

Temperaturlausgleich in einfachen Körpern

Ebene Platte, Zylinder, Kugel, halbbunendlicher Körper

Von

Dr.-Ing. Ulrich Grigull

o. Professor für Technische Thermodynamik
an der Technischen Hochschule München

Mit 9 Abbildungen
und 11 Tafeln in einer Tasche



Springer-Verlag
Berlin / Göttingen / Heidelberg
1964

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten
Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es auch nicht gestattet,
dieses Buch oder Teile daraus auf photomechanischem Wege
(Photokopie, Mikrokopie) oder auf andere Art zu vervielfältigen
© by Springer-Verlag OHG., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1964
Library of Congress Catalog Card Number: 64-15144
Printed in Germany

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw.
in diesem Buche berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der An-
nahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetz-
gebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Vorwort

Dieses Buch enthält vollständig neu berechnete Tafeln, Abbildungen und Zahlentafeln der nichtstationären eindimensionalen Wärmeleitung ohne innere Wärmequellen in der ebenen Platte, dem Zylinder, der Kugel und dem halbumendlichen Körper. Die anfängliche Temperaturverteilung ist gleichförmig angenommen, an den Oberflächen wird Wärme bei konstanter Umgebungstemperatur und konstantem Wärmeübergangskoeffizienten übertragen. Auch die Stoffgrößen sollen konstant sein.

Diese Lösungen der FOURIERSchen Differentialgleichung lassen sich überwiegend nur als unendliche Reihen darstellen, deren numerische Berechnung mühsam ist, wenn man von Hand rechnen muß. Da die bisher bekannt gewordenen Ergebnisse untereinander nicht völlig übereinstimmten, schien es zweckmäßig, diese Grundprobleme der nichtstationären Wärmeleitung erneut mittels elektronischer Rechenautomaten zu berechnen. Die Ergebnisse dieser Berechnung für die Temperaturen der Oberflächen und der Mitten sowie der übertragenen Wärmemengen sind in diesem Buche unter Benützung der für das betreffende Problem maßgebenden Kenngrößen zusammengestellt.

In gewissen Bereichen der Kenngrößen genügt es oft, nur den ersten Term der Reihen zu verwenden, so daß man geschlossene, bequem zu handhabende Ausdrücke erhält. Aber es war bisher nicht genau bekannt, welcher Fehler dadurch entsteht. Diese Fehlerberechnung ist in den nachfolgenden Abbildungen wiedergegeben. Es zeigt sich, daß der Bereich kleiner Fehler, die in vielen Fällen in Kauf genommen werden können, weiter reicht als bisher angenommen. Das dürfte gerade für die Berechnung von Aufheiz- und Abkühlvorgängen in der Praxis von Bedeutung sein. Die notwendigen Konstanten sind ebenfalls in diesem Buche angegeben.

Im Bereich sehr kleiner Zeiten nach einer sprunghaften Temperaturänderung versagt jede Berechnung mittels Reihen. Man kann aber jeden Körper endlicher Abmessungen als halbumendlichen Körper ansehen, solange die thermische Einwirkung wesentlich auf den Oberflächenbereich beschränkt bleibt. Daher sind in diesem Buche auch die Lösungen für den halbumendlichen Körper mitgeteilt und mit jenen für die Körper endlicher Abmessungen verglichen.

Die Lösungen für die vier „einfachen“ Körper lassen sich für sehr viel mehr Fälle anwenden, als es auf den ersten Blick scheint. Häufig kann man die Wärmeleitung in komplizierten Körpern mit ausreichender Genauigkeit durch die in einfachen Körpern annähern. Da die FOURIERSche Differentialgleichung linear ist, lassen sich durch Kombi-

nation verschiedener Anfangs- und Randbedingungen ganze Familien neuer Lösungen aufstellen, darunter auch solche für zwei- und dreidimensionale Probleme. Damit diese Möglichkeiten für die Berechnung praktischer Fälle nutzbar gemacht werden können, müssen die einfachen Lösungen in genügender Genauigkeit vorliegen und bequem zugänglich sein. Diesem Zwecke soll das vorliegende Buch dienen, in dem besonderer Wert auf übersichtliche Darstellung und einheitliche Bezeichnungsweise nach dem heutigen Stand der Normung gelegt wurde.

Die hier mitgeteilten Zahlenwerte wurden auf den Digitalrechnern IBM 650, Zuse Z22 und Siemens 2002 berechnet. An der Programmierung waren die Herren Dr. W. LODE, Dr. H. K. DETTMAR und Ing. E. MARRE, sämtlich Leverkusen, sowie meine Mitarbeiter, die Herren Dr. F. MAYINGER und Dipl.-Ing. H. TRATZ, beteiligt. Herr cand. ing. J. BACH besorgte die Zeichenarbeit. Der Verfasser dankt allen Genannten für ihre Unterstützung, ferner den Farbenfabriken Bayer, Leverkusen, und den Siemens-Schuckertwerken, Erlangen, für die zur Verfügung gestellte Rechenzeit.

München, im Dezember 1963

U. Grigull

Inhaltsübersicht

	Seite
Einleitung	1
Ebene Platte	1
Zylinder	5
Kugel	8
Halbunendlicher Körper	11
Beispiele zur Auswertung	13
Schrifttum	16

Verzeichnis der Tafeln

- 1 Ebene Platte, Temperatur in der Mitte
- 2 Ebene Platte, Wandtemperatur
- 3 Ebene Platte, Wärmemenge
- 4 Zylinder, Temperatur in der Mitte
- 5 Zylinder, Wandtemperatur
- 6 Zylinder, Wärmemenge
- 7 Kugel, Temperatur in der Mitte
- 8 Kugel, Wandtemperatur
- 9 Kugel, Wärmemenge
- 10 Halbunendlicher Körper, Temperatur im Innern, $Fo < 30$
- 11 Halbunendlicher Körper, Temperatur im Innern, $Fo < 0,3$

Formelzeichen

a	Temperaturleitfähigkeit, $a = \lambda / (c_p \rho)$
c_p	spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck
C_m, C_w, C_q	Konstanten
E	Konstante
Q	in der Zeit t übergegangene Wärmemenge
Q_c	Enthalpie zur Zeit $t = 0$, bezogen auf Umgebungstemperatur
r	radiale Koordinate
R	Radius
t	Zeit
T_∞	Umgebungstemperatur
x	Wandabstand
X	halbe Plattendicke
α	Wärmeübergangskoeffizient
δ, μ, ν	Eigenwerte
Δ	relativer Fehler
ϑ	Temperaturdifferenz zur Umgebungstemperatur
ϑ_c	konstante Anfangstemperatur
ϑ_m	Temperatur in der Mitte
ϑ_w	Wandtemperatur
λ	Wärmeleitfähigkeit
ρ	Dichte
$Bi = \alpha X / \lambda; \alpha x / \lambda; \alpha R / \lambda$	BIOT-Zahl ¹
$Fo = a t / X^2; a t / x^2; a t / R^2$	FOURIER-Zahl

¹ Bedeutet in dem Quotienten $\alpha X / \lambda$ das Zeichen λ die Wärmeleitfähigkeit des strömenden Mediums, so ist die Abkürzung Nu (NUSSELT-Zahl) üblich (vgl. [6]). Dieser Fall liegt hier nicht vor.

Einleitung

Numerische Lösungen für die nichtstationäre eindimensionale Wärmeleitung mit der Randbedingung dritter Art scheinen erstmals von GRÖBER [1, 2] sowie von GURNEY und LURIE [3] veröffentlicht worden zu sein. Die Werte von GRÖBER wurden später durch BACHMANN [4] erweitert. In der amerikanischen Literatur werden meist die Werte von HEISLER [5] verwendet. Die genannten Ergebnisse wurden durch Handrechnung oder mit Hilfe elektrischer Analogieverfahren erhalten. Da es sich um Elementarprobleme der nichtstationären Wärmeleitung handelt, schien eine Neuberechnung mittels elektrischer Rechenautomaten sinnvoll, zumal die bisherigen Ergebnisse untereinander nicht vollständig übereinstimmten.

Es handelt sich um Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a \Delta \vartheta, \quad (1)$$

in der Δ den LAPLACESchen Differentialoperator bedeutet, mit der Anfangsbedingung

$$\vartheta = \vartheta_c \quad \text{für} \quad t = 0 \quad (2)$$

und der Randbedingung

$$-\lambda \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_w = \alpha \vartheta_w, \quad (3)$$

wenn x die Längenkoordinate bedeutet und der Index w für die Wand gilt. Die Größen a , α , λ und die Umgebungstemperatur sind konstant angenommen. Die nachfolgenden Berechnungen beziehen sich auf die ebene Platte, den Zylinder, die Kugel und den halbunendlichen Körper.

Ebene Platte

Die Lösung von Gl. (1) für die ebene Platte der Dicke $2X$ mit beidseitigem Wärmeübergang [6] lautet

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_c} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2 \sin \delta_k}{\delta_k + \sin \delta_k \cos \delta_k} \exp(-\delta_k^2 Fo) \cos(\delta_k x/X). \quad (4)$$

In dieser Gleichung zählt die Längenkoordinate x von der Mittelebene aus, die FOURIER-Zahl ist durch $Fo = a t/X^2$ definiert, und die Eigenwerte δ_k sind die Lösungen der transzendenten Gleichung

$$\cot \delta = \delta/Bi \quad (5)$$

und sind damit Funktionen allein von $Bi = \alpha X/\lambda$, der Kenngröße des Wärmeübergangs. Man kann daher Gl. (4) in der allgemeinen Form

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_c} = f(Fo, Bi, x/X) \quad (6)$$

schreiben, die man auch aus den Gln. (1) bis (3) unmittelbar durch Ähnlichkeitsbetrachtungen hätte erhalten können. Die Temperatur der Mittelebene ϑ_m erhält man aus Gl. (4) mit $x = 0$:

$$\frac{\vartheta_m}{\vartheta_c} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2 \sin \delta_k}{\delta_k + \sin \delta_k \cos \delta_k} \exp(-\delta_k^2 Fo) = f(Fo, Bi) \quad (7)$$

und die Wandtemperatur ϑ_w mit $x = X$:

$$\frac{\vartheta_w}{\vartheta_c} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2 \sin \delta_k}{\delta_k + \sin \delta_k \cos \delta_k} \exp(-\delta_k^2 Fo) \cos \delta_k = f(Fo, Bi). \quad (8)$$

Die in der Zeit t zwischen Platte und Umgebung übertragene Wärmemenge Q erhält man aus der Gleichung

$$\frac{Q}{Q_c} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2 \sin^2 \delta_k}{\delta_k^2 + \delta_k \sin \delta_k \cos \delta_k} [1 - \exp(-\delta_k^2 Fo)] = f(Fo, Bi), \quad (9)$$

in der Q_c die Enthalpie der Platte zur Zeit $t = 0$, bezogen auf die Umgebungstemperatur, bedeutet.

Die Gln. (7) bis (9) wurden mittels des Digitalrechners Siemens 2002 mit 8 Gliedern der Reihen ($k = 8$) für 44 Werte der FOURIER-Zahl berechnet, und zwar bei jeweils festgehaltenem Parameter Bi , für den 40 Werte gewählt wurden. Der Wert $Bi = \infty$ entspricht der konstanten Wandtemperatur ϑ_w , also der Randbedingung erster Art. Für jeden Wert Bi wurde entweder mit allen 44 Fo -Werten gerechnet oder die Rechnung dann abgebrochen, wenn die Summe der 3 Werte

$$\frac{\vartheta_m}{\vartheta_c} + \frac{\vartheta_w}{\vartheta_c} + \left(1 - \frac{Q}{Q_c}\right) < 10^{-3}$$

geworden war, weil kleinere Werte in technischen Fällen nicht mehr interessant sind. Die Ergebnisse dieser Rechnung sind in den Tafeln 1 bis 3 in halblogarithmischer Darstellung über Fo mit dem Parameter $1/Bi$ und wechselndem Abszissenmaßstab aufgetragen. Eine ähnliche Form wählte auch HEISLER [5] für einen Teil seiner Diagramme. Die zur Berechnung notwendigen 8 Eigenwerte δ_k wurden nach Gl. (5) durch Iteration nach dem NEWTONSchen Näherungsverfahren berechnet; die Iteration wurde abgebrochen, wenn die Verbesserung durch den nächsten Schritt kleiner als 10^{-6} wurde. Das Ergebnis ist in Zahlentafel 1 zusammengestellt.

Zahlentafel 1. Lösungen der Gleichung $\cot \delta = \delta/Bi$

$1/Bi$	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8
0	1,570 796	4,712 389	7,853 982	10,995 57	14,137 17	17,278 76	20,420 35	23,561 95
0,1	1,428 870	4,305 801	7,228 110	10,200 26	13,214 19	16,259 36	19,327 08	22,410 85
0,2	1,313 838	4,033 568	6,909 596	9,892 753	12,935 22	16,010 66	19,105 52	22,212 56
0,5	1,076 874	3,643 597	6,578 334	9,629 561	12,722 30	15,833 61	18,954 68	22,081 48
0,8	0,930 757	3,485 897	6,473 921	9,554 863	12,664 75	15,786 98	18,915 54	22,047 78
1	0,860 334	3,425 618	6,437 298	9,529 335	12,645 29	15,771 29	18,902 41	22,036 50
2	0,653 271	3,292 310	6,361 620	9,477 486	12,606 01	15,739 72	18,876 04	22,013 86
5	0,432 841	3,203 935	6,314 846	9,445 949	12,582 27	15,720 69	18,860 16	22,000 24
8	0,346 354	3,180 870	6,303 015	9,438 022	12,576 31	15,715 92	18,856 19	21,996 83
10	0,311 053	3,173 097	6,299 059	9,435 377	12,574 32	15,714 33	18,854 86	21,995 70
20	0,221 760	3,157 427	6,291 133	9,430 081	12,570 35	15,711 15	18,852 21	21,993 42
50	0,140 952	3,147 946	6,286 367	9,426 900	12,567 96	15,709 24	18,850 62	21,992 06
80	0,111 571	3,145 567	6,285 174	9,426 105	12,567 37	15,708 76	18,850 22	21,991 72
100	0,099 834	3,144 773	6,284 776	9,425 840	12,567 17	15,708 60	18,850 09	21,991 60

Die Kurven in Tafel 1 bis 3 verlaufen größtenteils fast geradlinig. Das bedeutet, daß der erste Term der Reihe in Gl. (7), (8) oder (9) für den Kurvenverlauf bestimmend ist. Um diese Erscheinung bei praktischen Rechnungen ausnutzen zu können, muß man

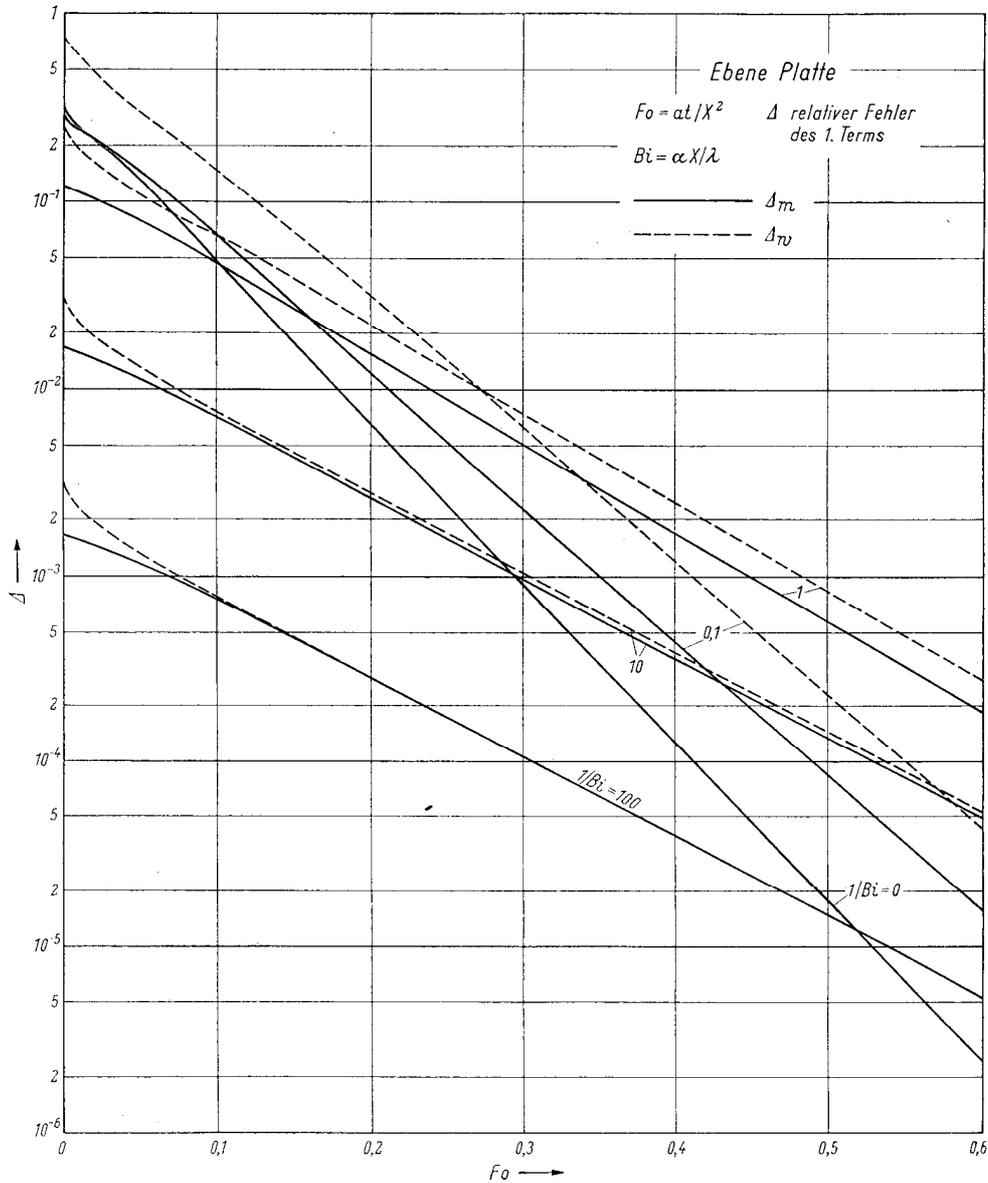


Abb. 1. Ebene Platte. Relativer Fehler des ersten Terms

den Fehler kennen, der bei alleiniger Verwendung des ersten Terms entsteht. Hierzu wurde bei allen gerechneten Werten der Quotient aus dem ersten Term ϑ_I und der Summe der 8 Glieder $\Sigma \vartheta$ gebildet. Der Ausdruck

$$\Delta = \frac{\vartheta_I}{\Sigma \vartheta} - 1 \quad (10)$$

stellt den Betrag des relativen Fehlers dar. Für Mittel- und Wandtemperatur unterscheiden wir Δ_m und Δ_w , die in Abb. 1 über Fo mit $1/Bi$ als Parameter aufgetragen sind.

Man erkennt, daß bei schwacher Heizung oder Kühlung (kleine Werte der BIOT-Zahl, z. B. $1/Bi = 100$) der relative Fehler Δ_m und Δ_w selbst für sehr kleine Werte der FOURIER-Zahl unter 1% bleiben. Naturgemäß darf dieses Diagramm nicht bis $Fo = 0$ benutzt werden, da dort auch mit wesentlich mehr als 8 Gliedern keine befriedigende Übereinstimmung mit der Wirklichkeit erzielt werden kann. Für sehr intensiven Wärmeübergang

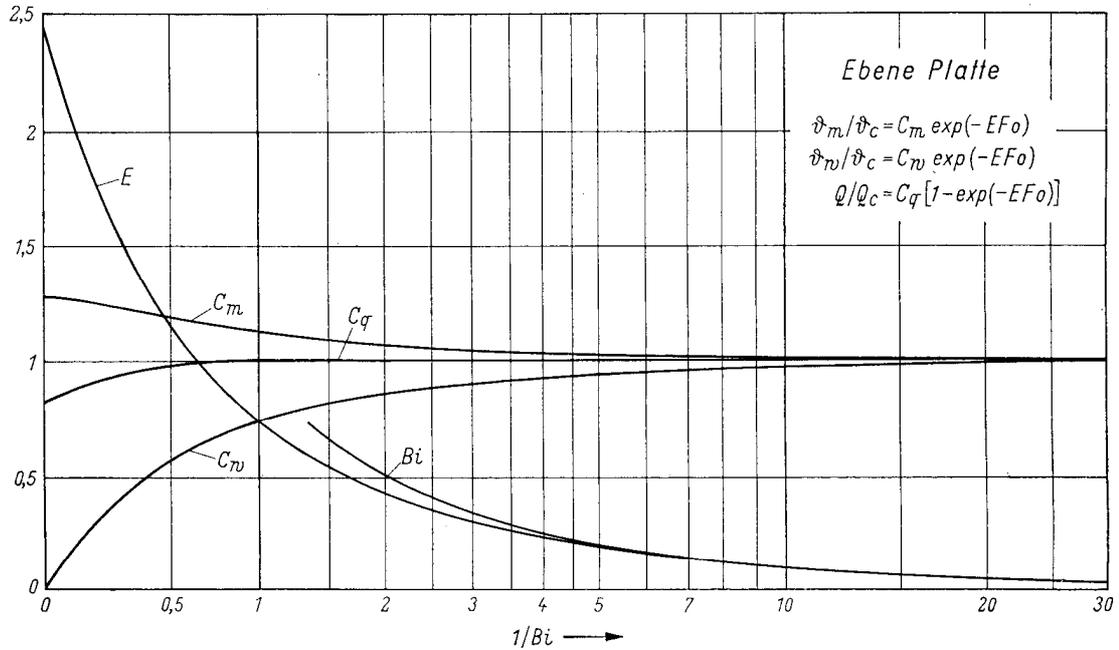


Abb. 2. Ebene Platte. Konstanten bei Benutzung des ersten Terms

($1/Bi = 0$) wird der relative Fehler von Δ_m für $Fo > 0,18$ kleiner als 1%. Demnach gibt es weite Bereiche der Kenngrößen Fo und Bi , in denen man bei einem erträglichen Fehler allein mit dem ersten Term rechnen kann.

Aus Gl. (7), (8) und (9) erhält man dafür:

$$\frac{\vartheta_m}{\vartheta_c} = \frac{2 \sin \delta_1}{\delta_1 + \sin \delta_1 \cos \delta_1} \exp(-\delta_1^2 Fo) = C_m \exp(-E Fo), \quad (11)$$

$$\frac{\vartheta_w}{\vartheta_c} = C_m \cos \delta_1 \exp(-E Fo) = C_w \exp(-E Fo), \quad (12)$$

$$\frac{Q}{Q_c} = C_m \frac{\sin \delta_1}{\delta_1} [1 - \exp(-E Fo)] = C_q [1 - \exp(-E Fo)] \quad (13)$$

mit den Konstanten

$$C_m = \frac{2 \sin \delta_1}{\delta_1 + \sin \delta_1 \cos \delta_1}; \quad E = \delta_1^2; \quad C_w = C_m \cos \delta_1; \quad C_q = C_m \frac{\sin \delta_1}{\delta_1}.$$

Diese Konstanten sind reine Funktionen von Bi ; sie sind in Zahlentafel 2 und in Abb. 2¹ wiedergegeben. Ihr Verlauf entspricht den Voraussagen von Abb. 1. Für große ($1/Bi$)-Werte nähern sich C_m , C_w und C_q dem Wert Eins und zeigen damit an, daß der erste Term überwiegt, da auch

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2 \sin \delta_k}{\delta_k + \sin \delta_k \cos \delta_k} = 1$$

¹ In Abb. 2, 4 und 6 ist $\log [(1/Bi) + 1]$ als Abszisse gewählt, die aber mit den Werten $1/Bi$ beschriftet ist. Auf diese Weise konnte der Wert ($1/Bi = 0$) dargestellt werden.

ist, was man z. B. aus Gl. (7) für $Fo \rightarrow 0$ ablesen kann. Der Grenzwert der Konstanten E in der Exponentialfunktion der Gln. (11) bis (13) für große $(1/Bi)$ -Werte beträgt $E = \delta_1^2 = Bi$, da man für kleine δ -Werte in Gl. (5) $\cot \delta \approx 1/\delta$ schreiben kann. Aus Zahlentafel 2 und

Zahlentafel 2. Ebene Platte. Konstanten bei Benutzung des ersten Terms

$ 1/Bi$	$ C_m$	$ E$	$ C_w$	$ C_q$	$ 1/Bi$	$ C_m$	$ E$	$ C_w$	$ C_q$
0	1,2732	2,4674	0,0000	0,8106	5,0	1,0311	0,1874	0,9360	0,9992
0,1	1,2620	2,0417	0,1785	0,8743	8,0	1,0199	0,1200	0,9594	0,9997
0,2	1,2402	1,7262	0,3152	0,9130	10,0	1,0161	0,0968	0,9673	0,9998
0,5	1,1784	1,1560	0,5587	0,9635	20	1,0082	0,0492	0,9835	0,9999
0,8	1,1379	0,8663	0,6796	0,9806	50	1,0033	0,0199	0,9934	1,0000
1,0	1,1191	0,7402	0,7299	0,9861	80	1,0021	0,0124	0,9958	1,0000
2,0	1,0701	0,4268	0,8498	0,9947	100	1,0017	0,0100	0,9967	1,0000

Abb. 2 kann man abschätzen, wie weit diese Näherung brauchbar ist. Mit $Bi Fo = \alpha t / (X c \varrho)$ erhält man für große Fo -Werte und kleine Bi -Werte die einfachen Gleichungen:

$$\frac{\vartheta_m}{\vartheta_c} = C_m \exp\left(-\frac{\alpha t}{X c \varrho}\right), \quad (14)$$

$$\frac{\vartheta_w}{\vartheta_c} = C_w \exp\left(-\frac{\alpha t}{X c \varrho}\right), \quad (15)$$

$$\frac{Q}{Q_c} = C_q \left[1 - \exp\left(-\frac{\alpha t}{X c \varrho}\right)\right]. \quad (16)$$

Diese Näherungsgleichungen gehen schließlich für $C_m = C_w = C_q = 1$ in jene über, die man mit $\lambda \rightarrow \infty$ bei gleichförmiger Abkühlung (oder für den ideal gerührten Kessel) erhält.

Zylinder

Die Lösung von Gl. (1) für den Zylinder [6] mit dem Radius R lautet:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_c} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2 J_1(\mu_k)}{\mu_k [J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k)]} \exp(-\mu_k^2 Fo) J_0\left(\mu_k \frac{r}{R}\right). \quad (17)$$

Hierin bedeuten J_0 und J_1 die BESSEL-Funktionen nullter und erster Ordnung, r ist die von der Achse gezählte radiale Koordinate, die FOURIER-Zahl ist durch $Fo = a t / R^2$ definiert, und die Eigenwerte μ_k sind die Lösungen der transzendenten Gleichung

$$\mu J_1(\mu) = J_0(\mu) Bi \quad (18)$$

und sind damit Funktionen von $Bi = \alpha R / \lambda$. Die Temperatur der Zylinderachse ϑ_m erhält man aus Gl. (17) mit $r = 0$:

$$\frac{\vartheta_m}{\vartheta_c} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2 J_1(\mu_k)}{\mu_k [J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k)]} \exp(-\mu_k^2 Fo) \quad (19)$$

und die Wandtemperatur ϑ_w mit $r = R$:

$$\frac{\vartheta_w}{\vartheta_c} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{2 J_1(\mu_k)}{\mu_k [J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k)]} \exp(-\mu_k^2 Fo) J_0(\mu_k). \quad (20)$$

Die in der Zeit t zwischen Zylinder und Umgebung übertragene Wärmemenge Q erhält man aus der Gleichung

$$\frac{Q}{Q_c} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{4 J_1^2(\mu_k)}{\mu_k^2 [J_0^2(\mu_k) + J_1^2(\mu_k)]} [1 - \exp(-\mu_k^2 Fo)], \quad (21)$$

in der Q_c die Anfangsenthalpie des Zylinders, bezogen auf Umgebungstemperatur, bedeutet.

Die Gl. (19) bis (21) wurden mittels des Digitalrechners IBM 650 mit 5 Gliedern der Reihen ($k = 5$) für 44 Fo -Werte und 40 Bi -Werte berechnet. Die Rechnung wurde für einen bestimmten Bi -Wert abgebrochen, sobald mit steigender FOURIER-Zahl

$$\frac{\vartheta_m}{\vartheta_c} + \frac{\vartheta_w}{\vartheta_c} + \left(1 - \frac{Q}{Q_c}\right) < 10^{-4}$$

erreicht wurde. Im Bereich kleiner Fo -Werte wurde später eine Kontrollrechnung mit 8 Gliedern ($k = 8$) durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind in Tafel 4 bis 6 wiedergegeben. Die 5 Eigenwerte μ_k wurden nach Gl. (18) durch Iteration nach dem NEWTONSchen Näherungsverfahren auf sechs gültige Ziffern berechnet. Das Ergebnis ist in Zahlentafel 3 zusammengestellt. Bei allen gerechneten ϑ -Werten wurde der Quotient

Zahlentafel 3. Lösungen der Gleichung $\mu J_1(\mu) = Bi J_0(\mu)$

$ 1/Bi$	$ \mu_1$	$ \mu_2$	$ \mu_3$	$ \mu_4$	$ \mu_5$
0	2,404 826	5,520 078	8,653 728	11,791 53	14,930 92
0,1	2,179 497	5,033 212	7,956 884	10,936 33	13,958 03
0,2	1,989 815	4,713 142	7,617 708	10,622 30	13,678 56
0,5	1,599 449	4,290 959	7,288 389	10,365 83	13,471 88
0,8	1,365 882	4,136 084	7,189 814	10,295 01	13,416 91
1,0	1,255 784	4,079 478	7,155 799	10,270 99	13,398 40
2	0,940 771	3,959 371	7,086 381	10,222 46	13,361 15
5	0,616 975	3,883 506	7,044 029	10,193 11	13,338 69
8	0,492 290	3,864 180	7,033 380	10,185 75	13,333 07
10	0,441 682	3,857 710	7,029 825	10,183 29	13,331 20
20	0,314 262	3,844 732	7,022 710	10,178 38	13,327 44
50	0,199 501	3,836 922	7,018 437	10,175 43	13,325 19
80	0,157 867	3,834 967	7,017 368	10,174 70	13,324 63
100	0,141 245	3,834 315	7,017 012	10,174 45	13,324 44

aus dem ersten Term und der Summe der 5 Glieder und daraus die relativen Fehler Δ_m und Δ_w gebildet, die in Abb. 3 über Fo mit $1/Bi$ als Parameter aufgetragen sind. Hieraus können jene Bereiche entnommen werden, in denen man allein mit dem ersten Term rechnen kann, ohne einen zulässigen Fehler zu überschreiten.

Bei Benutzung allein des ersten Terms gelten die Gleichungen:

$$\frac{\vartheta_m}{\vartheta_c} = \frac{2J_1(\mu_1)}{\mu_1[J_0^2(\mu_1) + J_1^2(\mu_1)]} \exp(-\mu_1^2 Fo) = C_m \exp(-E Fo), \quad (22)$$

$$\frac{\vartheta_w}{\vartheta_c} = C_m J_0(\mu_1) \exp(-E Fo) = C_w \exp(-E Fo), \quad (23)$$

$$\frac{Q}{Q_c} = C_m \frac{2J_1(\mu_1)}{\mu_1} [1 - \exp(-E Fo)] = C_q [1 - \exp(-E Fo)] \quad (24)$$

mit den Konstanten

$$C_m = \frac{2J_1(\mu_1)}{\mu_1[J_0^2(\mu_1) + J_1^2(\mu_1)]}; \quad E = \mu_1^2; \quad C_w = C_m J_0(\mu_1); \quad C_q = C_m \frac{2J_1(\mu_1)}{\mu_1}.$$

Diese Konstanten sind in Zahlentafel 4 und Abb. 4 als Funktionen von $1/Bi$ zusammengestellt. Der Grenzwert von E für große $(1/Bi)$ -Werte ist $E = \mu_1^2 = 2Bi$, da man für kleine μ -Werte in Gl. (18) $J_0 \approx 1$ und $J_1 \approx \mu/2$ setzen kann; dieser Grenzwert ist in Abb. 4 eingetragen. Über weitere Näherungen für sehr große $(1/Bi)$ -Werte gilt das für die ebene Platte Gesagte.

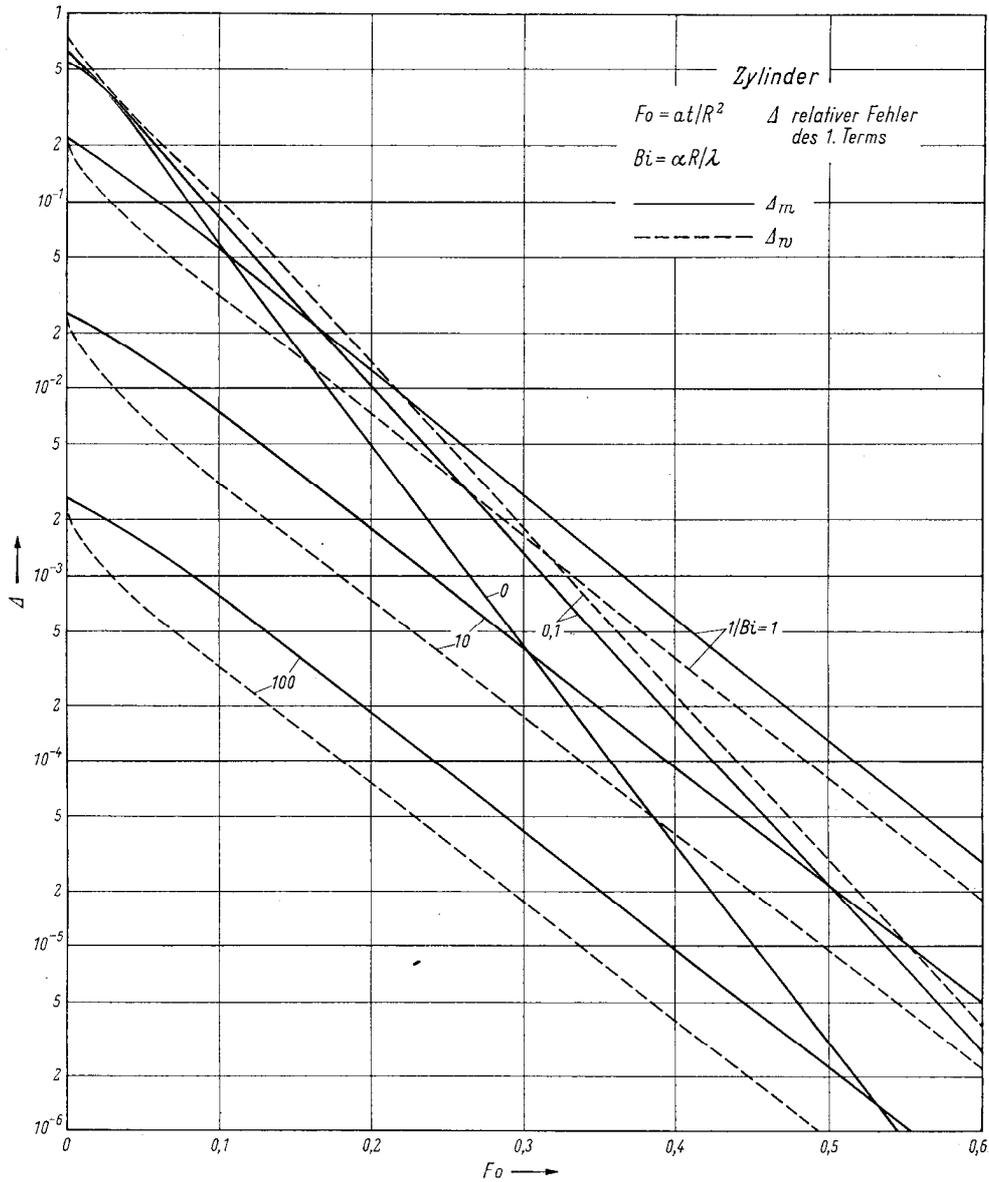


Abb. 3. Zylinder. Relativer Fehler des ersten Terms

Zahlentafel 4. Zylinder. Konstanten bei Benutzung des ersten Terms

$1/Bi$	C_m	E	C_w	C_q	$1/Bi$	C_m	E	C_w	C_q
0	1,6020	5,7840	0,0000	0,6916	5	1,0482	0,3795	0,9510	0,9992
0,1	1,5678	4,7524	0,1905	0,8037	8	1,0306	0,2421	0,9691	0,9997
0,2	1,5029	3,9601	0,3452	0,8721	10	1,0245	0,1945	0,9753	0,9998
0,5	1,3386	2,5600	0,6096	0,9536	20	1,0124	0,0986	0,9876	0,9999
0,8	1,2461	1,8656	0,7293	0,9772	50	1,0050	0,0396	0,9950	1,0000
1,0	1,2068	1,5750	0,7764	0,9843	80	1,0031	0,0246	0,9969	1,0000
2,0	1,1141	0,8836	0,8812	0,9955	100	1,0025	0,0199	0,9975	1,0000

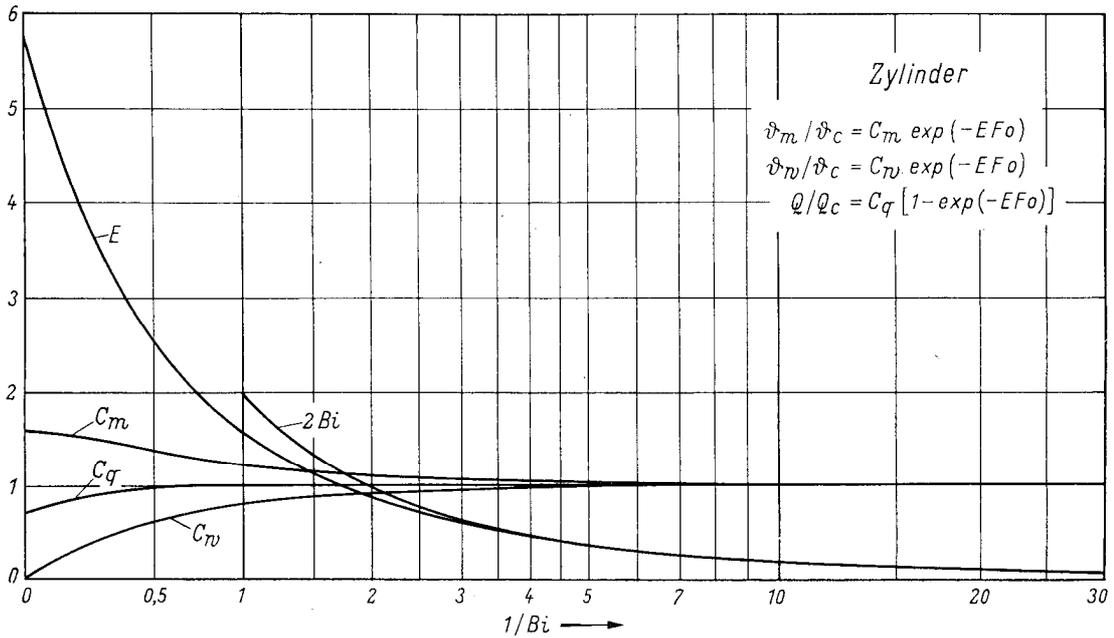


Abb. 4. Zylinder. Konstanten bei Benutzung des ersten Terms

Kugel

Die Lösung von Gl. (1) für die Kugel [6] mit dem Radius R lautet

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_c} = \sum_{k=1}^{k=\infty} 2 \frac{\sin v_k - v_k \cos v_k}{v_k - \sin v_k \cos v_k} \exp(-v_k^2 Fo) \frac{\sin(v_k r/R)}{v_k r/R} \quad (25)$$

mit r als radialer Koordinate und der FOURIER-Zahl $Fo = a t/R^2$. Die Eigenwerte v_k sind die Lösungen der transzendenten Gleichung

$$v \cot v = 1 - Bi \quad (26)$$

und sind damit Funktionen von $Bi = \alpha R/\lambda$. Die Temperatur im Mittelpunkt ϑ_m erhält man aus Gl. (25) mit $r = 0$:

$$\frac{\vartheta_m}{\vartheta_c} = \sum_{k=1}^{k=\infty} 2 \frac{\sin v_k - v_k \cos v_k}{v_k - \sin v_k \cos v_k} \exp(-v_k^2 Fo) \quad (27)$$

und die Wandtemperatur ϑ_w mit $r = R$:

$$\frac{\vartheta_w}{\vartheta_c} = \sum_{k=1}^{k=\infty} 2 \frac{\sin v_k - v_k \cos v_k}{v_k - \sin v_k \cos v_k} \exp(-v_k^2 Fo) \frac{\sin v_k}{v_k}. \quad (28)$$

Die in der Zeit t zwischen Zylinder und Umgebung übertragene Wärmemenge Q erhält man aus der Gleichung

$$\frac{Q}{Q_c} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{6}{v_k^3} \frac{(\sin v_k - v_k \cos v_k)^2}{v_k - \sin v_k \cos v_k} [1 - \exp(-v_k^2 Fo)]. \quad (29)$$

Gln. (27) bis (29) wurden mittels des Digitalrechners Zuse Z 22 mit 5 Gliedern der Reihen ($k = 5$) für 44 Fo -Werte und 40 Bi -Werte berechnet. Die Rechnung wurde für einen

bestimmten Bi -Wert abgebrochen, sobald mit steigender Fo -Zahl

$$\frac{\vartheta_m}{\vartheta_c} + \frac{\vartheta_w}{\vartheta_c} + \left(1 - \frac{Q}{Q_c}\right) < 10^{-4}$$

erreicht wurde. Im Bereich kleiner Fo -Werte wurde später eine Kontrollrechnung mit 8 Gliedern ($k = 8$) durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Rechnungen sind in Tafel 7 bis 9 wiedergegeben. Die 5 Eigenwerte ν_k wurden durch Iteration nach dem NEWTONschen Näherungsverfahren auf sechs gültige Ziffern berechnet. Das Ergebnis ist in Zahlentafel 5 zusammengestellt.

Zahlentafel 5. Lösungen der Gleichung $\nu \cot \nu = 1 - Bi$

$1/Bi$	ν_1	ν_2	ν_3	ν_4	ν_5
0	3,141 592	6,283 184	9,424 777	12,566 37	15,707 96
0,001	3,138 451	6,276 902	9,415 353	12,553 80	15,692 26
0,1	2,836 300	5,717 249	8,658 704	11,653 21	14,686 94
0,2	2,570 431	5,354 031	8,302 929	11,334 83	14,407 97
0,5	2,028 757	4,913 180	7,978 665	11,085 54	14,207 44
0,8	1,715 507	4,764 808	7,885 674	11,018 26	14,154 83
1,0	1,570 796	4,712 388	7,853 981	10,995 57	14,137 17
2	1,165 561	4,604 216	7,789 883	10,949 94	14,101 73
5	0,759 307	4,537 888	7,751 135	10,922 46	14,080 41
8	0,604 780	4,521 220	7,741 431	10,915 58	14,075 08
10	0,542 280	4,515 660	7,738 195	10,913 29	14,073 30
20	0,385 368	4,504 536	7,731 724	10,908 71	14,069 75
50	0,244 459	4,497 860	7,727 840	10,905 96	14,067 62
80	0,193 407	4,496 191	7,726 869	10,905 27	14,067 08
100	0,173 031	4,495 634	7,726 546	10,905 04	14,066 90

Bei allen gerechneten ϑ -Werten wurde der Quotient aus dem ersten Term und der Summe der 5 Glieder und daraus die relativen Fehler Δ_m und Δ_w gebildet, die in Abb. 5 über Fo mit $1/Bi$ als Parameter aufgetragen sind. Hieraus können jene Bereiche entnommen werden, in denen man allein mit dem ersten Term rechnen kann, ohne einen zulässigen Fehler zu überschreiten.

Bei Benutzung allein des ersten Terms gelten die Gleichungen:

$$\frac{\vartheta_m}{\vartheta_c} = 2 \frac{\sin \nu_1 - \nu_1 \cos \nu_1}{\nu_1 - \sin \nu_1 \cos \nu_1} \exp(-\nu_1^2 Fo) = C_m \exp(-E Fo), \quad (30)$$

$$\frac{\vartheta_w}{\vartheta_c} = C_m \frac{\sin \nu_1}{\nu_1} \exp(-E Fo) = C_w \exp(-E Fo), \quad (31)$$

$$\frac{Q}{Q_c} = C_m \frac{3(\sin \nu_1 - \nu_1 \cos \nu_1)}{\nu_1^3} [1 - \exp(-E Fo)] = C_q [1 - \exp(-E Fo)] \quad (32)$$

mit den Konstanten

$$C_m = 2 \frac{\sin \nu_1 - \nu_1 \cos \nu_1}{\nu_1 - \sin \nu_1 \cos \nu_1}; \quad E = \nu_1^2; \quad C_w = C_m \frac{\sin \nu_1}{\nu_1};$$

$$C_q = C_m \frac{3(\sin \nu_1 - \nu_1 \cos \nu_1)}{\nu_1^3}.$$

Diese Konstanten sind in Zahlentafel 6 und Abb. 6 als Funktionen von $1/Bi$ zusammengestellt. Der Grenzwert von E für große $(1/Bi)$ -Werte ist $E = \nu_1^2 = 3Bi$, da man für kleine ν -Werte in Gl. (26) $\cot \nu \approx (1/\nu) - (\nu/3)$ setzen kann; dieser Grenzwert ist in Abb. 6 eingetragen. Über weitere Näherungen für sehr große $(1/Bi)$ -Werte gilt das für die ebene Platte Gesagte.

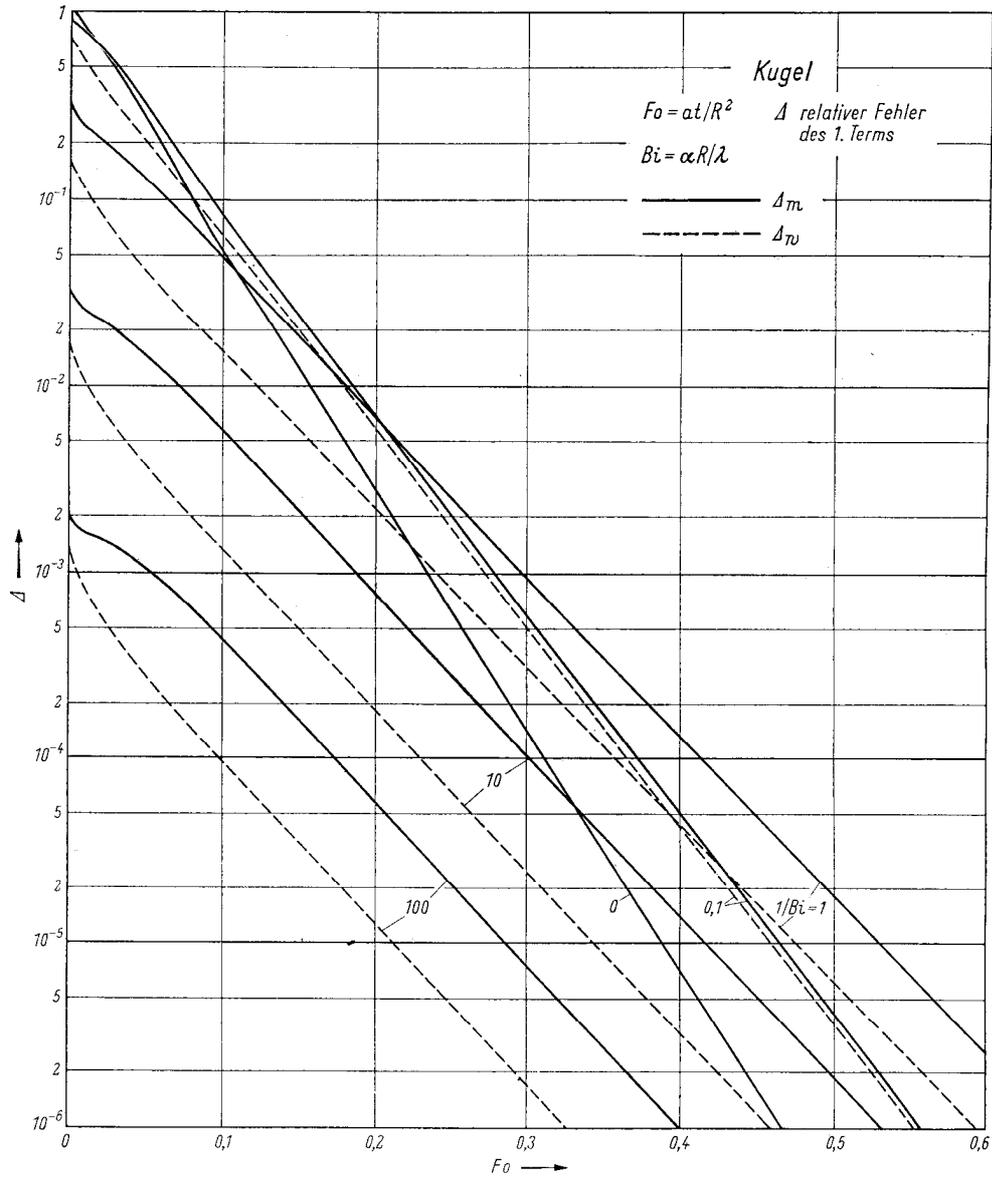


Abb. 5. Kugel. Relativer Fehler des ersten Terms

Zahlentafel 6. Kugel. Konstanten bei Benutzung des ersten Terms

$1/Bi$	C_m	E	C_w	C_q	$1/Bi$	C_m	E	C_w	C_q
0	2,0000	9,8696	0,0000	0,6079	5	1,0592	0,5765	0,9603	0,9993
0,1	1,9249	8,0446	0,2040	0,7607	8	1,0372	0,3658	0,9751	0,9997
0,2	1,7870	6,6071	0,3758	0,8533	10	1,0298	0,2941	0,9801	0,9998
0,5	1,4793	4,1158	0,6540	0,9534	20	1,0150	0,1485	0,9900	1,0000
0,8	1,3313	2,9430	0,7679	0,9785	50	1,0060	0,0598	0,9960	1,0000
1,0	1,2732	2,4674	0,8106	0,9855	80	1,0037	0,0374	0,9975	1,0000
2	1,1441	1,3585	0,9021	0,9960	100	1,0030	0,0299	0,9980	1,0000

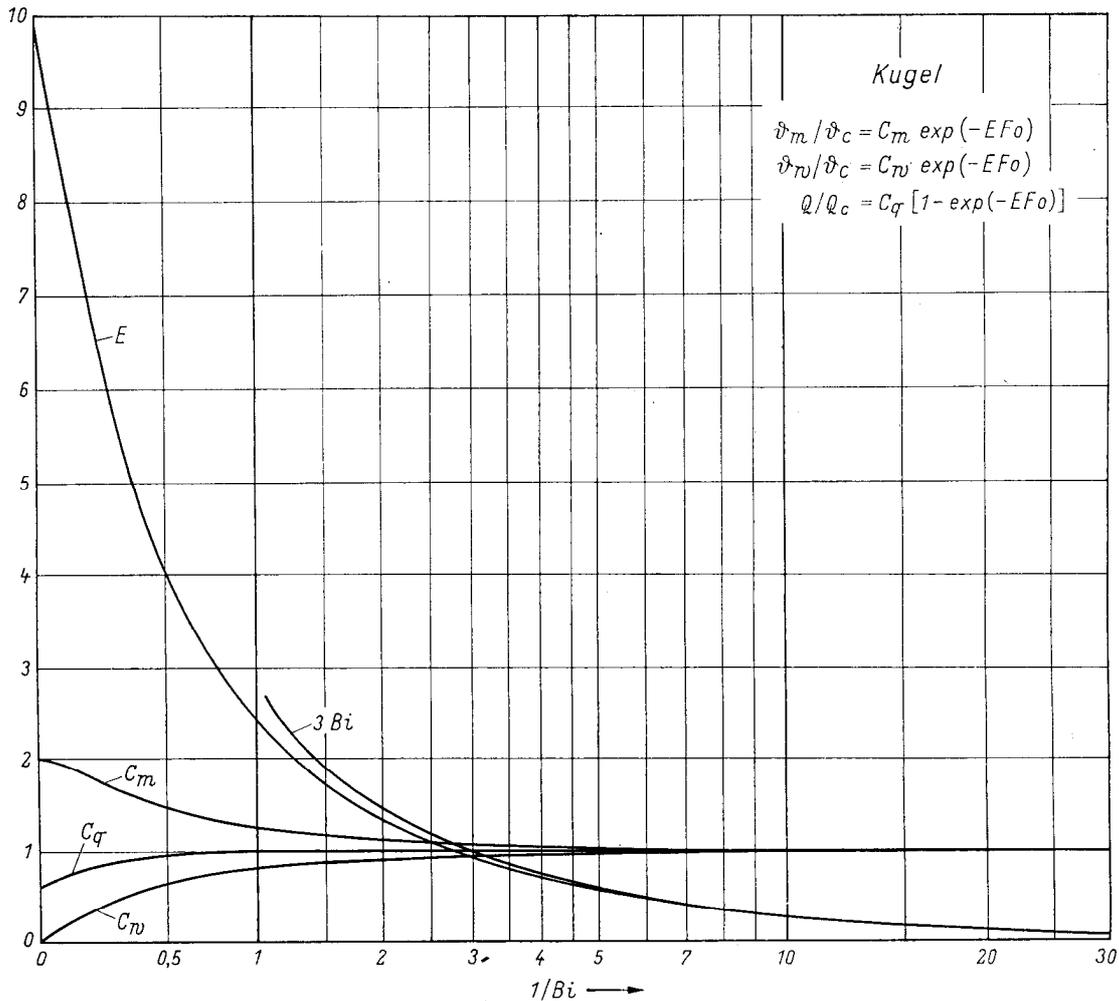


Abb. 6. Kugel. Konstanten bei Benutzung des ersten Terms

Halbunendlicher Körper

Für sehr kleine Fo -Werte erhält man nach der Methode der FOURIER-Reihen, wie sie bei Platte, Zylinder und Kugel angewandt wurde, keine befriedigenden Ergebnisse. Man kann aber für sehr kurze Zeiten auch Körper endlicher Abmessungen als halbunendlich ansehen, solange die thermische Einwirkung wesentlich auf den Oberflächenbereich beschränkt bleibt. Daher kann die Lösung für die Wärmeleitung im halbunendlichen Körper als Näherung für sehr kleine Fo -Werte bei endlichen Körpern dienen. Die Lösung von Gl. (1) lautet in diesem Fall der Randbedingung dritter Art:

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_c} = G\left(\frac{1}{2Fo^{1/2}}\right) + \exp(Fo Bi^2 + Bi) \left[1 - G\left(\frac{1}{2Fo^{1/2}} + Fo^{1/2} Bi\right)\right]. \quad (33)$$

Darin ist

$$G(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(-\eta^2) d\eta$$

das GAUSSSche Fehlerintegral [in der englisch-amerikanischen Literatur auch error function (erf) genannt]. Die charakteristische Länge in den Kenngrößen ist der Abstand x von der Oberfläche; es ist also $Fo = a t/x^2$ und $Bi = \alpha x/\lambda$. Das Produkt $Fo Bi^2 = \alpha^2 a t/\lambda^2$ enthält keine Längenkoordinate. Für die Wandtemperatur ($x = 0$) erhält man

$$\frac{\vartheta_w}{\vartheta_e} = \exp(Fo Bi^2) [1 - G(Fo^{1/2} Bi)], \quad (34)$$

und für die Randbedingung erster Art ($\vartheta_w = \text{const}$; $Bi = \infty$) wird aus Gl. (33)

$$\frac{\vartheta}{\vartheta_e} = G\left(\frac{1}{\sqrt{2} Fo^{1/2}}\right) = G\left(\frac{x}{\sqrt{4 at}}\right). \quad (35)$$

Gl. (33) mit Gl. (35) als Grenzfall wurde mit dem Digitalrechner Siemens 2002 berechnet und das Ergebnis in Tafel 10 und 11 aufgetragen. Tafel 10 mit $Fo < 30$ dient für lang

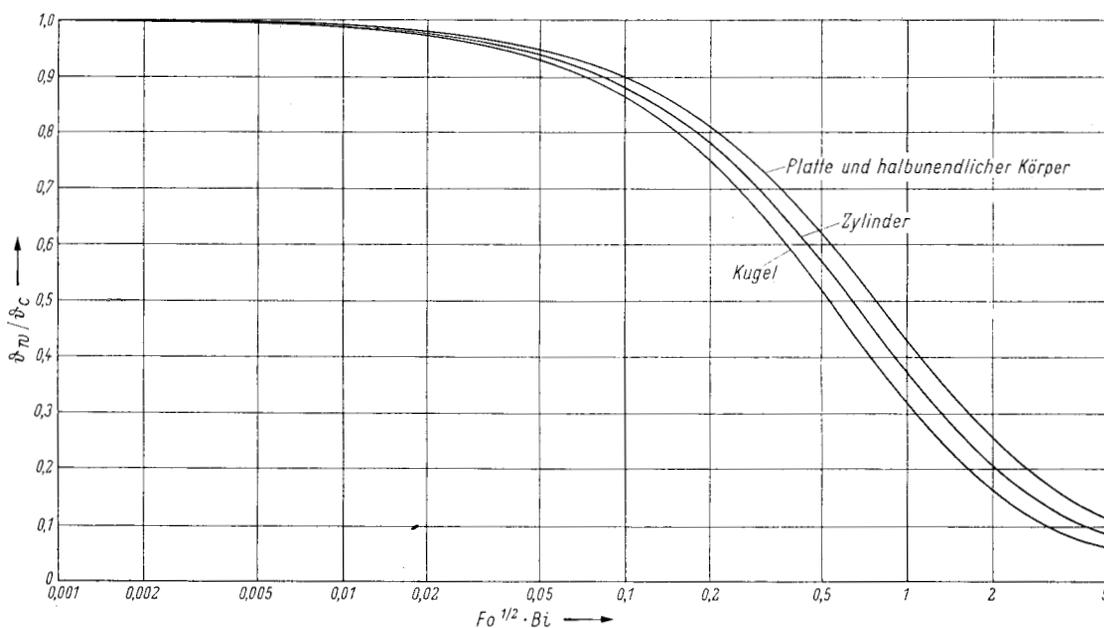


Abb. 7. Wandtemperaturen des halbunendlichen Körpers. Für $Fo = 0,1$ Wandtemperaturen der ebenen Platte, des Zylinders und der Kugel

dauernde, Tafel 11 mit $Fo < 0,3$ für kurzzeitige Vorgänge. Die Maschine lieferte keine brauchbaren Ergebnisse im ungefähren Bereich $(1/Bi) < 0,8$ und $Fo > 10$, da dort die Exponentialfunktion in Gl. (33) sehr große, die Funktion in der eckigen Klammer sehr kleine Werte annahm, so daß die verfügbare Stellenzahl nicht mehr ausreichte. Aus den noch zuverlässig berechneten Werten des Diagramms am Rande des genannten Bereichs konnte geschlossen werden, daß die Kurven $(1/Bi) = \text{const}$ in der Nähe von $(1/Bi) = 0$ gleichen Abstand hatten, wenn $(1/Bi)$ in arithmetischer Reihe zunahm. Das wurde zur näherungsweisen Berechnung der fehlenden Werte benutzt, indem man aus Gl. (33) den Differentialquotienten

$$\left(\frac{\partial(\vartheta/\vartheta_e)}{\partial(1/Bi)}\right)_{Fo} = \frac{\exp\left(-\frac{1}{4Fo}\right)}{\sqrt{\pi} Fo^{1/2}}$$

für $(1/Bi) \rightarrow 0$ bildete und aus diesem für jeden Fo -Wert die fehlenden Abstände zur Kurve $(1/Bi) = 0$ ausrechnete. Die auf diese Weise erhaltenen Werte im untersten rechten

Teil von Tafel 10 sind zwar nicht so zuverlässig wie die übrigen direkt berechneten, dürften aber für die meisten Fälle ausreichen.

Die Wandtemperaturen des halbenendlichen Körpers nach Gl. (34) sind in Abb. 7 als Funktion von $Fo^{1/2} Bi$ wiedergegeben. Dazu sind zum Vergleich die Wandtemperaturen von ebener Platte, Zylinder und Kugel für $Fo = 0,1$ eingetragen. Die Kurve für die ebene Platte stimmt mit der des halbenendlichen Körpers im Bereich der Zeichengenauigkeit überein. Zylinder und Kugel kühlen sich schneller ab als die ebene Platte. Die Unterschiede werden umso geringer, je kleiner Fo und Bi werden.

Für die Randbedingung erster Art ($\vartheta_w = \text{const}$, $Bi = \infty$) sind in Abb. 8 die Temperaturen im Inneren des halbenendlichen Körpers sowie in der Mitte verschiedener Körper

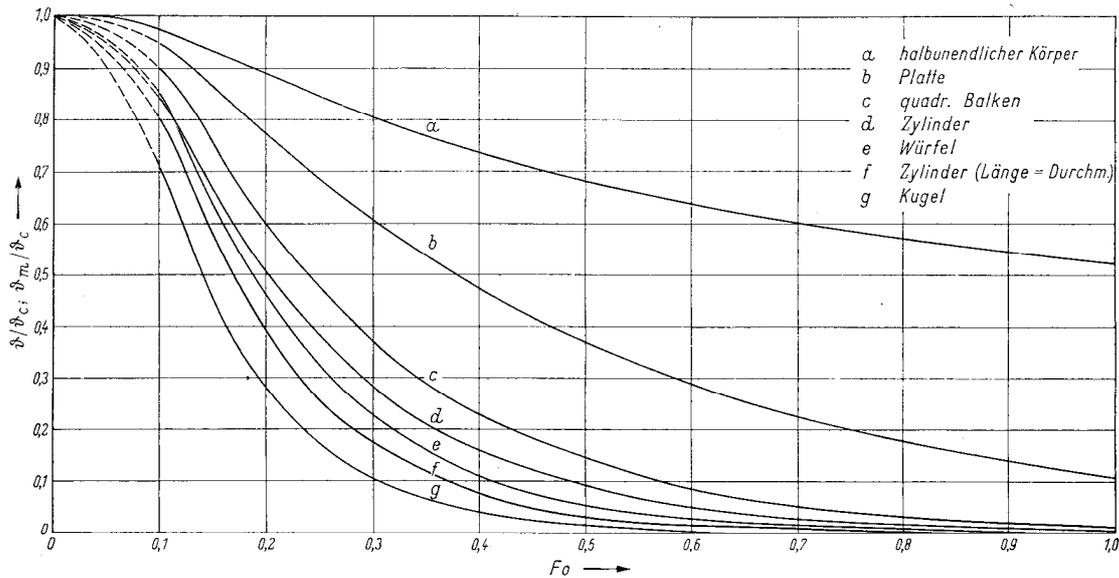


Abb. 8. Temperaturen in der Mitte verschiedener Körper und im Inneren des halbenendlichen Körpers für konstante Wandtemperatur

endlicher Abmessungen zusammengestellt. Die Temperaturen ändern sich um so schneller, je größer das Verhältnis Oberfläche zu Volumen ist und je näher der Mittelpunkt zur Oberfläche liegt.

Beispiele zur Auswertung

Wir betrachten eine ebene Platte von der Dicke $2X = 10$ cm mit gleichförmiger Über- oder Untertemperatur gegenüber der Umgebung. An den beiden Oberflächen wird von der Zeit $t = 0$ ab Wärme bei konstanter Umgebungstemperatur übertragen, wobei der konstant angenommene Wärmeübergangskoeffizient den Wert $\alpha = 10$ W/(m² grad) hat, wie er etwa freier Konvektion in Luft entspricht. Um den Einfluß „starker“ oder „schwacher“ Kühlung oder Heizung zu zeigen, nehmen wir drei verschiedene Materialien an, nämlich einen Isolierstoff mit einer Wärmeleitfähigkeit $\lambda = 0,05$ W/(m grad), einen keramischen Stoff mit $\lambda = 0,5$ W/(m grad) und ein Metall mit $\lambda = 50$ W/(m grad). Damit wird deutlich, daß es nicht auf den Wert des Wärmeübergangskoeffizienten α (den wir für alle 3 Fälle gleich annehmen), sondern auf den Wert der Biot-Zahl $Bi = \alpha X/\lambda$ ankommt. Wir erhalten $Bi = 10; 1$ und $1/100$.

Die Zeit t ergibt sich aus der FOURIER-Zahl nach der Beziehung

$$t = Fo \frac{X^2}{a} = Fo \frac{c \varrho X^2}{\lambda}$$

Die gewählten Stoffgrößen und die zur Berechnung gebrauchten Werte der drei ebenen Platten sind in Zahlentafel 7 zusammengestellt.

Für diese 3 Fälle wurden im weiten Bereich der FOURIER-Zahl die Temperaturen in der Mittelebene ϑ_m/ϑ_c und die Wandtemperaturen ϑ_w/ϑ_c nach verschiedenen Rechenmethoden ermittelt. Für sehr kleine Fo -Werte wurde für die Wandtemperatur Gl. (34) für

Zahlentafel 7. Werte zur Berechnung der Beispiele

Größe	Isolierplatte	Keramikplatte	Metallplatte	Einheit
X	0,05	0,05	0,05	m
α	10	10	10	W/(m ² grd)
λ	0,05	0,5	50	W/(m grd)
Bi	10	1	1/100	—
c	0,9	0,8	0,5	kJ/(kg grd)
ϱ	200	2000	8000	kg/m ³
t	9000 Fo	8000 Fo	200 Fo	s

den halbumendlichen Körper herangezogen (Methode I). Für $Fo > 0,1$ konnten die Werte den Tafeln 1 und 2 entnommen werden (Methode II). Zum Vergleich wurden die Temperaturen auch nach Gln. (11) und (12) unter Benutzung des ersten Terms der FOURIER-Reihe berechnet, wobei die Konstanten Zahlentafel 2 bzw. Abb. 2 entnommen wurden (Methode III). Die Ergebnisse sind in Zahlentafel 8 zusammengestellt, in die allerdings nicht die aus den Tafeln abgelesenen Werte, sondern die auf 6 Ziffern gerundeten Werte der Rechenprotokolle eingetragen wurden. Diese Genauigkeit ist für praktische Anwendungen meist nicht notwendig, zeigt aber deutlicher die Abweichungen zwischen den einzelnen Rechenmethoden. Die nach diesen 3 Methoden erhaltenen Wandtemperaturen ϑ_w/ϑ_c sind in Abb. 9 als Funktion von Fo mit Bi als Parameter dargestellt.

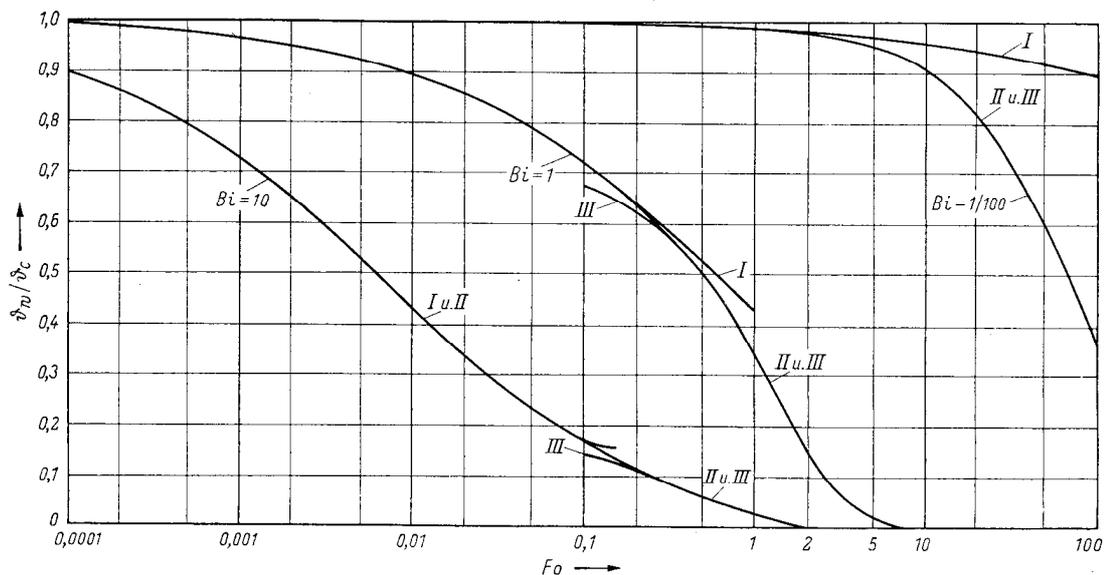


Abb. 9. Wandtemperatur für drei ebene Platten, nach verschiedenen Methoden berechnet. Vergleiche Überschrift zu Zahlentafel 8

Zahlentafel 8. Temperaturen der Mittelebene ϑ_m/ϑ_c und der Wand ϑ_w/ϑ_c einer ebenen Platte für $Bi = 10$; 1 und 1/100. Stoffgrößen nach Zahlentafel 7

Rechenmethode I: Halbbunendlicher Körper. Gl. (33).

Rechenmethode II: 8 Glieder der FOURIER-Reihe. Gl. (7) und (8). Tafel 1 und 2.

Rechenmethode III: Erstes Glied der FOURIER-Reihe. Gl. (11) und (12). Konstanten nach Abb. 2.

FOURIER-zahl Fo	Isolierplatte $Bi = 10$		Keramikplatte $Bi = 1$		Metallplatte $Bi = 1/100$		Rechenmethode
	t	ϑ_m/ϑ_c	t	ϑ_m/ϑ_c	t	ϑ_w/ϑ_c	
0,0001	0,9 s	0,896420	0,8 s	0,988700	0,02 s	0,999887	I
	9 s	0,723865	8 s	0,965354	0,2 s	0,999643	I
	1 min 30 s	0,427586	1 min 20 s	0,896420	2 s	0,998870	I
0,1	15 min	0,170574	13 min 20 s	0,933108 0,677824	20 s	0,999921 1,000703	I II III
	30 min	0,829255	26 min 40 s	0,644033 0,643391	40 s	0,994953 0,994968	I II
	45 min	0,838918	0,965108	0,999699	0,994709	0,993820	III I
0,3	45 min	0,682465	40 min	0,891796	1 min	0,998566	I II
	1 h 15 min	0,454641	4 h 6 min 40 s	0,896250 0,772526	1 min 40 s	0,998667	III I II
	2 h 30 min	0,163818	2 h 13 min 20 s	0,533859 0,533831	3 min 20 s	0,991727	III I II
1,0	1 d 1 h	$\approx 0,17 \cdot 10^{-8}$ $\approx 0,22 \cdot 10^{-8}$	22 h 13 min 20 s	0,445367 $\cdot 10^{-3}$ 0,445253 $\cdot 10^{-3}$	33 min 20 s	0,965300	I II III
	10 d 10 h	$\approx 0,27 \cdot 10^{-88}$	9 d 6 h 13 min 20 s	$\approx 0,80 \cdot 10^{-32}$	5 h 33 min 20 s	0,896460 0,369718 0,366655	I II III
		$\approx 0,38 \cdot 10^{-88}$	$\approx 0,52 \cdot 10^{-32}$				

Dieses Diagramm zeigt noch einmal die Bereiche der 3 Rechenmethoden. Bei $Bi = 1/100$ gehen die nach Methode I und III erhaltenen Wandtemperaturen so ineinander über, daß im Rahmen der Zeichengenauigkeit kein Bereich erkennbar ist, in dem allein die Methode der FOURIER-Reihen mit 5 Gliedern angewandt werden kann. Dieser Bereich ist bei $Bi = 1$ und $Bi = 10$ sehr klein und kaum von der (geradlinigen) Tangente an die beiden Kurvenäste I und III zu unterscheiden. So wird die einleitend aufgestellte Behauptung bewiesen, daß in weiten Bereichen der maßgebenden Kenngrößen die exakte Methode der FOURIER-Reihen durch Näherungsverfahren mit ausreichender Genauigkeit ersetzt werden kann. Man erhält dann statt der Reihen geschlossene, bequem zu handhabende Ausdrücke. Das vorliegende Buch enthält sowohl die Ergebnisse der Berechnung nach der Methode der FOURIER-Reihen als auch die für die Näherungsverfahren gebrauchten Gleichungen und Konstanten.

Schrifttum

- [1] GRÖBER, H.: Die Grundgesetze der Wärmeleitung und des Wärmeüberganges. Berlin: Springer 1921.
- [2] GRÖBER, H.: Z. VDI 69 (1925) 710.
- [3] GURNEY, H. P., u. J. LURIE: Ind. Engng. Chem. 15 (1923) 1170—1172.
- [4] BACHMANN, H.: Tafeln über Abkühlungsvorgänge einfacher Körper. Berlin: Springer 1938.
- [5] HEISLER, M. P.: Trans. ASME 69 (1947) 227—236.
- [6] GRÖBER, H., u. S. ERK: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung, 3. Aufl., bearb. von U. GRIGULL, 3. Neudruck. Berlin/Göttingen/Heidelberg: Springer 1963.