (17)$$

Der Zusammenhang zwischen δh^* aus Gl. (15) und der Tafeltoleranz δh sowie der Ansatz nach Gl. (16) sind sicher nicht zwingend, aber plausibel. Insbesondere erfüllt Gl. (17) die notwendige Bedingung, daß δh^* mit y gegen Null geht, da für $h \rightarrow h_1$ aus Gl. (16) der Grenzwert $e = \sqrt{2} (\delta h_1 / h_1)$, also jedenfalls ein endlicher Wert, folgt. Führt man Gl. (17) in Gl. (15) ein, so ergibt sich

$$\delta y = \int_0^y \left(\left| \frac{\delta'v}{v} \right| + \left| \frac{\alpha^2 e}{c_p T} y \right| \right) dy \quad (18)$$

Zahlentafel 3. Bestimmungsgrößen zur Berechnung der Unsicherheiten der Enthaltpegefälle.

p	y	δv	δh	c _p	α	10 ³ ε	δh** e·y	δy _v	δy
bar	kJ/kg	cm ³ /g	kJ/kg	kJ/kgK	-	-	kJ/kg	kJ/kg	kJ/kg
250	0	0.02	6	3.199	1.918	3.390	0	0	0
200	69.116	0.03	6.2	3.167	1.914	3.057	0.211	0.125	0.156
175	108.79	0.035	5.6	3.156	1.909	2.959	0.322	0.206	0.253
150	153.09	0.04	5.0	3.150	1.903	2.856	0.439	0.300	0.353
125	203.54	0.045	4.5	3.157	1.897	2.795	0.569	0.406	0.500
100	262.59	0.05	4.0	3.183	1.893	2.728	0.716	0.525	0.682
80	316.83	0.07	4.5	3.224	1.895	2.823	0.900	0.645	0.881
60	387.48	0.069	5.0	3.289	1.903	2.936	1.138	0.784	1.15
50	428.87	0.068	5.0	3.330	1.912	2.950	1.265	0.853	1.31
40	477.37	0.065	5.0	3.375	1.924	2.967	1.412	0.919	1.51
35	505.31	0.10	4.6	3.397	1.931	2.896	1.463	0.960	1.63
80	0	0.078	5.8	2.403	1.219	2.330	0	0	0
75	23.122	0.08	5.5	2.391	1.216	2.278	0.053	0.040	0.040
60	100.61	0.086	4.6	2.353	1.205	2.127	0.214	0.164	0.173
50	161.18	0.09	4.0	2.327	1.198	2.033	0.328	0.252	0.274
40	232.07	0.094	4.0	2.301	1.190	2.048	0.475	0.344	0.390
30	318.45	0.098	4.0	2.278	1.182	2.068	0.659	0.440	0.531
25	370.41	0.1	4.0	2.268	1.179	2.081	0.771	0.490	0.616
25	0	0.1	5.0	2.233	1.064	1.979	0	0	0
20	81.475	0.12	4.3	2.201	1.060	1.864	0.159	0.055	0.059
17.5	128.38	0.13	4.0	2.183	1.058	1.818	0.233	0.086	0.096
15	180.86	0.14	4.0	2.164	1.056	1.830	0.331	0.120	0.140
12.5	240.66	0.16	4.0	2.143	1.053	1.844	0.438	0.158	0.194
10	310.69	0.2	4.0	2.120	1.051	1.861	0.578	0.203	0.266
8	377.29	0.26	4.0	2.100	1.049	1.878	0.708	0.249	0.347
6	458.38	0.34	4.0	2.078	1.047	1.899	0.871	0.309	0.461
5	507.05	0.4	4.0	2.066	1.047	1.913	0.970	0.348	0.539
4	563.93	0.5	3.5	2.054	1.047	1.820	1.026	0.391	0.638
3	633.07	0.63	3.0	2.041	1.048	1.732	1.096	0.447	0.769
2	722.94	0.8	2.5	2.026	1.051	1.652	1.194	0.519	0.956
1.5	781.68	0.9	2.2	2.018	1.054	1.606	1.255	0.561	1.09
1	857.88	1.0	2.0	2.006	1.059	1.581	1.357	0.609	1.27

BWK 389.13

Kann man bereichsweise δ'v/v und α²e/c_pT konstant annehmen, so erhält man für δy den Näherungswert (Index N)

$$\frac{\delta y_N}{y} = \left| \frac{\delta'v}{v} \right| + \left| \frac{\alpha^2 e y}{2 c_p T} \right| \dots \dots \dots (19).$$

In Zahlentafel 3 sind die zur Auswertung der Gl. (18) und (19) benötigten Größen für die bereits früher berechneten drei Entspannungsbereiche zusammengestellt. Als kennzeichnender Parameter ist der Druck p verwendet. Für das Gefälle y = h₁ - h sowie für c_p und α sind die aus der Industrial-Formulation [4] folgenden Größen eingetragen. Die Toleranzen δ'v und δh sind aus den umliegenden Werten der Rahmentafeltoleranzen gemittelt.

$$\delta y_v = \int_0^y (\delta'v/v) dy$$

bedeutet den ersten Term aus Gl. (18). Ein Vergleich mit δy zeigt, daß besonders bei großen Gefällen y auch der zweite Term von Bedeutung ist. Das geht auch aus Bild 1 hervor, in dem δy und δy_v als Funktion des Gefalles y bei den drei Entspannungsbereichen dargestellt sind.

Die Berechnung von δy nach Gl. (18) ist recht unbequem, da bei der Integration die einzelnen Bestimmungsstücke längs des Integrationsweges (hier der Isentropen) bekannt sein müssen. Wesentlich bequemer würde man nach der Näherungsgleichung (19) rechnen, soweit diese anwendbar

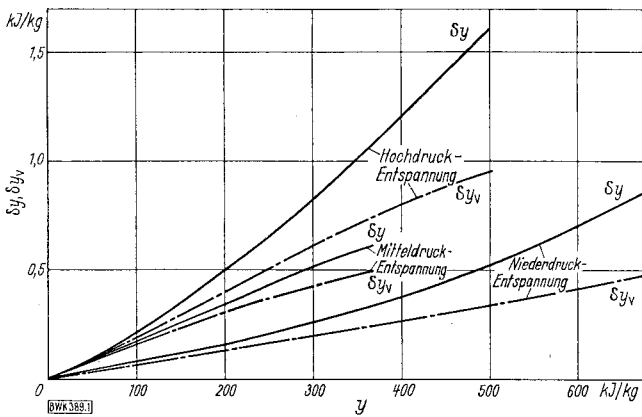


Bild 1. Gefälleunsicherheiten δy und δy_v nach Gl. (18) als Funktion des Gefalles y.

Zahlentafel 4. Vergleich der nach den Gl. (18) und (19) berechneten Gefälleunsicherheiten.

p	10 ³ δ'v/v	10 ⁶ eα ² /c _p T	δy _N	δy	δy _N /y	δy/y
bar	-	-	kJ/kg	kJ/kg	%	%
250	1.57	4.74	0	0	-	-
200	1.96	4.52	0.148	0.136	2.145	1.965
175	2.09	4.51	0.254	0.235	2.339	2.142
150	2.12	4.51	0.378	0.353	2.470	2.305
125	2.07	4.55	0.517	0.500	2.538	2.456
100	1.94	4.62	0.678	0.682	2.582	2.597
80	2.28	4.98	0.979	0.881	3.069	2.762
60	1.79	5.47	1.10	1.15	2.848	2.959
50	1.53	5.70	1.18	1.31	2.750	3.054
40	1.23	6.03	1.27	1.51	2.663	3.153
35	1.70	6.07	1.63	1.63	3.230	3.225
80	1.73	1.75	0	0	-	-
75	1.69	1.74	0.039	0.040	1.706	1.728
60	1.52	1.70	0.162	0.173	1.608	1.716
50	1.38	1.69	0.245	0.274	1.519	1.701
40	1.21	1.79	0.330	0.390	1.421	1.683
30	1.01	1.92	0.420	0.531	1.317	1.667
25	0.895	2.02	0.470	0.616	1.269	1.662
25	0.669	1.22	0	0	-	-
20	0.673	1.21	0.059	0.059	0.723	0.724
17.5	0.657	1.22	0.094	0.096	0.733	0.750
15	0.627	1.28	0.134	0.140	0.743	0.775
12.5	0.622	1.35	0.189	0.194	0.785	0.808
10	0.654	1.44	0.273	0.266	0.878	0.858
8	0.715	1.54	0.379	0.347	1.005	0.919
6	0.748	1.68	0.519	0.461	1.132	1.007
5	0.765	1.77	0.615	0.539	1.213	1.063
4	0.805	1.78	0.738	0.638	1.308	1.131
3	0.813	1.83	0.882	0.769	1.393	1.215
2	0.757	1.94	1.06	0.956	1.461	1.323
1.5	0.684	2.05	1.16	1.09	1.484	1.390
1	0.559	2.25	1.31	1.27	1.525	1.479

BWK 389.14

ist. Zahlentafel 4 zeigt für die drei Entspannungsbereiche die beiden in Gl. (18) auftretenden Ausdrücke, nämlich δ'v und α²e/c_pT, die sich in allen drei Bereichen nicht sehr stark ändern. So stimmen im Rahmen dieser Abschätzung auch δy und δy_N befriedigend überein.

Besonders aufschlußreich sind die relativen Gefälleunsicherheiten δy/y und δy_N/y aus Zahlentafel 4, die in Bild 2 über y aufgetragen sind. Sie erreichen, ähnlich wie die relativen Unsicherheiten nach Zahlentafel 2, nur einige Promille. Räumt man ein, daß es sich hier nur um eine plausible Abschätzung handelt, so scheint es angebracht, die relativen Unsicherheiten bereichsweise als konstant anzunehmen. Hierfür dürften Werte δy/y von etwa 0,26% für die Hochdruckentspannung, 0,17% für die Mitteldruckentspannung und 0,09% für die Niederdruckentspannung in Frage kommen.

BWK 389

Schrifttum

- [1] Proceedings Sixth Intern. Conf. on the Properties of Steam. Hrsg. von R. W. Haywood. 67 S. New York: Amer. Soc. mech. Engrs. 1963. Vgl. auch E. Schmidt, BWK 16 (1964) Nr. 7, S. 322/30.
- [2] VDI-Wasserdampfatafen 1963. Hrsg. von E. Schmidt. Berlin/Göttingen/Heidelberg u. München: Springer u. R. Oldenbourg 1963.
- [3] The First IFC Master Formulation (erscheint in Kürze).
- [4] The 1967 IFC Formulation for Industrial Use. Hrsg.: International Formulation Committee (IFC) der 6. Wasserdampfkongferenz, Februar 1967. Zu beziehen vom Verein Deutscher Ingenieure, Fachgruppe Energietechnik, Düsseldorf.
- [5] Dzung, L. S.: Ermittlung der Toleranzen für Wärmegefälle und Enthaltpegedifferenzen des Wasserdampfes. BWK 20 (1968) Nr. 3, S. 97/99.

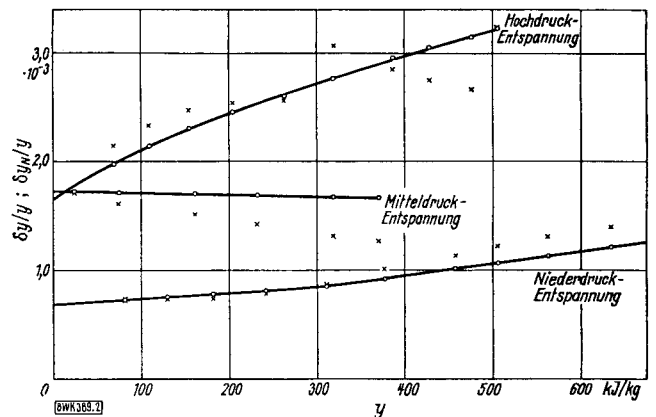


Bild 2. Relative Gefälleunsicherheiten δy/y nach Gl. (18) (Kreise) und δy_N/y nach Gl. (19) (Kreuze) als Funktion des Gefalles y.