

CHEMIE-INGENIEUR-TECHNIK

Zeitschrift für technische Chemie, Verfahrenstechnik und Apparatewesen

Jahrgang 1956

Nr. 819

Seite 553-556

Verlag Chemie, GmbH, Weinheim/Bergstraße

Wärmeübergang an nicht-Newtonsche Flüssigkeiten bei laminarer Rohrströmung*)

Von Dr.-Ing. U. GRIGULL, Farbenfabriken Bayer AG., Leverkusen

Für eine strukturviscose Flüssigkeit, deren Reibungsgesetz dem Potenzansatz nach Ostwald/de Waele entspricht, sowie für eine Paste nach Bingham werden die Temperaturverteilungen und die Nußelt-Zahlen der laminaren Rohrströmung angegeben. Als Randbedingung dient der Fall konstanter Wärmestromdichte an der Wand bzw. eine linear mit der Rohrlänge ansteigende Wandtemperatur. Die Stoffwerte werden als temperaturunabhängig angenommen.

Die Lehre von der konvektiven Wärmeübertragung hat sich bisher überwiegend mit den sog. normalen Flüssigkeiten beschäftigt, das sind solche, deren Reibungsgesetz dem Ansatz von Newton gehorcht, wonach das Geschwindigkeitsgefälle $-dw/dr$ proportional der Schubspannung τ sein soll:

$$-\frac{dw}{dr} = \frac{1}{\eta} \tau \quad (1).$$

Die dynamische Zähigkeit η , die beispielsweise die Einheit kp s/m^2 hat, ist ein reiner Stoffwert, der zwar von

*) Herrn Prof. Dr.-Ing. Dr. phil. nat. h. c. R. Plank, Karlsruhe, zu seinem 70. Geburtstag ergebenst gewidmet. — Vorgetragen auf der internen Arbeitstagung des Fachausschusses Wärmeaustauscher und Verdampfer der VDI-Fachgruppe Verfahrenstechnik am 23. April 1956 in Bingen. Vgl. diese Ztschr. 28, 589 [1956].

Druck und Temperatur, nicht aber von den übrigen Größen der Gl. (1) abhängen darf, die hier für die laminare Rohrströmung angeschrieben ist. Eine große Zahl der in der Natur vorkommenden oder auch künstlich geschaffenen, fließfähigen Stoffe zeigt aber kein Newtonsches Verhalten. Die Voraussetzung, daß die Zähigkeit konstant ist, muß für diese Stoffe aufgegeben werden, und an die Stelle des Reibungsgesetzes nach Gl. (1) tritt der allgemeinere Ansatz

$$-\frac{dw}{dr} = f(\tau) \quad (2).$$

Da die Funktion f mit den üblichen Viscosimetern (z. B. Kapillar-, Rotations- oder Fallkörper-Viscosimeter) nicht unmittelbar bestimmt werden kann, ist ihre Ermittlung aus den gemessenen integralen Größen (z. B. Menge,

Druckabfall, Drehmoment usw.) eine wichtige Teilaufgabe der Rheologie^{1,2}).

Andererseits sind auch empirische oder halbempirische Reibungsgesetze für das Fließverhalten verschiedener Stoffgruppen vorgeschlagen worden. Von diesen Gesetzen seien im folgenden zwei für die Berechnung der Temperaturfelder und Wärmeübergangszahlen in stationärer, ausgebildeter laminarer Rohrströmung bei temperaturunabhängigen Stoffwerten herangezogen.

Strukturviscosität

Dieser von *Wo. Ostwald* eingeführte Begriff bezieht sich auf jene Stoffe, deren Zähigkeit mit steigender Schubspannung abnimmt. Das Fließverhalten eines solchen Stoffes kommt nach der Auffassung von *Ostwald* durch die ständige Bildung und Zerstörung orientierter „Strukturen“ zustande. Es kann durch das besonders einfache, von *Ostwald* und *de Waele* vorgeschlagene empirische Reibungsgesetz

$$\tau = \frac{dw}{dr} = k \tau^n \quad (3)$$

wiedergegeben werden³). Die Konstante k hat eine von n abhängige Dimension, die nur für $n = 1$ mit der von $1/\eta$ übereinstimmt. Der Bereich der Strukturviscosität wird durch $n > 1$ gekennzeichnet.

Aus Gl. (3) läßt sich in der üblichen Weise die Geschwindigkeitsverteilung einer laminaren, stationären Rohrströmung ableiten. Bezeichnet man mit r die radiale Koordinate, mit R den Rohrradius und mit P' den Druckgradienten in Achsenrichtung, so wird

$$w(r) = \frac{k}{2^n (n+1)} P'^n R^{n+1} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^{n+1} \right] \quad (4)$$

Die Maximalgeschwindigkeit in der Achse ($r = 0$) ist

$$w_{\max} = \frac{k}{2^n (n+1)} P'^n R^{n+1} \quad (5)$$

während das Verhältnis zwischen mittlerer und maximaler Geschwindigkeit den einfachen Ausdruck

$$\frac{\bar{w}}{w_{\max}} = \frac{n+1}{n+3} \quad (6)$$

annimmt. Für $n = 1$ wird aus Gl. (4) die *Hagen-Poiseuille*-sche Beziehung.

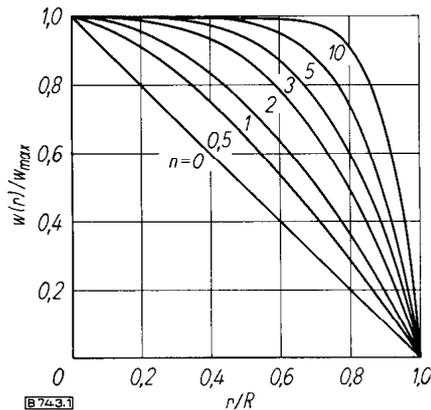


Bild 1. Geschwindigkeitsverteilung einer strukturviscosen Flüssigkeit mit einem Reibungsgesetz nach *Ostwald/de Waele* bei laminarer Rohrströmung

In Bild 1 ist die Geschwindigkeitsverteilung über den Rohrradius nach den Gln. (4) und (5) dargestellt. Dabei ist auch der Bereich $n < 1$ eingezeichnet, der dem Fließverhalten sog. dilatanter Stoffe entspricht, bei denen die Zähigkeit mit steigender Schubspannung zunimmt. Der (praktisch nicht erreichbare) Grenzwert $n = 0$ stellt das einfache Keilprofil dar. Für $n = \infty$ erhält man die Pfropfen- oder Kolbenströmung. Für alle Profile ist die Haftbedingung an der Wand eingehalten. Bild 2 enthält die

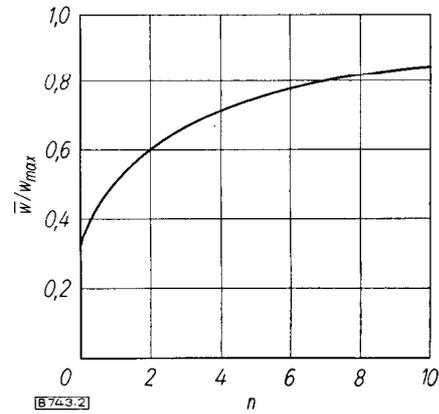


Bild 2. Verhältnis von mittlerer zu maximaler Geschwindigkeit der Rohrströmung nach Bild 1.

Darstellung von Gl. (6). Das Verhältnis von mittlerer zu maximaler Geschwindigkeit kann die Grenzwerte $1/3$ für $n = 0$ und 1 für $n = \infty$ annehmen.

Temperaturverteilung und Wärmeübergang

Die Gleichung für den Wärmetransport in ausgebildeter laminarer Rohrströmung bei konstanten Stoffwerten lautet:

$$w \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \vartheta}{\partial r} \quad (7)$$

Hierin ist ϑ die Temperatur und $a = \lambda/c\rho$ die Temperaturleitzahl. Als Randbedingung werde eine konstante Wärmestromdichte in der Rohrwand eingeführt, wie sie etwa durch elektrische Beheizung zu verwirklichen wäre. Diese Bedingung ist gleichbedeutend mit einem linearen Temperaturverlauf über die Rohrlänge x und kann durch den Lösungsansatz

$$\vartheta = \vartheta_1(r) + Ax \quad (8)$$

berücksichtigt werden, der erstmalig von *Callendar* (1902) angewendet wurde. Führt man $\partial \vartheta / \partial x = A = \text{const}$ in Gl. (7) ein, so wird aus der partiellen eine gewöhnliche Differentialgleichung, die in vielen Fällen in geschlossener Form lösbar ist⁴). $\vartheta_1(r)$ ist die von x unabhängige Über- oder Untertemperatur des strömenden Mediums, die im folgenden allein betrachtet und mit $\vartheta(r)$ bezeichnet werden soll.

Durch Einsetzen der Geschwindigkeitsverteilung nach Gl. (4) in Gl. (7) erhält man folgende Beziehung für die radiale Temperaturverteilung, wenn an der Wand $\vartheta = 0$ gesetzt und ferner berücksichtigt wird, daß in der Achse eine endliche Temperatur herrschen muß:

$$\vartheta(r) = \frac{w_{\max} A R^2}{4a} \left[\frac{4}{(n+3)^2} - 1 + \left(\frac{r}{R} \right)^2 - \frac{4}{(n+3)^2} \left(\frac{r}{R} \right)^{n+3} \right] \quad (9)$$

Diese Beziehung ist in Bild 3 für den ganzen Bereich $0 < n < \infty$ dargestellt. Die Kurve $n = 1$ entspricht wiederum der *Newtonschen* Flüssigkeit. Die Zahlenwerte der Ordinate müßten eigentlich ein negatives Vorzeichen erhalten, da für positives A , also Temperaturanstieg in Strömungsrichtung, im Rohr naturgemäß Untertemperaturen herrschen.

Bild 3 kann dazu dienen, um die Temperaturdifferenzen beurteilen zu können, die in der strömenden Flüssigkeit nach Verlassen des Wärmeaustauschers noch herrschen.

Aus den Gln. (4) und (9) läßt sich die Mitteltemperatur berechnen, auf die die Wärmeübergangszahl bezogen wird. Als Mitteltemperatur $\bar{\vartheta}$ soll dabei die sog. Mischtemperatur benutzt werden, die durch die Gleichung

$$\bar{\vartheta} = \frac{2\pi \int_0^R \vartheta(r) w(r) r \rho c dr}{\pi R^2 \rho c w} \quad (10)$$

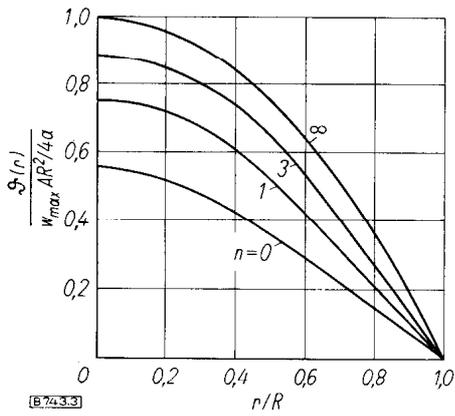


Bild 3. Temperaturverteilung der Rohrströmung nach Bild 1 bei konstanter Wärmestromdichte an der Rohrwand

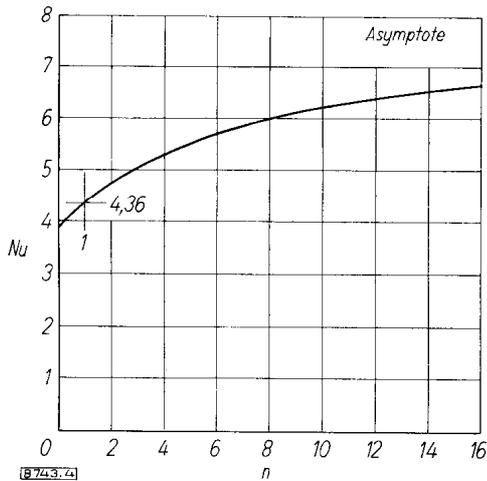


Bild 4. Nußelt-Zahl, bezogen auf die Mischtemperatur und den Rohrdurchmesser, für eine strukturviscose Flüssigkeit nach Bild 1 und 3

definiert ist. Die Nußelt-Zahl läßt sich durch die Gleichung

$$Nu = \frac{2R(d\vartheta/dr)_R}{\vartheta} \quad (11)$$

berechnen, wenn der Rohrdurchmesser $2R$ als Bezugslänge gewählt wird. Man erhält für Nu den Ausdruck

$$Nu = \frac{2(n+1)^2}{5+n - \frac{2}{n+3} - \frac{4+(n+3)^2}{n+5} - \frac{(n+3)^2}{4}} \quad (12)$$

der in Bild 4 dargestellt ist. Für $n=1$ (Newtonsche Flüssigkeit) entsteht der schon bekannte Wert $Nu = 48/11 = 4,36$, während für $n \rightarrow \infty$ (Kolbenströmung) sich der asymptotische Grenzwert $Nu = 8$ ergibt, der übrigens nur langsam erreicht wird; auch für $n=100$ ist erst $Nu = 7,7$. Für den unteren Grenzwert $n=0$ wird $Nu = 3,87$.

Bingham-Paste

Als zweites Beispiel nicht-Newtonschen Verhaltens werde ein plastischer Körper betrachtet, der erst oberhalb einer gewissen Mindestschubspannung, der Fließgrenze τ_0 , zu fließen beginnt. Nimmt man an, daß im Fließbereich der Körper Newtonsches Verhalten zeigt, so ergibt sich als Reibungsgesetz der Ansatz von Bingham:

$$-\frac{dw}{dr} = \frac{1}{\eta'} (\tau - \tau_0) \quad (13)$$

Die Zähigkeit in Gl. (13) werde mit η' bezeichnet, um sie deutlich von der Zähigkeit der Newtonschen Flüssigkeit η aus Gl. (1) zu unterscheiden.

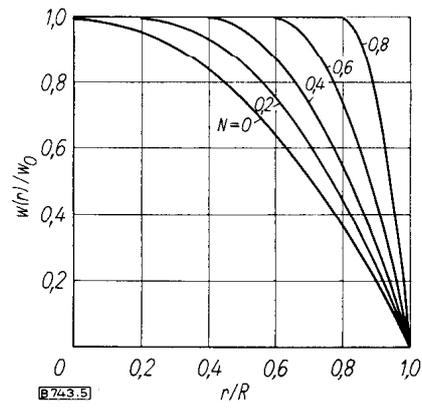


Bild 5. Geschwindigkeitsverteilung der laminaren Rohrströmung einer Bingham-Paste, dimensionslos gemacht mit der Geschwindigkeit der Kernströmung w_0

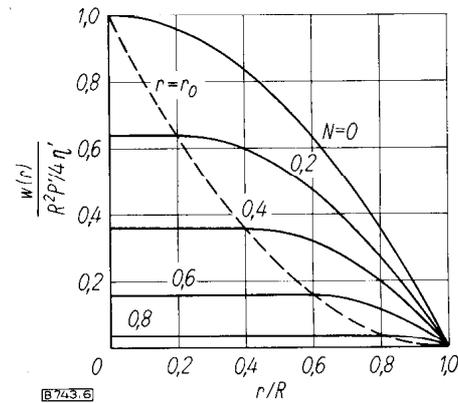


Bild 6. Geschwindigkeitsverteilung nach Bild 5, dimensionslos gemacht mit dem Druckgradienten P'

Die Rohrströmung einer solchen Bingham-Paste weist zwei getrennte Bereiche auf: im Kern bildet sich ein Pfropfen, der sich mit konstanter Geschwindigkeit w_0 vorwärtschiebt, während in einer Randzone, außerhalb eines Radius r_0 , die Geschwindigkeit auf den Wert Null an der Rohrwand abfällt. Auf dem Radius r_0 herrscht gerade die Schubspannung τ_0 , so daß sich durch eine einfache Gleichgewichtsbetrachtung die Beziehung

$$\tau_0 = P' \frac{r_0}{2} \quad (14)$$

ergibt. Für ein bestimmtes Rohr (Radius R) und einen bestimmten Druckgradienten P' ist also bei gegebenem τ_0 auch der dimensionslose Grenzwert

$$N = \frac{r_0}{R} = \frac{2\tau_0}{P'R} \quad (15)$$

als gegeben zu betrachten. Die Geschwindigkeitsverteilung der Randströmung ergibt sich mit diesen Abkürzungen zu

$$w(r) = \frac{R^2 P'}{4 \eta'} \left(1 - 2N + 2N \frac{r}{R} - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (16)$$

während die Geschwindigkeit des Kerns w_0 , die zugleich die Maximalgeschwindigkeit ist,

$$w_0 = \frac{R^2 P'}{4 \eta'} (1 - N)^2 \quad (17)$$

wird. Zur Berechnung der mittleren Geschwindigkeit muß man getrennt über die beiden Strömungsbereiche integrieren und erhält

$$\bar{w} = \frac{R^2 P'}{8 \eta'} \left(1 - \frac{4}{3} N + \frac{1}{3} N^3 \right) \quad (18)$$

Führt man den Druckgradienten p' ein, der gerade an der Wand die Schubspannung τ_0 erzeugt, so wird $\tau_0 = p'R/2$ oder

$$N = r_0/R = p'/P' \quad (15a)$$

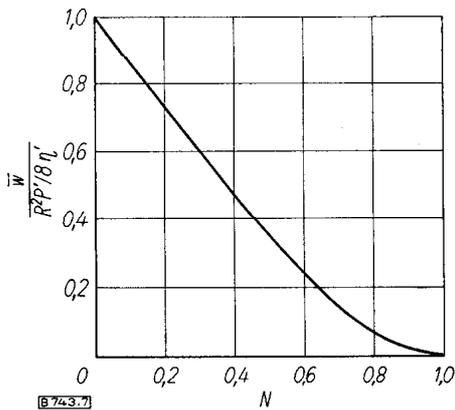


Bild 7. Mittlere Geschwindigkeit einer Bingham-Paste

Mit dieser Abkürzung wird Gl. (18) in der Literatur auch als *Buckingham-Reiner-Gleichung* bezeichnet. In den Gln. (16) bis (18) entsteht für $N = 0$ die *Hagen-Poiseuille-Strömung*.

Die Geschwindigkeitsprofile der *Bingham-Paste* sind in Bild 5 wiedergegeben. Die Kurve der Randströmung geht ohne Knick in die Kernströmung über. Anschaulicher ist die Darstellung in Bild 6, in der w mit dem Druckgradienten P' dimensionslos gemacht ist. Hier wird deutlich, daß mit steigendem N bei im übrigen gleichen Verhältnissen auch die durchgesetzte Menge abnimmt, bis bei $N = 1$, also $P' = p'$, jedes Fließen aufhört. Das geht auch aus Bild 7 hervor, das die mittlere Geschwindigkeit \bar{w} als Funktion von N gemäß Gl. (18) zeigt.

Temperaturverteilung und Wärmeübergang

Zur Berechnung der Temperaturverteilung muß Gl. (7) einzeln in den beiden Strömungsbereichen angewandt werden mit $w_0 = \text{const}$ für die Kernströmung und $w(r)$ nach Gl. (16) für die Randströmung. Die beiden daraus erhaltenen Funktionen werden so zusammengesetzt, daß an der Grenze ($r = r_0$) sowohl der Funktionswert ϑ_0 als auch die Neigung $d\vartheta/dr$ übereinstimmen, da Gl. (7) Sprünge und Knicke in der Temperaturverteilung verbietet.

Damit erhält man für die Kernströmung

$$\vartheta(r) = \frac{w_0 A R^2}{4a} \left(\frac{r^2}{R^2} - N^2 \right) + \vartheta_0 \quad (19)$$

und für die Randströmung

$$\vartheta(r) = \frac{3 A R^4 P'}{64 a \eta'} \left(-1 + \frac{40}{27} N + \frac{4}{3} \frac{r^2}{R^2} - \frac{8}{3} N \frac{r^2}{R^2} + \frac{32}{27} N \frac{r^3}{R^3} - \frac{1}{3} \frac{r^4}{R^4} + \frac{4}{9} N^4 \ln \frac{r}{R} \right) \quad (20)$$

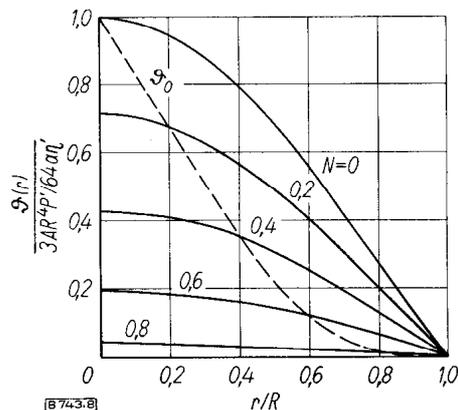


Bild 8. Temperaturverteilung in der laminaren Rohrströmung einer Bingham-Paste bei konstanter Wärmestromdichte an der Rohrwand

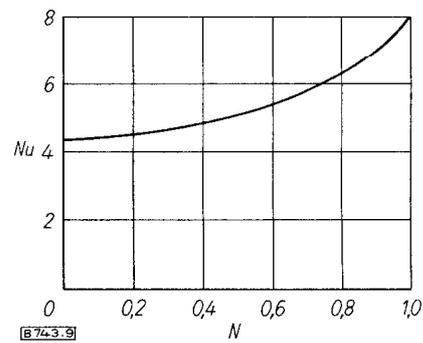


Bild 9. Nußelt-Zahl, bezogen auf die Mischtemperatur und den Rohrdurchmesser, für die laminare Rohrströmung einer Bingham-Paste

Der Wert ϑ_0 in Gl. (19) entsteht dadurch, daß in Gl. (20) $r = r_0$ bzw. $r/R = N$ gesetzt wird. Bild 8 zeigt die hieraus berechnete Temperaturverteilung. Auch hier sind die Ordinatenwerte negativ zu nehmen, da bei positivem $A = d\vartheta/dx$ im Rohr Untertemperaturen herrschen.

Die Mischungstemperatur $\bar{\vartheta}$ wird entsprechend Gl. (10) berechnet, nur daß jetzt wiederum über die beiden Bereiche getrennt zu integrieren ist. Hiermit läßt sich nach Gl. (11) eine *Nußelt-Zahl* ausrechnen, die nur von N abhängt. Dieser Ausdruck, auf dessen Wiedergabe seiner Länge wegen verzichtet sei, ist in Bild 9 dargestellt. Für $N = 0$ ergibt sich der Grenzwert $Nu = 48/11 = 4,36$ der *Newtonschen Flüssigkeit*. Auch für $N = 1$ ergibt sich überraschenderweise ein endlicher Grenzwert, der mit dem Wert der *Pfropfenströmung* $Nu = 8$ übereinstimmt. Auffällig ist auch der geringe Anstieg von Nu bei kleinem N .

Eingeg. 4. Mai 1956 [B 743]

1) W. Fritz u. H. Kroepelin, Kolloid-Z. 140, 149/57 [1955].

2) J. Pawlowski, Kolloid-Z. 130, 129/31 [1953].

3) An neuerer Literatur über Rheologie sei genannt: W. Meskat in Ullmanns Encyclopädie der technischen Chemie, 3. Aufl., 1. Bd., S. 67/85. — W. Philippoff: Viskosität der Kolloide, Dresden u. Leipzig 1942. — G. W. Scott Blair: A Survey of General and Applied Rheology, 2. Aufl., London 1949.

4) U. Grigull, diese Ztschr. 27, 480/83 [1955].

Benutzte Abkürzungen

a [m ² /s]	Temperaturleitzahl
$A = d\vartheta/dx$ [grad/m]	Temperaturanstieg in Achsenrichtung
c [kcal/kg grd]	spezifische Wärme
k	Konstanten im Potenzansatz nach Ostwald/de Waele, nach Gl. (3)
n	
$N = r_0/R$	dimensionsloser Grenzradius
P' [kp/m ² m]	Druckgradient in Strömungsrichtung
r [m]	radiale Koordinate im Rohr
r_0 [m]	Grenzradius der Pfropfenströmung einer Bingham-Paste
R [m]	Rohrradius
w [m/s]	Geschwindigkeit
x [m]	axiale Koordinate im Rohr
α [kcal/m ² h grd]	Wärmeübergangszahl
η [kp s/m ²]	dynamische Zähigkeit
ϑ [grad]	Temperatur
λ [kcal/m h grd]	Wärmeleitzahl
ρ [kg/m ³]	Dichte
τ [kp/m ²]	Schubspannung
$Nu = \alpha 2 R/\lambda$	Nußelt-Zahl