

nächst die entsprechenden reduzierten Temperaturen bilden und zu diesen nach Teil II, Tab. 1 die Werte von γ/γ_0 entnehmen. Damit ergibt sich γ_0 und $V_0 = M/\gamma_0 = 81,4$ bzw. $80,8 \text{ cm}^3/\text{Mol}$. Für $\lg(T_p/V_0)$ erhalten wir schließlich die nahezu übereinstimmenden Werte 0,685 bzw. 0,689, die mittels Bild 3 praktisch die gleiche Kurve liefern. Diese fällt, wie Bild 5 zeigt, fast mit der Y-Kurve zusammen, weshalb es keinen Vorteil bietet, beide Kurven einzutragen, es sei denn, daß man damit eine gewisse Kontrolle gegenüber unzuverlässigen Meßwerten oder Rechenfehlern hat.

Sehr wesentlich ist dagegen noch die Auswertung von Dampfdruckmessungen oder Angaben über die damit zusammenhängende Verdampfungswärme. Nach Stull¹⁾ liegen die zu Drucken von 10 und 100 mm Hg gehörigen Siedetemperaturen für diesen Stoff bei 13,8 bzw. 61,3 °C, woraus sich $T_{10}/T_s = 0,728$ und $T_{100}/T_s = 0,848$ ergibt. Für die Verdampfungswärme am Siedepunkt wird der Wert 8,30 kcal/Mol angegeben⁷⁾. Damit erhält man für die Troutonsche Konstante $W_s/T_s = 21,0 \text{ cal/Mol}^\circ\text{C}$. Mit Hilfe von Bild 2, 3 und 4 tragen wir auch die zu diesen Werten gehörigen Kurven auf dem Pauspapier ein. Bild 5 zeigt, daß alle benutzten Meßdaten zu dem gleichen Schnittpunkt führen, dem nach Bild 1 (angedeutet in Bild 5) folgende Werte entsprechen: $a_k = 7,00$; $\lg p_k = 1,645$ und $\phi_s = 0,640$. Damit wird $p_k = 44,2 \text{ Atm}$ und $T_k = 616^\circ\text{K}$.

Dieses graphische Verfahren besitzt den großen Vorteil, daß man ein anschauliches Bild von der Zuverlässigkeit der Ergebnisse bekommt. Häufig werden sich die verschiedenen Kurven nicht in einem Punkt schneiden, sondern ein mehr oder weniger ausgedehntes Gebiet liefern, aus dem sich die wahrscheinlichen Fehlergrenzen der ein-

zelnen Größen ablesen lassen. Nachteilig ist hauptsächlich, daß man die Siedetemperaturen für 10 oder 100 mm Hg kennen muß, wofür im allgemeinen keine direkten Meßergebnisse vorliegen. Die umfangreichen, durch Interpolation und graphischen Ausgleich der Meßwerte gewonnenen Tabellen von D. R. Stull¹⁾ entsprechen leider häufig den für diese Zwecke zu stellenden Genauigkeitsanforderungen nicht ganz. Es empfiehlt sich daher im allgemeinen, die mit Hilfe des graphischen Verfahrens gewonnenen Ergebnisse zu prüfen, indem man damit einige Dampfdrucke berechnet, für die unmittelbare sorgfältige Messungen vorliegen. Eingeg. 28. April 1955 [B 648]

Literatur

- 1) L. Riedel, diese Ztschr. 24, 353 [1952].
- 2) Die benutzten Meßwerte wurden im allgemeinen dem Tabellenwerk von Landolt-Börnstein (5. Aufl., Berlin 1923—1935) oder dem Buch von J. Timmermans: Physico-Chemical Constants of Pure Organic Compounds (Brüssel 1950) entnommen, so daß ihre Herkunft mit Hilfe dieser Werke leicht ermittelt werden kann.
- 3) Eine ausführliche Zusammenstellung der Meßergebnisse für die kritischen Größen findet man bei K. A. Kobe u. R. E. Lynn jr., Chem. Reviews 52, 117 [1953].
- 4) L. Riedel, Z. ges. Kälte-Ind. 48, 105 [1941].
- 5) L. Riedel, Z. Elektrochemie u. angew. physikal. Chemie 53, 222 [1949].
- 6) D. R. Stull, Ind. Engng. Chem. 39, 517 [1947].
- 7) J. D'Ans u. E. Lax: Taschenbuch f. Chemiker u. Physiker, 2. Aufl., Berlin 1949, S. 713.

Wärmeübergang in laminarer Strömung mit Reibungswärme*)

Von Dr.-Ing. U. GRIGULL, Farbentabrike Bayer AG., Leverkusen

Für die laminare Kanalströmung lassen sich bekanntlich die Differentialgleichungen soweit vereinfachen, daß sie für einige Fälle in geschlossener Form lösbar sind. Das bekannteste Beispiel ist die Hagen-Poiseuillesche Gleichung. Aber auch für die Wärmeübertragung existieren einige geschlossene Ausdrücke. Im folgenden werden derartige Lösungen für Strömungen mit Reibung abgeleitet.

Die Energiegleichung für die ausgebildete laminare Rohrströmung mit konstanten Stoffwerten lautet

$$w \rho c \frac{\partial \theta}{\partial x} = \lambda \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad (1),$$

wenn, wie üblich, $\partial^2 \theta / \partial x^2$ gegen das viel größere $\partial^2 \theta / \partial r^2$ vernachlässigt wird. Zu Gl. (1) tritt noch die Geschwindigkeitsverteilung

$$w(r) = 2 \bar{w} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (1a).$$

Hat die Rohrwandtemperatur bei $x = 0$ einen Sprung und ist im übrigen konstant, so haben wir das von Graetz und Nußelt behandelte Problem vor uns. Obwohl die Temperaturverteilung für alle $x > 0$ von x abhängt, strebt die Nußelt-Zahl einem Endwert (3,65) zu.

Eine sehr einfache Lösung entsteht, wenn $\partial \theta / \partial x = A = \text{const}$ gesetzt wird. Das bedeutet, daß aus der partiellen Differentialgleichung [Gl. (1)] eine gewöhnliche wird, die dem Lösungsansatz

$$\theta = Ax + \phi_r(r) \quad (2)$$

entspricht. Die Temperaturverteilung $\phi_r(r)$ ist unabhängig von x und ergibt die ebenfalls von x unabhängige Nußelt-Zahl¹⁾ $Nu = 48/11 = 4,364$, die sich im Gegensatz zum Graetz-Nußelt-Problem in geschlossener Form ausrechnen läßt. Die Annahme $\partial^2 \theta / \partial x^2 = 0$ ist für diesen Fall korrekt.

Die Möglichkeiten einer geschlossenen Lösung von Gl. (1) durch den Ansatz nach Gl. (2) werden offenbar dadurch nicht gefährdet, daß zu der rechten Seite von

*) Vorgelesen auf der internen Arbeitssitzung des Ausschusses „Wärmeaustauscher und Verdampfer“ der VDI-Fachgruppe Verfahrenstechnik am 25. April 1955 in Bad Homburg; vgl. diese Ztschr. 27, 436 [1955].

Gl. (1) weitere Funktionen von r hinzugefügt werden, solange sich diese Funktionen integrieren lassen. Das ist aber z. B. für den Ausdruck $\eta (dw/dr)^2$ der Fall, der in ausgebildeter rotationssymmetrischer Strömung als einziger aus der Dissipationsfunktion übrigbleibt. Demnach lautet die Energiegleichung mit Berücksichtigung der Reibungswärme für das Kreisrohr

$$\frac{2 \bar{w} A}{a} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) = \frac{d^2 \theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\theta}{dr} + \frac{16 \bar{w}^2 \eta}{\lambda R^4} r^2 \quad (3).$$

In dieser Gleichung ist der Lösungsansatz nach Gl. (2) benutzt, wobei θ für ϕ_r geschrieben werden soll, da wir uns im folgenden nur noch mit den von der Rohrlänge x unabhängigen Temperaturverteilungen beschäftigen wollen. Ferner wird die Temperaturleitzahl $a = \lambda/c\rho$ verwendet und die parabolische Geschwindigkeitsverteilung nach Gl. (1a) eingesetzt.

Lösungen für das Kreisrohr

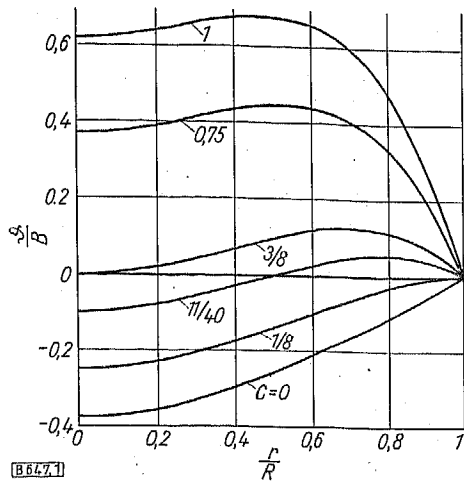
Durch diese einleitenden Betrachtungen, die die Möglichkeiten geschlossener Lösungen demonstrieren sollten, haben wir in Gl. (3) bereits die Ausgangsgleichung für das Kreisrohr bereitgestellt. Setzt man die Temperatur der Rohrwand gleich Null ($\theta = 0$ für $r = R$) und berücksichtigt, daß in der Rohrachse ($r = 0$) eine endliche Temperatur herrschen muß, so lautet die Lösung von Gl. (3)

$$\frac{\theta(r)}{B} = \left(-\frac{3}{8} + \frac{1}{2} \frac{r^2}{R^2} - \frac{1}{8} \frac{r^4}{R^4} \right) + C \left(1 - \frac{r^4}{R^4} \right) \quad (4).$$

Darin sind die Abkürzungen

$$B = \frac{\bar{w} A R^2}{a}, \quad C = \frac{\bar{w} \eta a}{\lambda A R^2} \quad \text{und} \quad BC = \frac{\eta \bar{w}^2}{\lambda}$$

verwendet. Die durch die Reibungswärme herrührende Temperaturverteilung $BC (1 - r^4/R^4)$ überlagert sich dem



[56471]

Bild 1. Temperaturverlauf im Kreisrohr nach Gl. (4). $C = 0$ bedeutet reine Konvektion ohne Reibungswärme. Der Temperaturanstieg in Achsenrichtung ($A = d\vartheta/dx$) ist positiv angenommen

Temperaturfeld für reine Konvektion ($C = 0$), wie es in Bild 1 dargestellt ist. Dabei treten eine Reihe von Besonderheiten auf.

Für $C = 1/8$ wird $(d\vartheta/dr) = 0$ für $r = R$, so daß keine Wärme durch die Wand hindurchtreten kann, obwohl die Mitteltemperatur im Rohr unterhalb der Wandtemperatur liegt. Unter Mitteltemperatur sei dabei das gewogene Massenmittel verstanden, das durch die Gleichung

$$\bar{\vartheta} = \frac{2\pi \int_0^R \rho c w(r) \vartheta(r) r dr}{\pi \rho c w R^2} \quad (5)$$

definiert ist. Mit den Gln. (4) und (1a) errechnet sich für das Kreisrohr

$$\bar{\vartheta} = B \frac{-11 + 40C}{48} \quad (6)$$

Diese Mitteltemperatur $\bar{\vartheta}$ wird für $C = 11/40$ zu Null, so daß damit trotz endlichen Wärmestroms durch die Wand eine auf $\bar{\vartheta}$ bezogene Wärmeübergangszahl α unendlich groß würde. Für $C = 3/8$ wird die Achsentemperatur gerade Null, Bild 1, für größere C -Werte ist das ganze Temperaturfeld positiv. Eine *Nußelt*-Zahl läßt sich durch folgende Gleichung definieren:

$$Nu = \frac{2R \left(\frac{d\vartheta}{dr} \right)_R}{\bar{\vartheta}} \quad (7)$$

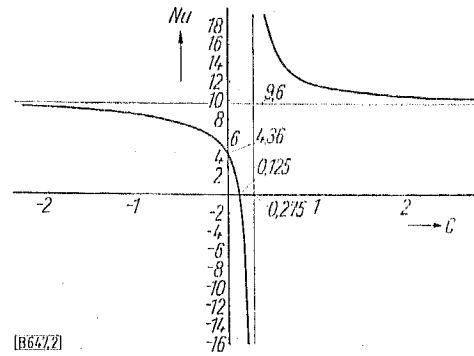
wenn der Rohrdurchmesser $D = 2R$ als Bezugslänge gewählt wird. Mit den Gln. (6) und (4) erhält man

$$Nu = \frac{48(1 - 8C)}{11 - 40C} \quad (8)$$

Den Verlauf der so errechneten *Nußelt*-Zahl für verschiedene Werte des Parameters C zeigt Bild 2. Für $C = 0$ entsteht der bereits genannte Wert $Nu = 48/11 = 4,364$, für $C = 1/8 = 0,125$ ist $Nu = 0$, während für $C = 11/40 = 0,275$, $Nu = \infty$ wird. Für C -Werte zwischen $1/8$ und $11/40$ werden die *Nußelt*-Zahlen negativ, da in diesem Bereich Wärme von der Flüssigkeit an die Wand abgegeben wird, obwohl die Mitteltemperatur, definiert nach Gl. (5), unterhalb der Wandtemperatur liegt, wie es aus Bild 1 erkennbar ist. Für sehr große C strebt Nu gegen den Wert $48/5 = 9,6$, wie man leicht aus der Umformung

$$Nu = \frac{48}{5} \frac{\left(\frac{1}{8C} - 1 \right)}{\left(\frac{11}{40C} - 1 \right)} \quad (8a)$$

erkennt.



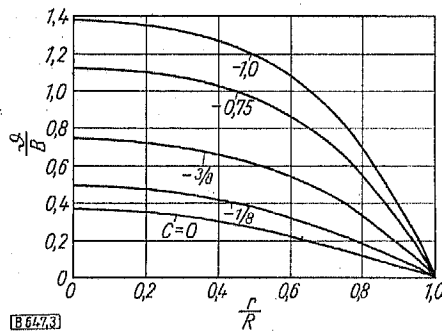
[56472]

Bild 2. Verlauf der *Nußelt*-Zahl beim Kreisrohr, bezogen auf die Mengemitteltemperatur nach Gl. (5), als Funktion des Parameters C [vgl. Gl. (8)]

Bild 1 zeigt die Temperaturprofile für positives A , also für Temperaturanstieg in Strömungsrichtung. Für negatives A sind die Verhältnisse weniger kompliziert, weil die Temperaturen auch für $C = 0$ positiv sind, Bild 3.

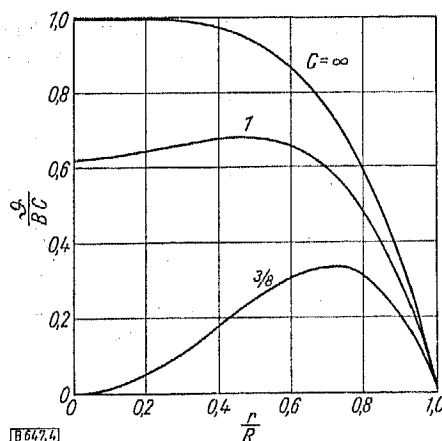
In der Darstellung von Bild 1 und 3 läßt sich die Reibungsströmung ohne Konvektion, also mit konstanten Temperaturen in x -Richtung ($A = 0$), nicht darstellen, man muß vielmehr die Darstellung von Bild 4 wählen, da der Ausdruck BC den Wert A nicht enthält; $A = 0$ bedeutet gleichzeitig $C = \infty$.

Die Kurve für $C = \infty$ stellt sich also dann ein, wenn der Anstieg der Temperatur in x -Richtung, $A = d\vartheta/dx$, den Wert Null annimmt. Man kann diese Kurve aber auch als Endwert eines Einlaufvorgangs ansehen, wie es in



[56473]

Bild 3. Temperaturverteilung im Kreisrohr wie Bild 1, jedoch mit negativem A



[56474]

Bild 4. Temperaturverlauf im Kreisrohr nach Gl. (4), dimensionslos gemacht mit dem Produkt BC . $C = \infty$ bedeutet konstante Temperaturen in x -Richtung ($A = 0$)

Bild 5 zeigt die dort für 3 Parameter x/R Pe eingezeichneten Kurven stammen aus einer Rechnung von Brinkmann²⁾. Trotz äußerlicher Ähnlichkeit haben die bei-

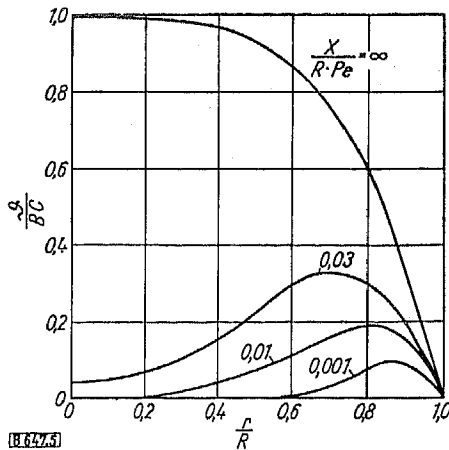


Bild 5. Einlaufvorgang im Kreisrohr mit Reibungswärme (nach Brinkmann). $Pe = \bar{w} 2 R/a$

den Vorgänge keine gegenseitigen Beziehungen; Bild 4 zeigt die Lösungen einer gewöhnlichen, Bild 5 die einer partiellen Differentialgleichung.

Lösungen für den ebenen Spalt

Die Energiegleichung für den ebenen Spalt lautet

$$w \rho c A = \lambda \frac{d^2 \vartheta}{dy^2} + \eta \left(\frac{dw}{dy} \right)^2 \quad (9)$$

mit $A = d\vartheta/dx$ und der zugehörigen Geschwindigkeitsverteilung

$$w(y) = \frac{3}{2} \bar{w} \left(1 - \frac{y^2}{s^2} \right) \quad (10)$$

worin $2s$ die Spaltbreite bedeutet. Die beiden Integrationskonstanten erlauben hier eine größere Mannigfaltigkeit als beim Rohr, und zwar können entweder die beiden Temperaturen der Wände (ϑ_1, ϑ_2) oder auch die Wärmestromdichten q als gegeben betrachtet werden, Bild 6.

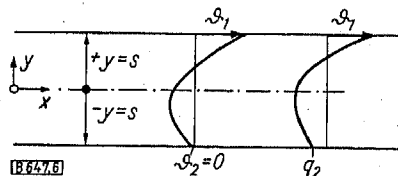


Bild 6. Bezeichnungen beim ebenen Spalt

Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 gegeben

Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit kann $\vartheta_2 = 0$ gesetzt werden. Dann lautet die Gleichung für das Temperaturfeld mit Reibung

$$\frac{\vartheta(y)}{B} = -\frac{5}{8} + \frac{3}{4} \frac{y^2}{s^2} - \frac{1}{8} \frac{y^4}{s^4} + \frac{3}{4} C \left(1 - \frac{y^4}{s^4} \right) + \frac{\vartheta_1}{2B} \left(1 + \frac{y}{s} \right)$$

$$\text{mit } B = \frac{\bar{w} A s^2}{a}, C = \frac{\bar{w} \eta a}{\lambda A s^2} \text{ und } BC = \frac{\eta \bar{w}}{\lambda} \quad (11)$$

Bildet man eine Mitteltemperatur $\bar{\vartheta}$ analog zu Gl. (5) und damit eine auf $2s$ bezogene *Nusselt-Zahl*, so wird diese im allgemeinen Falle

$$Nu = \frac{140(1-3C)}{34-48C-35\vartheta_1/B} \quad (12)$$

Für $C = 0$ und $\vartheta_1 = 0$ entsteht der schon bekannte Wert³⁾

$$Nu = \frac{70}{17} = 4,12 \quad (13)$$

Der Fall, daß Reibungswärme allein, also ohne Konvektion, auftritt ($A = 0$), wurde bereits von *Schlichting*⁴⁾ behandelt.

Das Temperaturfeld nach Gl. (11) ist für positive A in Bild 7 dargestellt. Die Kurve $C = 0$ und $\vartheta_1 = 0$ entspricht der reinen Konvektion ohne Reibung mit beiderseits gleichen Wandtemperaturen. Für $C = 1/3$ wird auf beiden Seiten durch die Reibungswärme der Wärmedurchgang gesperrt ($Nu = 0$), während für $C = 5/6$ die Achsentemperatur gleich den Wandtemperaturen wird. Der Fall $Nu = \infty$ läßt sich auch mit $C = 0$ für $\vartheta_1/B = 34/35$ erzeugen. Auch diese Temperaturverteilung ist in Bild 7 eingezeichnet. Aus Gl. (12) erhält man noch $Nu = 35/4 = 8,75$ für $C = \infty$ und $\vartheta_1 = 0$, also für reine Reibungswärme mit $A = 0$ und beiderseits gleichen Wandtemperaturen.

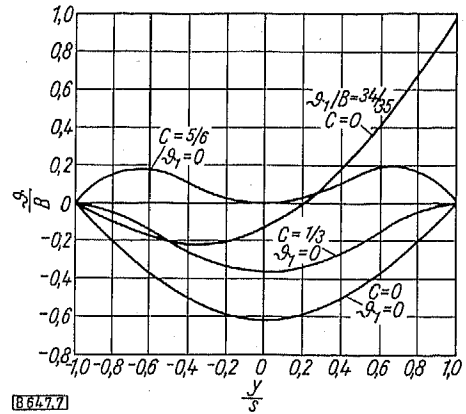


Bild 7. Temperaturverlauf im ebenen Spalt nach Gl. (11) Gegeben sind die beiden Wandtemperaturen ($\vartheta_2 = 0$ gesetzt)

Temperatur ϑ_1 und Wärmestromdichte q_2 gegeben

Im allgemeinen Falle errechnet sich folgendes Temperaturprofil:

$$\frac{\vartheta(y)}{B} = -\frac{13}{8} + \frac{y}{s} + \frac{3}{4} \frac{y^2}{s^2} - \frac{1}{8} \frac{y^4}{s^4} + \frac{3}{4} C \left(5 - 4 \frac{y}{s} - \frac{y^4}{s^4} \right) + \frac{\vartheta_1}{B} - Q_2 \left(1 - \frac{y}{s} \right) \quad (14)$$

Außer den auch für Gl. (11) gebrauchten Abkürzungen bedeutet hier noch $Q_2 = q_2 s / \lambda B$, wenn q_2 die Wärmestromdichte an der Wand $y = -s$ ist. Negatives Q bzw. q entspricht einem Wärmestrom von der Wand in die Flüssigkeit. Die Temperaturprofile zu Gl. (14) sind für positives A in Bild 8 dargestellt, wobei der besseren Übersicht wegen $\vartheta_1 = 0$ gesetzt ist. Für $C = 0$ und $Q_2 = 0$ ergibt sich der einseitig beheizte Spalt ohne Reibung (unterste Kurve), für den $\vartheta_2/B = -2$ wird. Für $C = 1/3$ ist wieder der Wärmedurchgang Null, für $C = 2/3$ wird die Temperatur $\vartheta_2/B = +2$. Alle Kurven für endliche C -Werte haben wie auch auf den früheren Bildern die charakteristischen beiden Wendepunkte. Weiter sind in Bild 8 noch die beiden Kurven $Q_2 = -1/2$ und $Q_2 = -1$ eingezeichnet und zwar für $C = 0$ (ohne Reibung). Wegen der 3 Parameter in Gl. (14), nämlich C, ϑ_1 und Q_2 , lassen sich sehr mannigfaltige Profile zeichnen, wofür Bild 8 nur Beispiele angeben soll.

Ein positiver Wert von Q_2 würde hier bedeuten, daß der Flüssigkeit auf der einen Seite Wärme zugeführt und auf der anderen entzogen wird. Das ist durchaus verträglich mit einem allgemeinen Anstieg der Temperaturen in x -Richtung, also mit positivem $A = d\vartheta/dx$.

Es muß nur die Wärmebilanz auf der Kanallänge L eingehalten werden:

$$\bar{w} \rho c A 2 s L = -(q_1 + q_2) L \quad (15)$$

woraus auch

$$\frac{q_1 + q_2}{2} = -\frac{B \lambda}{s} \quad (15a)$$

folgt.

Mit der Mitteltemperatur $\bar{\vartheta}$, die wieder analog zu Gl. (5) gebildet werden soll, wird für den allgemeinen Fall die auf die Kanalbreite $2s$ bezogene *Nußelt-Zahl*

$$Nu = \frac{70(1-3C)}{52-129C + \frac{35}{B} \left(\frac{q_2 s}{\lambda} - \vartheta_1 \right)} \quad (16)$$

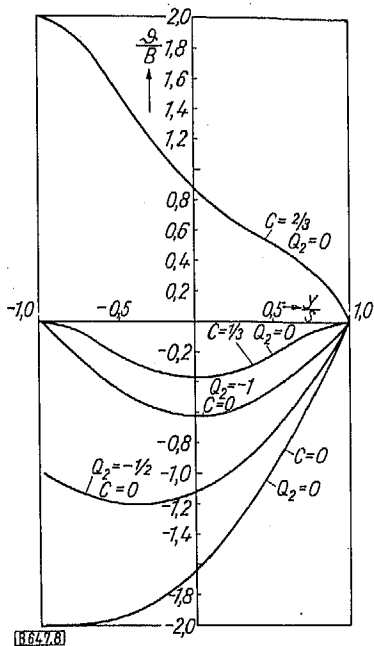


Bild 8. Temperaturverlauf im ebenen Spalt nach Gl. (14). Gegeben sind eine Wandtemperatur und eine Wärmestromdichte (ϑ_1 ist zur besseren Übersichtlichkeit = 0 gesetzt)

Wird $q_2 = 0$ gesetzt, also der einseitig beheizte Spalt mit wärmedichtem Abschluß auf der anderen Seite betrachtet, so muß die *Nußelt-Zahl* nach Gl. (16) verdoppelt werden, wenn als Bezugsfläche für die Wärmeübergangszahl die wärmedurchströmte Fläche beibehalten werden soll, wie es allgemein üblich ist. Wird gleichzeitig auch $\vartheta_1 = 0$ gesetzt, so entsteht aus Gl. (16) der Ausdruck

$$Nu = \frac{140(1-3C)}{52-129C} \quad (17)$$

Bei verschwindender Reibungswärme ($C = 0$) wird daraus der schon bekannte Wert $Nu = 140/52 = 2,69$. Für das Auftreten von Reibungswärme ohne Konvektion ($A = 0$, $C = \infty$) wird $Nu = 140/43 = 3,26$.

Auch die *Nußelt-Zahl* nach Gl. (17) hat als Bezugsgröße die Spaltbreite $2s$.

Zahlenbeispiele

Um den Einfluß der Reibungswärme einfach übersehen zu können, ist die Darstellung nach Bild 4 am meisten geeignet. Als maßgebender Parameter erscheint der Ausdruck $BC = \frac{\eta \bar{w}^2}{\lambda}$, der die Dimension einer Temperatur hat und im Kreisrohr die Übertemperatur in der Achse bedeutet. Um übereinstimmende Einheiten zu erhalten, rechnet man die Dimension der Wärmeleitfähigkeit λ zweckmäßig nach folgender Gleichung um:

$$1 \text{ kcal/m h grad} = 0,1186 \text{ kp/s grad}$$

Dann kann η in kp s/m^2 und \bar{w} in m/s eingesetzt werden. Beim einseitig beheizten Spalt mit konstanter Wandtemperatur ($A = 0$) und $\vartheta_1 = 0$ und $Q_2 = 0$ wird die Temperatur der isolierten Wand $\vartheta_2 = 6 \frac{\eta \bar{w}^2}{\lambda}$ nach Gl. (14).

Wir betrachten die Strömung von Glycerin von etwa 20°C in einem Rohr vom Radius $2,5 \text{ mm}$, wobei ein Druckabfall von etwa 1 at/m zugelassen sei. Dem entspräche eine Geschwindigkeit von $3,7 \text{ m/s}$. Mit $\lambda = 0,215 \text{ kcal/m h grad} = 0,255 \text{ kp/s grad}$ und $\eta = 2130 \cdot 10^{-6} \text{ kp s/m}^2$ ergibt sich

$$\frac{\eta \bar{w}^2}{\lambda} = 1,1^\circ$$

Beim Spalt würde also die isolierte Wand etwa 7° Übertemperatur annehmen. Überzeugender tritt der Einfluß der Reibungswärme bei sehr zähen Ölen in Erscheinung, z. B. bei einem

Flugmotorenöl mit $\eta = 80000 \cdot 10^{-6} \text{ kp s/m}^2$. Die Wärmeleitfähigkeit betrage $\lambda = 0,125 \text{ kcal/m h grad} = 0,0148 \text{ kp/s grad}$. Dann wird die Übertemperatur in der Rohrachse

$$\frac{\eta \bar{w}^2}{\lambda} = 5,4^\circ$$

und die der Spaltbegrenzung $32,4^\circ$, wenn eine Geschwindigkeit von 1 m/s zugrunde gelegt wird. Die genannten Temperaturen gelten übrigens unabhängig vom Rohrradius bzw. der Spaltbreite.

Es ergibt sich also, daß die Reibungswärme auch in technischen Fällen von Bedeutung sein kann.

Zusammenfassung

Am Beispiel des Kreisrohres und des ebenen Spaltes wird bewiesen, daß auch bei gleichzeitigem Auftreten von Konvektion, Wärmeleitung und Reibungswärme in laminarer Kanalströmung einfache Lösungen der Differentialgleichungen bestehen, wenn die Temperaturen geradlinig mit der Kanallänge ansteigen. Alle mitgeteilten Ergebnisse (außer Bild 5) stellen exakte und geschlossene Lösungen der Differentialgleichungen dar. In ähnlicher Weise ließe sich auch der Ringspalt behandeln. Das angegebene Verfahren wäre auch noch für andere Fälle brauchbar, beispielsweise für räumlich verteilte Wärmequellen, die nach anderen Funktionen angeordnet sind, als es bei der Reibungswärme der Fall ist. Auch braucht die Geschwindigkeitsverteilung nicht dem *Hagen-Poiseuilleschen* Gesetz zu gehorchen. Das eröffnet den Zugang zur Berechnung des Wärmeübergangs an nicht-Newton'sche Flüssigkeiten.

Die Bedingung $d\vartheta/dx = \text{const}$ bedeutet im allgemeinen keine Einschränkung, da in Wärmeaustauschern die Wandtemperaturen häufiger geradlinig oder angenähert geradlinig ansteigen, als daß sie konstant sind.

Eingeg. 2. Mai 1955 [B 647]

Verzeichnis der benutzten Abkürzungen

a	$= \lambda/c_Q$	[m^2/h]	Temperaturleitzahl
A	$= d\vartheta/dx$	[grad/m]	Temperaturgradient in Achsenrichtung
B	$= \frac{\bar{w} A R^2}{\alpha}$	[grad]	s. Gl. (4) bzw. Gl. (11)
	bzw.		
B	$= \frac{\bar{w} A s^2}{\alpha}$	[grad]	s. Gl. (4) bzw. Gl. (11)
BC	$= \frac{\eta \bar{w}^2}{\lambda}$	[grad]	s. Gl. (4) bzw. Gl. (11)
c		[$\text{kcal}/\text{kg grad}$]	spez. Wärme
C	$= \frac{\bar{w} \eta \alpha}{\lambda A R^2}$		s. Gl. (4) bzw. Gl. (11)
D		[m]	Rohrdurchmesser
L		[m]	Kanallänge
q		[$\text{kcal}/\text{m}^2 \text{ h}$]	Wärmestromdichte
Q	$= q s / \lambda B$		vgl. Gl. (14)
r		[m]	Koordinate in rad. Richtung beim Rohr
R		[m]	Rohrradius
s		[m]	halbe Spaltbreite
w		[m/s] bzw. [m/h]	Geschwindigkeit in Achsenrichtung
x		[m]	Koordinate in Achsenrichtung
y		[m]	Koordinate norm. zur Achse beim Spalt
η		[$\text{kp s}/\text{m}^2$]	dynamische Zähigkeit
ϑ		[grad]	Temperatur bzw. Temperaturdifferenz
λ		[$\text{kcal}/\text{m h grad}$] bzw. [kp/s grad]	Wärmeleitfähigkeit
ϱ		[kg/m^3]	Dichte

Literatur

- 1) H. Gröber, S. Erk u. U. Grigull: Die Grundgesetze der Wärmeübertragung, 3. Aufl. Berlin - Göttingen - Heidelberg 1955, S. 183 ff. Der Lösungsansatz nach Gl. (2) scheint erstmalig von H. L. Callendar benutzt worden zu sein (Phil. Trans. Roy. Soc. 199 A, 55/148 [1902], bes. S. 111/112).
- 2) H. C. Brinkmann: Appl. sci. Res. A 2, 120 [1951].
- 3) L. Jansen, Schweiz. Bau-Ztg. 70, 535 [1952]; H. Glaser, 1945 (unveröffentlicht), siehe Fußnote 1).
- 4) H. Schlichting, Z. angew. Math. Mechan. 31, 78 [1951].