

EINIGE OPTISCHE EIGENSCHAFTEN THERMISCHER GRENZSCHICHTEN

U. GRIGULL

München, Technische Hochschule

(Received 5 February 1963)

Zusammenfassung—Die Gesetze der Lichtablenkung in Brechzahlfeldern werden mit Hilfe der geometrischen Optik behandelt. Für den Weg des Lichtstrahls im Modell werden Näherungen eingeführt. Hieraus erhält man das Abbildungsgesetz einer thermischen Modellgrenzschicht, das durch Versuche qualitativ bestätigt wird.

FORMELZEICHEN

- a , Temperaturleitfähigkeit, $a = \lambda/(c\rho)$;
 b , $\Delta n/n_w$;
 B , Beleuchtungsstärke;
 c , spezifische Wärmekapazität;
 l , Modelllänge;
 L , Schirmabstand;
 n , Brechzahl;
 P , Abstand Lichtquelle-Modell;
 q , Wärmestromdichte;
 R , Krümmungsradius;
 T, ϑ , Temperatur;
 w , Geschwindigkeit;
 y , Wandabstand, y_1 Schirmkoordinate
 α, φ , Winkel;
 δ , Grenzschichtdicke;
 δ_1 , Schirmkoordinate des Wandstrahls;
 $\eta = y/\delta; \eta_1 = y_1/\delta_1; \eta_2 = y_1/\delta$;
 λ , Wärmeleitfähigkeit;
 Φ_0 , Strahlungsstärke;
 $Pe = w_y\delta/a$, Péclet-Zahl.

trationsfeld oder als Überlagerung von beiden zu deuten ist.

Die Gesetze des Lichtdurchgangs durch Medien mit variabler Brechzahl (Brechzahlfelder) sind in der älteren Literatur vor allem im Zusammenhang mit der terrestrischen Strahlenbrechung [1, 2] oder mit der Wirkung tierischer Augenlinsen [3, 4] erörtert worden. Anwendungen auf die Wärmeübertragung behandelten in neuerer Zeit E. Schmidt [5] und Schardin [6, 7, 8]. Eine geschlossene Darstellung des Lichtdurchgangs durch thermische oder Diffusionsgrenzschichten (eine Art "Grenzschichtoptik") scheint es bisher nicht zu geben, obwohl eine solche bei der Vorbereitung und Durchführung von Versuchen sehr willkommen wäre.

Im folgenden sollen einige optische Eigenschaften von Brechzahlfeldern, vor allem solche in thermischen Grenzschichten, behandelt werden, wobei wir uns auf die Lichtablenkung nach den Gesetzen der geometrischen Optik beschränken wollen.

1. EINLEITUNG

Optische Methoden zur Untersuchung von Wärme- und Stoffübergangsvorgängen beruhen entweder auf der Lichtablenkung (Schlierenmethoden) oder auf dem Gangunterschied gegen einen Vergleichsstrahl (Interferenzmethoden). In beiden Fällen handelt es sich um den Lichtdurchgang durch Medien mit variabler Brechzahl. Bei der Auswertung von Versuchsergebnissen erhält man bestenfalls ein Brechzahlfeld, das dann noch als Temperatur- oder Konzen-

2. DIFFERENTIALGLEICHUNG DES LICHTSTRAHLS

Bedeutet R den lokalen Krümmungsradius des Lichtstrahls, n die lokale Brechzahl, $\text{grad } n$ ihren Gradienten und α den Winkel zwischen Lichtstrahl und $\text{grad } n$, so gilt die Beziehung

$$\frac{1}{R} = \frac{\text{grad } n}{n} \sin \alpha. \quad (1)$$

Diese Differentialgleichung scheint nach einer Mitteilung von Straubel [2] erstmals von Heath [1] angegeben worden zu sein. Sie ist aus dem Prinzip von Fermat abgeleitet, wonach die optische Weglänge $\int n ds$ zwischen zwei Punkten einen Extremwert annimmt (s ist die geometrische Weglänge). Beschränken wir uns auf eindimensionale Brechzahlfelder (grad $n = dn/dy$) und führen für den Lichtstrahl rechtwinkelige kartesische Koordinaten ein (Abb. 1), so wird mit $\varphi = (\pi/2) - \alpha$

$$\frac{1}{R} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}} = \frac{dn/dy}{n} \cos \varphi. \quad (1a)$$

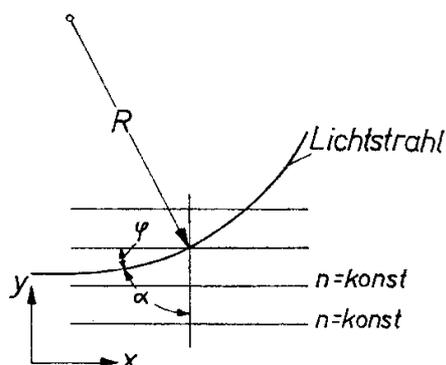


ABB. 1. Lichtdurchgang durch ein eindimensionales Brechzahlfeld $n(y)$.

Da $\cos \varphi = 1/\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi} = 1/\sqrt{1 + y'^2}$ ist, erhalten wir

$$\frac{y''}{1 + y'^2} = \frac{dn/dy}{n} = \frac{d \ln n}{dy}. \quad (2)$$

Mit der Identität $y'' dy = y' dy'$ entsteht die Gleichung

$$\frac{y' dy'}{1 + y'^2} = d \ln n \quad (3)$$

die sich mit der Randbedingung $n = n_0$ für $y' = y'_0$ integrieren lässt:

$$\frac{1 + y'^2}{1 + y'_0^2} = \left(\frac{n}{n_0}\right)^2 = \frac{\cos^2 \varphi_0}{\cos^2 \varphi} = \frac{\sin^2 \alpha_0}{\sin^2 \alpha}. \quad (4)$$

Diese Gleichung stellt zugleich das Snelliussche Brechungsgesetz dar, und hätte sich auch direkt ableiten lassen. Eine weitere Integration und damit die Berechnung der Lichtstrahlkoordinaten ist nur möglich, wenn die Funktion $n(y)$ bekannt ist. Umgekehrt kann man durch

Messung der Strahlneigungen y' und y'_0 nur den Quotienten n/n_0 berechnen, ohne eine Auskunft über den dazwischen liegenden Verlauf von n zu erhalten. Hierzu müsste man den Lichtstrahl innerhalb des ganzen Modells sichtbar machen. Derartige Verfahren sind bisher nicht bekannt geworden.

3. NÄHERUNGEN FÜR DEN LICHTSTRAHL

In thermischen Grenzschichten sind die y' -Werte meist sehr klein, was wir durch folgende Abschätzung zeigen wollen.

Ein Modell gebe in Luft und Wasser (von etwa 20°C) Wärme durch freie Konvektion ab. Wir nehmen plausible Werte des Wärmeübergangskoeffizienten α und der Übertemperatur ΔT an, errechnen die Wärmestromdichte $q = \alpha \Delta T$, daraus den Temperaturgradienten an der Wand $-dT/dy = q/\lambda$ und den Brechzahlgradienten $n' = dn/dy = (dn/dT)(dT/dy)$. Wie später gezeigt wird, kann man näherungsweise $y' = \ln'/n$ setzen, wenn l die Modelllänge bedeutet. Diese Werte sind in Tabelle 1 ausgerechnet, in die auch der nach Gl. (1a) mit $\cos \varphi \approx 1$ berechnete Krümmungsradius des die Wand berührenden Lichtstrahls eingetragen ist.

Tabelle 1

	Luft	Wasser
α	7,5	400 W/(m ² grad)
ΔT	67	10 grad
q	0,05	0,4 W/cm ²
λ	0,0257	0,598 W/(m grad)
$-dT/dy$	195	67 grad/cm
$-dn/dT$	$0,93 \cdot 10^{-6}$	$0,86 \cdot 10^{-4}$ grad ⁻¹
$n' = dn/dy$	$1,8 \cdot 10^{-4}$	$58 \cdot 10^{-4}$ cm ⁻¹
l	50	5 cm
y'	$0,9 \cdot 10^{-2}$	$2,2 \cdot 10^{-2}$
R	55	2,25 m

Wegen dieser kleinen y' -Werte ist es zulässig, den Verlauf des Lichtstrahls anzunähern. Wir wollen im folgenden voraussetzen, dass der Lichtstrahl innerhalb des Modells durch ein Gebiet mit konstantem Brechzahlgradienten $n' = dn/dy$ verläuft. Ausserdem nehmen wir zunächst vereinfachend streifenden Lichteintritt ($y'_0 = 0$) an. Setzen wir die Beziehung

$$n = n_0 + n'(y - y_0) \quad (5)$$

in Gl. (4) ein, so erhalten wir die Gleichung des Lichtstrahls

$$x = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{[(2n'/n_0)(y - y_0)]}} \quad (6)$$

Darin sind y_0 und y die Wandabstände des ein- tretenden und austretenden Lichtstrahls, n_0 ist die Brechzahl beim Wandabstand y_0 , ferner ist

$$\left(\frac{n}{n_0}\right)^2 \approx 1 + \frac{2n'}{n_0}(y - y_0)$$

gesetzt. Die Integration von Gl. (6) zwischen Eintritt ($x = 0$) und der Modelllänge $x = l$ ergibt

$$y - y_0 = \frac{n'l^2}{2n_0} \quad (7)$$

Die Strahlneigung am Austritt ($x = l$) wird

$$y'_l = \frac{n'l}{n_0} = \frac{y - y_0}{l/2} \quad (8)$$

Der Lichtstrahl verläuft innerhalb des Modells nach einer Parabel, die sich nach Gl. (8) auch durch einen geradlinigen, in Modellmitte geknickten Strahl ersetzen lässt (Abb. 2).

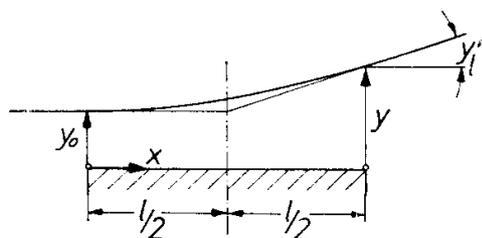


ABB. 2. Parabel-Näherung für den Lichtstrahl.

Lässt man einen endlichen Eintrittswinkel des Lichtstrahls zu ($y'_0 \neq 0$), so erhält man an Stelle der Gln (7) und (8) die Beziehungen

$$y - y_0 = ly'_0 + \frac{n'l^2}{2n_0} (1 + y_0'^2) \approx ly'_0 + \frac{n'l^2}{2n_0} \quad (9)$$

$$y'_l = y'_0 + \frac{n'l}{n_0} (1 + y_0'^2) \approx y'_0 + \frac{n'l}{n_0} \quad (10)$$

die sich ebenfalls auf einfache Weise geometrisch deuten lassen.

Bei stark gekrümmtem Verlauf der $n(y)$ -Kurve kann es vorteilhaft sein, eine bessere Näherung als Gl. (5) zu verwenden, indem man die dortige Reihe um ein Glied erweitert:

$$n = n_0 + n'(y - y_0) + \frac{n''}{2}(y - y_0)^2 \quad (11)$$

Setzt man diesen Ausdruck in Gl. (4) ein und vernachlässigt wieder Glieder kleinerer Größenordnung, so erhält man bei streifendem Lichteintritt ($y'_0 = 0$) die Beziehungen

$$y - y_0 = \frac{n'}{n_0} \left(\frac{l^2}{2} + \frac{l^4}{24} \frac{n''}{n_0} \right) \quad (12)$$

$$y'_l = \frac{n'}{n_0} \left(1 + \frac{l^3}{6} \frac{n''}{n_0} \right) \quad (13)$$

Hier wie auch in den Gln (7) bis (11) bedeuten n' und n'' die Ableitungen der $n(y)$ -Kurve an der Stelle des Lichteintritts, also bei $x = 0$ und $y = y_0$.

Ausser diesen Reihenentwicklungen, die sich in ähnlicher Weise schon verschiedentlich in der Literatur [1] bis [10] finden, gibt es noch zahlreiche weitere Möglichkeiten, den Lichtstrahlverlauf im Modell anzunähern. Diese Näherungen sind umso brauchbarer, je besser sie die zu erwartende Brechzahlfunktion wiedergeben und je einfacher sie sich handhaben lassen, und zwar sowohl bei Maschinen- wie bei Handrechnungen. Im folgenden sei noch der Lichtstrahl als Kreisbogen betrachtet, der entsteht, wenn man in Gl. (1a) $\cos \varphi \approx \text{const.}$ setzt, z.B. gleich $\cos \varphi_0$. Bei streifendem Lichteintritt ($\varphi_0 = 0$) kann $\cos \varphi \approx 1$ gesetzt werden. Nach Abb. 3 bestehen die Beziehungen

$$\begin{aligned} l &= R \sin \varphi \approx R \operatorname{tg} \varphi = Ry'_l \\ y - y_0 &= R(1 - \cos \varphi) \\ &= R[1 - \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}] \approx \frac{l^2}{2R} \end{aligned}$$

Da nach Gl. (1a) $R \approx n/n'$ ist, erhält man die Gleichungen

$$y - y_0 = \frac{n'l^2}{2n} \quad (14)$$

$$y'_l = \frac{l}{R} = \frac{n'l}{n} \quad (15)$$

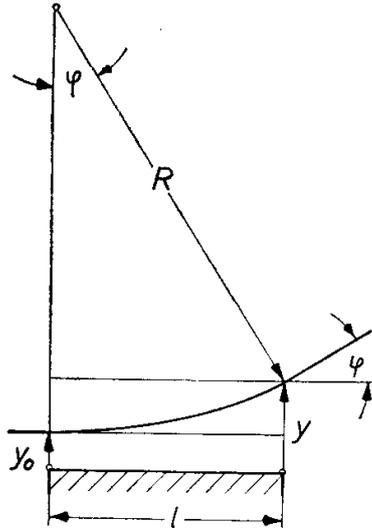


ABB. 3. Lichtstrahl als Kreisbogen.

Der Unterschied zu den Gln (7) und (8) besteht darin, dass im Bereich des Lichtstrahles als Kreisbogen $n'/n \approx \text{const.}$ gesetzt wurde, während in Gl. (7) und (8) $n' \approx \text{const.}$ sein sollte.

4. ABBILDUNGSGESETZ DER GRENZSCHICHT

Wir nehmen an, unser Modell, z.B. eine laminare thermische Grenzschicht an einer ebenen Wand, werde von parallelem Licht durchstrahlt, das auf einen Schirm fällt. Gesucht ist eine Funktion zwischen den Koordinaten des Strahls in der Grenzschicht (y) und denen auf dem Schirm (y_1), also das Abbildungsgesetz der Grenzschicht. Zur Berechnung des Lichtstrahls gehen wir von den Gln (7) und (8), also der einfachen Parabelnäherung aus und zählen daher den Schirmabstand L von der Modellmitte (Abb. 4). Im allgemeinen Falle (bei beliebigem Strahlverlauf) würde gelten

$$\frac{y_1 - y}{L - l/2} = y'_i$$

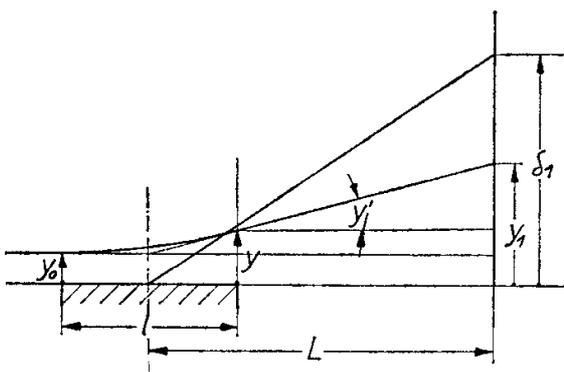


ABB. 4. Zur Abbildungsfunktion einer Grenzschicht.

während sich für die Parabelnäherung

$$\frac{y_1 - y_0}{L} = y'_i$$

ergibt. Mit $y'_i = l n'/n_0$ nach Gl. (8) erhält man

$$y_1 - y_0 = L l n'/n_0. \tag{16}$$

Die Ablenkung des Lichtstrahls $y_1 - y_0$ beziehen wir auf die Ablenkung δ_1 des die Wand berührenden Strahles ($y_0 = 0$), die sich nach Gl. (16) zu

$$\delta_1 = L l n'_w/n_w \tag{17}$$

ergibt, wenn der Index w die Werte für n' und n an der Wand bezeichnet. Ferner führen wir den relativen Wandabstand in der Grenzschicht $\eta = y_0/\delta$ ein, wobei δ die Grenzschichtdicke bedeutet. Damit erhalten wir

$$\frac{y_1 - y_0}{\delta_1} = \frac{n' n_w}{n_0 n'_w}$$

Nennen wir die relative Schirmkoordinate $\eta_1 = y_1/\delta_1$, so entsteht die Gleichung für die Abbildung durch die Grenzschicht

$$\eta_1 = \frac{n' n_w}{n_0 n'_w} + \frac{\delta}{\delta_1} \eta. \tag{18}$$

Für eine gegebene Grenzschicht ist der Ausdruck

$$\frac{\delta_1}{\delta} = \frac{L l n'_w}{\delta n_w} \tag{19}$$

zugleich ein Mass für den Schirmabstand L . Die relative Schirmkoordinate η_1 und der relative Wandabstand η können als Koordinaten eines Diagramms dienen, das etwa den schematischen Verlauf nach Abb. 5 zeigen möge. Hieraus

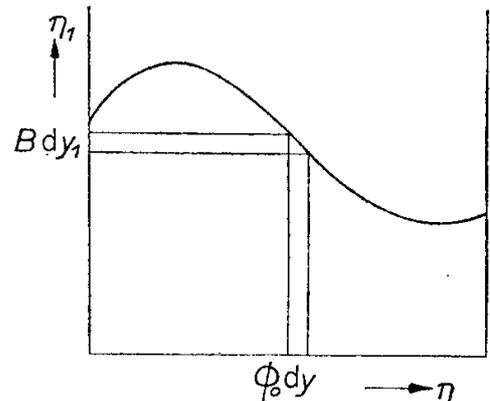


ABB. 5. Strahlungsstärke ϕ_0 und Beleuchtungsstärke B .

lässt sich die Beleuchtungsstärke B auf dem Schirm bei gegebener Strahlungsstärke Φ_o des ankommenden Lichtes berechnen, da die Beziehung

$$\Phi_o |dy| = B |dy_1|$$

gelten muss (die Betragszeichen werden im folgenden weggelassen, da die Vorzeichen von B keine Rolle spielen). Zusammen mit Gl. (18) und (19) erhalten wir die Beziehung

$$\frac{B}{\Phi_o} = \frac{dy}{dy_1} = \frac{\delta}{\delta_1} \frac{d\eta}{d\eta_1} = \frac{1}{1 + L l \frac{n_o n'' - n'^2}{n_o^2}} \quad (20)$$

Von besonderem Interesse sind jene Stellen der Grenzschicht, von denen benachbarte Strahlen herrühren, die sich auf dem Schirm schneiden, dort also mit $B = \infty$ Brennlinsen hervorrufen, wie sie von E. Schmidt [5] und Schardin [6] an laminaren thermischen Grenzschichten bei freier Konvektion beobachtet wurden. Wir erhalten hierfür aus Gl. (20) die Bedingung

$$\frac{n'^2}{n_o^2} - \frac{n''}{n_o} = \frac{1}{Ll} \quad (21)$$

Der Ort des die Brennlinsen bildenden Lichtes in der Grenzschicht hängt danach auch vom Schirmabstand L ab, wie wir es später experimentell bestätigen werden. Offenbar gibt es sehr viele Funktionen $n(y)$, die die Bedingung (21) erfüllen können.

Das gleiche Ergebnis erhalten wir auch aus folgender Überlegung (Abb. 6). Damit sich zwei Lichtstrahlen, die im Abstand dy aus dem Modell austreten, auf dem Schirm schneiden, muss die Bedingung

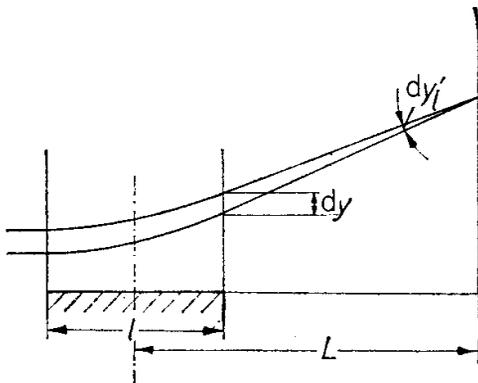


ABB. 6. Entstehung einer Brennlinsen.

$$\frac{dy_1'}{dy} = - \frac{1}{L-l/2}$$

erfüllt sein, woraus für die einfache Parabelnäherung auch

$$\frac{dy_1'}{dy} = - \frac{1}{L}$$

folgt. Mit $y_1' = ln'/n_o$ nach Gl. (8) erhalten wir als Bedingung für die Brennlinsen auf dem Schirm

$$\frac{dy_1'}{dy} = \frac{l(n_o n'' - n'^2)}{n_o^2} = - \frac{1}{L}$$

Diese Gleichung ist mit Gl. (21) identisch.

Wegen der meist kleinen n' -Werte (Tabelle 1) wird manchmal $(n'/n_o)^2$ gegen n''/n_o zu vernachlässigen sein. Man erhält dann näherungsweise die Brennlinsenbedingung

$$-n'' \approx \frac{n_o}{Ll} \quad (21a)$$

Da L die Größenordnung von Metern hat, werden Brennlinsen bevorzugt aus jenen Zonen der Grenzschicht herrühren, in denen n'' kleine negative Werte besitzt, eine Vermutung, die sich später vollständig bestätigen wird.

Andererseits zeigt Gl. (21), dass auch ein lineares Brechzahlfeld Brennlinsen bilden kann. Nimmt man z.B. einen Brechzahlverlauf $n = n_w (1 + ay)^m$ an (a und m sind Konstante), so bildet mit $m = 1$, der die Wand berührende Strahl im Schirmabstand $L = 1/(la^2)$ eine Brennlinsen. Bei einer Wärmestromdichte $q = 3 \text{ W/cm}^2$ in Wasser mit $l = 5 \text{ cm}$ wird $L \approx 1 \text{ m}$, die Brennlinsen ist also bequem zu beobachten. Die Fähigkeit, bei Durchstrahlung mit parallelem Licht Brennlinsen zu bilden, ist eine sehr allgemeine Eigenschaft von Brechzahlfeldern und keineswegs auf laminare Grenzschichten beschränkt.

5. MODELLGRENZSCHICHT

Die im vorigen Abschnitt abgeleiteten Beziehungen sollen auf eine laminare thermische Grenzschicht angewendet werden, für deren Temperaturverlauf wir eine Potenzsumme 4. Grades in der Form

$$\vartheta = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty} = a + b\eta + c\eta^2 + d\eta^3 + e\eta^4 \quad (22)$$

annehmen. Darin bedeuten T_w und T_∞ die Wand- und die Freistromtemperatur, $\eta = y/\delta$ den dimensionslosen Wandabstand mit δ als Dicke der thermischen Grenzschicht. Die 5 Randbedingungen lauten:

für $\eta = 0$: $\vartheta = 1$; $\vartheta'' = 0$

für $\eta = 1$: $\vartheta = 0$; $\vartheta' = 0$; $\vartheta'' = 0$.

Damit ergeben sich die drei Gleichungen

$$\vartheta = 1 - 2\eta + 2\eta^3 - \eta^4 \quad (22a)$$

$$\vartheta' = -2 + 6\eta^2 - 4\eta^3 \quad (22b)$$

$$\vartheta'' = 12\eta - 12\eta^2 \quad (22c)$$

die in Abb. 7 dargestellt sind. Die Bedingung $\vartheta'' = 0$ für $\eta = 0$ entspricht der sogenannten Wandbindung. Aus der Differentialgleichung der laminaren thermischen Grenzschicht ohne Ausblasen und ohne homogene Wärmeproduktion

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

folgt für $y = 0$ mit $w_x = w_y = 0$ die obige Bedingung, die für das optische Verhalten dieser Grenzschicht von ausschlaggebender Bedeutung ist. Die Gln (22a) bis (22c) gelten für freie und für erzwungene Konvektion.

Zur Berechnung der Brechzahlprofile definieren wir eine bezogene Brechzahl

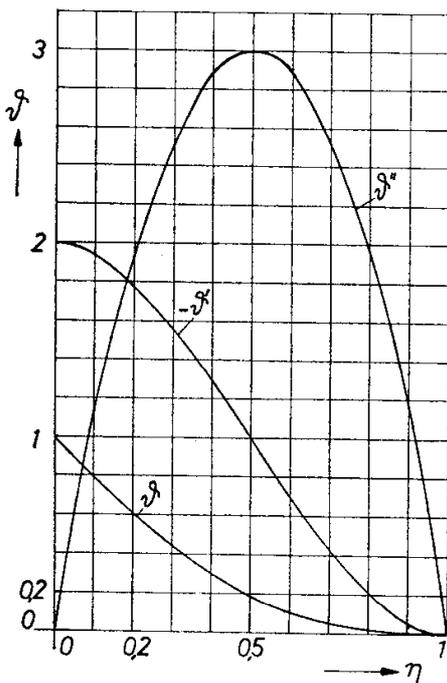


ABB. 7. Modellgrenzschicht.

$$N = \frac{n - n_w}{n_\infty - n_w} = \frac{n - n_w}{\Delta n}$$

Der Quotient dn/dT sei im Bereich $0 < \vartheta < 1$ der Einfachheit halber konstant angenommen.* Da er meistens negativ ist, ergeben sich aus den Temperaturprofilen folgende Brechzahlprofile für die wärmeabgebende Wand:

$$\frac{n}{\Delta n} = \frac{n_w}{\Delta n} + 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 \quad (23a)$$

$$\frac{n'}{\Delta n} = \frac{1}{\delta} (2 - 6\eta^2 + 4\eta^3) \quad (23b)$$

$$\frac{n''}{\Delta n} = \frac{1}{\delta^2} (-12\eta + 12\eta^2). \quad (23c)$$

Ausserdem wird $n'_w = 2\Delta n/\delta$. Wir haben absichtlich ein Profil 4. Grades gewählt, damit n'' als Parabel noch zwei Nullstellen haben kann. Auf die Bedeutung dieser Nullstellen wurde schon am Ende des vorigen Abschnittes hingewiesen.

Diese Profile werden in Gl. (18) eingesetzt und wir erhalten für das Abbildungsgesetz der Modellgrenzschicht

$$\eta_1 = \frac{1 - 3\eta^2 + 2\eta^3}{1 + 2b\eta - 2b\eta^3 + b\eta^4} + \frac{\delta}{\delta_1} \eta. \quad (24)$$

Darin ist zur Abkürzung $b = \Delta n/n_w$ gesetzt. Wählen wir für Luft $\Delta T = T_w - T_\infty = 100$ grd, so wird $b \approx \Delta T dn/(dT \cdot n_w) \approx 10^{-4}$, für Wasser mit $\Delta T = 10$ grd wird $b \approx 10^{-3}$. Wir können also bei der Ausrechnung des Quotienten aus den beiden Potenzsummen in Gl. (24) die höheren Potenzen von b vernachlässigen und erhalten

$$\eta_1 = 1 + \left(\frac{\delta}{\delta_1} - 2b \right) \eta - 3\eta^2 + (2 + 8b) \eta^3 - 5b\eta^4. \quad (25)$$

Diese Beziehung ist in Abb. 8 mit δ/δ_1 als Parameter dargestellt. Um den Einfluss von b zu zeigen, wurde neben $b = 0$ der (nach obigen Abschätzungen) viel zu grosse Wert $b = 0,05$ gewählt, da schon die Kurven für $b = 0,01$ im Rahmen der Zeichengenauigkeit mit denen für

* Diese Annahme ist nicht zwingend. Die folgenden Ableitungen lassen sich auch mit temperaturabhängigem dn/dT durchführen.

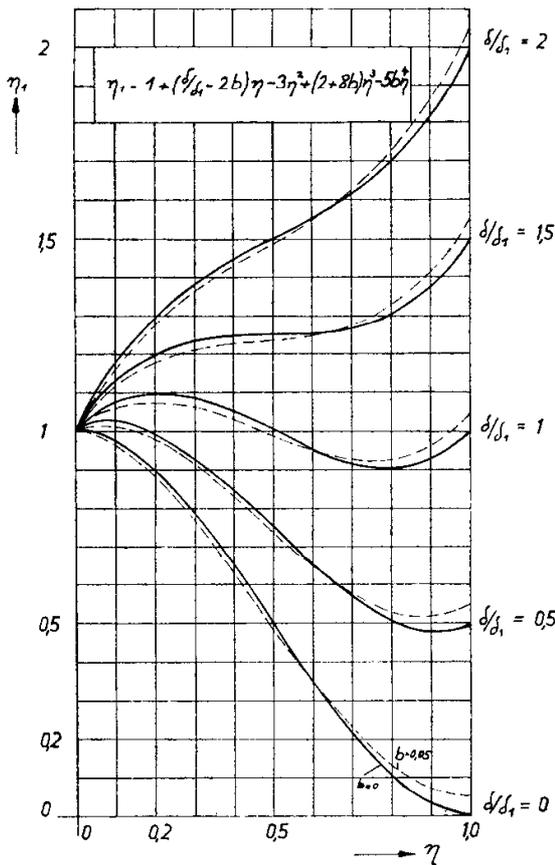


ABB. 8. Abbildungsgesetz der Modellgrenzschicht.

$b = 0$ zusammenfallen. Man wird also in vielen Fällen $b = 0$ setzen und mit dem einfacheren Ausdruck

$$\eta_1 = 1 + \frac{\delta}{\delta_1} \eta - 3\eta^2 + 2\eta^3 \quad (26)$$

rechnen können. Das bedeutet, dass in Gl. (18) $n_o \approx n_w$ gesetzt ist. Die Steigung der η_1 , η -Kurven ist ein Mass für die Beleuchtungsstärke auf dem Schirm. Brennlinsen sind für $d\eta_1/d\eta = 0$ zu erwarten, also für $\delta/\delta_1 \leq 1,5$. Für diesen Parameterwert wird eine Brennliese gebildet, deren Lichtstrahlen aus der Grenzschichtmitte ($\eta = 0,5$) kommen. Bei kleineren δ/δ_1 -Werten, also bei grösseren Schirmabständen L nach Gl. (19) treten zwei Brennliesen auf dem Schirm auf, deren Licht aber erst für sehr grossen Schirmabstand ($\delta/\delta_1 = 0$) von der Wand ($\eta = 0$) und vom Rand der Grenzschicht ($\eta = 1$) stammt.

Zur Prüfung dieser Zusammenhänge wurde die laminare thermische Grenzschicht an einer senkrechten ebenen Wand bei freier Konvektion in Luft betrachtet. Das Modell hatte eine Länge

$l = 0,5$ m, die Übertemperatur der Platte betrug 38 grad, sodass $b \approx 3 \cdot 10^{-5}$ war und vernachlässigt werden konnte. Die Grenzschicht wurde von parallelem Licht durchstrahlt, das auf einen Schirm bzw. auf die photographische Platte ohne abbildendes Objektiv fiel. Die Lichtquelle war eine von Bogenlampe und Kondensator beleuchtete Kreisblende von einigen Zehnteln Millimeter Durchmesser (eine mit einer Nadelspitze durchbohrte Metallfolie), die sich im Brennpunkt eines Hohlspiegels vom 3 m Brennweite befand. Um die Herkunft des Lichtes auf dem Schirm zu kennzeichnen, wurde unmittelbar vor dem Modell eine Maske in Form eines ausgeschnittenen Keils mit einem Keilwinkel von nahezu 90° angebracht, dessen Hypotenuse mit der Wandfläche übereinstimmte. Der Schirmabstand L wurde von 1 m bis 7 m variiert. Die Aufnahmen sind in Abb. 9a bis h wiedergegeben, wobei Abb. 9a die Nullaufnahme des Keils bei unbeheizter Platte darstellt. Da die Keilspitze ausserhalb der thermischen Grenzschicht lag, muss man sie sich auf den Bildern als feststehend denken und erkennt das anfängliche Zusammenschieben der Keilkontur von links nach rechts mit entsprechender Aufhellung, die Bildung einer Brennliese bei etwa $\delta/\delta_1 = 1,5$, aus der bei steigendem Schirmabstand L (fallendem δ/δ_1) zwei Brennliesen entstehen, deren rechte bei $L = 7$ m über die Keilspitze hinausreicht. Wegen des geringen Durchmessers der Lichtquelle zeigen sich deutliche Interferenzstreifen an den Kanten. Die zur Bildbeurteilung massgebenden Grössen δ und δ_1 sind mit ausreichender Genauigkeit auszumessen. Die Bilder bestätigen die Voraussagen über das Abbildungsgesetz der Modellgrenzschicht gemäss Abb. 8. Die Herkunft der Brennliese entspricht auch den Gln (21) bzw. (21a). Mit wachsendem L wandert der Ort der Herkunft zu kleineren negativen n'' -Werten, d.h. gemäss Gl. (23c) zu den beiden Rändern der Grenzschicht. Schreibt man Gl. (26) in der Form

$$\frac{y_1}{\delta} = \eta_2 = \frac{\delta_1}{\delta} (1 - 3\eta^2 + 2\eta^3) + \eta \quad (27)$$

so erhält man eine Kurvenschar (Abb. 10), bei der der ausserhalb der Grenzschicht liegende Teil der Keilblende feststeht, während sich nur die abgelenkte Kontur des Keils verschiebt.

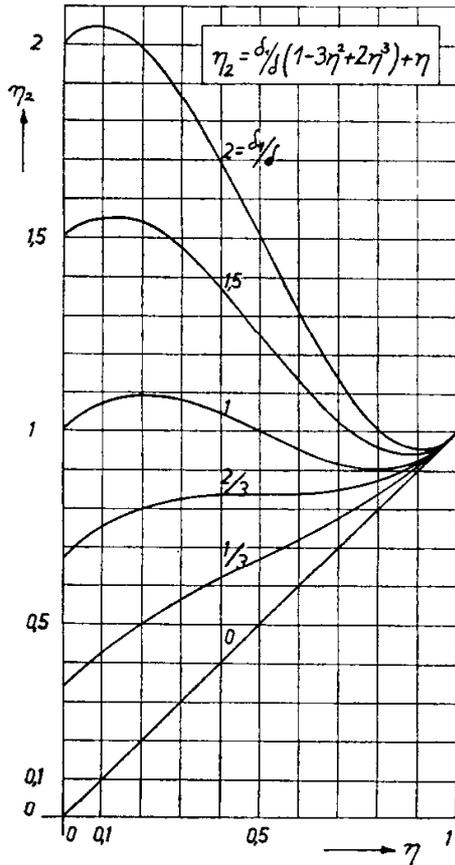


ABB. 10. Graphische Darstellung von Gl. (27).

Diese Darstellung lässt sich unmittelbar mit der Abb. 9a bis h vergleichen. In Abb. 11 ist ferner die Ablenkung der Keilkontur mit jener des Grenzschichtmodells für $\delta_1/\delta \approx 1,7$ und $0,33$ verglichen. Das Bild demonstriert die prinzipielle Auswertbarkeit der Schlierenaufnahmen ohne optische Abbildung und zeigt zugleich die Abweichungen zwischen dem Grenzschichtmodell und der wirklichen thermischen Grenzschicht.

6. ENVELOPPE ALS BRENNLINIE

Die im vorigen Abschnitt mitgeteilten Zusammenhänge lassen sich noch auf andere Weise darstellen. Gl. (27) mit $\delta_1 = L \ln' w/n_w$ nach Gl. (17) ist die Gleichung einer Geradenschar mit den Koordinaten y_1 und $\delta_1 \sim L$ und dem einzigen Parameter η . Eine Geradenschar kann Enveloppen besitzen, die die Gleichung der Schar $F(y_1, \delta_1, \eta) = 0$ erfüllen, wenn man darin den Parameter η mit der Bedingung $\partial F/\partial \eta = 0$ eliminiert. Wir erhalten daraus für den Parameter η als Lösung einer quadratischen Gleichung die beiden Werte

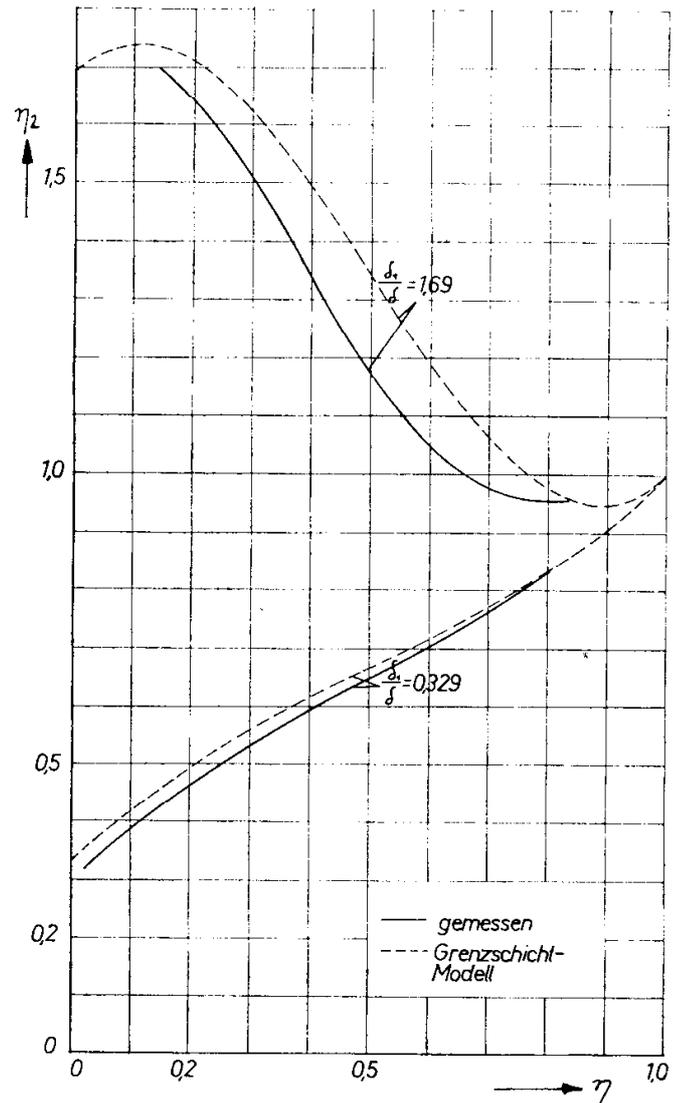
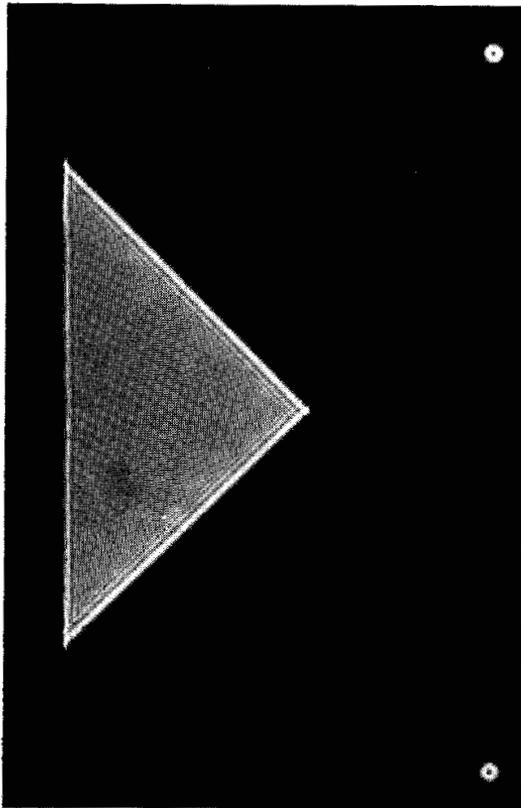


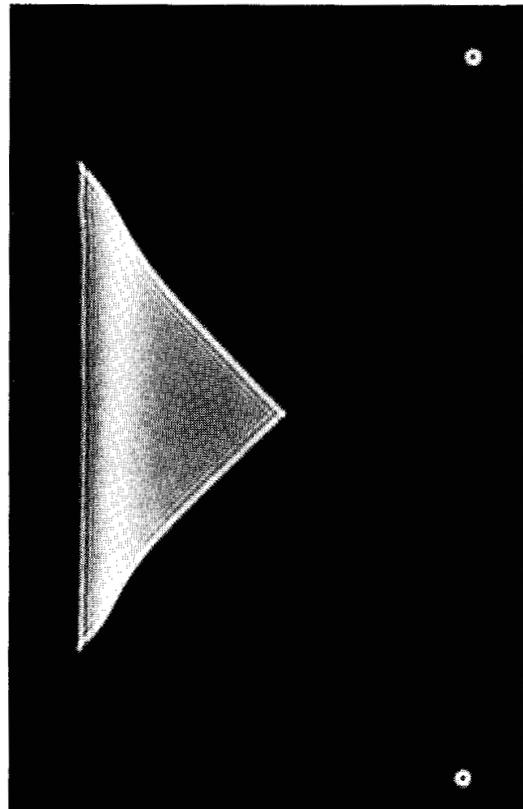
ABB. 11. Vergleich der gemessenen Lichtablenkung mit jener der Modellgrenzschicht.

$$\eta_{a,b} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{\left(1 - \frac{2\delta}{3\delta_1} \right)} \right] \quad (28)$$

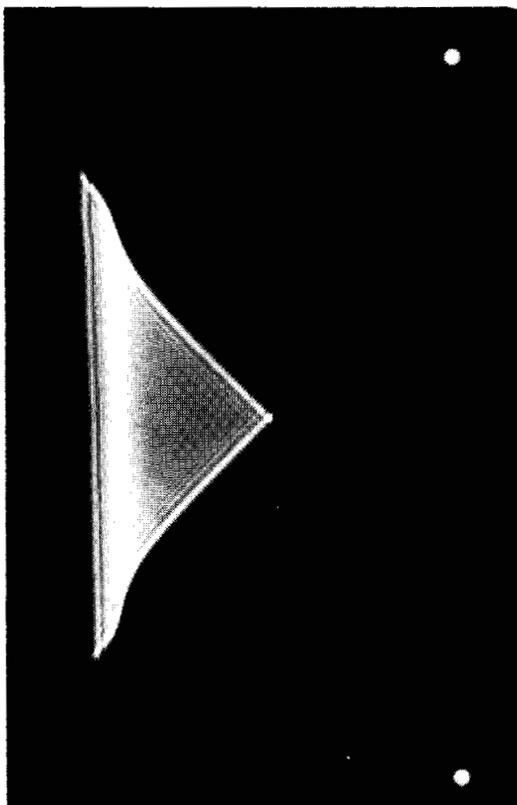
woraus die Bedingung $\delta_1/\delta \geq 2/3$ folgt. Setzt man diese η -Werte in Gl. (27) ein, so erhält man die beiden in Abb. 12 dargestellten Enveloppen. Diese sind zugleich Schnitte durch zwei Brennpflächen, ihre Spuren auf dem Schirm sind die Brennlilien. Abb. 12 entspricht vollständig Abb. 8. Die erste Brennlilie tritt bei jenem Schirmabstand L auf, für den $\delta_1/\delta = 2/3$ ist. Ihr Licht kommt von der Grenzschichtkoordinate $\eta = 0,5$. Mit steigendem Schirmabstand nähern sich die Enveloppen ihren Asymptoten, die obere dem von der Wand ($\eta = 0$) kommenden Strahl, also der Geraden $y_1 = \delta_1$, die untere dem Randstrahl $y_1/\delta = \eta = 1$.



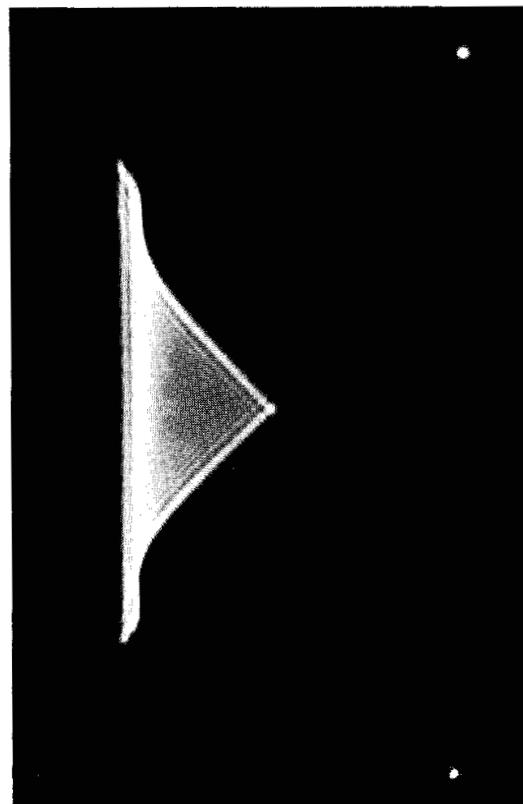
9(a)



9(b)

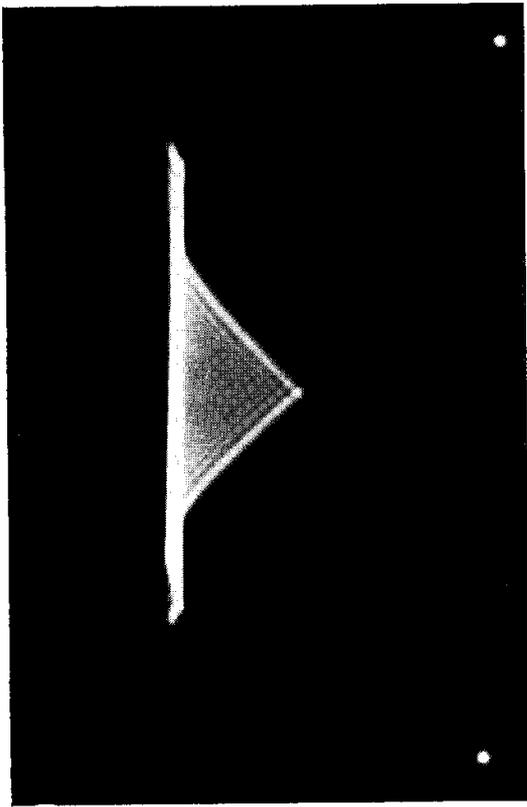


9(c)

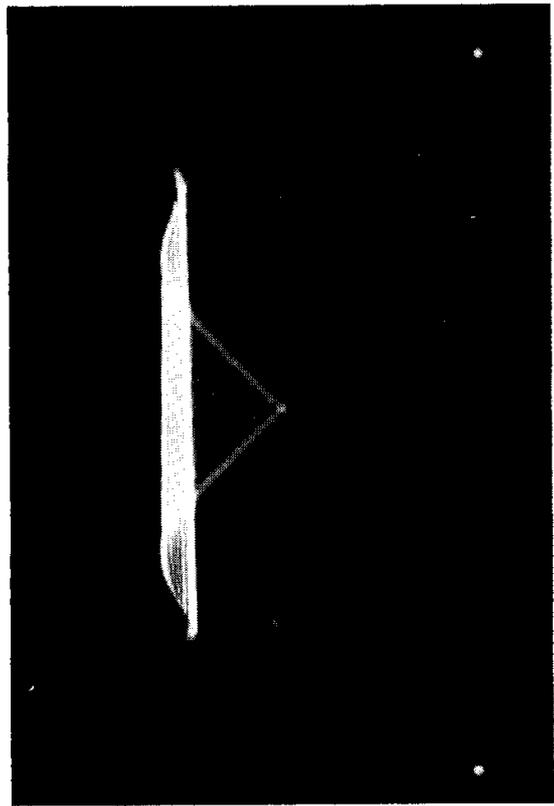


9(d)

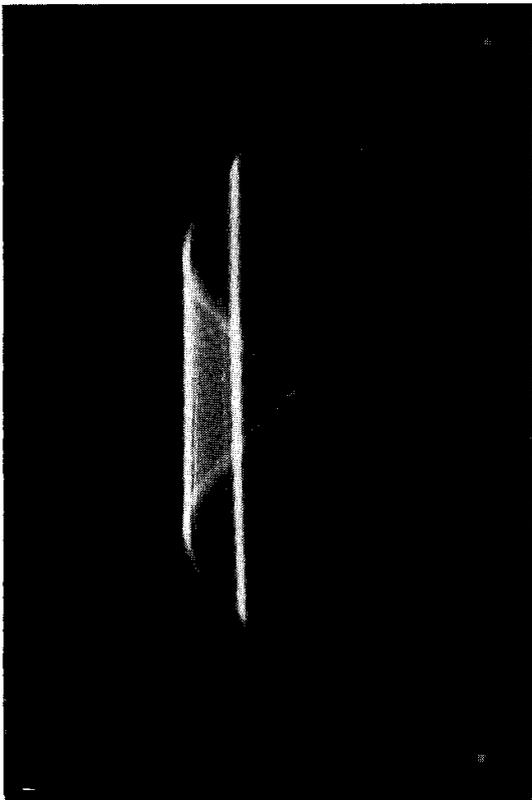
ABB. 9. *a* bis *h* Schirmbilder einer laminaren thermischen Grenzschicht bei freier Konvektion mit keilförmiger Maske. *a* Nullaufnahme ohne Heizung. Schirmabstand bei *b* bis *h*: 1 m; 1,5 m; 2 m; 3 m; 4 m; 5 m; 7 m.



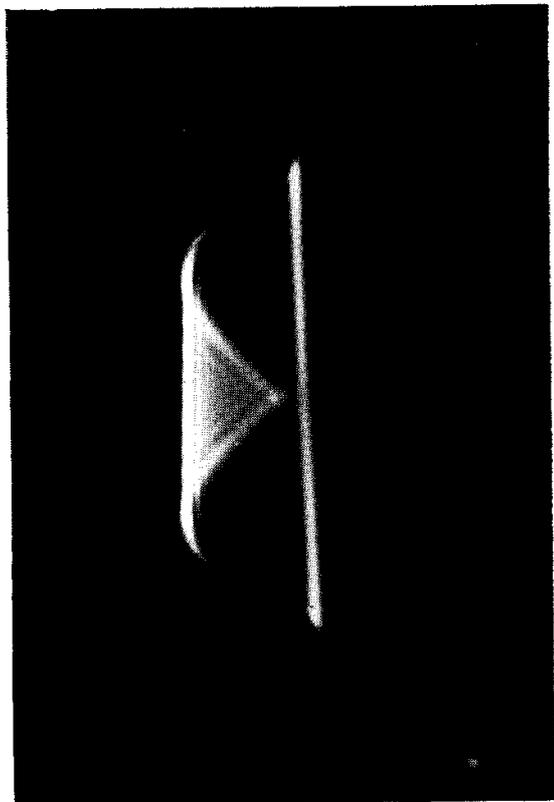
9(e)



9(f)



9(g)



9(h)



ABB. 15. Schirmbild einer Grenzschicht mit Ausblasen.



ABB. 16. Verzerrung eines Linienrasters durch das nichtstationäre Temperaturfeld beiderseits einer waagerechten Heizplatte in Wasser ($q \approx 0,6 \text{ W/cm}^2$) 7 sec nach dem Einschalten.

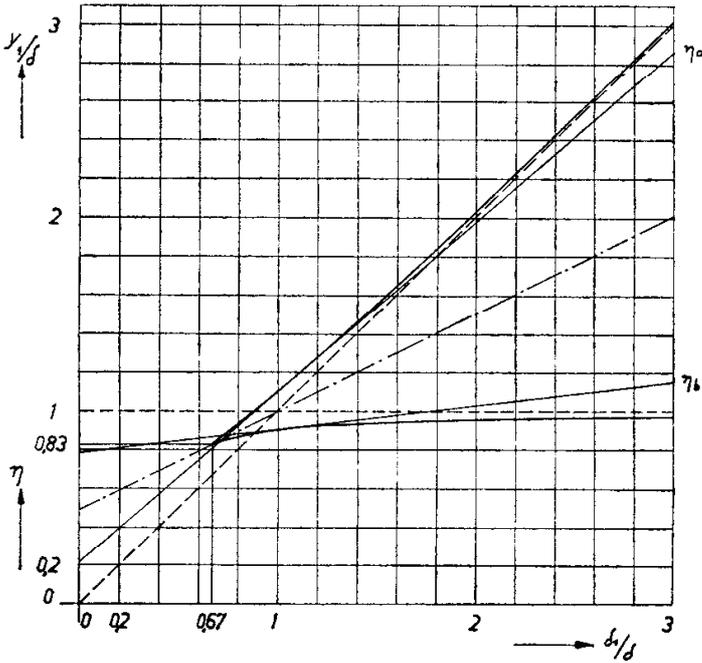


ABB. 12. Enveloppen des Lichtstrahlbündels durch die Modellgrenzschicht.

Tabelle 2 zeigt zusammengehörige Werte, aus denen sich auch die Koordinaten der Extremwerte der Kurven in Abb. 8 entnehmen lassen.

Tabelle 2

$\frac{\delta_1}{\delta}$	η_a	η_b	$\frac{y_1}{\delta} = \eta_2$	$\frac{y_1}{\delta_1} = \eta_1$
2/3	0,5	0,5	5/6	1,25
1,0	0,788	—	0,908	0,908
1,0	—	0,211	1,096	1,096
2,0	0,908	—	0,956	0,478
2,0	—	0,092	2,045	1,022
3,0	0,941	—	0,972	0,324
3,0	—	0,059	3,027	1,009

7. GRENZSCHICHT MIT AUSBLASEN

Dass bei grösseren Schirmabständen L die wandnahen Lichtstrahlen des Modells eine Brennlinie bilden, hing wesentlich von der "Wandbindung" der Grenzschicht, $\vartheta''_w = 0$ ab. Wesentlich andere Abbildungsverhältnisse sind zu erwarten, wenn diese Bedingung künstlich gestört wird, z.B. durch Ausblasen. Wir bilden mit der Ausblasegeschwindigkeit w_y und der Grenzschichtdicke δ eine Wand-Péclet-Zahl $Pe = w_y \delta / a$ und erhalten dann für die Wandbindung die Bedingung

$$\vartheta'_w Pe = \vartheta''_w \tag{29}$$

und für das Temperaturprofil und die beiden Ableitungen aus Gl. (22)

$$\vartheta = 1 + \frac{-12\eta - 6Pe\eta^2 + 4(3 + 2Pe)\eta^3 - 3(2 + Pe)\eta^4}{6 + Pe} \tag{30a}$$

$$\vartheta' = \frac{-12 - 12Pe\eta + 12(3 + 2Pe)\eta^2 - 12(2 + Pe)\eta^3}{6 + Pe} \tag{30b}$$

$$\vartheta'' = \frac{-12Pe + 24(3 + 2Pe)\eta - 36(2 + Pe)\eta^2}{6 + Pe} \tag{30c}$$

In Abb. 13 sind für $-3 < Pe < 3$ diese Profile eingetragen. Man erkennt die Veränderungen besonders der beiden Ableitungen gegenüber den Werten für $Pe = 0$.

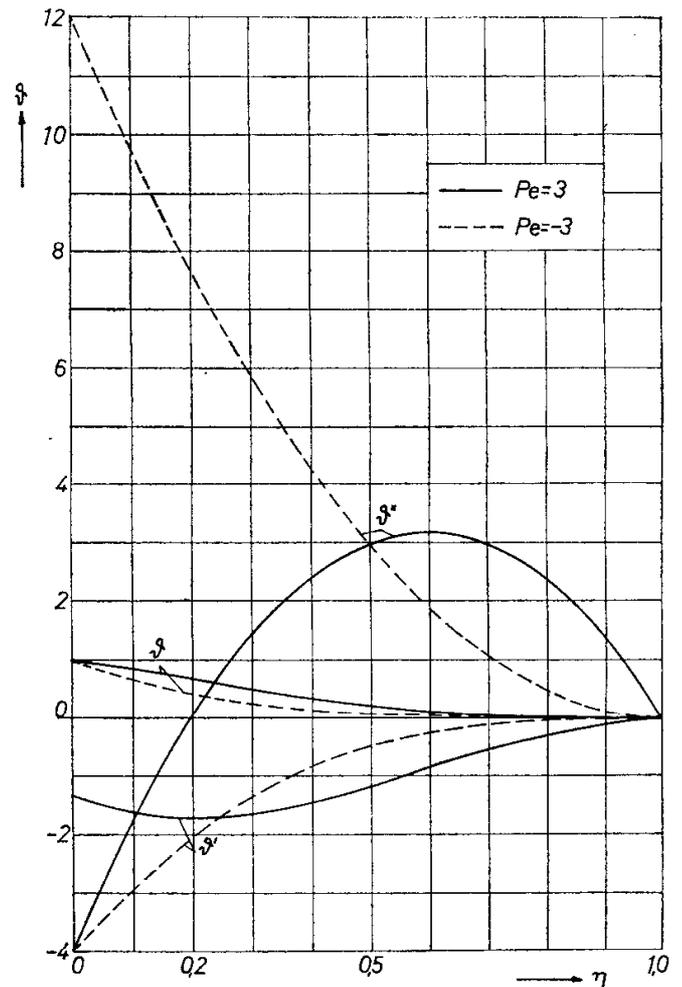


ABB. 13. Temperaturprofile mit erster und zweiter Ableitung einer Modellgrenzschicht mit Ausblasen und Ansaugen.

Auch das Abbildungsgesetz wird durch das Ausblasen stark verändert, wie Abb. 14 zeigt. Bei $Pe = 12$ liegt zwar die Brennpunktlinie am Rand des Schirmbildes ($\eta_1 \approx 2,6$), aber die sie bildenden Lichtstrahlen passieren die Grenzschicht beim Wandabstand $\eta \approx 0,3$. Der innere Teil des Schirmbildes ($\eta_1 < 1$) ist einfach, alles übrige doppelt beleuchtet. Zum Nachweis dieses Verhaltens wurden Versuche an einem porösen Zylinder aus Sinterbronze von 75 mm Länge und 30 mm Durchmesser angestellt, der in einer Glasküvette in kaltem Wasser hing und von innen nach aussen mit wärmerem Wasser mit geringen Geschwindigkeiten durchströmt und

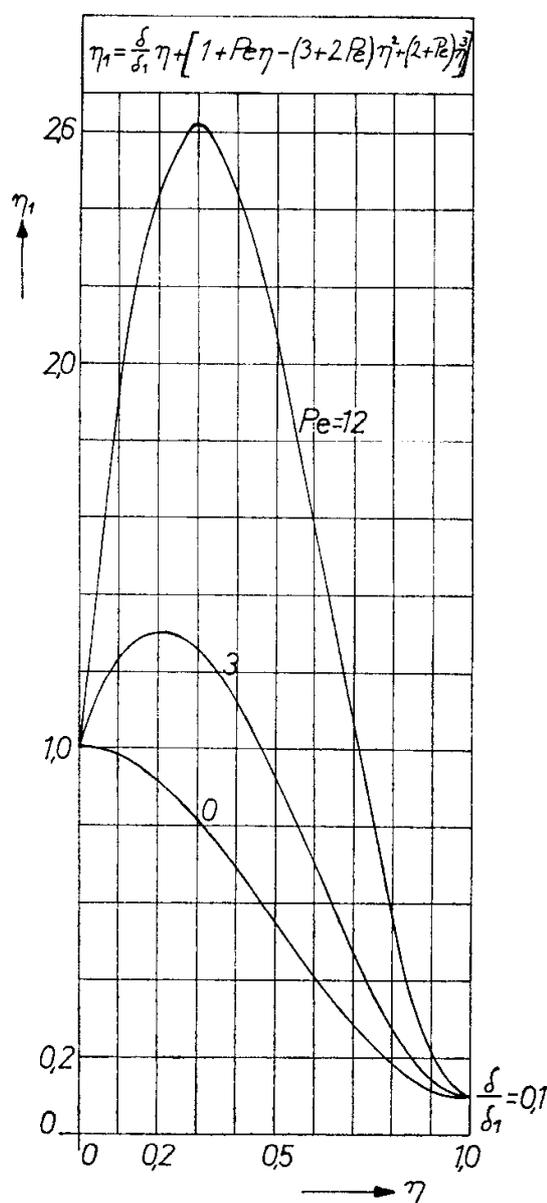


Abb. 14. Abbildungsgesetz der Modellgrenzschicht mit Ausblasen.

dadurch zugleich geheizt wurde. Abb. 15 zeigt ein Schirmbild der von parallelem Licht durchstrahlten Grenzschicht bei $Pe \approx 15$ und einer Temperaturdifferenz von 6,4 grad. Man sieht die Trennlinie zwischen dem dunkleren und dem (doppelt beleuchteten) helleren Teil des Grenzschichtbildes, die keine Brennpunktlinie ist. Diese Trennlinie verläuft in Abb. 15 nicht parallel zur Wand, weil ein auf dem ganzen Umfang gleichmässiger Durchfluss bei der gewählten Versuchseinrichtung nicht zu erreichen war.

8. DIVERGENTES UND KONVERGENTES LICHTBÜNDEL

Der Einfluss eines endlichen Abstandes zwischen Lichtquelle und Modell lässt sich an Hand der Gln (9) und (10) übersehen. Liegt die Wandfläche des durchstrahlten Modells in der Achse des Lichtbündels, so ist der Eintrittswinkel der Lichtstrahlen $y'_0 = y_0/P$, wenn P der Abstand zwischen Lichtquelle (beleuchtete Punktblende) und Eintrittskante des Modells ist. Die Beziehung zwischen Schirmkoordinaten $\eta_1 = y_1/\delta_1$ und Grenzschichtkoordinaten $\eta = y/\delta$ lautet dann an Stelle von Gl. (18) mit $n_w \approx n_0$

$$\eta_1 = \frac{n'}{n_w} (1 + y_0'^2) + \frac{\delta}{\delta_1} \eta \left(1 + \frac{L + l/2}{P} \right). \quad (31)$$

Meist wird $y_0'^2 \ll 1$ sein und vernachlässigt werden können. Aus Gl. (31) lässt sich ablesen, dass Divergenz ($P > 0$) wie eine Verkleinerung des Schirmabstandes wirkt, da $\delta_1 \sim L$ ist, während bei konvergentem Licht ($P < 0$) der Schirm scheinbar weiter rückt. Versuche bestätigen dieses plausible Ergebnis.

9. WEITERE ANORDNUNGEN

Nach den Regeln der geometrischen Optik lassen sich die Lichtwege umkehren. Man kann daher Abb. 8 auch als Abbildung eines beleuchteten Schirmes mit Markierungen deuten, der durch eine Grenzschicht betrachtet ist. Die Markierung kann aus einer Maske oder auch z.B. aus einem passenden Raster bestehen. Das durch die Grenzschicht verzerrte Bild wird mit einer Kamera aufgenommen. Ein Beispiel dieser Anordnung zeigt Abb. 16. Eine waagerechte Heizplatte in Wasser wurde plötzlich mit etwa 0,6 W/cm² beheizt. Gezeigt ist die Verzerrung

eines Linienrasters durch das nichtstationäre Temperaturfeld 7 sec nach dem Einschalten, vor Einsetzen der Konvektion an der Oberseite. Die zusammengedrängten Linien in Wandnähe lassen sich leicht den Linien des unverzerrten Rasterbildes zuordnen. Das so ermittelte Brechzahlfeld kann mit dem theoretischen verglichen werden. Hiermit bieten sich Möglichkeiten zur Messung der Wärmeleitfähigkeit bzw. der Temperaturleitfähigkeit mit nichtstationären Verfahren an.

Statt Masken und Raster kann man als weitere Markierungen des eintretenden und/oder des austretenden Lichtes auch z.B. Farben, Unterschiede der Strahlungsstärke oder Interferenzen verwenden. In eine Systematik aller Möglichkeiten ordnen sich zwanglos die bekanntesten optischen Verfahren ein, das Schlierenverfahren nach Toepler und das Interferenzverfahren nach Zehnder-Mach. Die oben skizzierten Vereinfachungen für den Weg des Lichtstrahls durch das Modell lassen sich auch zur Berechnung der optischen Weglänge verwenden, um z.B. den Einfluss der Lichtablenkung auf den Ort der Interferenzstreifen zu

erhalten. Hierauf sei an dieser Stelle nicht weiter eingegangen.

10. ANERKENNUNG

An der Herstellung und Auswertung der gezeigten Bilder haben mehrere Mitarbeiter mitgewirkt, denen ich auch an dieser Stelle danken möchte. Es sind dies die Herren J. Bach, H. Barth, C. Dihlmann, H. Rottenkolber, G. Schödel.

LITERATUR

1. R. S. HEATH, A treatise on geometrical optics. Cambridge 1887. Deutsche Ausgabe unter dem Titel: Lehrbuch der geometrischen Optik. Übersetzt von R. Kanthack. Berlin (1894).
2. R. STRAUBEL, in *Handbuch der Physik* von A. Winkelmann. Bd. 6 Optik, 2. Aufl. Leipzig, 485–502 (1906).
3. S. EXNER, *Repert. Phys.* **22**, 299–313 (1886).
4. L. MATTHIESSEN, *Repert. Phys.* **22**, 333–353 (1886).
5. E. SCHMIDT, *Forsch. Ing.-Wes.* **3**, 181–189 (1932).
6. H. SCHARDIN, *Heizung Lüftung*, **31**, 12, 167–172 (1932).
7. H. SCHARDIN, VDI-Forschungsheft Nr. 367 (1934).
8. H. SCHARDIN, *Ergebnisse der exakten Naturwissenschaften* Bd. 20, 303–439 (1942).
9. G. KEGELES und L. Y. GOSTING, *J. Amer. Chem. Soc.* **69**, 2516–2523 (1947).
10. H. HANNES, *Glastech. Ber.* **29**, 83–89 (1956).

Abstract—The laws of light deflection in refracting fields are discussed by means of geometrical optics. Approximations are introduced for the path of the lightbeam. This renders the law of reproduction for a thermal model boundary layer which shows good qualitative agreement with experiments.

Résumé—Les lois de la diffraction de la lumière dans des champs réfringents sont étudiées au moyen de l'optique géométrique. On introduit des approximations quant au trajet du faisceau lumineux. Ceci permet d'obtenir une loi de similitude, applicable à un modèle de couche limite thermique, qui est en bon accord avec les données expérimentales.

Аннотация—Методами геометрической оптики исследуются законы преломления света в полях преломления. Для пути пробега луча вводятся приближения, что дает закон подобия для модели теплового пограничного слоя, качественно подтверждаемый экспериментами.