Sonderdruck aus der Zeitschrift „Forschung im Ingenieurwesen“
Bd. 32 (1966) Nr. 1, S. 11-18

DK 536.2.01 : 518.61

Näherungslösungen der nichtstationären Wärmeleitung

Von **Ulrich Grigull, Josef Bach** und **Heinrich Sandner**, München *)

Aus einer erneuten numerischen Berechnung des eindimensionalen Temperaturausgleichs mit Hilfe elektronischer Rechenmaschinen geht hervor, daß man die Näherungen für kleine und für große Fourierzahlen in einem größeren Bereich anwenden kann, als bisher angenommen wurde. Damit ergeben sich für die praktische Berechnung von Aufheiz- und Abkühlvorgängen einfache, leicht zu handhabende Ausdrücke. Mit ihrer Hilfe lassen sich auch die Temperaturfelder und die übertragenen Wärmen bei mehrdimensionalen Körpern berechnen.

1. Einleitung

Zu den Grundproblemen der nichtstationären Wärmeleitung gehört der eindimensionale Temperaturausgleich in „einfachen“ Körpern, d. h. der ebenen Platte, dem Zylinder und der Kugel. Diese Probleme wurden erstmals von *J. B. Fourier* [1] unter Benutzung der nach ihm benannten Reihen behandelt. Numerische Lösungen sind wiederholt im Schrifttum mitgeteilt worden [2 bis 7]. Es handelt sich um Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \, \Delta \, \vartheta \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

mit der Anfangsbedingung $\vartheta = \vartheta_c$ für $t = 0$ und der Randbedingung

$$-\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_w = \alpha \, \vartheta_w \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1a).$$

Dabei bedeuten t die Zeit, x die von der Mittelebene des Körpers aus gezählte Längenkoordinate in Wärmestromrichtung, a die Temperaturleitfähigkeit und λ die Wärmeleitfähigkeit des Körpers, ϑ die Übertemperatur an der Stelle x zur Zeit t über die Umgebung, ϑ_w den Wert von ϑ an der Körperoberfläche (der Wand), ϑ_c den im gesamten Körper konstanten Anfangswert von ϑ, α den Wärmeübergangskoeffizienten, Δ den *Laplaceschen* Differentialoperator und der Index w Werte an der Oberfläche (Wand). Die Randbedingung gemäß Gl. (1a) mit einem endlichen Wärmeübergangskoeffizienten α wird auch Randbedingung dritter Art genannt. Der Sonderfall $\alpha = \infty$ oder $\vartheta_w = 0$ heißt auch Randbedingung erster Art.

Die allgemeine Lösung für das Temperaturfeld $\vartheta\,(x, t)$ lautet

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_c} = \sum_{k=1}^{k=\infty} f_1\,(\delta_k)\, e^{-\delta_k^2 \,\mathrm{Fo}}\, f_2\,(\delta_k\, x/X) \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

mit $k = 1$ bis ∞ als den natürlichen Zahlen, X als einer kennzeichnenden Länge (bei der ebenen Platte die halbe Dicke), $\mathrm{Fo} = at/X^2$ als der Fourierzahl, δ_k als den Eigenwerten des Problems, die sich aus transzendenten Bestimmungsgleichungen als Funktionen der Biotzahl $\mathrm{Bi} = \alpha X/\lambda$, der Kenngröße des Wärmeübergangs[1]), ergeben, sowie mit f_1 als einer Funktion nur von δ_k und f_2 als einer Funktion von $\delta_k\, x/X$. Beim Zylinder und bei der Kugel tritt die radiale Koordinate r an die Stelle von x; die kennzeichnende Länge ist der Halbmesser R des Zylinders bzw. der Kugel, so daß dann die Kenngrößen durch die Gleichungen $\mathrm{Fo} = at/R^2$ und $\mathrm{Bi} = \alpha\, R/\lambda$ definiert sind. Danach läßt sich Gl. (2) auch in der Form

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_c} = f_3\,(\mathrm{Fo}, \mathrm{Bi}, x/X) \quad \text{oder} \quad \frac{\vartheta}{\vartheta_c} = f_4\,(\mathrm{Fo}, \mathrm{Bi}, r/R)$$

schreiben. Für die beiden ausgezeichneten Übertemperaturen ϑ_m in der Mitte bei $x = 0$ oder $r = 0$ und ϑ_w an der Wand bei $x = X$ oder $r = R$ gilt

$$\frac{\vartheta_m}{\vartheta_c} = f_5\,(\mathrm{Fo}, \mathrm{Bi}) \quad \text{und} \quad \frac{\vartheta_w}{\vartheta_c} = f_6\,(\mathrm{Fo}, \mathrm{Bi})\,.$$

Aus dem Temperaturfeld läßt sich die in der Zeit t übergegangene Wärme Q berechnen. Man erhält die Lösung in der Form

$$\frac{Q}{Q_c} = f_7\,(\mathrm{Fo}, \mathrm{Bi})\,,$$

wenn Q_c die auf die Umgebungstemperatur bezogene Anfangsenthalpie des Körpers bedeutet.

Da die bisher bekannten numerischen Lösungen untereinander nicht völlig übereinstimmten, wurden die Übertemperaturen ϑ_m und ϑ_w sowie die übergegangene Wärme Q für die ebene Platte, den Zylinder und die Kugel erneut mittels elektronischer Rechenautomaten berechnet [8]. Hierbei stellte sich heraus, daß man in weiten Bereichen der Kenngrößen Näherungslösungen benutzen kann, ohne einen vorgegebenen zulässigen Fehler zu überschreiten. Hierauf wird im folgenden näher eingegangen.

2. Näherungen für große Werte der Fourierzahl

Die Reihe nach Gl. (2) konvergiert für die ebene Platte, den Zylinder und die Kugel ziemlich rasch, so daß für nicht zu kleine Werte der Fourierzahl Fo das erste Glied ausreichen kann. Dieses Verhalten der Reihen war schon lange bekannt, jedoch wußte man nicht genau, welcher Fehler durch Benutzen allein des ersten Glieds entsteht. Daher wurde bei der Neuberechnung [8] für jede Temperatur der durch die Gleichung

$$\Delta = \left|(\vartheta_1/\vartheta_c) - \Sigma\,(\vartheta/\vartheta_c)\right|$$

definierte absolute Betrag des auf die Anfangs-Übertemperatur ϑ_c bezogenen Fehlers bestimmt. Hierbei bedeuten ϑ_1/ϑ_c das erste Glied und $\Sigma\,\vartheta/\vartheta_c$ die Summe aller bei der Rechnung benutzten Glieder der Fourier-Reihen (acht bzw. fünf Glieder der rechten Seite von Gl. (2)). Für die Temperatur in der Mitte (Index m) und die Wandtemperatur (Index w) hat man die Fehlerbeträge Δ_m und Δ_w zu unterscheiden. Bild 1 bis 3 zeigen Kurven Δ_m = konst und Δ_w = konst in einem Fo, Bi-Diagramm. In dem Bereich oberhalb einer Fehlerkurve bleibt der Fehler beim Benutzen nur des ersten Glieds ϑ_1/ϑ_c der Reihe kleiner als der an die Kurve angeschriebene Wert.

*) Mitteilung aus dem Institut für Technische Thermodynamik der Technischen Hochschule München.

[1]) Bedeutet λ die Wärmeleitfähigkeit des strömenden Mediums, so ist die Bezeichnung Nu (Nußeltzahl) an Stelle von Bi üblich. Dieser Fall liegt hier nicht vor.

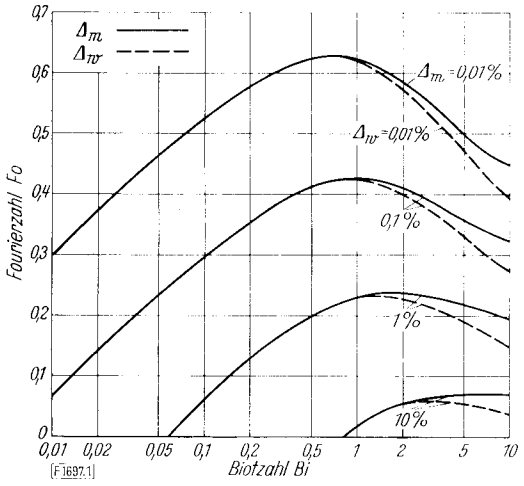


Bild 1. Fehlerkurven für die ebene Platte.

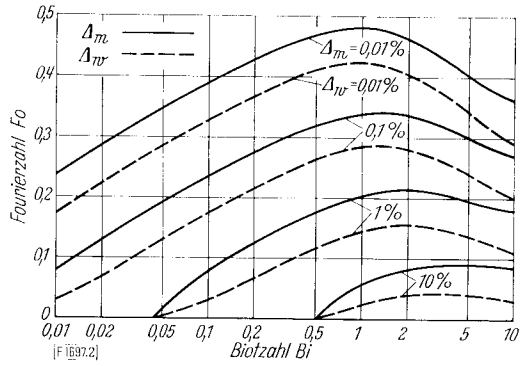


Bild 2. Fehlerkurven für den Zylinder.

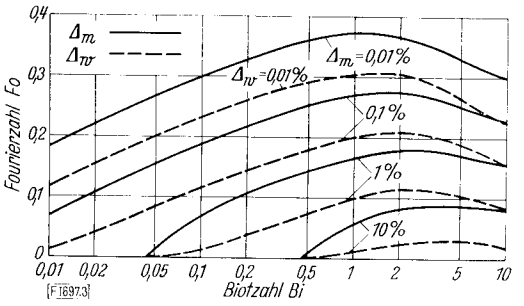


Bild 3. Fehlerkurven für die Kugel.

Bild 1 bis 3. Abhängigkeit des relativen Fehlers Δ_m und Δ_w der Übertemperatur in der Mitte bzw. an der Wandoberfläche bei Verwendung nur des ersten Glieds der Reihe gemäß Gl. (2) von der Fourierzahl Fo und der Biotzahl Bi.

Die Fehlerkurven in Bild 1 bis 3 haben einen sehr ähnlichen Verlauf. Für kleine Werte von Bi (kleine Kühlung oder kleine Heizung) genügt das erste Glied der Fourier-Reihe selbst bis zu sehr kleinen Werten von Fo (kleine Zeiten). Läßt man z. B. bei der ebenen Platte 0,1 % Fehler zu, so kann man für Bi = 0,01 bereits für Fo $\geqq$ 0,07 allein mit dem ersten Glied rechnen (Bild 1). Für viele praktische Fälle gelten aber auch Fehler von 1 % oder mehr durchaus als zulässig.

Auffällig sind die Maxima der Kurven für kleine Fehler im Bereich Bi $\approx$ 1. Da die Differenz zwischen den ersten und den zweiten Eigenwerten δ_1 bzw. δ_2 bei Bi $\approx$ 1 ein Minimum aufweist, ist dort der Einfluß des zweiten Glieds am größten. Dies bedeutet, daß man beim Benutzen allein des ersten Glieds der Reihe für ϑ/ϑ_c in diesem Bereich die größten Abweichungen vom wahren Wert zu erwarten hat.

Beim Benutzen des ersten Glieds der Reihen entstehen für die drei einfachen Körper die Gleichungen

$$\vartheta_m/\vartheta_c = C_m\, e^{-E\,\mathrm{Fo}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3),$$

$$\vartheta_w/\vartheta_c = C_w\, e^{-E\,\mathrm{Fo}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

$$Q/Q_c = 1 - C_q\, e^{-E\,\mathrm{Fo}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

mit C_m, C_w, C_q und E als Konstanten, die nur vom ersten Eigenwert δ_1 und damit nur von Bi abhängen. Diese Konstanten sind in der genannten Veröffentlichung [8] graphisch und tabellarisch wiedergegeben.

Sofern die Temperaturen ϑ_m und ϑ_w in der Mitte und an der Wand hinreichend genau vom ersten Glied der Reihen wiedergegeben werden, kann man dies auch mit Sicherheit für alle dazwischenliegenden Temperaturen annehmen. Man erhält dann für einen bestimmten Zeitpunkt t für die ebene Platte mit der Dicke $2\,X$ das Temperaturfeld gemäß

$$\frac{\vartheta\,(x)}{\vartheta_m} = \cos\left(\delta_1 \frac{x}{X}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

für den Zylinder mit dem Halbmesser R das Temperaturfeld gemäß

$$\frac{\vartheta\,(r)}{\vartheta_m} = J_0\left(\delta_1 \frac{r}{R}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und für die Kugel mit dem Halbmesser R das Temperaturfeld gemäß

$$\frac{\vartheta\,(r)}{\vartheta_m} = \frac{\sin\,(\delta_1\, r/R)}{\delta_1\, r/R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Dabei bedeuten δ_1 wieder den ersten Eigenwert des betreffenden Problems, der als Funktion von 1/Bi aus Tafel 1 hervorgeht, sowie J_0 die Besselfunktion nullter Ordnung. Zur bequemeren Auswertung wurden Gl. (6) bis (8) in Bild 4 bis 6 aufgetragen. Vor ihrer Anwendung muß man an Hand von Bild 1 bis 3 prüfen, für welche Bereiche der Fourier- und der Biotzahl die Näherung bei einem vorgegebenen Fehler zulässig ist.

Tafel 1. Erste Eigenwerte δ_1 für die ebene Platte, den Zylinder und die Kugel als Funktion der reziproken Biotzahl 1/Bi.

reziproke Biotzahl 1/Bi	erster Eigenwert δ_1 für		
	die Platte	den Zylinder	die Kugel
0	1,570796	2,404826	3,141592
0,1	1,428870	2,179497	2,836300
0,2	1,313838	1,989815	2,570431
0,5	1,076874	1,599449	2,028757
0,8	0,930757	1,365882	1,715507
1	0,860334	1,255784	1,570796
2	0,653271	0,940771	1,165561
5	0,432841	0,616975	0,759307
8	0,346354	0,492290	0,604780
10	0,311053	0,441682	0,542280
20	0,221760	0,314262	0,385368
50	0,140952	0,199501	0,244459
80	0,111571	0,157867	0,193407
100	0,099834	0,141245	0,173031

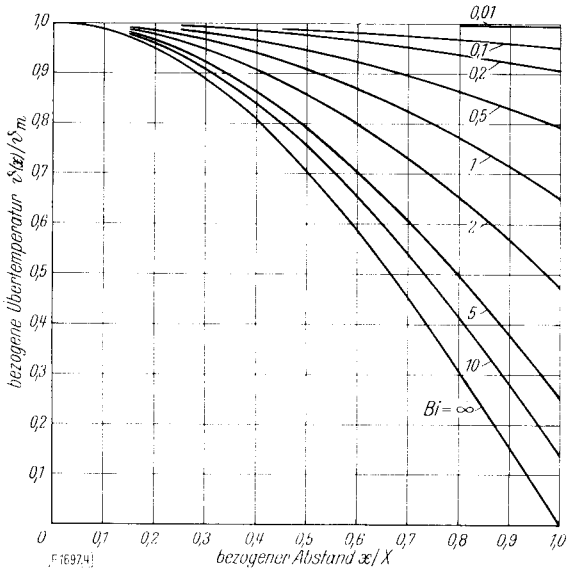


Bild 4. Temperaturverlauf in der ebenen Platte.

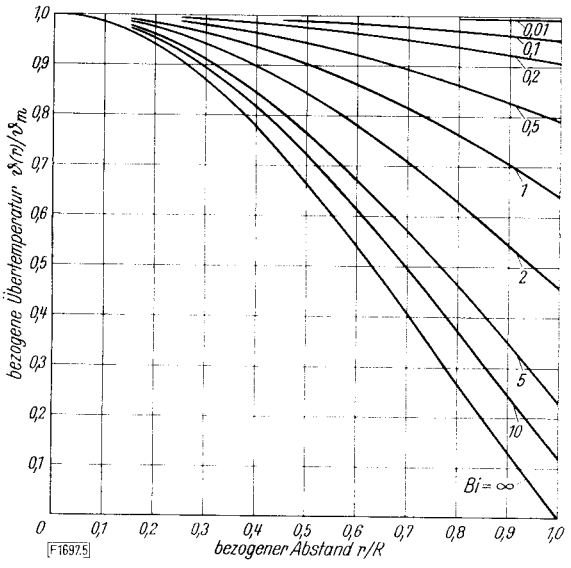


Bild 5. Temperaturverlauf im Zylinder.

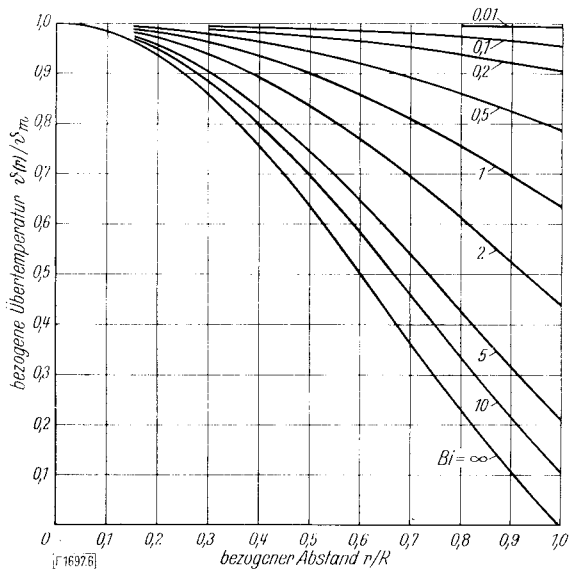


Bild 6. Temperaturverlauf in der Kugel.

Bild 4 bis 6. Temperaturverlauf im Innern einfacher Körper für verschiedene Werte der Biotzahl Bi.

x und r Abstand von der Plattenmitte bzw. radialer Abstand beim Zylinder und bei der Kugel, X und R halbe Plattendicke bzw. Zylinder- und Kugelhalbmesser, $\vartheta(x)$ und $\vartheta(r)$ zu x bzw. zu r gehörige Übertemperatur, ϑ_m Übertemperatur in der Platten-, der Zylinder- oder der Kugelmitte

3. Näherungen für kleine Werte der Fourierzahl

Für kleine Werte der Fourierzahl Fo, also auch für kleine Zeiten t nach einer sprunghaften Änderung der Umgebungstemperatur, versagt die Berechnung der Temperaturfelder mit Hilfe der Fourier-Reihen. Auch bei unendlich vielen Gliedern konvergiert die Reihe für Fo $\to 0$ nicht gegen den Wert eins. Für die ebene Platte kann man dann das Temperaturfeld des halbunendlichen Körpers als Näherung benutzen, da für kleine Zeiten die thermische Einwirkung wesentlich auf den Oberflächenbereich beschränkt bleibt. Für den Zylinder und die Kugel ist eine von *S. Goldstein* [9; 10] angegebene Näherungslösung der Fouriergleichung brauchbar, die er mittels einer Reihenentwicklung für kleine Fo-Werte gewann. Diese Näherungen seien für die Wandtemperatur und den Wärmeverlust der drei einfachen Körper im folgenden behandelt; insbesondere wird der Anschluß an die Lösung mittels Fourier-Reihen und an die Näherung für große Fo-Werte (erstes Glied der Fourier-Reihe) untersucht.

Für die Wandtemperatur ϑ_w lautet die Näherung von *S. Goldstein* für die ebene Platte, den Zylinder und die Kugel

$$\frac{\vartheta_w}{\vartheta_c} = F(\eta) + \frac{\varphi}{Bi}\left[(1 - 2\eta^2)\,F(\eta) - 1 + \frac{2\eta}{\sqrt{\pi}}\right] \quad . \; . \; . \; . \quad (9).$$

In Gl. (9) bedeuten η eine kombinierte Kenngröße $\eta = Fo^{1/2}\,Bi = \alpha\sqrt{at}/\lambda$, die keine Längenkoordinate enthält, $F(\eta) = [1 - G(\eta)]\,e^{\eta^2}$ die Abkürzung für eine hier häufig vorkommende Funktion mit $G(\eta)$ als dem durch die Gleichung

$$G(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\eta} e^{-\xi^2}\,d\xi$$

definierten *Gaußschen* Fehlerintegral (in dem ξ die laufende Veränderliche bezeichnet) sowie φ eine Konstante, die man aus Tafel 2 entnehmen kann. Für die ebene Platte mit $\varphi = 0$ ist Gl. (9) identisch mit der Gleichung für die Wandtemperatur des halbunendlichen Körpers nach einer sprunghaften Änderung der Wandtemperatur [7].

Tafel 2. Werte der Konstanten in Gl. (9) und (10).

Körper	Konstante φ	Konstante ψ
Platte	0	1
Zylinder	1/2	2
Kugel	1	3

Aus dem zeitlichen Verlauf der Wandtemperatur ϑ_w läßt sich bei bekanntem Wärmeübergangskoeffizienten α die in der Zeit t übertragene Wärme Q nach der Gleichung

$$\frac{Q}{Q_c} = \frac{\alpha F \int_0^t \vartheta_w\,dt}{\varrho\, c_p\, V\, \vartheta_c} = \frac{\psi}{Bi}\int_0^{\tau} \frac{\vartheta_w}{\vartheta_c}\,d\tau \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (10)$$

berechnen. Hierin bedeuten F die wärmedurchströmte Fläche, V das Volum des Körpers, $Q_c = \varrho\, c_p\, V\, \vartheta_c$ die Anfangsenthalpie des Körpers (bezogen auf Umgebungs-

temperatur), ϱ die Dichte und c_p die spezifische Wärmekapazität des Körpers bei konstantem Druck p, $\psi = F X/V$ für die Platte bzw. $\psi = F R/V$ für den Zylinder und die Kugel eine Konstante, die ebenfalls in Tafel 2 aufgeführt ist, und $\tau = \mathrm{Fo}\,\mathrm{Bi}^2 = \alpha^2 at/\lambda^2 = \eta^2$ eine dimensionslose Zeit.

Nach Ausführung der Integration in Gl. (10) erhält man

$$\frac{Q}{Q_c} = \frac{\psi}{\mathrm{Bi}}\left(1 + \frac{3\,\varphi}{\mathrm{Bi}}\right)\left[\mathrm{F}(\eta) - 1 + \frac{2\,\eta}{\sqrt{\pi}}\right] - \psi\,\varphi\,\mathrm{Fo}\,[2\,\mathrm{F}(\eta) + 1] \quad \ldots \quad (11)$$

oder, wenn man Gl. (9) für ϑ_w/ϑ_c verwendet,

$$\frac{Q}{Q_c} = \frac{\psi}{\mathrm{Bi}}\left(\frac{\vartheta_w}{\vartheta_c} - 1 + \frac{2\,\eta}{\sqrt{\pi}}\right) + \frac{\psi\,\varphi}{\mathrm{Bi}^2}\left[2\,\mathrm{F}(\eta) - 2 + \frac{4\,\eta}{\sqrt{\pi}} - \eta^2\right] \quad \ldots \quad (12).$$

Für die Randbedingung erster Art ($\mathrm{Bi} = \infty$, $\vartheta_w = 0$) entsteht der einfache Ausdruck

$$\left(\frac{Q}{Q_c}\right)_{\mathrm{Bi}=\infty} = \frac{2\,\psi}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{Fo}^{1/2} - \psi\,\varphi\,\mathrm{Fo} \quad \ldots\ldots \quad (13).$$

Daraus berechnet sich für die ebene Platte ($\varphi = 0$) die in der Zeit t übertragene Wärme gemäß [7] zu

$$Q = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\,\vartheta_c\,F\sqrt{\lambda\,c_p\,\varrho}\,\sqrt{t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14).$$

4. Berechnung der Funktion F (η)

Bei der numerischen Auswertung der in Abschnitt 3 behandelten Näherungen für kleine Fourierzahlen spielt die schon in Gl. (9) verwendete Funktion

$$\mathrm{F}(\eta) = [1 - \mathrm{G}(\eta)]\,e^{\eta^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

eine besondere Rolle. Diese Funktion ist für große η-Werte schwer zu berechnen, weil dann die Exponentialfunktion sehr große und der Ausdruck in eckigen Klammern sehr kleine Werte annehmen. Diese Schwierigkeit läßt sich umgehen, wenn man die beiden für das Fehlerintegral bekannten Reihenentwicklungen für kleines und großes Argument gliedweise mit der Exponentialfunktion multipliziert [10; 11]. Dann erhält man für $\eta \leqq 1$ die Reihe

$$\mathrm{F}(\eta) = 1 + \eta^2 + \frac{\eta^4}{2} + \frac{\eta^6}{6} + \frac{\eta^8}{24} + \ldots - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\left(\eta + \frac{2\,\eta^3}{3} + \frac{4\,\eta^5}{15} + \frac{8\,\eta^7}{105} + \frac{16\,\eta^9}{945} + \ldots\right) \quad (16)$$

und für $\eta \geqq 3$ die Reihe

$$\mathrm{F}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{\eta} - \frac{1}{2\,\eta^3} + \frac{3}{4\,\eta^5} - \frac{15}{8\,\eta^7} + \frac{105}{16\,\eta^9} - \frac{945}{32\,\eta^{11}} \pm \ldots\right) \quad \ldots \quad (17).$$

Für $\eta < 3$, also sowohl im Zwischenbereich von Gl. (16) und (17) wie im Geltungsbereich von Gl. (16), läßt sich F (η) aus Tafelwerten für G (η) berechnen [11], sofern diese eine hinreichende Stellenzahl aufweisen.

Für den ganzen Bereich $0 > \eta > \infty$ kann man F (η) auch nach einer Näherungsfunktion berechnen, die durch Vereinfachen eines im Schrifttum [12] angegebenen Kettenbruchs entstanden ist. Diese Näherungsfunktion lautet

$$\mathrm{F}(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,(\eta + A)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

mit der Abkürzung

$$A = \frac{1}{\eta\,(\pi - 2)\,(2 - B) + \sqrt{\pi}} \quad \ldots\ldots \quad (18a),$$

in der B den Ausdruck

$$B = \frac{1}{1 + \dfrac{\eta}{\sqrt{\pi} + 3} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\eta}{\sqrt{\pi} + 3}\right)^2} \quad \ldots\ldots \quad (18b)$$

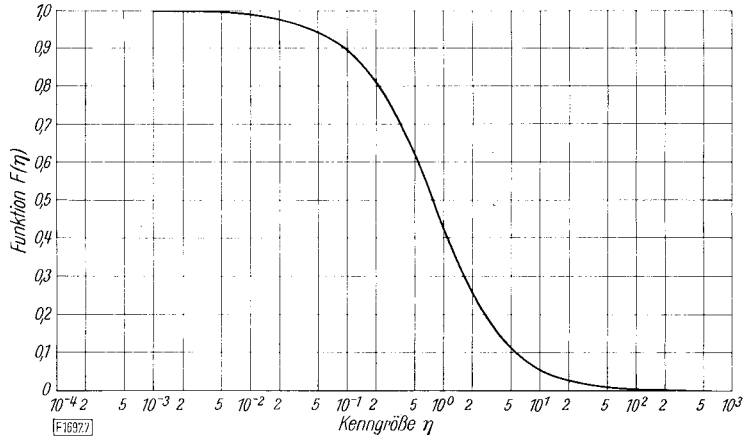


Bild 7. Abhängigkeit der Funktion F (η) gemäß Gl. (15) von der aus der Fourierzahl Fo und der Biotzahl Bi zusammengesetzten Kenngröße $\eta = \mathrm{Fo}^{1/2}\,\mathrm{Bi}$.

bedeutet. Die Funktion F (η) ist in Bild 7 und in Tafel 3 wiedergegeben. In Tafel 3 wurde die Stellenzahl so bemessen, daß beim Berechnen der bezogenen Oberflächen-Übertemperatur ϑ_w/ϑ_c und der bezogenen Wärme Q/Q_c der Kugel (als dem in diesem Zusammenhang ungünstigsten Fall) nach Gl. (9) und (11) der absolute Fehler kleiner als 1 % bleibt. Für $\eta \geqq 0{,}5$ findet man einheitlich drei Stellen angegeben. Trotz der hohen Stellenzahl für kleine Werte von η lassen sich aus den Reihen nach Gl. (16) und (17)

Tafel 3. Werte der Funktion $\mathrm{F}(\eta) = [1 - \mathrm{G}(\eta)]\,e^{\eta^2}$.

Kenngröße η	Funktion F (η)	Kenngröße η	Funktion F (η)
$1 \cdot 10^{-5}$	0,99998 87163 08	1,0	0,428
		1,2	0,379
$1 \cdot 10^{-4}$	0,99988 71721	1,4	0,339
$2 \cdot 10^{-4}$	0,99977 43642	1,6	0,306
$5 \cdot 10^{-4}$	0,99943 60604	1,8	0,279
$8 \cdot 10^{-4}$	0,99909 95367	2,0	0,255
		2,2	0,236
$1 \cdot 10^{-3}$	0,99887 2620	2,4	0,218
$2 \cdot 10^{-3}$	0,99774 724	2,6	0,204
$5 \cdot 10^{-3}$	0,99438 30	2,8	0,191
$8 \cdot 10^{-3}$	0,99103 66	3,0	0,179
		3,5	0,155
0,01	0,98881 55	4,0	0,137
0,02	0,97782 6	4,5	0,123
0,05	0,94599 0	5,0	0,111
0,08	0,91576	6,0	0,0928
		7,0	0,0798
0,1	0,89646	8,0	0,0700
0,2	0,8090	9,0	0,0623
0,3	0,7346		
0,4	0,6708	10	0,0561
0,5	0,616	20	0,0282
0,6	0,568	50	0,0113
0,7	0,526		
0,8	0,489	100	0,00546
0,9	0,457		
		1000	0,00056 4

für kleine und große η-Werte einfache Näherungsausdrücke gemäß folgender Aufstellung verwenden:

$$F(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta + \eta^2$$

für den Bereich $0 \leqq \eta \leqq 10^{-2}$,

$$F(\eta) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\eta + \eta^2 - \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\eta^3$$

für den Bereich $10^{-2} \leqq \eta \leqq 10^{-1}$ und

$$F(\eta) = \frac{1}{\sqrt{\pi}\,\eta}$$

für den Bereich $5{,}0 \leqq \eta < \infty$.

Daß die Näherungsgleichungen für kleine Fourierzahlen auch praktische Bedeutung haben, sei an einem Zahlenbeispiel [7] gezeigt. Eine Betonmauer von $2X = 0{,}8$ m Dicke kühle sich nach einer sprunghaften Änderung der Umgebungstemperatur durch freie Konvektion bei einem Wärmeübergangskoeffizienten $\alpha = 12{,}6$ W/m² grd ab. Gesucht ist die bezogene Übertemperatur ϑ_w/ϑ_c der Wandoberfläche nach $t = 1$ h. Der Beton habe eine Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0{,}7$ W/m grd, eine Dichte $\varrho = 2000$ kg/m³, eine spezifische Wärmekapazität $c = 1{,}13$ kJ/kg grd und eine Temperaturleitfähigkeit $a = 0{,}310 \cdot 10^{-6}$ m²/s. Damit ergeben sich die Kenngrößen $\mathrm{Bi} = \alpha X/\lambda = 7{,}2$ und $\mathrm{Fo} = at/X^2 = 0{,}00697$. In diesem Bereich der Kenngrößen ist es sehr schwierig, die Oberflächentemperatur mittels Fourier-Reihen zu berechnen. Dagegen kann man die Näherung für kleine Fourierzahlen heranziehen und Gl. (9) mit $\varphi = 0$ anwenden. Mit $\eta = \mathrm{Fo}^{1/2}\,\mathrm{Bi} = 0{,}602$ erhält man aus Tafel 3 den Wert $\vartheta_w/\vartheta_c = 0{,}567$. Auf die Bereiche, in denen sich das eine oder das andere Berechnungsverfahren empfiehlt, sei im folgenden Abschnitt genauer eingegangen.

5. Geltungsbereich der Näherungen für große und kleine Werte der Fourierzahl

Zur praktischen Anwendung der in Abschnitt 2 bis 4 beschriebenen Näherungslösungen muß man deren Fehler gegenüber der exakten Lösung und insbesondere den Geltungsbereich der Näherungen im Bereich mittlerer Fourierzahlen kennen. Hierzu wurden in Bild 8 bis 13 die bezogene Oberflächen-Übertemperatur ϑ_w/ϑ_c und die bezogene übertragene Wärme Q/Q_c für die ebene Platte, den Zylinder und die Kugel als Funktion von Fo und Bi aufgetragen. Dabei bedeuten die Kurven I die Näherungen für kleine Fourierzahlen nach Gl. (9) bzw. (11), die Kurven II die Lösung nach der Methode der Fourier-Reihen mit acht Gliedern für die ebene Platte und fünf Gliedern für den Zylinder und die Kugel (auch „exakte Lösung" genannt [8]) sowie die Kurven III die Lösung bei Verwendung nur des ersten Glieds der Fourier-Reihen gemäß Gl. (4) bzw. (5).

Bild 8 bis 13 in halblogarithmischer Auftragung überdecken den gesamten praktisch in Betracht kommenden Bereich der Kenngrößen. Man erkennt, daß die Näherungskurven I und III nahezu völlig ineinander übergehen, so daß nur für sehr genaue Rechnungen ein kleiner Bereich übrigbleibt, in dem man die exakte Lösung mit Fourier-Reihen (Kurve II) braucht. In vielen praktischen Anwendungsfällen wird man auf die Kurve II ganz verzichten können. Der dadurch begangene relative Fehler läßt sich für alle Biotzahlen aus Tafel 4 entnehmen. In Tafel 4 bedeutet Fo* jene Fourierzahl, bei der man von der Kurve I auf die Kurve III übergehen soll, ohne den angegebenen relativen Fehlerbetrag Δ_{max} zu überschreiten. Dies bedeutet also, daß Gl. (9) und (11) für Fo < Fo* bzw. Gl. (4) und (5) für Fo > Fo* verwendet werden sollen. Die in Tafel 4 angegebenen Maximalfehler Δ_{max} treten nur in

Tafel 4. Maximale relative Fehlerbeträge Δ_{max} für alle Biotzahlen bei der Fourierzahl Fo* für den Übergang von Kurve I auf Kurve III.

Körper	Fourierzahl °) Fo*	bei Fo* für ϑ_w/ϑ_c auftretender maximaler relativer Fehlerbetrag Δ_{max}	bei Fo* für Q/Q_c auftretender maximaler relativer Fehlerbetrag Δ_{max}
ebene Platte	0,30	0,5 %	0,5 %
Zylinder	0,14	1,4 %	1,4 %
Kugel	0,09	1,9 %	1,0 %

°) Es gelten jeweils die Werte von Fo* sowohl für die relative Oberflächen-Übertemperatur ϑ_w/ϑ_c als auch für die relative Wärme Q/Q_c.

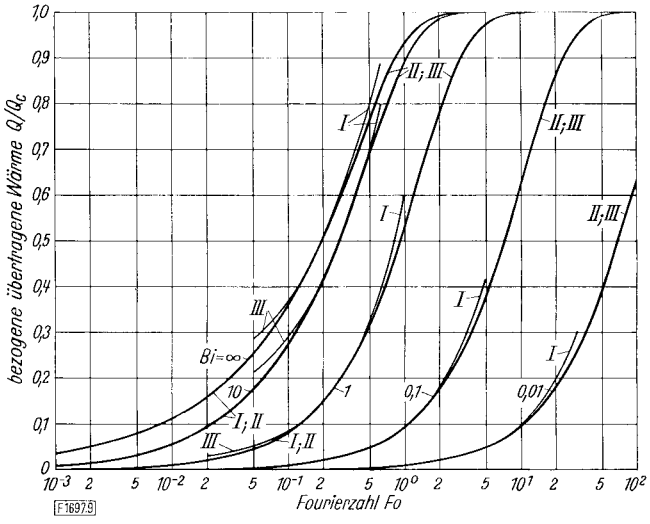


Bild 9. Abhängigkeit der bezogenen übertragenen Wärme Q/Q_c von der Fourierzahl Fo bei verschiedenen Werten der Biotzahl Bi.

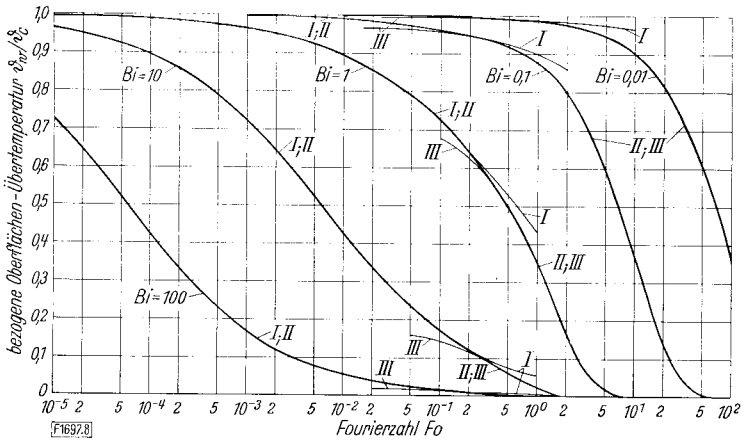


Bild 8 und 9. Vergleich nach verschiedenen Verfahren berechneter Ergebnisse für die ebene Platte.

I Näherung für kleine Fourierzahlen nach Gl. (9) bzw. (11), II Lösung nach der Methode der Fourier-Reihen mit acht Gliedern für die ebene Platte („exakte Lösung"), III Verlauf für das erste Glied der Fourier-Reihen gemäß Gl. (4) bzw. (5)

Bild 8 (links). Abhängigkeit der bezogenen Oberflächen-Übertemperatur ϑ_w/ϑ_c von der Fourierzahl Fo bei verschiedenen Werten der Biotzahl Bi.

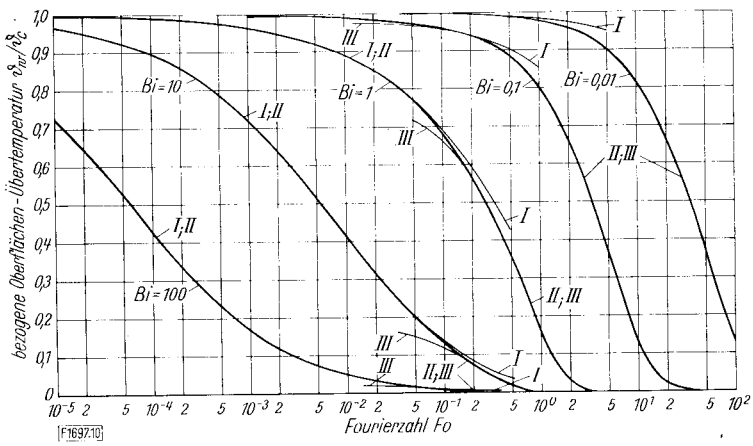


Bild 10 (links). Abhängigkeit der bezogenen Oberflächen-Übertemperatur ϑ_w/ϑ_c von der Fourierzahl Fo bei verschiedenen Werten der Biotzahl Bi für den Zylinder.

Bild 10 bis 13. Vergleich nach verschiedenen Verfahren berechneter Ergebnisse für den Zylinder und die Kugel.

I Näherung für kleine Fourierzahlen nach Gl. (9) bzw. (11), II Lösung nach der Methode der Fourier-Reihen mit fünf Gliedern für den Zylinder und für die Kugel („exakte Lösung"), III Verlauf für das erste Glied der Fourier-Reihen gemäß Gl. (4) bzw. (5)

Bild 13 (unten). Abhängigkeit der bezogenen übertragenen Wärme Q/Q_c von der Fourierzahl Fo bei verschiedenen Werten der Biotzahl Bi für die Kugel.

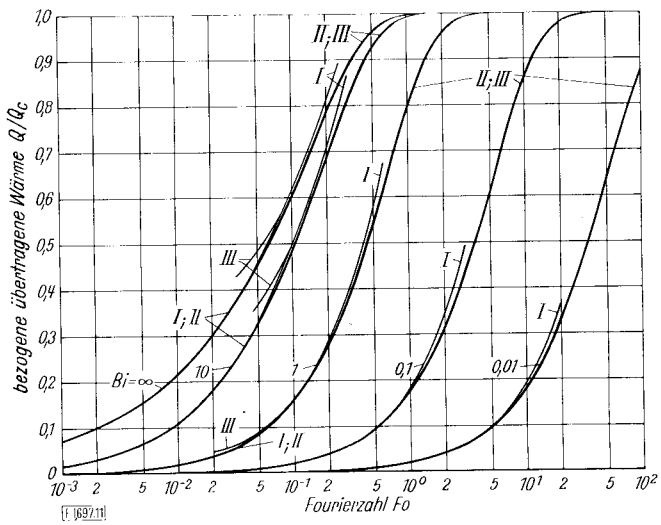
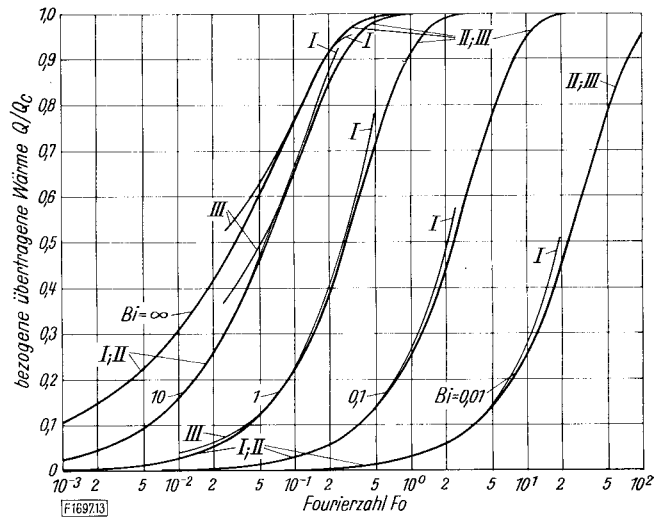


Bild 11. Abhängigkeit der bezogenen übertragenen Wärme Q/Q_c von der Fourierzahl Fo bei verschiedenen Werten der Biotzahl Bi für den Zylinder.



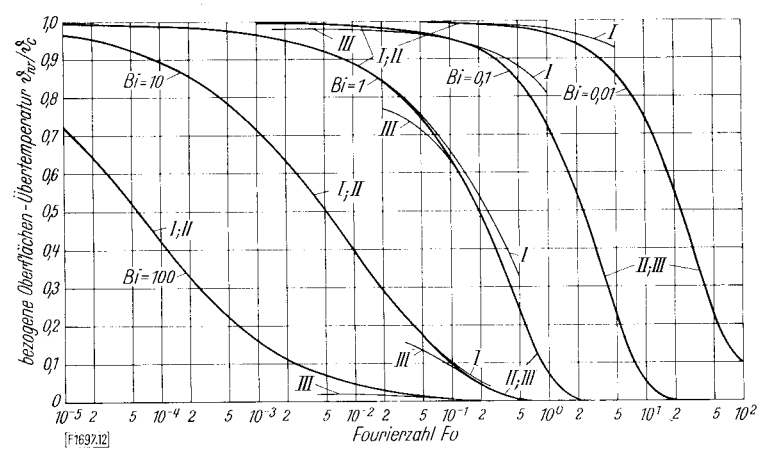


Bild 12. Abhängigkeit der bezogenen Oberflächen-Übertemperatur ϑ_w/ϑ_c von der Fourierzahl Fo bei verschiedenen Werten der Biotzahl Bi für die Kugel.

unmittelbarer Umgebung von Fo* auf und erreichen schon bei kleinen Unterschieden der Fourierzahl gegen diesen Grenzwert Fo* so kleine Werte (vgl. Bild 8 bis 13), daß sie im Rahmen der Zeichengenauigkeit nicht mehr aufgetragen werden können. Die Berechnung von Anheiz- und Abkühlvorgängen wird durch alleiniges Verwenden der Kurven I und III sehr erleichtert, da sich diese Kurven durch einfache, mathematisch leicht zu handhabende Ausdrücke erfassen lassen.

6. Mehrdimensionale Probleme

Die Lösungen für den eindimensionalen Temperaturausgleich lassen sich auch auf zwei- und dreidimensionale Probleme anwenden [13; 14]. Bedeuten X, Y, Z die halben Dicken ebener Platten, R den Halbmesser eines Zylinders sowie x, y, z die Abstände von den Oberflächen halbunendlicher Körper, so kann man unter der Bedingung, daß die Begrenzungsflächen senkrecht aufeinander stehen, die in Tafel 5 aufgeführten Modelle bilden, die in Bild 14a bis i perspektivisch wiedergegeben sind.

Der Temperaturausgleich im Innern oder auf den Oberflächen dieser Modelle läßt sich als Produkt der Einzellösungen berechnen, die man mit je einer der kennzeichnenden Längen gewonnen hat. Für jede Oberfläche nimmt die Biotzahl u. U. einen anderen Wert an; sie muß jedoch auf den beiden gegenüberliegenden Oberflächen einer ebenen Platte die gleichen Werte haben. Die Umgebungstemperatur muß überall gleich sein. Ist eine Oberfläche einer ebenen Platte wärmeisoliert, so hat man in Fo und Bi die ganze Plattendicke als kennzeichnende Länge einzusetzen.

Als erstes Beispiel werde die Temperatur der Ecke eines großen, rechtwinklig begrenzten Körpers aus Chromnickelstahl zur Zeit $t = 1\,\text{h} = 3600\,\text{s}$ nach der sprunghaften Änderung der Umgebungstemperatur berechnet. Die Stoffgrößen betragen $\lambda = 14{,}5\,\text{W/m grd}$ und $a = 3{,}85 \cdot 10^{-6}\,\text{m}^2/\text{s}$. Auf der zur x-Achse senkrechten Oberfläche herrsche der Wärmeübergangskoeffizient $\alpha_x = 15{,}0\,\text{W/m}^2\,\text{grd}$; für die beiden anderen Oberflächen mögen die Koeffizienten $\alpha_y = 20{,}0\,\text{W/m}^2\,\text{grd}$ und $\alpha_z = 25{,}0\,\text{W/m}^2\,\text{grd}$ gelten. Da

Tafel 5. Modelle zur mehrdimensionalen Wärmeleitung.

Bildnummer	kennzeichnende Längen gemäß Bild 14a bis i	Modell
14a	X, Y	rechteckiger Stab
14b	X, R	Zylinder endlicher Länge
14c	x, R	Ende eines langen Zylinders
14d	X, x	Ende einer Platte
14e	x, y	rechtwinklige Kante eines großen Körpers
14f	X, Y, Z	Quader
14g	X, Y, x	Ende eines rechteckigen Stabs
14h	X, x, y	rechtwinklige Ecke einer Platte
14i	x, y, z	rechtwinklige Ecke eines großen Körpers

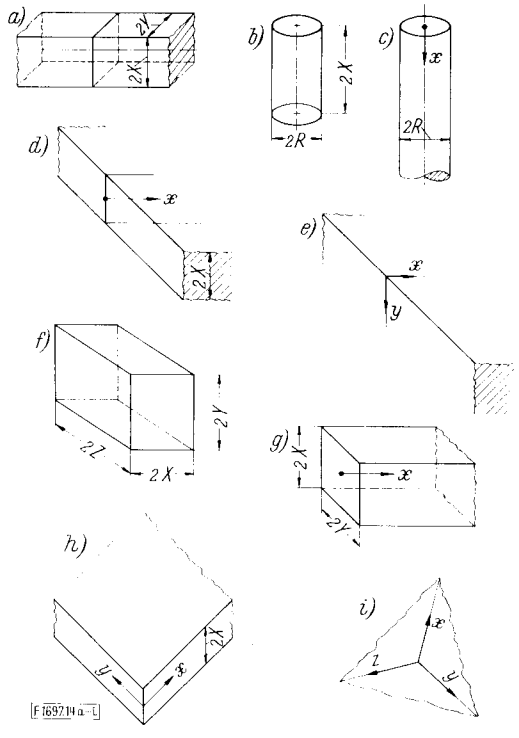


Bild 14a bis i. Modelle zur mehrdimensionalen Wärmeleitung.

x, y und z rechtwinklig kartesische Koordinaten senkrecht zu Körperoberflächen, X, Y und Z halbe Dicken (bzw. halbe Kantenlängen), R Zylinderhalbmesser; sonstige Erläuterungen über a) bis i) in Tafel 5

bei dem als groß vorausgesetzten Körper vom Einfluß der übrigen Begrenzungen abgesehen werden kann, ist für alle drei Richtungen die Lösung für die Wandtemperatur des halbunendlichen Körpers nach Gl. (9) mit $\varphi = 0$ heranzuziehen. Die Argumente η und die aus Bild 7 oder Tafel 3 abgelesenen Funktionswerte F für die drei eindimensionalen Fälle lauten

$$\eta_x = \alpha_x \sqrt{at}/\lambda = 0{,}122\,, \quad F(\eta_x) = 0{,}877\,,$$

$$\eta_y = \alpha_y \sqrt{at}/\lambda = 0{,}162\,, \quad F(\eta_y) = 0{,}842\,,$$

$$\eta_z = \alpha_z \sqrt{at}/\lambda = 0{,}203\,, \quad F(\eta_z) = 0{,}807\,.$$

Daraus erhält man für die Übertemperatur ϑ_E der Ecke

$$\vartheta_E/\vartheta_c = F(\eta_x)\,F(\eta_y)\,F(\eta_z) = 0{,}595\,.$$

Bei überall gleichen Wärmeübergangskoeffizienten ist die relative Übertemperatur einer rechtwinkligen Kante gleich $F^2(\eta)$ und die einer rechtwinkligen Ecke gleich $F^3(\eta)$.

Das zweite Beispiel betrifft die Übertemperaturen in der Mitte und auf den Oberflächen eines Zylinders mit dem Durchmesser $2\,R = 0{,}6$ m und der Höhe $2\,X = 0{,}5$ m aus Chromnickelstahl (mit den Stoffgrößen des ersten Beispiels) zur Zeit $t = 1{,}5$ h $= 5400$ s nach der sprunghaften Änderung der Umgebungstemperatur. Auf den Stirnflächen herrsche der Wärmeübergangskoeffizient $\alpha_X = 40\,\mathrm{W/m^2\,grd}$; für die Seitenfläche gelte der Wärmeübergangskoeffizient $\alpha_R = 60\,\mathrm{W/m^2\,grd}$. Mit diesen Werten werden folgende Kenngrößen gebildet:

$$\mathrm{Fo}_X = at/X^2 = 0{,}333\,, \quad \mathrm{Bi}_X = \alpha_X\,X/\lambda = 0{,}690\,,$$

$$\mathrm{Fo}_R = at/R^2 = 0{,}231\,, \quad \mathrm{Bi}_R = \alpha_R\,R/\lambda = 1{,}242.$$

Die Kenngrößen liegen in einem Bereich, in dem das erste Glied der Fourier-Reihe verwendet werden kann. Man erhält aus Gl. (3) und (4) für die bezogenen Übertemperaturen ϑ_m und ϑ_w in der Mitte und auf der Oberfläche einer ebenen Platte von der Dicke $2\,X$ (zusätzlicher Index X)

$$\vartheta_{m\,X}/\vartheta_c = 0{,}905\,, \quad \vartheta_{w\,X}/\vartheta_c = 0{,}665$$

sowie für die entsprechenden Übertemperaturen des Zylinders mit dem Halbmesser R (zusätzlicher Index R)

$$\vartheta_{m\,R}/\vartheta_c = 0{,}812\,, \quad \vartheta_{w\,R}/\vartheta_c = 0{,}476\,.$$

Aus diesen vier bezogenen Übertemperaturen lassen sich durch Produktbildung für den Zylinder endlicher Länge in der Mitte die bezogene Übertemperatur

$$\Theta_1 = \vartheta_{m\,X}\,\vartheta_{m\,R}/\vartheta_c^2 = 0{,}735\,,$$

im Mittelpunkt der Stirnfläche die bezogene Übertemperatur

$$\Theta_2 = \vartheta_{w\,X}\,\vartheta_{m\,R}/\vartheta_c^2 = 0{,}540\,,$$

an der Randlinie die bezogene Übertemperatur

$$\Theta_3 = \vartheta_{w\,X}\,\vartheta_{w\,R}/\vartheta_c^2 = 0{,}316$$

sowie in der Mitte der Zylindermantelfläche die bezogene Übertemperatur

$$\Theta_4 = \vartheta_{m\,X}\,\vartheta_{w\,R}/\vartheta_c^2 = 0{,}430$$

berechnen. Ferner gilt auch für die Produktlösung, daß die Temperaturprofile an den Oberflächen auf außerhalb des Körpers gelegene Richtpunkte weisen, deren Abstände s_X und s_R von der Oberfläche senkrecht zur x-Achse bzw. von der Zylindermantelfläche durch die Gleichungen

$$s_X = \lambda/\alpha_X = X/\mathrm{Bi}_X = 0{,}363\ \mathrm{m}$$

und

$$s_R = \lambda/\alpha_R = R/\mathrm{Bi}_R = 0{,}242\ \mathrm{m}$$

gegeben sind. Mit Hilfe dieser Richtpunktabstände gelingt es, die drei Temperaturprofile mit meist hinreichender Genauigkeit zu zeichnen, wie es Bild 15 veranschaulicht.

Es sei erwähnt, daß die Produktlösungen auch für jeden beliebigen Punkt im Innern eines Körpers gelten und selbstverständlich nicht auf die Näherungslösungen beschränkt sind, die hier bei den Anwendungsbeispielen benutzt wurden.

Aus dem Temperaturverlauf in mehrdimensionalen Körpern läßt sich auch die übertragene Wärme Q berechnen. Bezeichnet Q_c die Anfangsenthalpie eines Körpers endlicher Abmessungen vom Volum V, so gilt für jeden Zeitpunkt

$$\frac{Q}{Q_c} = 1 - \frac{1}{V}\int_V \frac{\vartheta}{\vartheta_c}\,\mathrm{d}V \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19).$$

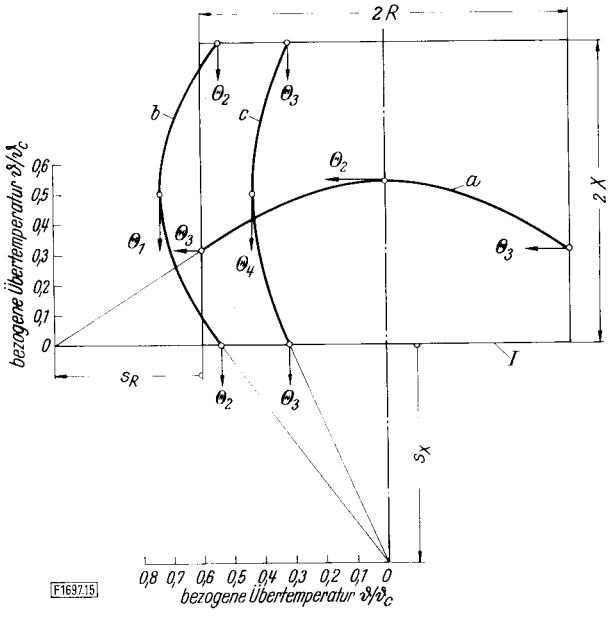


Bild 15. Temperaturprofile für den Zylinder endlicher Länge als zweites Beispiel eines mehrdimensionalen Problems.

R und X Halbmesser bzw. halbe Höhe des Zylinders, I Zylinderstirnfläche, s_R und s_X Richtpunktabstände der Skalen-Nullpunkte von der Mantel- und der Stirnfläche des Zylinders, a Verlauf der bezogenen Stirnflächen-Übertemperatur, b und c Verlauf der bezogenen Achs- bzw. Manteltemperatur des Zylinders, Θ_1 bis Θ_4 im Text erläuterte ausgezeichnete Werte der bezogenen Übertemperatur ϑ/ϑ_c

Die bezogene Übertemperatur ϑ/ϑ_c gehorcht der Produktlösung. Für den dreidimensionalen Körper endlicher Abmessung, den Quader, gilt also

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_c} = \frac{\vartheta_x\,\vartheta_y\,\vartheta_z}{\vartheta_c^3} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (20),$$

wenn ϑ_x, ϑ_y, ϑ_z die Übertemperaturen bei eindimensionaler Wärmeübertragung in x-, y- und z-Richtung bedeuten. Da diese Übertemperaturen nur von einer Koordinate abhängen, kann man Gl. (19) mit Gl. (20) auch in der Form

$$\frac{Q}{Q_c} = 1 - \frac{1}{V}\int_{-X}^{X}\frac{\vartheta_x}{\vartheta_c}\,dx\int_{-Y}^{Y}\frac{\vartheta_y}{\vartheta_c}\,dy\int_{-Z}^{Z}\frac{\vartheta_z}{\vartheta_c}\,dz \quad \ldots \quad (21)$$

schreiben. Das Volum des Quaders beträgt $V = 2X\,2Y\,2Z$. Ferner gilt für ein Teilintegral von Gl. (21) die Beziehung

$$\frac{1}{2X}\int_{-X}^{X}\frac{\vartheta_x}{\vartheta_c}\,dx = 1 - \frac{Q_X}{Q_c} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22),$$

wenn Q_X die bei eindimensionalem Wärmestrom allein in x-Richtung übertragene Wärme bedeutet. Da für die beiden anderen Richtungen entsprechende Ausdrücke mit Q_Y und Q_Z als der in y- bzw. z-Richtung übertragenen Wärme gelten, erhält man aus Gl. (21) für die übertragene Wärme des Quaders

$$\frac{Q}{Q_c} = 1 - \left(1 - \frac{Q_X}{Q_c}\right)\left(1 - \frac{Q_Y}{Q_c}\right)\left(1 - \frac{Q_Z}{Q_c}\right) \quad \ldots \quad (23).$$

Bezeichnen im allgemeinen Fall Q_1, Q_2, Q_3 die bei eindimensionalem Wärmestrom in drei verschiedenen Richtungen übertragenen Wärmen, so ergibt sich für Körper endlicher Abmessungen die Beziehung

$$\frac{Q}{Q_c} = 1 - \left(1 - \frac{Q_1}{Q_c}\right)\left(1 - \frac{Q_2}{Q_c}\right)\left(1 - \frac{Q_3}{Q_c}\right) \quad \ldots \quad (24).$$

Die Bedeutung von Q_1, Q_2, Q_3 und Q_c geht aus Tafel 6 hervor.

Tafel 6. Bedeutung der Größen in Gl. (24) für die Wärmeübertragung in mehrdimensionalen Körpern.

Modell	in Gl. (24) einzusetzende übertragene Wärme an Stelle von			in Gl. (24) einzusetzender Ausdruck für die Anfangsenthalpie	Bemerkung
	Q_1	Q_2	Q_3	Q_c	
Quader	Q_X	Q_Y	Q_Z	$2X\,2Y\,2Z\,c\,\vartheta_c$	X, Y, Z gegeben
Zylinder endlicher Länge	Q_R	0	Q_X	$\pi R^2\,2X\,c\,\vartheta_c$	R, X gegeben
rechteckiger Stab	Q_X	Q_Y	0	$2X\,2Y\,2Z\,c\,\vartheta_c$	X, Y gegeben, Z beliebig

Als Beispiel sei der Zylinder endlicher Länge aus Chromnickelstahl betrachtet (vgl. Bild 15). Mit den hierfür vorstehend bereits berechneten Kenngrößen erhält man

$$Q_R/Q_c = 0{,}363 \quad \text{und} \quad Q_X/Q_c = 0{,}175\,.$$

Damit ergibt sich nach Gl. (24)

$$\frac{Q}{Q_c} = 1 - \left(1 - \frac{Q_R}{Q_c}\right)\left(1 - \frac{Q_X}{Q_c}\right) = 0{,}475\,.$$

7. Schrifttum

[1] *Fourier, J. B.:* Théorie analytique de la chaleur. Paris 1822. Deutsche Übersetzung von *R. Weinstein.* Berlin 1887.

[2] *Gröber, H.:* Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges. Berlin: Springer-Verlag 1921.

[3] *Gröber, H.:* Die Erwärmung und Abkühlung einfacher geometrischer Körper. Z. VDI **69** (1925) Nr. 21 S. 705/10.

[4] *Gurney, H. P.,* u. *J. Lurie:* Charts for estimating temperature distributions in heating or cooling solid shapes. Industr. Engng. Chem. **15** (1923) Nr. 11 S. 1170/72.

[5] *Bachmann, H.:* Tafeln über Abkühlungsvorgänge einfacher Körper. Berlin: Springer-Verlag 1938.

[6] *Heisler, M. P.:* Temperature charts for induction and constant-temperature heating. Trans. Amer. Soc. mech. Engrs. **69** (1947) Nr. 3 S. 227/36.

[7] *Gröber, H.,* u. *S. Erk:* Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. 3. Aufl. bearb. von *U. Grigull.* 3. Neudruck. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1963.

[8] *Grigull, U.:* Temperaturausgleich in einfachen Körpern. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer-Verlag 1964.

[9] *Goldstein, S.:* The application of Heaviside's operational method to the solution of a problem in heat conduction. Z. angew. Math. Mech. **12** (1932) Nr. 4 S. 234/43.

[10] *Goldstein, S.:* On the calculation of the surface temperature of geometrically simple bodies. Z. angew. Math. Mech. **14** (1934) Nr. 3 S. 158/62.

[11] *Jahnke, E.,* u. *F. Emde:* Funktionentafeln. 2. Aufl. Leipzig u. Berlin: B. G. Teubner 1933.

[12] *Patry, J.,* u. *J. Keller:* Zur Berechnung des Fehlerintegrals. Numer. Math. **6** (1964) Nr. 2 S. 89/97.

[13] *Berger, F.:* Über die Berechnung des Temperaturverlaufs in einem Rechtkant beim Abkühlen und Erwärmen. Z. angew. Math. Mech. **8** (1928) Nr. 6 S. 479/88.

[14] *Newman, A. B.:* Heating and cooling rectangular and cylindrical solids. Industr. Engng. Chem. **28** (1936) Nr. 5 S. 545/48.

Eingegangen am 6. März 1965 F 1697

VDI-Verlag GmbH, Düsseldorf
Das Recht einer jeglichen weiteren Vervielfältigung dieses Sonderdruckes sowie sein Vertrieb gegen Entgelt bleiben der VDI-Verlag GmbH vorbehalten.