

BELEGEXEMPLAR

Die Ermittlung der wirtschaftlichsten Isolierdicke

(nicht zurücksenden)

Von Dr.-Ing. **U. Grigull** VDI, Köln

Zur richtigen Bemessung eines Wärmer- oder Kälteschutzes ist der Begriff der „wirtschaftlichsten Isolierdicke“ von besonderer Bedeutung. Es wird eine Methode mitgeteilt, nach der diese Größe unter Benutzung eines einzigen Diagramms für alle vorkommenden Fälle mit Hilfe dimensionsloser Kenngrößen ermittelt werden kann.

Liegen keine speziellen betriebstechnischen Gesichtspunkte vor, so ist diejenige Isolierdicke die optimale, bei der die Summe aus dem Kapitaldienst für die Isolierung und den Kosten für die noch verbleibenden Wärmeverluste ein Minimum aufweist. Der Begriff dieser sog. „wirtschaftlichsten Isolierdicke“ wurde von *Hottinger*¹⁾ aufgestellt und von *Gerbel*²⁾ erstmalig ausführlich behandelt. Sie wurde dabei so bestimmt, daß für eine Reihe von Isolierdicken die beiden oben erwähnten Summanden errechnet und das Minimum der Summenkurve graphisch oder tabellarisch ermittelt wurde.

Diese Methode hat den Vorzug großer Anschaulichkeit, da gleichzeitig die Wärmeverluste und die Einzelkosten erscheinen. Sie ist aber auch recht umständlich und zeitraubend, so daß es bei der Projektierung umfangreicher und vierteiliger Anlagen, z. B. von Wärmekraftwerken, einen erheblichen Rechenaufwand bedeutet, die Isolierung der verschiedenen Kreisläufe richtig auszulegen. Da dieses Problem gleichzeitig eine Minimum-Aufgabe darstellt, sind schon wiederholt Versuche zu seiner einfacheren Lösung unternommen worden. So benutzt *Borschke*³⁾ eine graphische Hilfskonstruktion, während *Fabry*⁴⁾ unter Einführung von Kennwerten ein Diagramm bzw. eine Zahlentafel aufstellt, die aber nur für einen bestimmten Rohrdurchmesser gelten. Auch *Cammerer*⁵⁾ löst das Problem unter bestimmten Vereinfachungen durch Zahlentafeln. Die VDI-Richtlinien⁶⁾ teilen aus einer Vielzahl von praktischen Fällen gewonnene Erfahrungswerte mit, die mindestens einen guten Anhalt geben.

Im folgenden wird unter Benutzung dimensionsloser Kennwerte ein Diagramm entworfen, das für alle praktisch möglichen Fälle anwendbar ist und die wirtschaftlichste Isolierdicke unmittelbar, ebenfalls dimensionslos, abzulesen gestattet. Dabei läßt sich auch sofort der Einfluß jeder einzelnen der insgesamt acht Veränderlichen ermitteln.

Ableitung der Gleichung für die wirtschaftlichste Isolierdicke beim Rohr

Der Wärmeverlust eines isolierten Rohres beträgt

$$q = 2 \pi \lambda \vartheta / \ln (d_a / d_i) \text{ [kcal/m h]} \dots (1)$$

Darin bedeuten λ [kcal/m h °C] die Wärmeleitzahl des Isolierstoffs bei seiner Mitteltemperatur, ϑ [°C] das Temperaturgefälle in der Isolierung, d_a und d_i [m] den Außen- bzw. Innendurchmesser der Isolierung. In Gl. (1) ist der äußere Wärmeübergangsvorgang nicht enthalten, so daß eine Ermittlung oder Schätzung der äußeren Übertemperatur der Isolierung über die Umgebung notwendig ist, da normalerweise nur die innere Übertemperatur bzw. die Rohrtemperatur gegeben sein wird. Diese scheinbare Erschwerung bedeutet gleichzeitig eine Verallgemeinerung, da die abgeleiteten Beziehungen für ruhende und bewegte Luft gültig bleiben. Wegen der Verschiedenheit der physi-

kalischen Grundlagen gibt es weder eine empirische noch eine exakte Formel, die beide Wärmeübergangsvorgänge gleichzeitig beschreibt.

Mit Gl. (1) ergeben sich die Kosten der Wärmeverluste zu

$$W = q b w / 10^6 = 2 \pi \lambda \vartheta b w / 10^6 \ln (d_a / d_i) \text{ [DM/m u. Jahr]} \quad (2)$$

wenn b die Benutzungsdauer der Anlage [h/Jahr] und w den Wärmepreis [DM/10⁶kcal] bedeuten. In dem Wärmepreis w sind auch alle etwaigen Zuschläge für die Entwertung des Wärmeträgers durch die Abkühlung enthalten.

Der Kapitaldienst für die Isolierung ergibt sich zu

$$P = k \pi d_a p / 100 \text{ [DM/m u. Jahr]} \dots (3)$$

wenn k die Kosten der Isolierung in DM je m² äußerer Isolierungsoberfläche und p [DM/100 DM u. Jahr] den Prozentsatz der Verzinsung und Amortisation für die Isolierung bedeuten.

Für das Durchmesser Verhältnis führen wir die Abkürzung $\delta = d_a / d_i$ ein und schreiben ferner für die Kosten der Isolierung

$$k = k_0 + 100 s k' \text{ [DM/m}^2\text{]} \dots (4)$$

Hierin bedeuten $s = (d_a - d_i) / 2 = d_i (\delta - 1) / 2$ die Isolierdicke [m] und k' die Zunahme der Kosten, entsprechend dem Gebrauch der Praxis auf die Steigerung der Isolierdicke um 1 cm bezogen⁷⁾, also in [DM/m² cm]. Der Summand k_0 stellt die Kosten der Isolierung, auf die Isolierdicke $s = 0$ extrapoliert, dar. Gl. (4) gibt die Beziehung zwischen den Kosten k und der Dicke s einer Isolierung, also die Preisstaffelung, wieder.

Es ist nun diejenige Isolierdicke s bzw. das Durchmesser Verhältnis δ zu suchen, für welches der Ausdruck $(W + P)$ ein Minimum wird. Unter Benutzung von Gl. (1) bis (4) und mit $d_a = \delta d_i$ erhält man dafür:

$$\frac{2 \pi \lambda \vartheta b w}{10^6 \ln \delta} + \frac{\pi d_i p}{100} \left[\delta k_0 + \frac{100 d_i k'}{2} (\delta^2 - \delta) \right] \rightarrow \text{Min.} \quad (5)$$

Differenziert man Gl. (5) nach δ und setzt das Ergebnis gleich Null, so erhält man in bekannter Weise nach geringen Umrechnungen:

$$\frac{2 \lambda \vartheta b w}{10^4 d_i p k_0} \frac{1}{\delta (\ln \delta)^2} - 50 \frac{d_i k'}{k_0} (2 \delta - 1) = 1 \dots (6)$$

Für die entstandenen dimensionslosen Gruppen der Veränderlichen führen wir zur Abkürzung die Betriebskennzahl

$$B = \frac{\lambda \vartheta b w}{10^4 d_i p k_0}$$

und die Kostenkennzahl

$$K = 50 \frac{d_i k'}{k_0}$$

ein. Damit wird aus Gl. (6)

$$2 B / \delta (\ln \delta)^2 - K (2 \delta - 1) = 1 \dots (7)$$

Gl. (7) ist eine Beziehung zwischen der wirtschaftlichsten Isolierdicke s_w bzw. dem entsprechenden Wert des Durchmesser Verhältnisses $\delta = d_a / d_i$ und den beiden dimensionslosen Kenngrößen B und K . Sie stellt also bereits die Lösung unseres Problems dar.

⁷⁾ In Gl. (4) hat der Faktor 100 also die Dimension [cm/m].

¹⁾ *Hottinger, M.*: Theoretische Betrachtungen praktischer Beispiele der Lüftungs- und Wärmetechnik. Gesundheits-Ing. 42 (1919) S. 161/69.

²⁾ *Gerbel, M.*: Die wirtschaftlichste Stärke einer Isolierung. Berlin 1921, VDI-Verlag.

³⁾ *Borschke, E.*: Berechnung der wirtschaftlichsten Isolierdicken. Arch. Wärmew. 9 (1928) S. 117/20.

⁴⁾ *Fabry, C.*: Die Bestimmung der wirtschaftlichsten Isolierstärke bei Rohrleitungen. Wärme 55 (1932) S. 163/64.

⁵⁾ *Cammerer, J. S.*: Der Wärme- und Kälteschutz in der Industrie. Berlin 1938, S. 273 ff.

⁶⁾ Richtlinien zur Bemessung von Wärme- und Kälteschutzanlagen. Berlin 1931, VDI-Verlag. S. 3 und Tafel VII u. VIII.

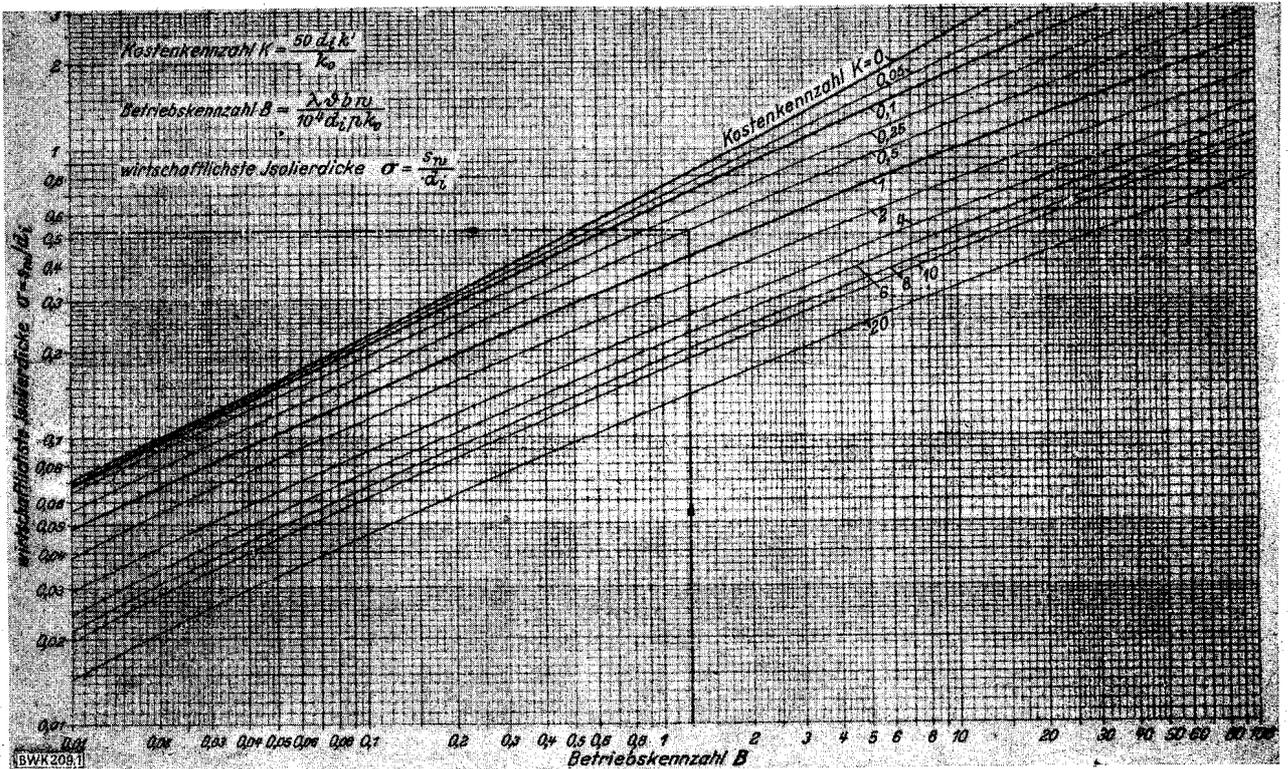


Bild 1. Ermittlung der dimensionslosen wirtschaftlichsten Isolierdicke σ aus Betriebskennzahl B und Kostenkennzahl K ⁹⁾.

Graphische Darstellung

Da Gl. (7) nicht auf einfache Weise nach δ auflösbar ist, wurde sie in einem Diagramm graphisch dargestellt, wobei die Kostenkennzahl K als Parameter diente. Als Gleichung zwischen drei Veränderlichen läßt sich Gl. (7) in einem einzigen Diagramm für alle nur möglichen Werte auftragen. Anstelle von $\delta = d_a/d_1$ wurde der bequemere Wert $\sigma = s_w/d_1 = (\delta - 1)/2$, also die durch den Rohrdurchmesser d_1 dimensionslos gemachte wirtschaftlichste Isolierdicke s_w , zur Darstellung benutzt. Zur bequemeren Zahlenrechnung wurde Gl. (7) noch in folgende Form gebracht:

$$\delta (\ln \delta)^2 [K (2\delta - 1) + 1] = 2B \dots (8)$$

Da der Zahlenwert der Betriebskennzahl B sich in praktischen Fällen über mehrere Zehnerpotenzen erstrecken kann, wurde Gl. (8) in doppelt-logarithmischem Maßstab dargestellt, Bild 1. Das hatte gleichzeitig den Vorteil, daß der praktisch wichtige Bereich von $\sigma = (s_w/d_1)$, der zwischen 1 und 0,1 liegt, auseinandergezogen wurde ⁸⁾.

Praktische Anwendung

Aus den gegebenen Werten von
 Wärmeleitzahl des Isolierstoffes λ [kcal/m h °C]
 Temperaturgefälle in der Isolierschicht ϑ [°C]
 Benutzungsdauer b [h/Jahr]
 Wärmepreis w [DM/10⁶ kcal]
 Rohrdurchmesser d_1 [m]
 Kapitaldienst p [%]
 Kosten der Isolierung (bei der Isolierdicke null)
 k_0 [DM/m²] und der Kostenstaffelung k' [DM/m² cm]
 werden die beiden Werte für die Betriebskennzahl B und die Kostenkennzahl K errechnet und aus Bild 1 der zugehörige Wert von $\sigma = \frac{s_w}{d_1}$ ermittelt. Daraus wird die wirtschaftlichste Isolierdicke $s_w = \sigma \cdot d_1$ errechnet. Da B , K und σ dimensionslos sind, kann Bild 1 für sämtliche Maßsysteme und Währungen benutzt werden ⁹⁾.

⁸⁾ Bild 1 ist in doppelter Größe als BWK-Arbeitsblatt 5 diesem Heft beigegeben; das Blatt kann auch einzeln vom Deutschen Ingenieur-Verlag bezogen werden.

⁹⁾ Bei nicht dezimalen Maßsystemen ist der Faktor 100/2 = 50 in der Kostenkennzahl K entsprechend zu berichtigen.

Wenn die Preisstaffelung k' nicht für alle Isolierdicken konstant ist, so ist der Wert von k' zu benutzen, der für den zu erwartenden Bereich von s_w gilt. Mit diesem Wert ist dann auch k_0 zu berechnen. Bei Isolierungen mit Hartmantel muß entweder die äquivalente Wärmeleitzahl für Isolierstoff und Hartmantel zusammen ermittelt werden, für viele Fälle wird es allerdings genügen, den Hartmantel zu vernachlässigen, da er zum Wärmeschutz nicht viel beiträgt. k_0 gilt dann für eine Isolierdicke gleich der Dicke des Hartmantels.

Die oben beschriebene Methode wurde an zahlreichen Werten geprüft, die das „Forschungsheim für Wärmeschutz E. V.“, München, ¹⁰⁾ in den letzten Jahren für verschiedene Bedarfsfälle nach dem Verfahren von Gerbel ²⁾ ermittelt hatte. Es ergab sich in allen Fällen eine völlige Übereinstimmung bei bedeutend geringerem Zeitaufwand. Der Vorteil unseres Verfahrens zeigte sich besonders bei Reihenermittlungen für ein und dieselbe Anlage, wenn nur Temperatur und Rohrdurchmesser variieren, da hierbei die Berechnung der Kennwerte sehr vereinfacht wird. Aber auch für gewöhnliche Fälle ist die Zeitersparnis beträchtlich. Zur Ermittlung von ϑ wurde dabei die von der Dicke der Isolierung abhängige Oberflächentemperatur der Isolierung geschätzt, was in allen Fällen ausreichte. Für eine genauere Bestimmung der Oberflächentemperatur sind im Schrifttum zahlreiche Zahlentafeln und Diagramme zu finden ¹¹⁾.

Um gewisse Anhaltswerte für die wirtschaftlichste Isolierdicke zu geben, wurde für verschiedene Rohrdurchmesser und Temperaturen unter den heute etwa geltenden Preisverhältnissen in zwei verschiedenen Isolierungsausführungen die wirtschaftlichste Isolierdicke s_w ermittelt. Bild 2 zeigt die Werte für eine hochwertige Isolierung langer Lebensdauer, etwa in Faserstoffen hinter Blechmantel. Es wurden dabei folgende Werte zugrunde gelegt:

$$k_0 = 12 \text{ DM/m}^2, k' = 0,5 \text{ DM/m}^2 \text{ cm}, b = 5000 \text{ h/Jahr}, w = 10 \text{ DM/10}^6 \text{ kcal}, p = 12\%$$

¹⁰⁾ Wissenschaftliche Leitung: Dr.-Ing. E. Raisch.

¹¹⁾ z. B. Cammerer, J. S., a. a. O. S. 246 ff.; Balcke, H.: Die Wärmeschutztechnik. Halle (Saale) 1949, S. 35 u. a.

Als zweiter Fall wurde eine billigere Isolierung entsprechend geringerer Haltbarkeit durchgerechnet, z. B. in Faserstoff-Matten, die mit Bitumenpappe umhüllt sind, Bild 3. Hierbei wurden folgende Werte angenommen: $k_0 = 5,50 \text{ DM/m}^2$, $k' = 0,8 \text{ DM/m}^2 \text{ cm}$, $b = 5000 \text{ h/Jahr}$, $w = 10 \text{ DM/10}^6 \text{ kcal}$, $p = 25\%$, was eine kürzere Lebensdauer bei sonst gleichen Verhältnissen wie im ersten Beispiel bedeutet.

Der Vergleich der beiden Diagramme zeigt, daß es für praktische Fälle kaum angebracht erscheint, mit „mittleren“ Verhältnissen zu rechnen. Die beiden Kennwerte B und K können innerhalb weiter Grenzen schwanken, so daß in jedem Einzelfall eine genaue Ermittlung der wirtschaftlichsten Isolierdicke s_w notwendig ist. Der Einfluß z. B. der Benutzungsdauer b , des Wärmepreises w oder des Kapitaldienstes p auf die Größe von s_w ist nach der mitgeteilten Methode leicht zu ermitteln.

Da die Kurven $K = \text{const}$ in Bild 1 annähernd Gerade sind, liegt der Gedanke nahe, eine einzige Gleichung von der Form

$$\sigma = a B^c$$

aufzustellen, wobei a und c Funktionen von K sind. Die Kurven $K = \text{const}$ ließen sich zu diesem Zweck mindestens im technisch wichtigen Bereich linearisieren. Jedoch brächte eine solche Gleichung keine Vereinfachung, da die Funktionen $a(K)$ und $c(K)$ zu kompliziert würden. Außerdem würde die Genauigkeit eines solchen Verfahrens nur gering sein. Es sei daher auf die Mitteilung einer derartigen Gleichung verzichtet.

Es sollte nicht übersehen werden, daß die wirtschaftlichste Isolierdicke eine exakt definierte Größe ist, die sich für gegebene Verhältnisse mit beliebiger Genauigkeit ermitteln läßt. Daran ändert auch die Tatsache nichts, daß man in der Praxis oft aus bestimmten Gründen eine andere Isolierdicke

Die Wärmekosten betragen

$$W = q b w / 10^6 = \lambda \vartheta b w / 10^6 s \text{ [DM/m}^2 \text{ u. Jahr]} \quad (10),$$

während sich der Kapitaldienst zu

$$P = k p / 100 = (k_0 + 100 s k') p / 100 \text{ [DM/m}^2 \text{ u. Jahr]} \quad (11)$$

ergibt.

Für die wirtschaftlichste Isolierdicke gilt wieder die Bedingung:

$$\lambda \vartheta b w / 10^6 s + (k_0 + 100 s k') p / 100 > \text{Min.} \quad (12).$$

Durch Differentiation von Gl. (12) nach s und Nullsetzen erhält man nach einigen Umrechnungen für die wirtschaftlichste Isolierdicke

$$s_w = \frac{1}{1000} \sqrt{\frac{\lambda \vartheta b w}{p k'}} \text{ [m]} = \sqrt{\frac{\lambda \vartheta b w}{p k'}} \text{ [mm]}^{1/2} \quad (13).$$

Bei der ebenen Wand ist also im Gegensatz zum Rohr die wirtschaftlichste Isolierdicke s_w nicht mehr vom Grund-

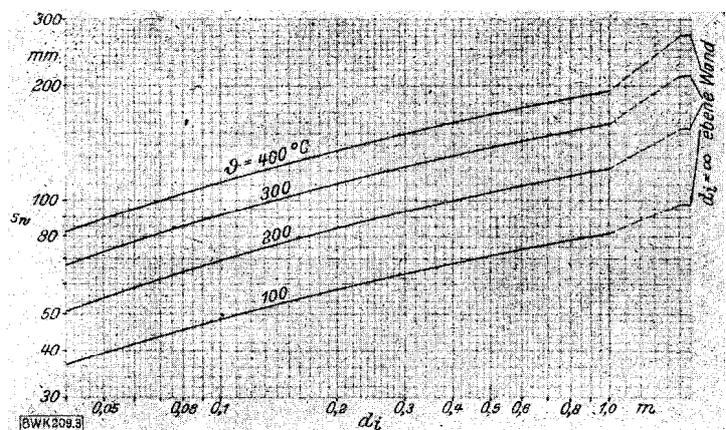


Bild 3. Wirtschaftlichste Isolierdicke für eine billigere Ausführung geringerer Lebensdauer (z. B. Faserstoff-Matten hinter Bitumenpappe).

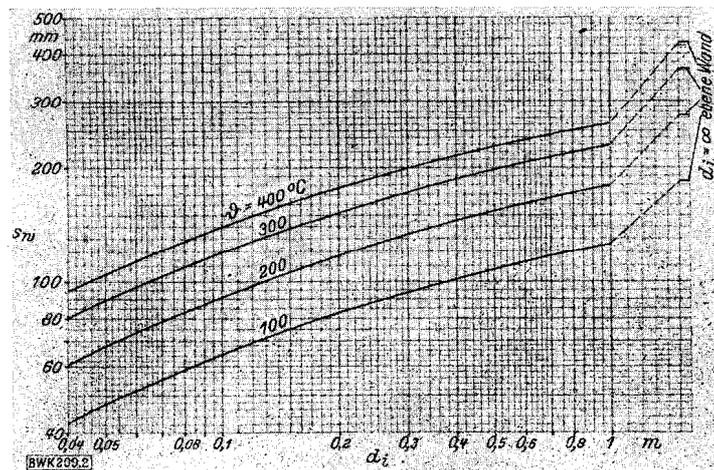


Bild 2. Wirtschaftlichste Isolierdicke s_w für eine hochwertige Isolierung langer Lebensdauer (z. B. Faserstoffisolierung hinter Blechmantel).

wählt oder wählen muß (z. B. Platzbedarf, Schwitzwasserbildung, Schutz gegen Einfrieren usw.). Es ist aber vorteilhaft, auch in diesen Fällen die wirtschaftlichste Isolierdicke s_w genau zu bestimmen, um sie zur endgültigen Auslegung einer Isolierung mit heranziehen zu können.

Ebene Wand

Für die ebene Wand ergibt sich der Wärmeverlust (mit den früheren Bezeichnungen) zu:

$$q = \lambda \vartheta / s \text{ [kcal/m}^2 \text{ h]} \quad (9).$$

preis k_0 [DM/m²], sondern nur noch von der Preisstaffellung k' [DM/m² cm] abhängig. Da hierbei keine einfache Bezugsgröße für s_w besteht, kann Gl. (13) nicht in Bild 1 aufgenommen werden. Die Berechnung von s_w ist nach Gl. (13) sehr einfach. Die entsprechenden Werte wurden zum Vergleich in Bild 2 und 3 aufgenommen. Es überrascht, wie langsam die Werte für s_w sich der Asymptote $d_i = \infty$ nähern, so daß selbst für Gefäße größeren Durchmessers eine Ermittlung der wirtschaftlichsten Isolierdicke nach Bild 1 notwendig ist.

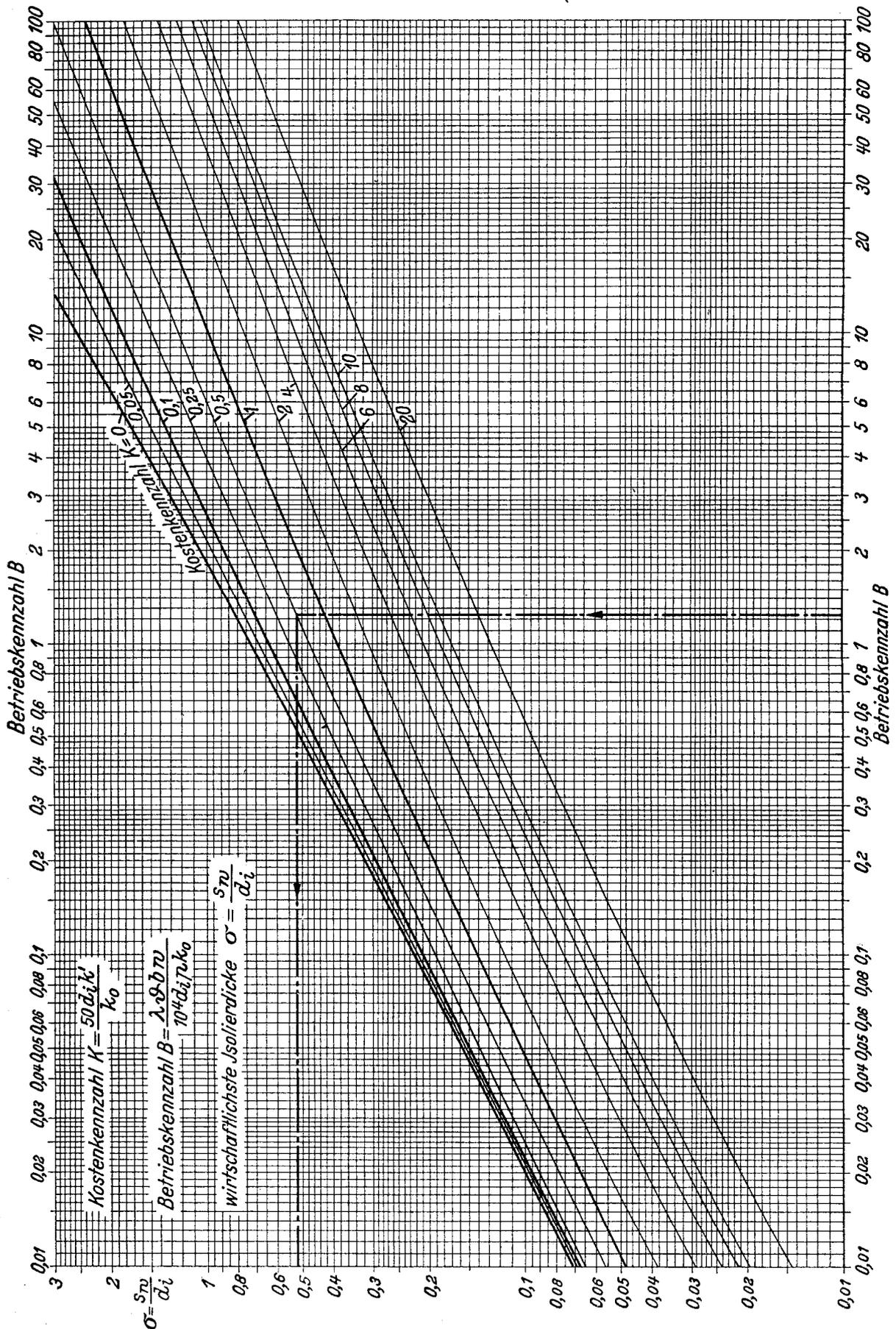
Zusammenfassung

Die Gleichung für die wirtschaftlichste Isolierdicke s_w eines Rohres läßt sich graphisch als Gleichung zwischen drei dimensionslosen Veränderlichen lösen, so daß ein Diagramm für alle vorkommenden Fälle ausreicht. Dadurch wird die Bestimmung sehr vereinfacht. Aus den gegebenen Größen werden die Betriebskennzahl B und die Kostenkennzahl K errechnet, aus Bild 1 wird die wirtschaftlichste Isolierdicke in dimensionsloser Form entnommen. Für zwei verschiedene Ausführungen werden Zahlenwerte von s_w als Anhalt mitgeteilt. Der Einfluß der insgesamt acht unabhängigen Veränderlichen auf s_w ist leicht zu übersehen. Für die ebene Wand ergibt sich ein geschlossener Ausdruck, der hier unmittelbar auf s_w führt. BWK 209

¹²⁾ Es muß beachtet werden, daß Gl. (13) durch Kürzen des Faktors 100 nicht mehr dimensionsrichtig ist. Da die Praxis aber einheitlich die Preisstaffellung k' auf den cm Isolierdicke bezieht, wurde dieser Brauch auch hier beibehalten. Bei Übergang auf andere Maßsysteme ist darauf Rücksicht zu nehmen. Gl. (13) findet sich bereits bei K. Seiffert: Wirtschaftlichste Isolierstärke in der Kältetechnik und andere Einzelprobleme des Kühlhausbaus. Kälte-Ind. 36 (1939) S. 49/54, 64/68 u. 77/79.

BELEGEXEMPLAR
(nicht zurücksenden)

Nachdruck, auch auszugsweise, nicht gestattet



Erläuterungen

Zeichenerklärung:

λ [kcal/m h °C]	= Wärmeleitzahl des Isolierstoffes bei seiner Mitteltemperatur
ϑ [°C]	= Temperaturgefälle in der Isolierschicht zwischen ihrer inneren und äußeren Oberfläche
b [h/Jahr]	= Benutzungsdauer der Anlage
w [DM/10 ⁶ kcal]	= Wärmepreis einschließlich Entwertung des Wärmeträgers durch Wärmeverluste
d_i [m]	= Innendurchmesser der Isolierung (= Außendurchmesser des Rohres)
p [%]	= Kapitaldienst der Isolierung (Verzinsung und Amortisation)
k_o [DM/m ²]	= Kosten der Isolierung bei der Isolierdicke null, bezogen auf die äußere Isolieroberfläche
k' [DM/m ² cm]	= Kostenstaffelung der Isolierung bei Zunahme der Isolierdicke um 1 cm
s_w [m]	= wirtschaftlichste Isolierdicke
σ	= s_w/d_i
$B = \frac{\lambda \vartheta b w}{10^4 d_i p k_o}$	= Betriebskennzahl
$K = 50 \frac{d_i k'}{k_o}$	= Kostenkennzahl (der Faktor 50 gilt nur für dezimale Maßsysteme! $K = 0$ bedeutet eine Isolierung ohne Kostenstaffelung ($k' = 0$))

Beispiel:

Gegeben sind:

$$\begin{aligned} \lambda &= 0,05 \text{ kcal/m h } ^\circ\text{C} \\ \vartheta &= 250^\circ\text{C (geschätzt aus Rohr- und Lufttemperatur)} \\ b &= 8000 \text{ h/Jahr} \\ w &= 10 \text{ DM/10}^6 \text{ kcal} \\ d_i &= 0,267 \text{ m} \\ p &= 20\% \\ k_o &= 15 \text{ DM/m}^2 \\ k' &= 0,55 \text{ DM/m}^2 \text{ cm} \end{aligned}$$

Daraus wird errechnet:

$$B = \frac{0,05 \cdot 250 \cdot 8000 \cdot 10}{10^4 \cdot 0,267 \cdot 20 \cdot 15} = 1,248$$

$$\text{und } K = \frac{50 \cdot 0,267 \cdot 0,55}{15} = 0,49$$

Aus Diagramm wird entnommen:

$$\sigma = 0,52$$

Damit wird die **wirtschaftlichste Isolierdicke:**

$$s_w = \sigma \cdot d_i = 0,52 \cdot 0,267 = 0,139 \text{ m} \approx 140 \text{ mm}$$