

Technische Universität München  
Institut für Energietechnik

Lehrstuhl für Thermodynamik

# **Numerische Berechnung der Emission verbrennungsinduzierten Lärms automobiler Zusatzheizungen**

**Fabian Christian Weyermann**

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der  
Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades  
eines

DOKTOR – INGENIEURS

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. Wolfgang A. Wall

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattelmayer

2. Univ.-Prof. Dr.rer.nat.habil. Peter Rentrop

Die Dissertation wurde am 25.02.2010 bei der Technischen Universität München eingereicht  
und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 31.05.2010 angenommen.



---

## Vorwort

Diese Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Lehrstuhl für Thermodynamik der TU München von September 2004 bis Juni 2009. Sie ging aus einem gemeinsamen Forschungsprojekt mit der Firma Webasto AG hervor und wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft unterstützt.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattelmayer für die Betreuung meiner Arbeit. Besonders dankbar bin ich für die wissenschaftlichen Freiräume, die mir bei der Bearbeitung meines Projektes gewährt wurden. Vielen Dank für das Vertrauen und die Unterstützung.

Ich freue mich besonders, dass Herr Professor Dr.rer.nat habil. Peter Rentrop das Koreferat übernommen hat. Während der letzten fünf Jahre zeigte er sich immer interessiert für meine Arbeit und stand mir mit Rat und Tat zur Seite. Vielen Dank dafür! Herrn Professor Dr.-Ing. Wolfgang A. Wall danke ich für die Übernahme des Vorsitzes bei der mündlichen Prüfung.

Nicht unerwähnt bleiben darf auch unser Oberingenieur Dr.-Ing. Christoph Hirsch. Er hatte immer ein offenes Ohr und seine Begeisterung für die Forschung motivierte immer wieder. Auch bedanken will ich mich bei meinem Projektpartner, der Webasto AG und hier besonders bei Herrn Dr. Holzwarth für die gute Zusammenarbeit.

Besonders möchte ich mich bei meinen ehemaligen Kolleginnen und Kollegen bedanken, zum einen für die fachliche Unterstützung, vor allem aber für die schöne Zeit am Lehrstuhl, die nicht nur aus Arbeit bestand, sondern auch aus Biergarten, Wiesn, Skifahren... . Nennen möchte ich hier besonders meine ehemaligen Bürokollegen Volodimir Ilchenko, Elke Wanke, Stefanie Bade und Jannis Gikardi. Vielen Dank auch an unser Sekretariat, Frau Bassett und Frau Schulz-Reichwald, die mir immer wieder eine Hilfe waren.

Zum Schluss danke ich natürlich ganz besonders meinen Eltern für die langjährige Unterstützung und den Beistand während der vielen Jahre meiner Ausbildung und insbesondere der Fertigstellung der Dissertation.

München, im September 2010

Fabian Weyermann



---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
1.1	Bedeutung turbulenter Verbrennungssysteme . . . . .	1
1.2	Literaturübersicht Verbrennungslärm . . . . .	1
1.3	Automobile Zusatzheizungen . . . . .	4
1.4	Ziel dieser Arbeit . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Grundlagen der Akustik</b>	<b>9</b>
2.1	Grundgleichungen . . . . .	9
2.1.1	Herleitung der Lighthill-Gleichung . . . . .	9
2.1.2	Thermoakustischer Quellterm . . . . .	11
2.1.3	Wellen mit konstanter Frequenz . . . . .	12
2.1.4	Achsensymmetrische Wellengleichung . . . . .	13
2.1.5	Lösung der eindimensionalen Wellengleichung . . . . .	14
2.2	Grundbegriffe der Akustik . . . . .	15
2.2.1	Ebene Wellen . . . . .	15
2.2.2	Intensität und Leistung . . . . .	16
2.2.3	Akustische Impedanz . . . . .	18
2.2.4	Reflexionsfaktor . . . . .	19
2.2.5	Randbedingungen . . . . .	19
2.2.6	RMS-Wert . . . . .	20
2.3	Rankine-Hugoniot Beziehungen . . . . .	22
2.3.1	Allgemeine Herleitung . . . . .	22
2.3.2	Zusammenhang mit dem thermoakustischen Quellterm der Wellengleichung . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Einfluss des Einschlusses auf die Schallabstrahlung von Flammen</b>	<b>29</b>
3.1	Lösung der inhomogenen Helmholtzgleichung . . . . .	29

3.1.1	Freifeldlösung der Helmholtzgleichung (Kugelsymmetrie)	30
3.1.2	Lösung der Helmholtzgleichung für das Rohr . . . . .	31
3.1.3	Emittierte Schalleistung . . . . .	32
3.2	Verbrennungslärm . . . . .	37
3.3	Rohr mit reflektierenden Enden . . . . .	40
3.4	Abhängigkeit der abgestrahlten Leistung vom Abstand zwischen Quelle und Auslass . . . . .	45
3.5	Anwendung auf das Heizgerät . . . . .	49
<b>4</b>	<b>Turbulente Verbrennung</b>	<b>53</b>
4.1	Turbulente Strömungen . . . . .	54
4.2	Verbrennung . . . . .	59
4.2.1	Vormischflammen . . . . .	60
4.2.2	Diffusionsflammen . . . . .	62
4.2.3	Skalare Dissipation . . . . .	63
4.2.4	Brennregimes . . . . .	65
4.2.5	Modellierung turbulenter Verbrennung . . . . .	68
<b>5</b>	<b>Verbrennungslärm</b>	<b>73</b>
5.1	Modellierung von Verbrennungslärm . . . . .	73
5.1.1	Berücksichtigung des aktiven Charakters . . . . .	74
5.1.2	Übergang vom Wellenzahlspektrum $E_q$ zum Frequenz- spektrum $\Phi_q$ . . . . .	77
5.2	Berechnung der abgestrahlten akustischen Leistung . . . . .	80
5.3	Kohärenzvolumen . . . . .	83
5.4	Akustisches Leistungsdichtespektrum der eingeschlossenen Flamme . . . . .	85
5.5	Diffusionsflammen . . . . .	85
<b>6</b>	<b>Lärmberechnung</b>	<b>89</b>
6.1	Berechnungsmethode . . . . .	89
6.2	Numerische Verfahren . . . . .	91
6.2.1	Finite-Elemente-Methode . . . . .	91
6.2.2	Akustische Netzwerkmethoden . . . . .	95
6.3	Simulation von turbulenter Verbrennungslärm . . . . .	99

6.3.1	Berechnung mit konstanter Phase . . . . .	99
6.3.2	Einfluss der Phasenlage . . . . .	100
6.3.3	Lärmberechnung im Frequenzbereich . . . . .	101
<b>7</b>	<b>Berechnung BRS-Brenner</b>	<b>103</b>
7.1	Akustische Modellierung . . . . .	104
7.1.1	Randbedingungen . . . . .	104
7.1.2	Netzwerkmodell . . . . .	106
7.2	Lärmberechnung . . . . .	109
7.2.1	CFD-Simulation . . . . .	109
7.2.2	Quellspektrum . . . . .	110
7.2.3	Schalldruckberechnung FE-Modell . . . . .	114
7.2.4	Schalldruckberechnung Netzwerk . . . . .	117
7.3	Analyse der Messdaten . . . . .	120
7.4	Strömungsinduzierte Resonanzeffekte . . . . .	121
7.4.1	FE-Simulation mit Rückkopplung . . . . .	124
7.5	Fazit . . . . .	128
<b>8</b>	<b>Berechnung Heizgerät</b>	<b>131</b>
8.1	Aufbau und Funktion . . . . .	132
8.2	Anpassung des Lärmmodells . . . . .	134
8.3	Schallabstrahlung in die Umgebung . . . . .	135
8.3.1	Schallabstrahlung des Heizgerätes . . . . .	135
8.3.2	Berechnung des Schalldruckpegels im Fernfeld . . . . .	138
8.3.3	Abstrahlimpedanz . . . . .	142
8.4	Akustische Modellierung . . . . .	145
8.4.1	Zweidimensionales Modell . . . . .	145
8.4.2	Abschätzung der äquivalenten Lochgrößen . . . . .	147
8.4.3	Vergleich der zwei- und dreidimensionalen Rechnung . . . . .	150
8.4.4	Netzwerkmodell . . . . .	151
8.5	Ergebnis . . . . .	152
8.6	Interpretation . . . . .	160
8.7	Möglichkeiten zur Verringerung der Lärmemission . . . . .	165
<b>9</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>169</b>



---

# Nomenklatur

## Lateinische Buchstaben

$A$	Fläche [ $m^2$ ]
$a$	Temperaturleitfähigkeit [ $m^2/s$ ]
$B$	Amplitude radialer Schalldruck [ $N/m$ ]
$b_j$	Koeffizienten FEM [ $Pa$ ]
$C$	Proportionalitätskonstante [-]
$C_c$	Modellierungskonstante Schmid-Modell [-]
$C_D$	Konstante Lärmmodell
$C_S$	Amplitudenskalierung Lärmmodell [-]
$c_p$	spezifische Wärmekapazität [ $J/kg K$ ]
$c$	Schallgeschwindigkeit [ $m/s$ ]
$c$	Fortschrittsvariable [-]
$D$	Diffusionskoeffizient [ $m^2/s$ ]
$d$	Durchmesser [ $m$ ]
$Da$	Damköhlerzahl [-]
$E_q$	Wärmefreisetzungsspektrum [ $Wm/m^3$ ]
$F$	Filterkern [-]
$f$	Welle stromab [ $m/s$ ]
$f$	Frequenz [ $1/s$ ]
$f_{peak}$	Peakfrequenz [ $1/s$ ]
$G$	Greensche Funktion [-]
$G, G_k$	Rechengebiet, Teilgebiet FE-Methode [-]
$g$	Welle stromauf [ $m/s$ ]
$He$	Helmholtz-Zahl [-]
$H_u$	unterer Heizwert [ $kJ/kg$ ]

## Nomenklatur

---

$h$	Enthalpie [ $J/kg$ ]
$I$	Akustische Intensität [ $W/m^2$ ]
$i$	Imaginäre Einheit [-]
$K_1, K_2$	Integrationskonstanten [-]
$Ka$	Karlowitz-Zahl [-]
$k$	Turbulente kinetische Energie [ $m^2/s^2$ ]
$\vec{l}$	Lastvektor FEM [ $Pa/m$ ]
$L$	Integrales Turbulenzlängenmaß [ $m$ ]
$L_C$	Corrsin-Längenmaß [ $m$ ]
$L_G$	Gibson-Längemaß [ $m$ ]
$L_{kor}$	Korrelationslänge [ $m$ ]
$l$	Länge [ $m$ ]
$l_{eff}$	Effektive Länge [ $m$ ]
$l_{red}$	Reduzierte Länge [ $m$ ]
$M$	Matrix FEM [ $1/m$ ]
$Ma$	Machzahl [-]
$m$	Masse [ $kg$ ]
$n$	Interaktionsindex [-]
$\vec{n}$	Normalenvektor [-]
$P$	Leistung [ $W$ ]
$P_{spec}$	Spektrale Leistung [ $W/Hz$ ]
$P_{ij}$	Matrix in der Impulsgleichung [ $Pa$ ]
$p'$	Schalldruck [ $Pa$ ]
$\hat{p}$	komplexer Schalldruck [ $Pa$ ]
$Q$	Massenbezogene Wärmefreisetzung [ $J/kg$ ]
$QQ$	Energiespektrum Wärmefreisetzungsschwankungen [ $W^2/Hz$ ]
$\dot{q}$	volum. Wärmefreisetzungsrates [ $W/m^3$ ]
$q_F$	Wärmefreisetzungsrates pro Fläche [ $W/m^2$ ]
$R$	Geschwindigkeitskorrelation [ $m^2/s^2$ ]
$R$	spezifische Gaskonstante [ $J/kgK$ ]
$Re()$	Realteil [-]
$Re_t$	turbulente Reynoldszahl [-]
$r$	Radius [ $m$ ]
$r_f$	Reflexionsfaktor [-]

---

$S(x)$	allgemeine Quellfunktion [ $N/m^4$ ]
$SPL$	Schalldruckpegel [ $dB$ ]
$s_0$	Quellstärke (Konstante) [ $N/m^4$ ]
$s_l$	Laminare Brenngeschwindigkeit [ $m/s$ ]
$s_t$	turbulente Brenngeschwindigkeit [ $m/s$ ]
$T$	Temperatur [ $K$ ]
$T_{ij}$	Transfermatrix [-]
$t$	Zeit [ $s$ ]
$U(x, t)$	Weißes Rauschen [-]
$u'$	Schallschnelle [ $m/s$ ]
$\hat{u}$	komplexe Schallschnelle [ $m/s$ ]
$\vec{u}$	Strömungsgeschwindigkeit [ $m/s$ ]
$V$	Volumen [ $m^3$ ]
$\vec{v}$	Strömungsgeschwindigkeit [ $m/s$ ]
$v'$	turbulente Geschwindigkeitsschwankung [ $m/s$ ]
$V_S$	Volumen des Quellgebiets [ $m^3$ ]
$V_{koh}$	Kohärenzvolumen [ $m^3$ ]
$w$	FE-Testfunktion [-]
$x, y, z$	Raumkoordinaten [ $m$ ]
$\vec{x}_B$	Beobachterposition [ $m$ ]
$Y$	Massenbruch [-]
$Z$	Impedanz [ $Ns/m^3$ ]
$Z_{Ab}$	Abstrahlimpedanz Rohrende [ $Ns/m^3$ ]
$Z_{rad}$	Impedanz Kugelstrahler [ $Ns/m^3$ ]
$Z$	Mischungsbruch [-]
$Z_0$	charakteristische Impedanz [ $Ns/m^3$ ]

### Griechische Buchstaben

$\alpha$	Konstante Turbulenztheorie [-]
$\beta$	Konstante Turbulenztheorie [-]
$\Gamma$	Kohärenzfunktion [-]
$\gamma$	Isentropenexponent [-]

## Nomenklatur

---

$\delta$	Dicke [ $m$ ]
$\delta_{ij}$	Kronecker-Symbol [-]
$\delta(x)$	Dirac-Funktion
$\delta_{eff}$	Endkorrektur [ $m$ ]
$\delta_L$	laminare Flammendicke [ $m$ ]
$\delta_t$	turbulente Flammendicke [ $m$ ]
$\varepsilon$	Turbulente Dissipation [ $m^2/s^3$ ]
$\zeta$	Druckverlustbeiwert [-]
$\kappa$	Wellenzahl [ $1/m$ ]
$\lambda$	Luftzahl [-]
$\nu$	kinematische Viskosität [ $m^2/s$ ]
$\rho$	Dichte [ $kg/m^3$ ]
$\rho_e$	Exzess-Dichte [ $kg/m^3$ ]
$\xi$	Dehnungsrate [ $1/s$ ]
$\eta$	Kolmogorov-Länge [ $m$ ]
$\eta_{ac}$	akustischer Umsetzungsgrad [-]
$\tau$	Integrales Turbulenz-Zeitmaß [ $s$ ]
$\tau$	Zeitverzug Rückkopplung [ $s$ ]
$\tau_{ij}$	Schubspannungstensor [ $N/m^2$ ]
$\tau_{char}$	Charakteristisches Zeitmaß [ $s$ ]
$\tau_\eta$	Kolmogorov-Zeitmaß [ $s$ ]
$\sigma$	volumetr. Ausdehnungskoeffizient [ $1/K$ ]
$\sigma_\tau$	Standartabweichung der Verzugszeit [ $s$ ]
$\chi$	Skalare Dissipation [ $1/s$ ]
$\phi$	FE-Ansatzfunktion [-]
$\varphi$	Phasenwinkel [-]
$\Phi_q$	Wärmefreisetzungsspektrum [ $W s/m^3$ ]
$\omega$	Kreisfrequenz [ $1/s$ ]
$\dot{\omega}$	Quellterm Transport Fortschrittsvariable [ $kg/m^3 s$ ]

**Indizes**

<i>0</i>	Bezugsgröße
<i>AE</i>	Austrittsebene
<i>ac</i>	akutisch
<i>B</i>	Brenner
<i>Br</i>	Brennstoff
<i>chem</i>	chemisch
<i>EBU</i>	Eddy-Break-Up-Modell
<i>FE</i>	Finite Elemente
<i>FF</i>	Freifeld
<i>koh</i>	Kohärenz
<i>O<sub>2</sub></i>	Sauerstoff
<i>Ox</i>	Oxidator
<i>P</i>	Plenum
<i>Pr</i>	Produkt
<i>ref</i>	Referenzwert
<i>rms</i>	RMS-Wert (quadratischer Mittelwert)
<i>stö</i>	stöchiometrisch
<i>str</i>	Stömung

**Kopfzeiger**

-	Mittelwert
~	Favre-Mittelwert
→	Vektorielle Größe
'	Schwankungsgröße
*	Konjungiert komplex

## Operatoren

$\nabla$  Nabla-Operator  $[(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})]$

$\Delta$  Laplace-Operator  $[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}]$

---

# 1 Einführung

## 1.1 Bedeutung turbulenter Verbrennungssysteme

In technischen Verbrennungssystemen werden zumeist turbulente Flammen eingesetzt. Im Gegensatz zu laminaren Flammen erfolgen hier die Mischungsprozesse nicht nur durch Effekte auf molekularer Ebene (Diffusion), sondern hauptsächlich durch die in der turbulenten Strömung enthaltenen Wirbel aller Größenklassen. Durch diese Wirbel wird der Mischungsprozess von Brennstoff und Luft, bzw. von kaltem Brennstoff/Luft-Gemisch und heißen Abgasen stark intensiviert. Somit steigt zum einen der Umsetzungsgrad und zum anderen wird die Flamme kompakter, was zu kleineren und leichteren Brennersystemen führt. Gerade in mobilen Anwendungen wie Flugantrieben oder automobilen Zusatzheizungen sind das sehr wichtige Baukriterien. Ein Nachteil turbulenter Flammen ist die im Vergleich zu laminaren Flammen sehr starke Lärmemission. Gerade bei lärmsensiblen Anwendungen resultiert das in teuren Schalldämpfungsmaßnahmen im Abgas- und Frischlufttrakt.

## 1.2 Literaturübersicht Verbrennungslärm

Turbulenter Verbrennungslärm rückte in den letzten Jahren immer mehr in das Interesse bei der Entwicklung von Gasturbinen, Flugantrieben oder Haushaltsbrennern. Ziel ist, die Verbrennungssysteme hinsichtlich minimaler Lärmemission zu optimieren. Die grundlegenden Zusammenhänge zwischen dem turbulenten, reagierenden Strömungsfeld und der Lärmentstehung sind seit der Veröffentlichung der Arbeit von Lighthill [40] im Jahr 1952 bekannt. Lighthill leitet darin eine mathematische Beschreibung des strömungsinduzierten Lärms her (siehe Kap. 2.1.1). Dabei identifiziert er auch Quellterme,

die für die Generierung von Lärm durch thermische Effekte (wie zum Beispiel Verbrennung) verantwortlich sind. Allerdings befassen sich alle frühen Arbeiten zum Thema Strömungslärm mit dem rein aerodynamisch (also ohne thermische Effekte) erzeugten Lärm. Beispielhaft seien hier die Arbeiten von Proudman [61] oder Ribner [67] genannt.

Erst über zehn Jahre nach Lighthills Arbeit erscheinen die ersten Veröffentlichungen zum Thema Verbrennungslärm. Bragg [6] versuchte 1963 eine theoretische Abschätzung des Umsetzungsgrades  $\eta_{ac}$  von thermischer in akustische Energie. Hierzu betrachtete er ein laminares Flammenelement, dass von der turbulenten Strömung aufgefaltet wird. Seine Berechnungen liefern Werte im Bereich  $\eta_{ac} \approx 10^{-6}$  und liegen damit um den Faktor 100 falsch. Seine Arbeit kann aber als Eröffnung dieses Forschungsgebietes betrachtet werden. Smith und Kilham [77] untersuchten experimentell den Lärm einer frei brennenden turbulenten Flamme. Hierbei variierten sie diverse Geometrie- und Strömungsgrößen. Ein Ergebnis dabei ist eine Korrelation, die eine Abhängigkeit der emittierten Schalleistung  $P$  von der Strömungsgeschwindigkeit  $u$ , einem charakteristischen Durchmesser  $d$  und der laminaren Brenngeschwindigkeit  $s_l$  herstellt:

$$P \propto u d s_l$$

Thermoakustische Wirkungsgrade werden im Bereich von  $\eta_{ac} \approx 1 \cdot 10^{-8}$  gemessen. Außerdem weisen Smith and Kilham durch die Vermessung der Richtungsabhängigkeit des abgestrahlten Schalls den Monopolstrahlercharakter des thermoakustischen Quellmechanismus nach. Die Idee, dass die Größe von kohärenten Zonen der Wärmefreisetzung die abgestrahlte Gesamtleistung bestimmt, hat 1971 erstmals Strahle [79] publiziert. Damit kann er die Abschätzungen von Bragg für den akustischen Umsetzungsgrad  $\eta_{ac}$  verbessern.

Den spektralen Charakter des Verbrennungslärms untersuchten als eine der ersten Mahan und Jones 1984 [43]. Um das Quellspektrum zu bestimmen, maßen sie das Spektrum im Fernfeld und rechneten auf die Quelle zurück. Eine intensivere Studie des spektralen Charakters lieferten Wäsle und Winkler 2005 [88]. Sie vermaßen systematisch Spektren von zwei verschiedenen

Drallbrennern unter Variation von Leistung und Drallzahl. Es zeigte sich eine Ähnlichkeit aller Spektren mit einem 8/3-Abfall bei höheren Frequenzen. Umsetzungsgrade im Bereich von  $\eta_{ac} = 10^{-7} \dots 10^{-8}$  wurden bestimmt. Die gefundenen Peakfrequenzen lagen zwischen 200 und 500 Hz, abhängig von der Leistung und damit von der Strömungsgeschwindigkeit.

Eine theoretische Untersuchung der Schallemission einer Vormischflamme mit hoher Reynoldszahl und voll entwickelter Turbulenz präsentierten im Jahr 1991 Clavin und Siggia [15]. In ihrer Modellierung agiert die fluktuierende Flammenoberfläche als Lärmquelle, die als Monopolstrahler wirkt. Aus der Turbulenz berechnen sie ein Spektrum für die Flammflächenfluktuationen. Hierdurch gelingt ihnen eine Verbindung zwischen der Strömung und der Lärmemission. Ergebnis ist das spektrale Verhalten der Lärmintensität  $I$ , allerdings fehlt eine Abschätzung der Amplituden, so dass nur eine Proportionalität angegeben werden kann:

$$I = \frac{1}{4\pi c} \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{1}{\rho_1} \right)^2 \rho_2 (\rho_1 s_l)^2 \overline{\left( \frac{dA}{dt} \right)^2} \quad (1.1)$$

$$\overline{\left( \frac{dA}{dt} \right)^2} \propto \sum_i \varepsilon^{2/3} \kappa_i^{4/3} (L\kappa_i)^{7/3} \left[ \left( \frac{1}{L_G \kappa_i} \right)^{7/3} L_G^2 \right]^2 \quad (1.2)$$

Hier bezeichnen  $\rho_1, \rho_2$  die Dichte vor bzw. nach der Flamme,  $s_l$  die laminare Brenngeschwindigkeit,  $A$  die Flammenoberfläche,  $\varepsilon$  die turbulente Dissipation,  $L$  das integrale Turbulenzlängenmaß,  $L_G$  das Gibson-Maß (siehe Kapitel 5.1.1, Gleichung 5.9) und  $\kappa_i$  die Wellenzahl der  $i$ -ten Wirbelklasse. Eine vollständige Schließung gelang Boineau und Gervais 1996 [3]. Sie untersuchten eine turbulente Diffusionsflamme mittels räumlicher Kohärenzfunktionen. Darauf aufbauend entwickelten sie ein Modell zur Berechnung des emittierten Schalldruckspektrums, das im Vergleich mit Messungen sehr gute Ergebnisse liefert. Klein und Kok [35, 36] präsentierten eine formale Schließung zur Berechnung des Schalldrucks von Diffusionsflammen. Ihr Modell basiert auf den lokalen Daten der mittleren Turbulenz, der mittleren Reaktionsrate und einem angenommenen Spektrum der Wärmefreisetzungsfluktuationen. Allerdings hängt das Modell von der Spezifikation einer empirischen Kohärenzlänge zur Kalibration ab. Auch zeigte sich, dass die Frequenz-

Wellenzahl-Abbildung nicht universell ist. Für turbulente Vormischflammen liefert die Arbeit von Hirsch et.al [28] quantitative Schalleistungsspektren. Berechnet werden diese aus den Daten der lokalen mittleren Turbulenz und der Wärmefreisetzung ohne weitere Anpassungen. Ihre Theorie berechnet aus den mittleren Strömungsdaten, z.B. aus einer CFD-Berechnung [29], ein lokales Wellenzahlspektrum der Wärmefreisetzungsschwankungen. Zusammen mit einer Abbildungsvorschrift vom Wellenzahlraum in den Frequenzraum wird die Bestimmung von Frequenzspektren möglich.

Einen alternativen Ansatz zur Berechnung von Verbrennungslärm veröffentlichte die Arbeitsgruppe um Noll [47]. Ihr Ansatz basiert ebenfalls auf CFD-RANS Daten. Allerdings muss zusätzlich eine Transportgleichung für die Temperaturvarianz  $\widetilde{T'^2}$  gelöst werden. Die Temperaturvarianz und die lokalen Turbulenzdaten gehen als Eingangsparameter in eine angenommene Raum-Zeit-Korrelationsfunktion ein. Daraus wird mittels der Random-Particle-Mesh-Methode (RPM) [19] ein zeitabhängiger Lärmquellterm  $S$  konstruiert:

$$S(x, t) = \int_{V_S} \underbrace{\widetilde{S'^2}(x)}_{\substack{\text{lokale Varianz} \\ \text{von } S}} \underbrace{F(|x - x'|, l_{koh}(x))}_{\substack{\text{räumlicher} \\ \text{Filterkern}}} \underbrace{U(x', t)}_{\substack{\text{räumliches weißes} \\ \text{Rauschen}}} dx'$$

Dazu wird ein räumliches weißes Rauschen  $U$  mit einem Filterkern  $F$  multipliziert, der von einer Kohärenzlänge  $l_{koh}$  abhängig ist. Durch Multiplikation mit der Varianz der Lärmquelle  $\widetilde{S'^2}$  wird der Integrand skaliert. Durch Integration über das Quellvolumen  $V_S$  ergibt sich die Lärmquelle  $S$ . Mittels der akustischen Störungsgleichungen (ape-4) [20] wird die Schallausbreitung berechnet.

### 1.3 Automobile Zusatzheizungen

Der Wirkungsgrad moderner Dieselmotoren ist heute so gut, dass die Abwärme des Motors nicht mehr voll für die Klimatisierung der Fahrgastzelle ausreicht. Besonders in den Wintermonaten wird ein Zusatzheizgerät notwendig,

aber auch für eine Anwendung als reine Standheizung werden Zusatzheizgeräte immer beliebter. Nicht nur wird ein im Winter vorgeheiztes Auto als sehr angenehm empfunden, auch wird durch die Vorheizung des Motors und des Katalysators der Schadstoffaustoss insgesamt verringert. Eine wichtige Anforderung für die Nutzung als Standheizung ist ein möglichst leiser Betrieb. Gerade in den Morgenstunden, der Hauptnutzungszeit einer Standheizung, würde ein sonor vor sich hin brummender Brenner als sehr störend empfunden. Die vergleichsweise hohe Lärmemission von KFZ-Zusatzheizgeräten liegt an ihrer sehr hohen Leistungsdichte. Die eingeschränkten Platzverhältnisse in einem Kraftfahrzeug erzwingen eine sehr kompakte Bauweise. Die hohe benötigte Heizleistung von ca. 6 kW bei einem KFZ lässt sich deshalb nur durch die Verwendung stark turbulenter Flammen erreichen. Um die Lärmemission in die Umgebung zu verringern, werden teilweise sehr aufwändige Schalldämpfungssysteme sowohl in den Abgasstrom als auch in die Frischluftversorgung eingebaut. Diese zusätzlichen Komponenten kosten zusätzlich Bauraum und verteuern das Endprodukt. Wünschenswert wäre es deshalb, nicht den Lärm zu dämpfen, sondern schon seine Entstehung zu vermeiden.

## 1.4 Ziel dieser Arbeit

Die Hauptziele bei der Entwicklung von KFZ-Heizsystemen sind geringer Bauraum, geringe elektrische Leistungsaufnahme des Gerätes (für das Luftgebläse) und eine geringe Schadstoffemission ( $NO_x$ ,  $CO$ ,  $UHC$ ). Um diese Ziele zu erreichen, wird bei der Entwicklung zunehmend Computational Fluid Dynamics (CFD) eingesetzt. Es wäre wünschenswert, auch die Lärmemission im Voraus berechnen zu können. Das ist das Ziel der vorliegenden Arbeit. Bisherige Ansätze gehen hier analog den Methoden zur Berechnung von strömungsinduziertem Lärm vor. Dieses Forschungsgebiet, das als Computational Aero Acoustics (CAA) bezeichnet wird, ist im Gegensatz zur Berechnung von Verbrennungslärm (Computational Combustion Acoustics, CCA) etabliert und seine Methoden gehören zum Standard in der industriellen Anwendung. Die CAA basiert auf der Lighthill-Gleichung [40] oder einer Weiterentwicklung davon (z.B. Ffowcks-Hawking-Gleichung [26]). Neben

den Quelltermen für den strömungsinduzierten Lärm enthält die Lighthill Gleichung auch Terme, die die Lärmentwicklung durch thermische Effekte beschreiben (thermoakustischer Quellterm). Somit ist eine Berechnung des Verbrennungslärms durch direktes Lösen der Lighthill-Gleichung möglich. Da zur Bestimmung des Quellterms allerdings instationäre CFD-Simulationen mit Verbrennung mittels LES [8, 9] oder sogar DNS [76] notwendig sind, ist dieser Weg sehr aufwendig. Hinzu kommt, dass der gewonnene Quellterm sowohl orts-, als auch zeitabhängig ist. Dadurch wird eine aufwendige Kopplung zwischen der LES-Rechnung zur Bestimmung des Quellterms und der eigentlichen Schallausbreitungsrechnung notwendig. Der hierzu notwendige Rechen- und Zeitaufwand ist extrem groß und nicht für einen Einsatz in der industriellen Entwicklung geeignet. Standard hier ist die stationäre oder Ensemble-gemittelte Berechnung von Verbrennungssystemen mittels RANS-Simulation.

Der in dieser Arbeit vorgestellte Ansatz ist von hybrider Natur und besteht aus einer Berechnung der reagierenden Strömung zum einen und der Berechnung der Schallausbreitung zum anderen. Wesentlicher Unterschied zu den angesprochenen LES-Methoden ist, dass zur Bestimmung des Quellterms ein Lärmmodell verwendet wird, in dem die statistischen Strömungsdaten der reagierenden Strömung in ein Leistungsdichtespektrum der Quelle umgewandelt werden. Die Schallausbreitung im Brennersystem und die Abstrahlung in die Umgebung werden anschließend separat berechnet. Die Schallausbreitung soll mit möglichst geringem rechentechnischem Aufwand durchgeführt werden, wobei das akustische Verhalten des Systems aber so gut wie möglich nachgebildet werden muss. Hier wird auf akustische Netzwerkmethoden zurückgegriffen. Diese sind in der Lage, akustische Verluste zu berücksichtigen. Kombiniert wird das Netzwerkmodell mit einer 3D-Akustik-Simulation mittels einer Finiten-Elemente-Methode. Diese kann die ungedämpfte Akustik des Systems sehr genau bestimmen und liefert Randbedingungen, die in das Netzwerkmodell einfließen. Auf diese Weise entsteht ein genaues Rechenmodell mit geringem Lösungsaufwand.

In Kapitel 2 wird eine Einführung in die Akustik gegeben, deren Grund-

gleichungen hergeleitet und die wesentlichen Begriffe der Akustik eingeführt. Die Schallabstrahlung einer Lärmquelle und deren Abhängigkeit von den akustischen Umgebungsbedingungen wird in Kapitel 3 untersucht. Nachdem die Grundlagen der Akustik schon gelegt sind, wird sich Kapitel 4 mit der turbulenten Verbrennung beschäftigen. Hier geht es vor allem um die Modellierung der Verbrennungsreaktion. In Kapitel 5 wird mit dem Verbrennungslärm ein Kernpunkt behandelt. Hier wird die verwendete Modellierung des Verbrennungslärms ausgiebig hergeleitet. Das Verfahren zur Lärmbeurteilung wird zusammen mit den numerischen Methoden in Kapitel 6 vorgestellt. Die Anwendung der Berechnungsmethode erfolgt in den Kapiteln 7 und 8, zuerst für einen Vormischbrenner in einer Prüfstandsbrennkammer und anschließend für eine automobiler Zusatzheizung.

## 1.4 Ziel dieser Arbeit

---

---

## 2 Grundlagen der Akustik

Um Verbrennungslärm berechnen zu können, benötigen wir die Theorie über die Entstehung und Ausbreitung von Schall. Daher werden wir in diesem Kapitel die Grundgleichungen der Akustik herleiten und die wichtigsten Begriffe einführen.

### 2.1 Grundgleichungen

Die wichtigste Gleichung in der Akustik ist die Wellengleichung. Im nächsten Abschnitt werden wir diese mit einem Quellterm, der die Entstehung von Schall durch (reagierende) Strömungen beschreibt, herleiten. Diese Form der Wellengleichung geht auf Lighthill [40] zurück.

#### 2.1.1 Herleitung der Lighthill-Gleichung

Ausgangspunkt sind die Erhaltungsgleichungen für Masse und Impuls in der allgemeinsten, reibungsbehafteten Version [18]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \vec{u}^T + P_{ij}) = 0 \quad (2.2)$$

Die Matrix  $P_{ij}$  enthält unter anderem die Reibungseffekte, hervorgerufen durch die Schubspannungen  $\tau_{ij}$ :

$$P_{ij} := \underbrace{(p - p_0)}_{=: p'} \delta_{ij} - \tau_{ij} = p' \delta_{ij} - \tau_{ij} \quad (2.3)$$

Wir leiten Gleichung 2.1 nach der Zeit ab, nehmen von Gleichung 2.2 die Divergenz und ziehen beide Gleichungen voneinander ab:

$$\left[ \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \nabla \cdot \left( \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) \right) \right] - \left[ \nabla \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\rho \vec{u}) + \Delta (\rho \vec{u} \vec{u}^T + P_{ij}) \right] = 0 - 0$$

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \Delta (\rho \vec{u} \vec{u}^T + P_{ij}) = 0 \quad (2.4)$$

Wir definieren eine Größe  $\rho' := \rho - \rho_0$ , wobei  $\rho_0$  eine beliebige Konstante ist. Für die Ableitung gilt:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} \quad (2.5)$$

In Gleichung 2.4 subtrahieren wir auf beiden Seiten den Term  $c_0^2 \Delta \rho'$  mit der ebenfalls konstanten und beliebig wählbaren Größe  $c_0$ . Wir erhalten eine Gleichung, die auf der linken Seite mit einer Wellengleichung für  $\rho'$  übereinstimmt:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - c_0^2 \Delta \rho' = \Delta (\rho \vec{u} \vec{u}^T + P_{ij} - c_0^2 \rho' \delta_{ij}) \quad (2.6)$$

Zu beachten ist, dass wir bis hierher noch keinerlei Vereinfachungen getroffen haben. Diese Gleichung ist also allgemein gültig. Beachtet werden muss aber, dass die Lösungsvariable  $\rho'$  auch auf der rechten Seite auftaucht und daher die rechte Seite nicht als Quellterm gesehen werden kann. Auch haben wir noch keine Wahl für die Konstanten  $\rho_0$ ,  $p_0$  und  $c_0$  getroffen. Allerdings können wir die linke Seite als Wellengleichung, die die Ausbreitung von Wellen mit der Geschwindigkeit  $c_0$  beschreibt, interpretieren. Damit bekommen die Konstanten  $\rho_0$ ,  $p_0$  und  $c_0$  die Bedeutung von Dichte, Druck und Schallgeschwindigkeit unter Umgebungsbedingungen. Damit wird Gleichung 2.6 die bekannte Lighthill-Gleichung, die Entstehung und Ausbreitung von strömungsinduziertem Lärm beschreibt.

In der Akustik wird meistens nicht die Dichte-Wellengleichung sondern die entsprechende Formulierung für den Druck verwendet. Daher werden wir die Lighthill-Gleichung noch für den Druck formulieren. Subtrahieren wir in Gleichung 2.4 nicht wie ursprünglich  $c_0^2 \Delta \rho'$ , sondern

$$\Delta p' = \Delta (p' \cdot \delta_{ij}) , \quad (2.7)$$

erhalten wir:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \Delta p' = \Delta (\rho \vec{u} \vec{u}^T + P_{ij} - p' \delta_{ij}) \quad (2.8)$$

Setzen wir den Tensor  $P_{ij}$  aus Gleichung 2.3 ein, vereinfacht sich die rechte Seite zu

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \Delta p' = \Delta (\rho \vec{u} \vec{u}^T - \tau_{ij}) . \quad (2.9)$$

Addieren wir auf beiden Seiten den Ausdruck

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{p'}{c_0^2} - \rho' \right) , \quad (2.10)$$

so erhalten wir die Lighthill-Gleichung für den Schalldruck:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \Delta (\rho \vec{u} \vec{u}^T - \tau_{ij}) - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{p'}{c_0^2} - \rho' \right) \quad (2.11)$$

Den zweiten Term auf der rechten Seite nennen wir die Exzess-Dichte  $\rho_e$ ,

$$\rho_e = \frac{p'}{c_0^2} - \rho' . \quad (2.12)$$

Diese ist die Differenz aus der Dichteschwankung  $\rho'$  und der isentropen Dichteschwankung  $\frac{p'}{c_0^2}$ , ist also mit Entropieänderungen zum Beispiel durch Wärmezufuhr verknüpft.

### 2.1.2 Thermoakustischer Quellterm

Auf der rechten Seite der Druck-Lighthill-Gleichung 2.11 tritt die zweite zeitliche Ableitung der Exzessdichte als akustische Quelle auf. Mittels einer Energiegleichung für  $N$  reagierende Spezies, kann für die Exzessdichte  $\rho_e$  folgender Ausdruck gewonnen werden [16]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_e}{\partial t} = & \frac{\sigma \rho_0}{c_p \rho} \left( \sum_{n=1}^N \frac{\partial h}{\partial Y_n} \Big|_{\rho, p, Y_m} \rho \frac{DY_n}{Dt} + \nabla \cdot q - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tau_{ij} \right) \\ & - \nabla \cdot (\vec{u} \rho_e) - \frac{1}{c_0^2} \left( \left( 1 - \frac{\rho_0 c_0^2}{\rho c^2} \right) \frac{Dp}{Dt} - \frac{p - p_0}{\rho} \frac{D\rho}{Dt} \right) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Der volumetrische Ausdehnungskoeffizient  $\sigma$ , die spezifische Wärmekapazität bei konstantem Druck  $c_p$  und die Speziesmassenbrüche  $Y_n$  kommen hier als neue Größen vor. Bei reagierenden Strömungen mit kleiner Mach-Zahl ist der erste Term um Größenordnungen stärker als alle anderen in Gleichung 2.13. In den in dieser Arbeit betrachteten Verbrennungssystemen ist diese Voraussetzung immer erfüllt. Deshalb dürfen wir bis auf den ersten alle Terme vernachlässigen:

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial t} = \frac{\sigma \rho_0}{c_p \rho} \left( \sum_{n=1}^N \frac{\partial h}{\partial Y_n} \Big|_{\rho, p, Y_m} \rho \frac{DY_n}{Dt} \right) \quad (2.14)$$

Für ein ideales Gas gilt:  $\sigma/c_p = (\gamma - 1)/c^2$  [16]. Der Summenterm entspricht in guter Näherung der Änderung der Wärmefreisetzung pro Volumeneinheit aufgrund einer Änderung der Spezieskonzentrationen:

$$\sum_{n=1}^N \frac{\partial h}{\partial Y_n} \Big|_{\rho, p, Y_m} \rho \frac{DY_n}{Dt} = \dot{q}' \quad (2.15)$$

Die Lighthill-Gleichung 2.11 schreibt sich mit den genannten Vereinfachungen wie folgt:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\gamma - 1}{c^2} \dot{q}' \right) \quad (2.16)$$

Falls die Verbrennung bei Umgebungsdruck abläuft, gilt  $\rho c^2 = \gamma p_0 = \rho_0 c_0^2$  [16] und wir können weiter vereinfachen:

$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \frac{\gamma - 1}{c_0^2} \frac{\partial \dot{q}'}{\partial t} \quad (2.17)$$

Bei niedriger Machzahl ist in einer reagierenden Strömung demnach die schwankende Wärmefreisetzungsrates  $\dot{q}'(t)$  der Hauptquellmechanismus.

### 2.1.3 Wellen mit konstanter Frequenz

Wellen, die genau eine konstante Frequenz beinhalten, sind harmonisch, weisen also einen sinus-förmigen Verlauf auf [55]. Unter dieser Voraussetzung

kann jede akustische Größe ( $p', u', q', \dots$ ) durch das Produkt einer ortsabhängigen Amplitude mit einer harmonischen Zeitfunktion geschrieben werden:

$$p'(x, t) = \hat{p}(x) e^{i\omega t} \quad (2.18)$$

Hier bezeichnet  $i = \sqrt{-1}$  die imaginäre Einheit und durch „ $\hat{\phantom{x}}$ “ wird angezeigt, dass es sich bei der jeweiligen Größe um die komplexwertige Amplitude handelt. Setzen wir diesen Ansatz in die Wellengleichung 2.17 ein, erhalten wir die Helmholtz-Gleichung mit thermoakustischem Quellterm:

$$\Delta \hat{p} - \frac{\omega^2}{c_0^2} \hat{p} = \frac{\gamma - 1}{c_0^2} i\omega \hat{q} \quad (2.19)$$

In der Herleitung der Druck-Lighthill-Gleichung 2.11 wurde stillschweigend angenommen, dass die Dichte  $\rho_0$  auch räumlich konstant ist. Lassen wir dagegen räumliche Schwankungen der Dichte  $\rho_0$  zu, so erhalten wir eine Helmholtz-Gleichung für variable Dichte:

$$\nabla \cdot \left( -\frac{1}{\rho} \nabla \hat{p} \right) - \frac{\omega^2}{\rho c^2} \hat{p} = \frac{\gamma - 1}{\rho c^2} i\omega \hat{q} \quad (2.20)$$

Der Vorteil der Betrachtung harmonischer Wellen ist, dass sich in diesem Fall alle Zeitableitungen zu einer Multiplikation mit  $i\omega$  vereinfachen und die zeitabhängigen Terme komplett aus der Gleichung verschwinden. Der Lösungsaufwand sinkt dadurch stark ab, da nur noch ein stationäres Problem behandelt werden muss. Im thermoakustischen Quellterm in der Helmholtzgleichung tritt die Kreisfrequenz  $\omega$  auf. Das bedeutet, dass die Wärmefreisetzungsschwankungen umso effektiver Schall erzeugen, je höher ihre Frequenz ist.

#### 2.1.4 Achsensymmetrische Wellengleichung

In vielen Fällen weist die zu untersuchende Geometrie Achsensymmetrie auf, oder kann in guter Näherung als achsensymmetrisch betrachtet werden. In diesem Fall sinkt der Aufwand zur Lösung weiter, da nur noch ein zwei-dimensionales Problem gelöst werden muss. Um die Wellenglei-

chung für den achsensymmetrischen Fall zu erhalten, gehen wir von der 3D-Wellengleichung in Zylinderkoordinaten  $(r, \phi, z)$  aus. Diese lautet [18]:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p}{\partial \phi^2} - \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0 \quad (2.21)$$

Ist das System achsensymmetrisch, dann verschwindet die Ableitung in Umfangsrichtung:

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0 \quad (2.22)$$

In diesem Fall vereinfacht sich die Wellengleichung 2.21 zu

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial p}{\partial r} \right) - \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0. \quad (2.23)$$

### 2.1.5 Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

Wir betrachten die homogene Wellengleichung für den eindimensionalen Fall:

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0 \quad (2.24)$$

Eine allgemeine Lösung dieser Gleichung lautet:

$$p'(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct), \quad f, g \in C^2(\mathbb{R}) \quad (2.25)$$

Hier sind  $f, g$  beliebige zweimal stetig differenzierbare Funktionen über  $\mathbb{R}$ . Diese werden mit der Geschwindigkeit  $c$  in positive ( $f$ ) bzw. negative ( $g$ ) Koordinatenrichtung bewegt, verändern dabei aber nicht ihre Form. Um mit der in der Literatur meistens verwendeten Bezeichnung konsistent zu sein, führen wir den Faktor  $\rho c$  ein:

$$p'(x, t) = \rho c (f(x - ct) + g(x + ct)) \quad (2.26)$$

Die Einheit von  $f$  und  $g$  ergibt sich daraus zu  $[m/s]$ . Der Sinn der Einführung des Faktors  $\rho c$  erschließt sich, wenn wir die Schallschnelle berechnen. Diese können wir mittels der linearisierten Impulserhaltungsgleichung  $\rho(\partial u' / \partial t) = -\partial p' / \partial x$  [83] bestimmen:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} = -\frac{\rho c}{\rho} \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) \quad (2.27)$$

Dies integrieren wir, wodurch wir zusätzlich die Integrationskonstanten  $K_1(x)$  und  $K_2(x)$  (konstant in  $t$ !) erhalten:

$$u'(x, t) + K_1(x) = -c \int \left( \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \right) dt$$

$$u'(x, t) + K_1(x) = -c \left( -\frac{1}{c} f + \frac{1}{c} g \right) + K_2(x)$$
(2.28)

Die Integrationskonstanten  $K_1, K_2$  können wir zu Null setzen, da ohne Schall sowohl für die laufenden Wellen  $f = g = 0$  als auch für die Schnelle  $u' = 0$  gelten muss:

$$u' = f - g$$
(2.29)

Umgekehrt berechnen sich  $f, g$  aus  $p', u'$  wie folgt:

$$f = \frac{1}{2} \left( \frac{p'}{\rho c} + u' \right)$$
(2.30a)

$$g = \frac{1}{2} \left( \frac{p'}{\rho c} - u' \right)$$
(2.30b)

## 2.2 Grundbegriffe der Akustik

In diesem Kapitel werden wir einige Begriffe der Akustik einführen, die wir im weiteren Verlauf dieser Arbeit benötigen.

### 2.2.1 Ebene Wellen

Wellen, deren akustisches Feld nur in Ausbreitungsrichtung variiert, werden ebene Wellen genannt. Zum Beispiel sind radiale Wellen, die von einer Punktquelle abgestrahlt werden, in großer Entfernung von der Quelle in guter Näherung ebene Wellen. Breiten sich Wellen in einem hart-wandigem Rohr mit einer Frequenz unterhalb einer gewissen kritischen Frequenz (Cut-Off-Frequenz) aus, so sind diese ebenfalls eben [68]. Die akustischen Feldvariablen ebener Wellen sind auch in einem dreidimensionalen Rohr nur von der

Axialkoordinate  $x$  abhängig ( $p' = p'(x, t)$ ,  $u' = u'(x, t)$ ) und damit liegt nur ein eindimensionales Problem vor. Wir können deshalb die in Kapitel 2.1.5 gefundene Lösung

$$p' = \rho c (f + g) \quad (2.31)$$

$$u' = f - g \quad (2.32)$$

der 1D-Wellengleichung anwenden.

### 2.2.2 Intensität und Leistung

Als akustische Intensität bezeichnen wir den Fluss akustischer Energie, der durch die Einheitsfläche tritt. Sie besitzt die Einheit  $[\frac{J}{m^2s}]$  und berechnet sich aus Schalldruck und -schnelle durch:

$$I(t) = p'(t) u'(t) \quad (2.33)$$

Zu beachten ist, dass es sich hier um eine zeitabhängige, also momentane Intensität handelt. Im Normalfall sind wir allerdings an der zeitlich gemittelten Intensität interessiert:

$$I = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p'(t) u'(t) dt = \overline{p' u'} \quad (2.34)$$

Bei Wellen mit konstanter Frequenz (siehe Kap. 2.1.3, Gleichung 2.18) arbeiten wir mit den komplexen Schallfeldgrößen  $\hat{p} = |\hat{p}| e^{i\xi}$  und  $\hat{u} = |\hat{u}| e^{i\varphi}$ . Dabei müssen wir beachten, dass nur der Realteil die physikalisch relevante Größe darstellt. Wir berechnen die Intensität aus diesen komplexen Größen, wobei wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass für die Phase des Drucks  $\xi = 0$  gilt. Das ist zulässig, da die Intensität nur von der Phasendiffe-

renz zwischen Druck und Schnelle abhängig ist:

$$\begin{aligned}
 \overline{p'u'} &= \overline{\operatorname{Re}(|\hat{p}|e^{i\omega t}) \cdot \operatorname{Re}(|\hat{u}|e^{i(\omega t + \varphi)})} \\
 &= \overline{|\hat{p}| \cos(\omega t) \cdot |\hat{u}| \cos(\omega t + \varphi)} \\
 &= \frac{|\hat{p}||\hat{u}|}{2} \overline{\cos(\omega t - \omega t - \varphi) + \cos(\omega t + \omega t + \varphi)} \\
 &= \frac{|\hat{p}||\hat{u}|}{2} \overline{\cos(-\varphi) + \cos(2\omega t + \varphi)} \\
 &= \frac{|\hat{p}||\hat{u}|}{2} \cos(\varphi) \tag{2.35}
 \end{aligned}$$

Multiplizieren wir dagegen den komplexen Schalldruck mit dem konjugiert komplexen  $\hat{u}^*$  der Schnelle ergibt sich:

$$\hat{p}\hat{u}^* = |\hat{p}||\hat{u}|e^{-i\varphi} \tag{2.36}$$

Weiter gilt für den Realteil:

$$\operatorname{Re}(\hat{p}\hat{u}^*) = |\hat{p}||\hat{u}| \cos \varphi \tag{2.37}$$

Vergleichen wir die Gleichungen 2.35 und 2.37 erhalten wir direkt:

$$I = \overline{p'u'} = \frac{\operatorname{Re}(\hat{p}\hat{u}^*)}{2} \tag{2.38}$$

Aus den Gleichungen 2.37 und 2.38 wird ersichtlich, dass die Intensität sich nicht mit der Phase ändert (im Gegensatz zu  $\hat{p}$  und  $\hat{u}$ ), da die Phasendifferenz  $\varphi$  konstant ist. Interessant ist, dass die Intensität verschwinden kann, obwohl  $\hat{p}, \hat{u} \neq 0$ :

$$I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\varphi = \pm \frac{\pi}{2} \tag{2.39}$$

Das bedeutet, falls Druck und Schnelle um  $\frac{\pi}{2}$  phasenverschoben sind, was z.B. in einem voll reflektierenden Rohr der Fall ist, ist die Intensität gleich Null.

### Akustische Leistung

Die akustische Leistung  $P$  ist definiert als gesamte Intensität, die durch eine gegebene Bezugsfläche  $A$  tritt:

$$P = \int_A \overline{\vec{I} \cdot \vec{n}} d\vec{x} \tag{2.40}$$

Mit  $\vec{n}$  ist der Normalenvektor der Fläche  $A$  bezeichnet. Aus den komplexen Schallfeldgrößen berechnet sich die akustische Leistung mit Gleichung 2.38 zu

$$P = \frac{1}{2} \int_A \operatorname{Re}(\hat{p} \hat{u}^*) d\vec{x}. \quad (2.41)$$

Falls die Schallfeldgrößen  $\hat{p}$ ,  $\hat{u}$  über die Fläche  $A$  konstant sind, wird die Integration zu einer Multiplikation mit der Fläche:

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{p} \hat{u}^*) A \quad (2.42)$$

Für die zeitabhängigen Schallfeldgrößen  $p'$ ,  $u'$  berechnet sich die Schallleistung mittels

$$P = \overline{p' u'} A = \bar{I} A. \quad (2.43)$$

### 2.2.3 Akustische Impedanz

Bei der Ausbreitung von Schall wird durch eine Schwankung des Drucks die Luft in Bewegung versetzt. Der Widerstand, den diese durch den Druck hervorgerufene Bewegung erfährt, wird als akustische Impedanz  $Z$  bezeichnet [48, 68]. Ein Maß für die Impedanz erhalten wir, indem wir die Ursache, den Druck, der auf eine bestimmte Fläche des Fluids wirkt, ins Verhältnis zur Wirkung (der induzierten Geschwindigkeit dieser Fluidfläche) setzen:

$$Z(x, \omega) := \frac{\hat{p}(x, \omega)}{\hat{u}(x, \omega) \cdot \vec{n}(x)} \quad \left[ \frac{Ns}{m^3} \right] \quad (2.44)$$

Hier bezeichnet  $\vec{n}$  wieder den Normalenvektor der betrachteten Fläche  $A$ . Die Impedanz ist frequenz- und ortsabhängig und im Allgemeinen eine komplexe Größe. Der Realteil wird Resistanz und der Imaginärteil Reaktanz genannt. Die Bedeutung der Reaktanz auf die Schallemission einer Schallquelle wird später noch genauer untersucht. Im Allgemeinen hängt die Impedanz sowohl vom Fluid, als auch vom akustischen Feld und damit von der Geometrie des Raumes ab. Im Spezialfall einer ebenen Welle, die sich im Freifeld ausbreitet, sind Schalldruck und Schnelle in Phase und es ergibt sich die reelle Impedanz  $Z_0 = \rho_0 c_0$ , die eine reine Stoffgröße ist. Dieses Produkt wird auch als Schallkennimpedanz oder charakteristische Impedanz bezeichnet.

## 2.2.4 Reflexionsfaktor

Eine zur Impedanz gleichwertige, aber anschaulichere Größe ist der Reflexionsfaktor  $r_f$ . Dieser ist definiert als das Verhältnis der eingehenden zur ausgehenden Welle. Bezeichnet  $f$  wieder eine in positive Koordinatenrichtung laufende Welle und  $g$ , die in negative Richtung, dann ist der Reflexionsfaktor an der Stelle  $x$  durch

$$r_f(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \quad (2.45)$$

gegeben. Aus Gleichung 2.30b wissen wir, dass  $f = 0.5(p/\rho c + u)$  und  $g = 0.5(p/\rho c - u)$ . Damit ergibt sich für den Reflexionsfaktor  $r_f$  der folgende Zusammenhang mit der Impedanz:

$$r_f = \frac{g}{f} = \frac{\frac{\hat{p}}{\rho c} - \hat{u}}{\frac{\hat{p}}{\rho c} + \hat{u}} = \frac{\hat{p} - \rho c \hat{u}}{\hat{p} + \rho c \hat{u}} = \frac{Z - \rho c}{Z + \rho c} \quad (2.46)$$

## 2.2.5 Randbedingungen

Der Reflexionsfaktor ist zwar im ganzen Wellenfeld definiert, aber interessant ist er vor allem an den Grenzen des Systems, z.B. an den Wänden einer Brennkammer. Welcher Reflexionsfaktor liegt dort vor?

Nehmen wir an, dass die Wand durch die Schallwellen nicht beeinflusst wird, sich also nicht unter dem Schalleinfluss verformt. Wir sprechen dann von einer akustisch harten Wand. Direkt an der Wand muss die Schallschnelle des Fluids orthogonal zur Wand demnach Null sein  $\vec{n} \cdot \mathbf{u}' = 0$  mit  $\vec{n}$  dem Normalenvektor der Wand. Aus der linearisierten Impulsgleichung [51] ergibt sich für den Gradienten des Schalldrucks:

$$\vec{n} \cdot \nabla p' = 0 \quad (2.47)$$

Für den Reflexionskoeffizienten ergibt sich:

$$r_f = \frac{\frac{p'}{\rho c} + u'}{\frac{p'}{\rho c} - u'} = \frac{\frac{p'}{\rho c}}{\frac{p'}{\rho c}} = 1 \quad (2.48)$$

Die Impedanz ergibt sich in diesem Fall nach Gleichung 2.46 zu  $Z(r_f = 1) = \infty$ . Die Schallwelle wird komplett reflektiert.

Neben der harten Wand ist der andere Spezialfall, den wir noch betrachten wollen, der einer Öffnung, z.B. an einem Rohrende, hinter der sich ein großes Volumen anschließt (Freiraum). Idealisiert können wir hier annehmen, dass die Schallwelle am Rohrende den Druck nicht verändern kann, da das Volumen hinter der Öffnung extrem groß ist. Demnach gilt hier  $p' = 0$ . Der Reflexionsfaktor ist:

$$r_f = \frac{\frac{p'}{\rho c} + u'}{\frac{p'}{\rho c} - u'} = \frac{+u'}{-u'} = -1 \quad (2.49)$$

Also auch in diesem Fall wird die Schallwelle komplett reflektiert. Allerdings hat der Reflexionsfaktor diesmal ein negatives Vorzeichen, was bedeutet, dass die Welle gegenphasig reflektiert wird. Die Impedanz ergibt sich zu  $Z(r_f = -1) = 0$ .

### 2.2.6 RMS-Wert

Da bei einer Schwingung die Angabe eines Momentanwerts (z.B.  $p'(t_0)$  zu einer bestimmten Zeit  $t_0$ ) nicht aussagekräftig ist, benötigen wir einen Effektivwert. Eine einfache Mittelung einer harmonisch schwingenden Größe über eine Periode liefert als Ergebnis Null  $\overline{p'(t)} = 0$  und ist damit nicht geeignet. Ein gutes Maß für eine Schwingung erhalten wir, indem wir den quadrierten Wert mitteln und anschließend wieder die Wurzel ziehen. Diese Größe wird RMS-Wert (Root-Mean-Square) genannt:

$$p'_{rms} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T p'^2 dt} = \sqrt{p'^2} \quad (2.50)$$

Für eine komplexe akustische Größe  $(\hat{p}, \hat{u})$  berechnet sich der RMS-Wert wie folgt:

$$\hat{p}(t) = \hat{p} e^{i\omega t} = |\hat{p}| e^{i\varphi} e^{i\omega t} \quad (2.51)$$

Der reale Druck ist der Realteil des komplexen Drucks

$$\begin{aligned} p' &= \operatorname{Re}(|\hat{p}|e^{i\varphi}e^{i\omega t}) = \operatorname{Re}(|\hat{p}|(\cos(\omega t + \varphi) + i\sin(\omega t + \varphi))) \\ p' &= |\hat{p}|\cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (2.52)$$

Damit können wir den RMS-Wert berechnen:

$$\begin{aligned} p'^2_{rms} &= \overline{|\hat{p}|^2 \cos^2(\omega t + \varphi)} = \overline{|\hat{p}|^2 \cos^2(\omega t + \varphi)} \\ &= |\hat{p}|^2 \overline{\frac{1}{2}(1 + \cos(2(\omega t + \varphi)))} \\ &= \frac{|\hat{p}|^2}{2} \end{aligned}$$

Also gilt

$$p'_{rms} = \frac{|\hat{p}|}{\sqrt{2}}. \quad (2.53)$$

### Schalldruckpegel

Für den Menschen hörbare Töne besitzen Schalldrücke zwischen  $2 \cdot 10^{-5} Pa$  (Hörschwelle) und  $6 \cdot 10^2 Pa$  (Schmerzgrenze). Da dieser Bereich sehr groß ist und die menschliche Sinnesempfindung nicht linear vom Schalldruck abhängt, wird zur Quantifizierung des Schalls ein logarithmisches Maß verwendet [83]. Die Definition des Schalldruckpegels *SPL* („Sound Pressure Level“) lautet:

$$SPL = 20 \cdot \log\left(\frac{p'_{rms}}{p'_{ref}}\right) \quad (2.54)$$

Hier ist wieder zu beachten, dass für den RMS-Wert

$$p'_{rms} = \frac{|\hat{p}|}{\sqrt{2}} \quad (2.55)$$

gilt. Als Referenzdruck wird im Allgemeinen die menschliche Hörschwelle  $p'_{ref} = 2 \cdot 10^{-5} Pa$  verwendet.

## 2.3 Rankine-Hugoniot Beziehungen

Im Abschnitt 2.1.2 haben wir gesehen, dass eine schwankende Wärmefreisetzungsrates eine Quelle für thermoakustisch erzeugten Schall darstellt. Eine turbulente Flamme ist so eine Wärmequelle, deren Stärke zeitlich fluktuiert und die folglich Lärm erzeugt. Den Zusammenhang zwischen der Wärmefreisetzungsfuktuation  $q'(t)$  bzw.  $\hat{q}$  und dem Schalldruck haben wir mit den Gleichungen 2.17 bzw. 2.20 schon gefunden. Trotzdem wollen wir noch einmal genauer untersuchen, was beim Durchgang einer Strömung durch eine Flamme passiert. Ergebnis werden die Rankine-Hugoniot-Beziehungen sein, die Schalldruck und Schallschnelle vor und hinter einer unendlich dünnen Flamme zueinander in Beziehung setzen.

### 2.3.1 Allgemeine Herleitung

Die Rankine-Hugoniot-Bedingungen, die wir im Folgenden herleiten wollen, nehmen an, dass die Flamme infinitesimal dünn ist („Flammenhaut“). Damit ergibt sich über die Flamme eine unstetige Änderung der thermodynamischen Größen. Masse-, Impuls- und Energieerhaltung beim Sprung über die Flamme lassen sich wie folgt schreiben [14, 59] (Position 1 ist vor und Position 2 nach der Flamme) :

$$\rho u \Big|_1^2 = 0 \quad (2.56a)$$

$$p + \rho u^2 \Big|_1^2 = 0 \quad (2.56b)$$

$$h + \frac{u^2}{2} \Big|_1^2 = Q \quad \left[ \frac{J}{kg} \right] \quad (2.56c)$$

Weiter benötigen wir die thermische Zustandsgleichung idealer Gase und die Definition der Schallgeschwindigkeit:

$$p = \rho RT \quad c^2 = \gamma RT \quad (2.57)$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich der Zusammenhang

$$c^2 = \frac{\gamma p}{\rho} . \quad (2.58)$$

Nehmen wir an, dass sich die spezielle Gaskonstante beim Übergang über die Flamme nicht ändert:  $R_1 = R_2 = R$ . Dann ergibt sich aus der idealen Gasgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{p_1}{\rho_1 T_1} &= \frac{p_2}{\rho_2 T_2} \\ \frac{T_2}{T_1} &= \frac{p_2 \rho_1}{\rho_2 p_1} = \frac{\gamma c_2^2}{\gamma c_1^2} = \frac{c_2^2}{c_1^2} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Die Enthalpie  $h$  aus der Energiegleichung können wir für den Fall einer konstanten Wärmekapazität  $c_p$  folgendermaßen umformen:

$$h = c_p T = c_p \frac{p}{R \rho} = \frac{c_p}{c_p - c_v} \frac{p}{\rho} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (2.60)$$

Setzen wir das in die Energiegleichung ein, ergibt sich:

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \Big|_1 = Q \quad (2.61)$$

Setzen wir hier den Zusammenhang 2.58  $c^2 = \frac{\gamma p}{\rho}$  zwischen Schallgeschwindigkeit und Isentropenexponent ein, können wir die folgende Beziehung für die Schallgeschwindigkeiten vor und nach der Flamme ableiten:

$$c_2^2 = c_1^2 + (\gamma - 1) Q + \frac{(\gamma - 1)}{2} (u_1^2 - u_2^2) \quad (2.62)$$

Da die Geschwindigkeiten  $u_1$  und  $u_2$  klein sind im Vergleich mit der Schallgeschwindigkeit, kann der letzte Term vernachlässigt werden:

$$c_2^2 = c_1^2 + (\gamma - 1) Q \quad (2.63)$$

Zusammen mit Gleichung 2.59 ergibt sich

$$\frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{c_2}{c_1} \right)^2 = 1 + (\gamma - 1) \frac{Q}{c_1^2}. \quad (2.64)$$

Durch Linearisierung erhalten wir für die akustischen Größen  $p', u', \dots$  die Rankine-Hugoniot-Beziehungen [59]

$$p_2' = p_1' - \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \rho_1 c_1 u_1 Ma_1 \left( \frac{u_1'}{u_1} + \frac{q_F'}{q_F} \right) \quad (2.65a)$$

$$u_2' = u_1' + \left( \frac{T_2}{T_1} - 1 \right) u_1 \left( \frac{q_F'}{q_F} - \frac{p_1'}{p_1} \right), \quad (2.65b)$$

wobei  $q_F = \rho u Q$ ,  $[q_F] = \frac{W}{m^2}$  den Wärmeeintrag pro Flächeneinheit und  $Ma$  die Machzahl bezeichnet. Im Folgenden werden wir diese Beziehungen noch weiter vereinfachen.

Aus Gleichung 2.64 ergibt sich durch Einsetzen der Beziehung 2.58 ( $\rho c^2 = \gamma p$ )

$$\left(\frac{c_2}{c_1}\right)^2 = 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{q_F}{p_1 u_1} \quad (2.66)$$

und zusammen mit Gleichung 2.64 weiter

$$\frac{T_2}{T_1} - 1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{q_F}{p_1 u_1} = \frac{\gamma - 1}{\rho_1 c_1^2} \frac{q_F}{u_1}. \quad (2.67)$$

Setzen wir diese Beziehung in die Rankine-Hugoniot-Geschwindigkeitsbeziehung Gleichung 2.65b ein und vernachlässigen den Druckterm, ergibt sich für die akustische Geschwindigkeiten vor und nach der Flamme:

$$u'_2 = u'_1 + \left(\frac{\gamma - 1}{\rho_1 c_1^2}\right) \frac{q_F}{u_1} u_1 \frac{q_{F'}}{q_F} = u'_1 + \left(\frac{\gamma - 1}{\rho_1 c_1^2}\right) q_{F'} \quad (2.68)$$

In Gleichung 2.65a tritt im zweiten Term auf der rechten Seite die Machzahl auf. Bei den Brennern, die wir im Rahmen dieser Arbeit untersuchen werden, ist die Machzahl klein. Jedoch darf sie nicht generell vernachlässigt werden, da hierdurch auch jegliche Dämpfung vernachlässigt würde (siehe Kapitel 6.2.2). Für die Rankine-Hugoniot-Bedingung 2.65a hat allerdings die Erfahrung gezeigt, dass der Machzahl-abhängige Term nur einen geringen Einfluss hat. Deshalb können wir die Bedingung 2.65a zu der Forderung vereinfachen, dass der Druck über die Flamme konstant bleibt. Insgesamt erhalten wir:

$$p'_2 = p'_1 \quad (2.69)$$

$$u'_2 = u'_1 + \left(\frac{\gamma - 1}{\rho_1 c_1^2}\right) q_{F'} \quad (2.70)$$

Wenn wir im Weiteren von den Rankine-Hugoniot Beziehungen sprechen, so ist immer diese vereinfachte Form gemeint.

### 2.3.2 Zusammenhang mit dem thermoakustischen Quellterm der Wellengleichung

Die Rankine-Hugoniot-Bedingungen werden im Netzwerkmodellen (siehe Kapitel 6.2.2) verwendet, um den thermisch erzeugten Lärm ins System einzubringen. Wir überprüfen an dieser Stelle, ob die Rankine-Hugoniot-Bedingungen äquivalent zu der Wellengleichung mit thermoakustischem Quellterm 2.17 sind. Dazu werden wir ausgehend von den linearen Akustikgleichungen eine Wellengleichung für die Schallschnelle ableiten. Die linearen Akustikgleichungen ergeben sich aus der Massen- und Impulserhaltung (Gleichungen 2.1 und 2.2) durch Linearisierung und Vernachlässigung von Reibung. Zusätzlich wird angenommen, dass Entropiefluktuationen nur durch Schwankungen der Wärmefreisetzung verursacht werden [52]:

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \gamma p \frac{\partial u'}{\partial x} = (\gamma - 1) \dot{q}' \quad (2.71)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (2.72)$$

Leiten wir die erste Gleichung nach  $x$  ab und multipliziert sie mit  $-\rho^{-1}$  und leiten die zweite nach der Zeit  $t$  ab, ergibt sich

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} - \frac{\gamma p}{\rho} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = -\frac{(\gamma - 1)}{\rho} \frac{\partial \dot{q}'}{\partial x} \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 p'}{\partial t \partial x} \quad (2.74)$$

Wir addieren beide Gleichungen und erhalten eine Wellengleichung für die akustische Geschwindigkeit:

$$\frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - \frac{\gamma \bar{p}}{\rho} \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = -\frac{(\gamma - 1)}{\rho} \frac{\partial \dot{q}'}{\partial x} \quad (2.75)$$

Mit

$$\gamma \frac{\bar{p}}{\rho} = c^2 \quad (2.76)$$

ergibt sich der Ausdruck

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2} = -\frac{(\gamma - 1)}{\rho c^2} \frac{\partial \dot{q}'}{\partial x} \quad (2.77)$$

Wir sehen, dass die Ausbreitung der Schallschnelle  $u'$  durch die selbe Gleichung wie im Falle des Schalldrucks  $p'$  beschrieben wird. Unterschiedlich ist nur der Quellterm auf der rechten Seite. Hier tritt die Ableitung der Wärmefluktuationen nach dem Ort  $x$  auf und nicht nach der Zeit. Beide Gleichungen, die Wellengleichung für den Druck  $p'$  und die für die Schnelle  $u'$ , sind in ihrem Informationsgehalt gleichwertig. Allerdings ist die Schnelle eine vektorielle Größe, im Dreidimensionalen müssten also für die Schnelle drei Gleichungen gelöst werden, für den Druck aber nur eine. Daher wird normalerweise nur mit der Druck-Wellengleichung gearbeitet. Unter der Annahme harmonischer Schwingungen gilt für den Frequenzbereich:

$$-\frac{\omega^2}{c^2} \hat{u} - \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial x^2} = -\frac{\gamma-1}{\rho c^2} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} \quad (2.78)$$

Wir betrachten den Spezialfall eines unendlich langen Rohres, in dem sich an der Stelle  $x_0$  eine Flamme befindet. Gleichwertig mit dem unendlich langen Rohr wäre ein Rohr, das auf beiden Seiten nicht-reflektierende Enden besitzt (Reflexionsfaktor  $r_f = 0$ ). Die Lösung von Gleichung (2.78) für diesen Spezialfall ergibt sich nach [68] durch Integration über die komplette Länge  $L$  des Quellgebietes

$$\hat{u}(x_B) = \int_L \frac{i e^{i\kappa|x_B-x|}}{2\kappa} \left( -\frac{\gamma-1}{\rho c^2} \frac{\partial \hat{q}}{\partial x} \right) dx, \quad (2.79)$$

wobei wir mit  $x_B$  die Position des Beobachters bezeichnen. Bei den Rankine-Hugoniot-Bedingungen wird angenommen, dass die Flamme unendlich dünn ist. Die Quelle ist somit eine unendlich dünne Scheibe. Um diese Quelle nachzubilden, verwenden wir die Dirac'sche Deltadistribution [18]:  $\hat{q} = q_F \cdot \delta(x - x_0)$ . Zu beachten ist, dass die Deltadistribution hier die Einheit  $[\frac{1}{m}]$  hat.

$$\begin{aligned} \hat{u}(x_B) &= \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} \frac{i e^{i\kappa|x_B-x|}}{2\kappa} \left( -\frac{\gamma-1}{\rho c^2} \frac{\partial}{\partial x} (q_F \cdot \delta(x - x_0)) \right) dx \\ &= -\frac{i(\gamma-1)}{2\kappa \rho c^2} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{i\kappa|x_B-x|} \frac{\partial}{\partial x} (q_F \cdot \delta(x - x_0)) dx \end{aligned} \quad (2.80)$$

Wir nehmen an, dass  $x_B > x$  und damit  $|x_B - x| = (x_B - x)$ :

$$\begin{aligned}\hat{u}(x) &= -\frac{i(\gamma-1)}{2\kappa\rho c^2}q_F e^{i\kappa x_B} \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-i\kappa x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta(x-x_0)) dx \\ &= -\frac{i(\gamma-1)}{2\kappa\rho c^2}q_F e^{i\kappa x_B} e^{-i\kappa x_0} i\kappa\end{aligned}\quad (2.81)$$

Die Lösung  $\hat{u}$  der Wellengleichung lautet demnach:

$$\hat{u}(x_B) = -\frac{(\gamma-1)}{2\rho c^2}q_F e^{i\kappa(x_B-x_0)}\quad (2.82)$$

Das Integral wurde dabei wie folgt berechnet:

$$\begin{aligned}\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} e^{-i\kappa x} \frac{\partial}{\partial x} (\delta(x-x_0)) dx &= \\ &= e^{-i\kappa x} \delta(x-x_0) \Big|_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} - \int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\varepsilon} -i\kappa e^{-i\kappa x} \delta(x-x_0) dx \\ &= 0 + i\kappa e^{-i\kappa x_0}\end{aligned}$$

Die Rankine-Hugoniot Beziehung für die Geschwindigkeit nach Gleichung 2.70 lautete:

$$u'_2 = u'_1 + \left(\frac{\gamma-1}{\rho_1 c_1^2}\right)q_F$$

Diese Beziehung bedeutet, dass die Flamme eine akustische Schnelle-schwankung von  $\frac{\gamma-1}{\rho_1 c_1^2}q_F$  erzeugt. Da im Fall eines beidseitig nichtreflektierenden Rohres in beide Richtungen dieselbe Schnelle-Welle ausgesandt wird, teilt sich diese Schwankungen noch in zwei Teile auf. Wie bei der direkten Lösung der Wellengleichung 2.82 erhalten wir also die Lösung:

$$\hat{u}(x) = -\frac{(\gamma-1)}{2\rho c^2}q_F e^{i\kappa(x-x_0)}\quad (2.83)$$

Die Rankine-Hugoniot Beziehungen und der thermoakustische Quellterm in der Wellengleichung sind somit äquivalent.

## 2.3 Rankine-Hugoniot Beziehungen

---

---

## 3 Einfluss des Einschlusses auf die Schallabstrahlung von Flammen

In diesem Kapitel werden wir die Schallabstrahlung einer Quelle näher untersuchen. Eigentliches Ziel dabei ist herauszufinden, welchen Einfluss die akustischen Umgebungsbedingungen auf die Schallemission haben. Besonders wichtig ist, wie sich ein Einschluss, wie zum Beispiel eine Brennkammer, auf die Abstrahlung akustischer Leistung auswirkt. Dazu werden wir zunächst die analytischen Lösungen zweier einfacher Fälle betrachten: Zum einen die Abstrahlung einer Quelle direkt in das dreidimensionale Freifeld, zum anderen die Abstrahlung einer Quelle in einem beidseitig reflexionsfreien Rohr.

### 3.1 Lösung der inhomogenen Helmholtzgleichung

Die Helmholtzgleichung zur Beschreibung der Ausbreitung von Wellen mit konstanter Frequenz haben wir in Kapitel 2.1.3 hergeleitet. Analog Gleichung 2.20 lautet die Helmholtzgleichung bei konstanter Dichte und mit einem allgemeinen Quellterm  $S(x)$ :

$$-\Delta \hat{p} - \kappa^2 \hat{p} = S(x) \quad (3.1)$$

Analytische Lösungen dieser Gleichung können wir bei einfachen Geometrien mittels einer Greenschen Funktion gewinnen. Die Greensche Funktion ist die Lösung der Helmholtzgleichung bei Anregung durch einen Dirac-Puls [68]:

$$-\Delta G - \kappa^2 G = \delta(x) \quad (3.2)$$

Die Lösung für den Fall einer Helmholtzgleichung 3.1 mit allgemeinem Quellterm auf der rechten Seite, erhalten wir aus der Greenschen Funktion durch

Faltung:

$$\hat{p}(x_B) = (G * S)(x_B) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x_B - x) S(x) dx \quad (3.3)$$

Für den Spezialfall eines unbegrenzten Raums lauten die Greenschen Funktionen für den eindimensionalen Fall

$$G(x) = \frac{i e^{i\kappa|x|}}{2\kappa} \quad (3.4)$$

und für den dreidimensionalen Fall

$$G(\vec{x}) = \frac{e^{i\kappa|\vec{x}|}}{4\pi|\vec{x}|}. \quad (3.5)$$

Anschaulich entspricht der eindimensionale Fall einem unendlichem Rohr und der dreidimensionale Fall der Abstrahlung in das Freifeld. Da hierbei die Abstrahlung in alle Richtungen gleich ist, ist das entstehende Schallfeld kugelsymmetrisch und dieser Fall auch quasi eindimensional, da die Lösung nur vom Radius abhängig ist.

### 3.1.1 Freifeldlösung der Helmholtzgleichung (Kugelsymmetrie)

Für den Schalldruck an der Beobachterposition  $x_B$  im freien dreidimensionalen Raum erhalten wir mit den Gleichungen 3.3 und 3.5:

$$\hat{p}(x_B) = (G * S)(x_B) = \int_{V_S} \frac{e^{i\kappa|x_B-x|}}{4\pi|x_B-x|} S(x) dx \quad (3.6)$$

Wir nehmen an, dass die Beobachterposition  $x_B$  weit von der Quellposition  $x$  entfernt ist  $x_B \gg x$ . Daraus ergibt sich, dass in guter Näherung  $|x_B - x| \approx r$  gilt. Die Quelle  $S$  sei auf einem Volumen  $V_S$  gleichmäßig verteilt:

$$S(x) = \begin{cases} s_0 & \forall x \in V_S \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.7)$$

Die Konstante  $s_0$  können wir als Amplitude einer harmonisch schwingenden Quelle interpretieren. Es ergibt sich

$$\hat{p}(x_B) = \int_{V_S} \frac{e^{i\kappa|x_B-x|}}{4\pi|x_B-x|} S(x) dx = \frac{e^{i\kappa r}}{4\pi r} s_0 \int_{V_S} 1 dx = \frac{e^{i\kappa r}}{4\pi r} s_0 V_S. \quad (3.8)$$

Der Schalldruck im Fernfeld hat demnach einen Absolutwert von

$$|\hat{p}(r)| = \frac{s_0 V_S}{4\pi r}. \quad (3.9)$$

Der Schalldruck sinkt also mit zunehmendem Abstand  $r$  von der Quelle. Zu beachten ist, dass der Schalldruck allerdings nicht von der Wellenzahl  $\kappa$  abhängt.

### 3.1.2 Lösung der Helmholtzgleichung für das Rohr

Im eindimensionalen Fall, der einem beidseitig unendlichem Rohr entspricht, bekommen wir mittels der Greenschen Funktion (3.4) für den Schalldruck:

$$\hat{p}(x_B) = (G * S)(x_B) = \int_{x_1}^{x_2} \frac{i e^{i\kappa|x_B-x|}}{2\kappa} S(x) dx \quad (3.10)$$

Das Rohrvolumen der Länge  $l$  befindet sich zwischen den Koordinaten  $x_1$  und  $x_2$ . Wie im 3D-Fall nehmen wir an, dass die Quelle in ihrem Inneren gleichmäßig stark ist:

$$S(x) = \begin{cases} s_0 & x_1 \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.11)$$

Damit berechnen wir für den Schalldruck:

$$\begin{aligned} \hat{p}(x_B) &= \frac{s_0}{2\kappa} i \int_{x_1}^{x_2} e^{i\kappa|x_B-x|} dx = \frac{s_0}{2\kappa} i \int_{x_1}^{x_2} e^{i\kappa x_B} e^{-i\kappa x} dx \\ &= \frac{i s_0}{2\kappa} e^{i\kappa x_B} \left[ -\frac{1}{i\kappa} e^{-i\kappa x} \right]_{x_1}^{x_2} = \frac{i s_0}{2\kappa} e^{i\kappa x_B} \frac{-1}{i\kappa} (e^{-i\kappa x_2} - e^{-i\kappa x_1}) \\ &= -\frac{s_0 e^{i\kappa x_B}}{2\kappa^2} (e^{-i\kappa x_2} - e^{-i\kappa x_1}) \end{aligned} \quad (3.12)$$

Im Gegensatz zum Kugelfeld 3.8 ergibt sich hier eine Abhängigkeit von der Wellenzahl  $\kappa$ . Der Betrag des Drucks ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
 |\hat{p}(x_B)| &= \left| \frac{s_0 e^{i\kappa x_B}}{2\kappa^2} (e^{-i\kappa x_2} - e^{-i\kappa x_1}) \right| \\
 &= \frac{s_0}{2\kappa^2} |e^{-i\kappa x_2} - e^{-i\kappa x_1}| \\
 &= \frac{s_0}{2\kappa^2} \sqrt{(e^{i\kappa x_2} - e^{i\kappa x_1})(e^{i\kappa x_2} - e^{i\kappa x_1})^*} \\
 &= \frac{s_0}{2\kappa^2} \sqrt{2 - e^{i\kappa(x_2-x_1)} - e^{-i\kappa(x_2-x_1)}}. \tag{3.13}
 \end{aligned}$$

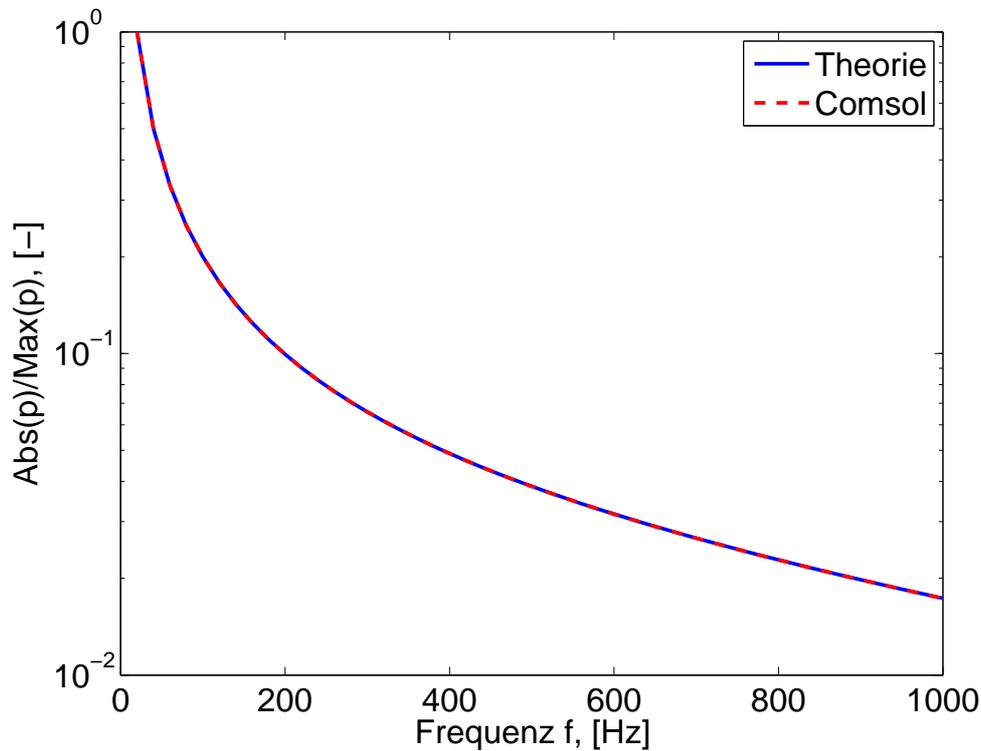
Damit ist der Betrag des Druckes im Rohr nur eine Funktion der Länge des Quellgebiets  $x_2 - x_1$ . Dieser Fall einer Quelle im nichtreflektierenden Rohr wurde mittels des FE-Programmes COMSOL (siehe Kapitel 6.2.1) auch numerisch berechnet. Das betrachtete Rohr hatte einen Durchmesser von  $r_{Rohr} = 0.05m$  und die Schallgeschwindigkeit betrug  $c = 343m/s$ . Um das unendlich lange Rohr nachzubilden wurden an beiden Enden des Rohres nichtreflektierende Randbedingungen gesetzt. Das Quellgebiet hatte eine Länge  $x_2 - x_1 = 0.1m$  und die Quellstärke betrug  $s_0 = 1N/m^4$ . In Abbildung 3.1 ist die numerische im Vergleich mit der analytischen Lösung nach Gleichung 3.13 gezeigt. Die Übereinstimmung der beiden Lösungen ist perfekt.

### 3.1.3 Emittierte Schalleistung

Die Schalleistung berechnet sich nach Gleichung 2.40 aus dem Flächenintegral über die akustische Impedanz. Bei der Rohrlösung gehen wir von ebenen Wellen aus (siehe Kap. 2.2.1), demnach sind die akustischen Größen über die gesamte Querschnittsfläche konstant. Im 3D-Fall ist die für die Leistungsbeurteilung relevante Fläche eine Kugeloberfläche um die Quelle. Da die Quelle in alle Raumrichtungen gleich stark abstrahlt, sind auch in diesem Fall die akustischen Größen über die Bezugsfläche konstant. Daher gilt für die Leistung

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{p}\hat{u}^*) A. \tag{3.14}$$

Zu bestimmen bleibt die Impedanz, zum einen für das Rohr und zum anderen für das Freifeld.



**Abbildung 3.1:** Vergleich von analytischer und numerischer Lösung für ein reflexionsfreies Rohr

### Impedanz im Rohr

In Kapitel 2.2.1 haben wir gezeigt, dass in Rohren in guter Näherung die Wellen als eben und damit eindimensional angesehen werden können. Für den Druck und die Schnelle gilt allgemein bei ebenen Wellen die in Kapitel 2.1.5 gefundene Lösung:

$$\hat{p} = \rho c (f + g)$$

$$\hat{u} = f - g$$

Da das Rohr in unserem Fall reflexionsfrei ist, läuft zwar eine Welle in die eine Richtung, aber es kommt keine reflektierte Welle zurück. Auf der rechten Seite der Quelle gilt damit  $g = 0$  und für  $\hat{p}$  und  $\hat{u}$  ergibt sich:

$$\hat{p} = \rho c f \tag{3.15}$$

$$\hat{u} = f \tag{3.16}$$

Damit können wir die Impedanz berechnen:

$$Z = \frac{\hat{p}}{\hat{u}} = \frac{\rho c f}{f} = \rho c = Z_0 \quad (3.17)$$

Im ganzen Rohr ist damit die Impedanz gleich der charakteristischen Impedanz  $Z_0$ .

### Impedanz des Kugelstrahlers

Um die Impedanz in einem Schallfeld, das von einer Monopolquelle erzeugt wird, berechnen zu können, benötigen wir Druck und Schnelle in einem solchen Schallfeld. Daher werden wir zunächst diese berechnen:

Für den Druck in einem radialen Schallfeld (Kugelfeld) gilt

$$p(t, r) = B \frac{e^{i\omega(t-\frac{r}{c})}}{r}, \quad (3.18)$$

mit einer Konstanten  $B$  [ $N/m$ ]. Bei harmonischen Wellen vereinfacht sich das zu

$$\hat{p} = B \frac{e^{-i\omega\frac{r}{c}}}{r}. \quad (3.19)$$

Wir benötigen die Ableitung von  $\hat{p}$ :

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial r} = -B \left( \frac{i\omega}{rc} e^{-i\omega\frac{r}{c}} + \frac{1}{r^2} e^{-i\omega\frac{r}{c}} \right) \quad (3.20)$$

Druck und Schnelle sind durch die Impulsgleichung verknüpft [51]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (3.21)$$

Bei harmonischen Wellen:

$$i\omega \hat{u} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} \quad (3.22)$$

Jetzt setzen wir die Ableitung des Drucks ein und lösen nach  $\hat{u}$  auf:

$$\hat{u} = \frac{B}{i\omega\rho} \left( \frac{i\omega}{rc} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-i\omega\frac{r}{c}} = \frac{B}{\rho r} \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{i\omega r} \right) e^{-i\omega\frac{r}{c}} \quad (3.23)$$

Die Impedanz ist  $Z = \hat{p} / \hat{u}$ , für das radiale Feld ergibt sich

$$Z_{rad} = \frac{B \frac{e^{-i\omega \frac{r}{c}}}{r}}{\frac{B}{\rho r} \left( \frac{1}{c} + \frac{1}{i\omega r} \right) e^{-i\omega \frac{r}{c}}} = \rho c \left( 1 - \frac{ic}{\omega r} \right)^{-1}. \quad (3.24)$$

Für hohe Frequenzen ( $\omega \gg 1$ ) oder große Entfernungen von der Quelle ( $r \gg 1$ ) geht die Impedanz  $Z_{rad}$  gegen die charakteristische Impedanz  $Z_0 = \rho c$ . Weiter spalten wir die Impedanz des Radialfeldes  $Z_{rad}$  in Realteil und Imaginärteil auf:

$$Z_{rad} = \rho c \frac{\kappa r}{1 + \kappa^2 r^2} (\kappa r + i) \quad (3.25)$$

Diese werden wir später zur Berechnung der Schallabstrahlung am Ende eines offenen Rohres in das Freifeld noch benötigen.

### Leistung

Da in beiden betrachteten Fällen die Impedanz in einem gewissen Abstand von der Quelle gleich der Freifeldimpedanz  $\rho c$  ist, gilt  $\hat{p} = \rho c \hat{u}$  und mit Gleichung 2.42 gilt für die Leistung

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{\hat{p} \hat{p}^*}{\rho c} \right) A = \frac{|\hat{p}|^2}{2\rho c} A. \quad (3.26)$$

**Rohr:** Bei dem Rohr verteilt sich die akustische Leistung über die Querschnittsfläche auf beiden Seiten der Quelle. Damit gilt für die Fläche  $A = 2 \cdot \pi r^2$ , diese ist also konstant für alle Orte  $x$ :

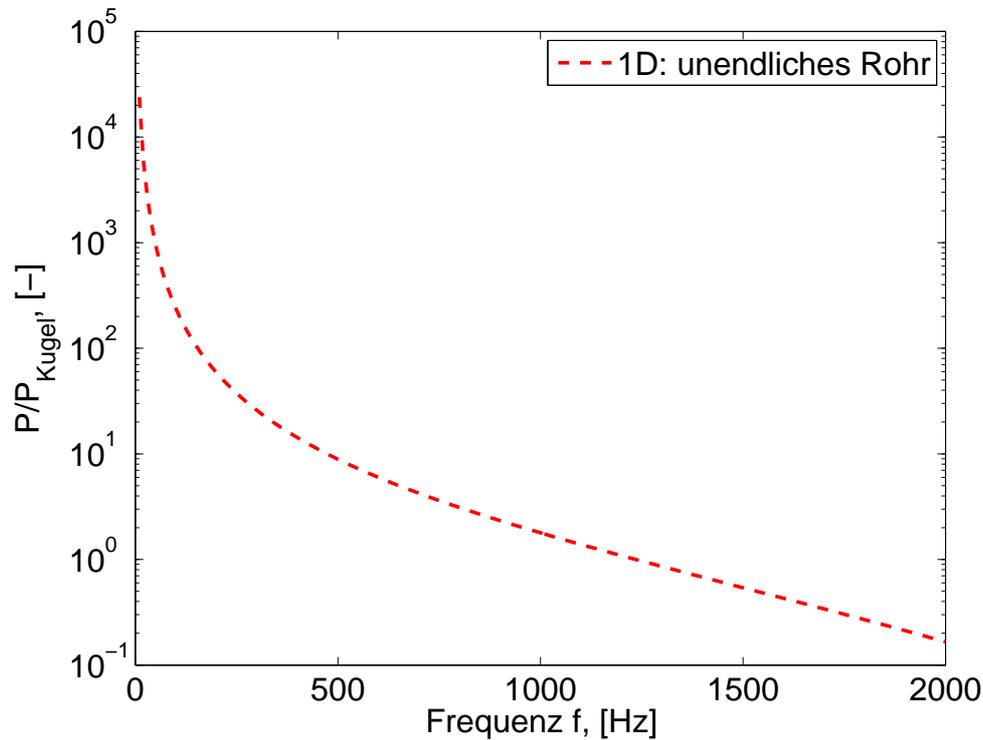
$$P = \left( \frac{s_0}{2\kappa^2} |e^{-i\kappa x_2} - e^{-i\kappa x_1}| \right)^2 \frac{1}{2\rho c} 2\pi r_{Rohr}^2 \quad (3.27)$$

**Kugelsymmetrie:** Hier verteilt sich die Leistung über eine Kugeloberfläche  $A = 4\pi r^2$ , die Fläche wächst quadratisch mit dem Abstand von der Quelle. Die Leistung ist hier:

$$P = \left( \frac{s_0 V_S}{4\pi r} \right)^2 \frac{1}{2\rho c} 4\pi r^2 = \frac{s_0^2 V_S^2}{8\pi \rho c} \quad (3.28)$$

Vergleichen wir die Schalleistungen von Kugel 3.28 und Rohr 3.27, so fällt auf, dass sie bei der Kugel nicht von der Wellenzahl  $\kappa$  abhängt, wohingegen die Leistung beim Rohr mit der Wellenzahl fällt. Dieses unterschiedliche Verhalten erklärt sich wie folgt: Bei sehr tiefen Frequenzen ist die Wellenlänge groß. Damit ist auch die Luftsäule, die die Quelle hin und her bewegen muss groß und daher ist die von der Quelle aufzubringende Leistung ebenfalls groß. Mit zunehmender Frequenz wird die Wellenlänge und damit die zu bewegende Luftsäule kürzer und damit sinkt die notwendige Leistung. Bei der ins Freifeld abstrahlenden Kugelquelle ist bei tiefen Frequenzen (und damit großer Wellenlänge) das zu verschiebende Luftvolumen wesentlich kleiner als das Volumen der Luftsäule im Falle des Rohres. Das liegt daran, dass bei der Kugelwelle die Amplitude der Welle mit dem Abstand  $r$  von der Quelle mit  $1/r$  abnimmt und daher das zu bewegende Luftvolumen kleiner ist als im Falle des Rohres. Daher ist auch die Leistung geringer.

In Abbildung 3.2 ist die Frequenzabhängigkeit der Leistung im Rohr dargestellt. Die Leistung wurde mit der entsprechenden konstanten Leistung der ins Freifeld abstrahlenden Quelle normiert. Ausgewertet wurden dafür die Gleichungen 3.27 und 3.28. Für das Rohr wurde ein Radius von  $r_{Rohr} = 0.05m$  und eine Quellenlänge  $x_2 - x_1 = 0.1m$  angenommen. Das Volumen des Kugelstrahlers  $V_S$  wurde gleich dem der Rohrquelle gewählt. Die Fluiddaten betragen  $c = 343m/s$  und  $\rho = 1.25kg/m^3$  und die Quellstärke wurde mit  $s_0 = 1N/m^2$  angenommen. Die ins Freifeld abstrahlende Quelle besitzt die konstante dimensionslose Leistung 1. Im niederfrequenten Bereich ist die dimensionslose Leistung der Quelle im Rohr wesentlich größer als eins, also deutlich höher als die der frei abstrahlenden Quelle. Da die Leistung der Rohrquelle aber quadratisch mit der Frequenz abfällt, sinkt sie schnell auf Werte unter eins ab. Bei hohen Frequenzen strahlt die Kugel demnach stärker ab.



**Abbildung 3.2:** Abgestrahlte Leistung der Quelle im Rohr (Gleichung 3.27) normiert mit der konstanten Leistung  $P_{Kugel}$  des Kugelstrahlers

### 3.2 Verbrennungslärm

Nach Gleichung 2.20 gilt bei verbrennungsinduziertem Lärm die folgende inhomogene Helmholtzgleichung:

$$-\Delta \hat{p} - \kappa^2 \hat{p} = \frac{\gamma - 1}{c^2} i \omega \hat{q} = i \frac{\gamma - 1}{c} \kappa \hat{q} \quad (3.29)$$

Viele real existierende Brennkammern sind in guter Näherung rohrförmig. Deshalb werden wir untersuchen, welchen Einfluss die Rohrgeometrie auf die Schallabstrahlung einer thermoakustischen Quelle hat.

Setzen wir den Quellterm aus Gleichung 3.29 in die allgemeine Rohrlösung

3.12 ein, erhalten wir:

$$\hat{p}(x, \kappa) = -i \frac{\gamma - 1}{c} \kappa \hat{q}(\kappa) \frac{e^{i\kappa x}}{2\kappa^2} (e^{-i\kappa x_2} - e^{-i\kappa x_1}) \quad (3.30)$$

$$= -i \frac{\gamma - 1}{2\kappa c} \hat{q}(\kappa) (e^{-i\kappa x_2} - e^{-i\kappa x_1}) e^{i\kappa x} \quad (3.31)$$

Und weiter für den Betrag:

$$|\hat{p}(x, \kappa)| = \frac{\gamma - 1}{2\kappa c} |\hat{q}(\kappa)| |e^{-i\kappa x_2} - e^{-i\kappa x_1}| \quad (3.32)$$

Die abgestrahlte Leistung ergibt sich aus Gleichung 3.27 zu:

$$P_{Rohr}(\kappa) = \left( \frac{\gamma - 1}{2\kappa} \right)^2 |\hat{q}(\kappa)|^2 |e^{-i\kappa x_2} - e^{-i\kappa x_1}|^2 \frac{\pi r_{Rohr}^2}{\rho c^3} \quad (3.33)$$

Den Faktor  $|e^{i\kappa x_2} - e^{i\kappa x_1}|$  werden wir durch eine Taylorreihe approximieren; hierbei werden wir die Abkürzung  $\Delta x = (x_2 - x_1)$  benutzen:

$$\begin{aligned} |e^{i\kappa x_2} - e^{i\kappa x_1}| &= \sqrt{(e^{i\kappa x_2} - e^{i\kappa x_1})(e^{i\kappa x_2} - e^{i\kappa x_1})^*} \\ &= \sqrt{2 - e^{i\kappa(x_2 - x_1)} - e^{-i\kappa(x_2 - x_1)}} \\ &\approx \sqrt{2 - (1 + i\Delta x \kappa - \Delta x^2 \kappa^2 + 1 - i\Delta x \kappa - \Delta x^2 \kappa^2)} \\ &\approx \sqrt{2} \Delta x \kappa \end{aligned} \quad (3.34)$$

Setzen wir diese Näherung in Gleichung 3.33 ein, erhalten wir für die abgestrahlte Leistung:

$$P_{Rohr}(\kappa) \approx \frac{(\gamma - 1)^2}{2\rho c^3} \pi r_{Rohr}^2 |\hat{q}(\kappa)|^2 \Delta x^2 \quad (3.35)$$

Die akustische Leistung der selben Quelle, die ins dreidimensionale Freifeld abstrahlt, kann auf analogem Weg berechnet werden. Der Schalldruck im Freifeld ergibt sich mit Gleichung 3.8 zu:

$$\hat{p}(r) = i \frac{\gamma - 1}{c} \kappa \hat{q}(\kappa) V_S \frac{e^{i\kappa r}}{4\pi r} \quad (3.36)$$

$$|\hat{p}(r)| = \frac{\gamma - 1}{4\pi r c} \kappa V_S |\hat{q}(\kappa)| \quad (3.37)$$

Hieraus ergibt sich die ins Freifeld abgestrahlte akustische Leistung zu

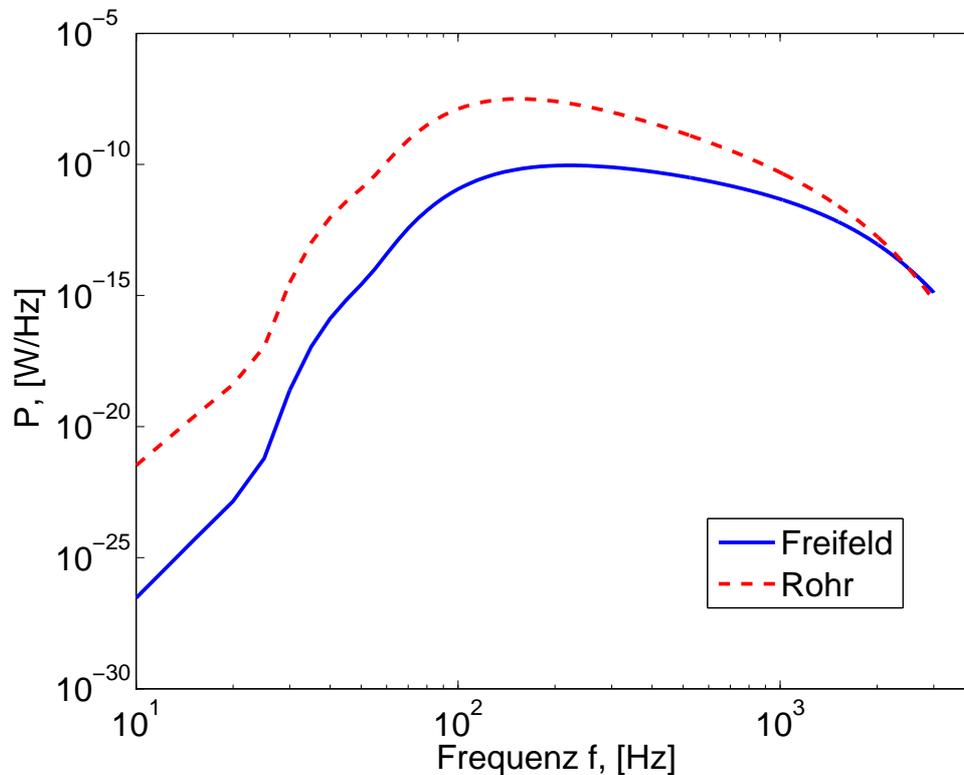
$$P_{ff}(\kappa) = \frac{(\gamma - 1)^2}{8\pi\rho c^3} V_S^2 \kappa^2 |\hat{q}|^2 . \quad (3.38)$$

Wir vergleichen dieses Ergebnis für die Schallleistung im Freifeld mit der im Rohr (Gleichung 3.35). Die Leistung im Rohr hängt in erster Näherung quadratisch von der Länge des Quellgebietes und linear von der Rohrlänge ab, die Freifeldleistung dagegen quadratisch vom Quellvolumen.

Die Quelle im Rohr können wir uns wie einen Kolben im Rohr vorstellen, der durch seine oszillierende Bewegung Wellen erzeugt. Die Amplitude der Welle hängt von der Amplitude des Kolbens ab, nicht aber von dem Durchmesser des Rohres. Setzen wir gedanklich lauter ganz dünne Kolben hintereinander, so steigt die Amplitude. Ein weiterer Unterschied zwischen Freifeldlösung und der Rohrlösung nach Gleichung 3.33 ist die Abhängigkeit von der Wellenzahl  $\kappa$ . Bei der Abstrahlung ins Freifeld steigt die emittierte Leistung  $P_{ff}$  quadratisch mit der Wellenzahl an, wogegen die Leistung  $P_{Rohr}$  bei der im Rohr eingeschlossenen Quelle nicht von der Wellenzahl abhängig ist.

Wie stark wirkt sich dieser Unterschied der Schallemission auf die Lärmemission einer Flamme aus? Um das zu untersuchen wurde mit dem Quellspektrum einer typischen Drallflamme (BRS-Brenner, siehe Kapitel 7) die emittierten Spektren für den eingeschlossenen und den freien Fall mittels Gleichung 3.33 bzw. 3.38 berechnet. Dazu wurde das Quellspektrum des BRS-Brenners aus Abbildung 7.9 (rot gestrichelt) in die Gleichungen 3.33 (Rohr) und 3.38 (Freifeld) eingesetzt. Als Medium wurde 900 K heiße Luft angenommen. Das Rohr hat einen Durchmesser von 0.04m und das Quellgebiet eine Länge von 0.1m. Bei der Kugelquelle wurde ein gleich großes Kugelvolumen angenommen. Das Ergebnis ist in Abbildung 3.3 zu sehen. Das Spektrum der im Rohr eingeschlossenen Flamme (rot gestrichelte Linie) weist bis zu einer Frequenz von ca. 2000 Hz deutlich höhere Amplituden als das der frei abstrahlenden Flamme (blau durchgezogene Linie) auf. Mit weiter steigender Frequenz allerdings wird die Differenz zwischen beiden Amplituden geringer, da die Leistung der frei abstrahlenden Flamme im

Gegensatz zur Rohrflamme quadratisch mit der Wellenzahl zunimmt. Bei 2500 Hz kreuzen sich schließlich die Spektren.



**Abbildung 3.3:** Abgestrahlte akustische Leistung einer Drallflamme bei Abstrahlung ins Freifeld und in einem Rohr.

### 3.3 Rohr mit reflektierenden Enden

Für den allgemeinen Fall eines Rohres mit reflektierenden Enden existiert keine einfache Greensche Funktion mehr. Ein einfacher Sonderfall liegt bei voll reflektierenden Enden vor,  $|r_f| = 1$ . Hier bilden sich stehende Wellen aus. Da keine akustische Energie das System verlässt, emittiert die Quelle effektiv keine Leistung. Die Quelle liefert reine Blindleistung, die dazu benutzt wird, das akustische Feld aufzubauen.

Im Allgemeinen liegt an den Systemgrenzen ein Reflexionsfaktor  $0 < r_f < 1$

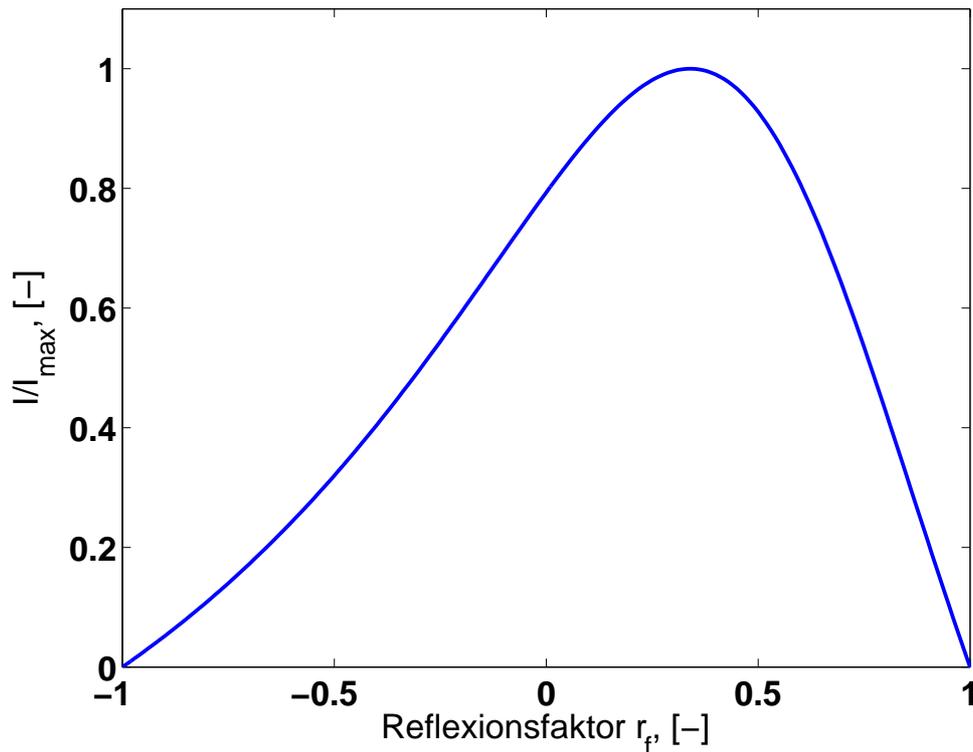
vor. Das hat zur Folge, dass direkt an der Quelle eine allgemeine Impedanz  $Z \neq Z_0$  ungleich der charakteristischen Impedanz vorliegt. Wir werden jetzt untersuchen, wovon die Leistung, die eine Quelle abstrahlen kann, abhängt. Hierzu wurde die Schallausbreitung in einem Rohr der Länge  $l = 0.5m$  und mit Radius  $r = 0.05m$  in Abhängigkeit vom Reflexionsfaktor berechnet. Dazu wurde das FE-Programm COMSOL benutzt, das näher in Kapitel 6.2.1 beschrieben wird. Der Reflexionsfaktor an beiden Rohrenden war gleich und wurde zwischen  $-1 \leq r_f \leq 1$  variiert. Als Medium wurde Luft bei  $25^\circ\text{C}$  angenommen. Berechnen wir die Intensität bei einer Frequenz von  $100\text{Hz}$  abhängig vom Reflexionsfaktor, so erhalten wir den in Abbildung 3.4 gezeigten Zusammenhang. Zunächst steigt die Intensität mit dem Reflexionsfaktor an, um bei  $0.34$  ihr Maximum zu erreichen. Danach sinkt die Intensität wieder ab und erreicht bei  $r_f = 1$  die Nullmarke. Dieses Verhalten war zu erwarten, da wie oben erklärt im voll reflektierenden Fall, also bei  $r_f = \pm 1$ , reine Blindleistung produziert wird. Warum aber weist die Intensität bei einem Wert dazwischen ein Maximum auf? Um das zu erklären, werden wir im Weiteren die Theorie bereitstellen und im nächsten Abschnitt (Kapitel 3.4) die Antwort finden.

Um das in der Simulation beobachtete Verhalten besser verstehen zu können, werden wir die Schallabstrahlung theoretisch betrachten: Für die akustische Leistung, die durch eine Fläche  $A$  tritt, gilt nach Gleichung 2.40:

$$P = \int_A \overline{I \cdot \vec{n}} d\vec{x} \quad (3.39)$$

Setzen wir die Definition der Intensität  $I$  nach Gleichung 2.33 ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} P &= \int_A \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi/\omega} \text{Re}(\hat{p}e^{i\omega t}) \text{Re}((\hat{u} \cdot \vec{n})e^{i\omega t}) dt d\vec{x} \\ &= \int_A \frac{1}{4} (\hat{p}\hat{u}^* + \hat{p}^*\hat{u}) \cdot \vec{n} d\vec{x} \\ &= \int_A \frac{1}{2} \text{Re}(\hat{p}^*\hat{u} \cdot \vec{n}) d\vec{x} \end{aligned} \quad (3.40)$$



**Abbildung 3.4:** Intensität über dem Reflexionsfaktor für ein Rohr

Mit der Impedanz

$$Z(x, \omega) = \frac{\hat{p}(x, \omega)}{\hat{u}(x, \omega) \cdot \vec{n}(x)} \quad (3.41)$$

(nach Gleichung 2.44) ergibt sich die akustische Leistung zu

$$P = \int_A \frac{1}{2} \operatorname{Re}(Z) |\hat{u} \cdot \vec{n}|^2 d\vec{x}. \quad (3.42)$$

Für den Fall, dass die Intensität über die Fläche  $A$  konstant ist (z.B. ebene Welle in einem Rohr), vereinfacht sich Gleichung 3.42 zu

$$P = \frac{1}{2} |\hat{u} \cdot \vec{n}|^2 \operatorname{Re}(Z) A. \quad (3.43)$$

Für jede Quelle, die direkt eine Geschwindigkeitsfluktuation  $\hat{u}$  verursacht, bestimmt demnach der Realteil der Impedanz, wieviel akustische Leistung die Quelle abstrahlen kann. Der Realteil der Impedanz wird auch als Resistanz bezeichnet und ist demnach ein Maß, für den Widerstand, den das Fluid

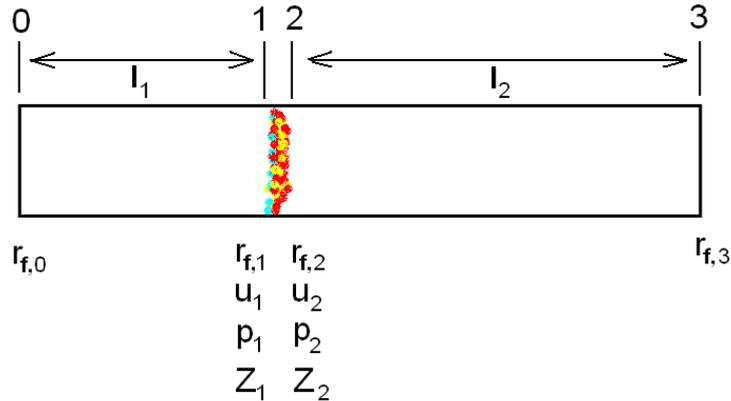
der Quelle entgegengesetzt. Aus dieser Gleichung wird das unterschiedliche Verhalten der im nichtreflektierenden Rohr eingeschlossenen und der frei abstrahlenden Quelle verständlich. Die Impedanz des reflexionsfreien Rohres ist nach Gleichung 3.17 überall gleich der Freifeldimpedanz  $\rho c$ , im Besonderen auch direkt an der Quelle. Die Impedanz ist rein reell und damit Druck und Schnelle in Phase, wodurch die abgegebene Leistung maximal ist. Die Impedanz des Kugelstrahlers ins Freifeld (siehe Gleichung 3.24) weicht direkt an der Kugel stark von der charakteristischen Impedanz ab und geht erst mit steigendem Abstand von der Quelle in die charakteristische Impedanz über. Druck und Schnelle sind im Nahfeld der Quelle nicht in Phase, wodurch die emittierte Leistung sinkt.

Betrachten wir noch einmal Gleichung 3.43. Eine solche Quelle, die direkt eine Geschwindigkeitsfluktuation  $\hat{u}$  erzeugt, wäre zum Beispiel ein oszillierender Kolben in einem Rohr. Eine Flamme verursacht nach der Rankine-Hugoniot-Bedingungen 2.70 zwar eine Geschwindigkeitsfluktuation  $\hat{u}$ , diese ist aber abhängig von den Umgebungsbedingungen, also von der örtlichen Impedanz ( $\hat{u} = \hat{u}(Z)$ ). Das wird klar, wenn man bedenkt, dass die Rankine-Hugoniot-Gleichung 2.70 die Schnelle vor und nach der Flamme nur in Beziehung setzt aber die Schnelle nicht explizit angibt. Die Geschwindigkeit  $|\hat{u}|$  in Gleichung 3.42 wird von einer Flamme also nicht direkt aufgeprägt, sondern wird von den Impedanzen  $Z_1, Z_2$  vor und hinter der Flamme mitbestimmt. Damit hängt die akustische Leistung, die die Flamme abstrahlen kann, nicht nur vom Realteil der Impedanz  $\text{Re}(Z)$  ab (vgl. Gleichung 3.42). Die gesamte Abhängigkeit werden wir jetzt für das einfache System in Abbildung 3.5 analytisch bestimmen. Aus den Rankine-Hugoniot-Beziehungen 2.69, 2.70 und der Definition der Impedanz  $Z_{1,2} = p_{1,2}/u_{1,2}$  vor und hinter der Flamme kann für die Schnelle  $u_2$  hinter der Flamme die Beziehung

$$u_2 = \left( \frac{\gamma - 1}{\rho_1 c_1^2} \right) q'_F \left| \frac{Z_1}{Z_1 - Z_2} \right| \quad (3.44)$$

abgeleitet werden. Damit ergibt sich aus Gleichung 3.43 für die Leistung  $P_2$  hinter der Flamme:

$$P_2 = \frac{1}{2} \left| \frac{Z_1}{Z_1 - Z_2} \right|^2 \text{Re}(Z_2) \left( \frac{\gamma - 1}{\rho_1 c_1^2} q'_F \right)^2 A \quad (3.45)$$



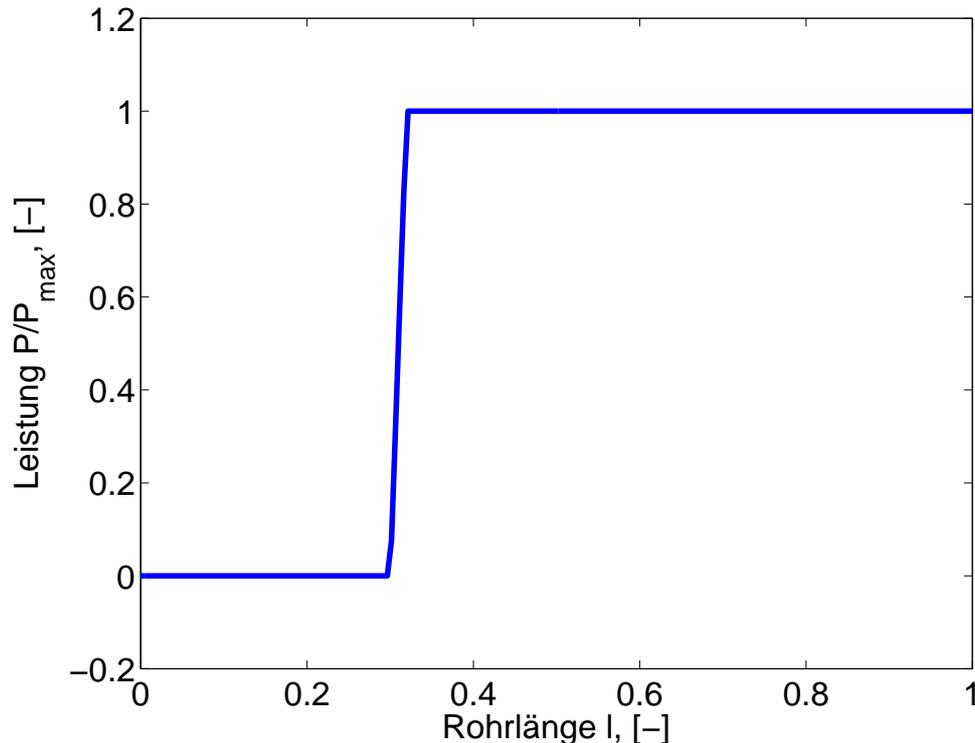
**Abbildung 3.5:** Flamme in einem Rohr

Aus der Geschwindigkeit  $u_2$  und der Rankine-Hugoniot-Beziehung 2.70 können wir entsprechend auch Schnelle  $u_1$  und Leistung  $P_1$  vor der Flamme bestimmen:

$$u_1 = \left( \frac{\gamma - 1}{\rho_1 c_1^2} \right) q'_F \left| \frac{Z_2}{Z_1 - Z_2} \right| \quad (3.46)$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \left| \frac{Z_2}{Z_1 - Z_2} \right|^2 \operatorname{Re}(Z_1) \left( \frac{\gamma - 1}{\rho_1 c_1^2} q'_F \right)^2 A \quad (3.47)$$

Die Schnelle und die Leistung vor und hinter der Flamme sind also unterschiedlich. Dieses Verhalten werden wir noch einmal näher betrachten. In Abbildung 3.6 ist das Ergebnis einer Comsol-Berechnung des Systems aus Abbildung 3.5 zu sehen. Aufgetragen ist die dimensionslose Leistung  $P$  über der Rohrlänge. An der Position  $x_{Flamme} = 0.3$  befindet sich eine dünne Flamme. Auf der linken Seite ist das Rohr geschlossen ( $r_f = 1$ ), am rechten Rand wurde ein Reflexionsfaktor  $r_f = 0.8$  angenommen. Vor der Flamme ist die Leistung  $P = 0$ , was auch verständlich ist, da über den linken Rand keine Leistung abgestrahlt werden kann. Über die Flamme steigt dann die Leistung steil an, bis sie direkt hinter der Flamme einen konstanten Wert erreicht. Diese Leistung fließt quasi von der Flamme über den nur teilweise reflektierenden rechten Rand in die Umgebung.



**Abbildung 3.6:** Örtliche akustische Leistung in einem Rohr mit einer Flamme ( $x_{Flamme} = 0.3$ ),

### 3.4 Abhängigkeit der abgestrahlten Leistung vom Abstand zwischen Quelle und Auslass

Die akustische Leistung, die eine Quelle abstrahlen kann, hängt nach Gleichung 3.45 von den Impedanzen  $Z_{1,2}$  vor und hinter der Flamme ab. Im Falle einer rohrförmigen Brennkammer werden diese beiden Impedanzen hauptsächlich von den Reflexionsfaktoren am Beginn und am Ende der Brennkammer bestimmt. Im Folgenden werden wir untersuchen, wie sich die abgestrahlte Leistung mit dem Abstand zwischen Quelle und Austritt verändert und wie der Einfluss des Reflexionskoeffizienten am Austritt ist.

Wir betrachten noch einmal das in Abbildung 3.5 dargestellte Rohr mit Flamme. Die Flamme, also die Quelle ist um eine Länge  $l_2$  vom Austritt entfernt. Der Reflexionsfaktor  $r_{f,3}$  in der Austrittsebene (Index "3,, siehe

Abbildung 3.5) ist gegeben durch

$$r_{f,3} = \frac{g_3}{f_3}. \quad (3.48)$$

Austritt und Quelle sind durch ein Rohr der Länge  $l_2$  verbunden. Die Transfermatrix  $T_{fg}$  eines Rohres lautet:

$$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}_d = \underbrace{\begin{pmatrix} e^{i\kappa l} & 0 \\ 0 & e^{-i\kappa l} \end{pmatrix}}_{T_{fg}} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}_u \quad (3.49)$$

Den Reflexionsfaktor  $r_{f,2}$  in der Ebene 2 direkt hinter der Flamme erhalten wir, indem wir die  $f_3$ - und  $g_3$ -Welle um die Länge  $l_2$  zurückdrehen:

$$r_{f,2} = \frac{g_2(0)}{f_2(0)} = \frac{g_3 e^{i\kappa l}}{f_3 e^{-i\kappa l}} = e^{2i\kappa l} r_{f,3} \quad (3.50)$$

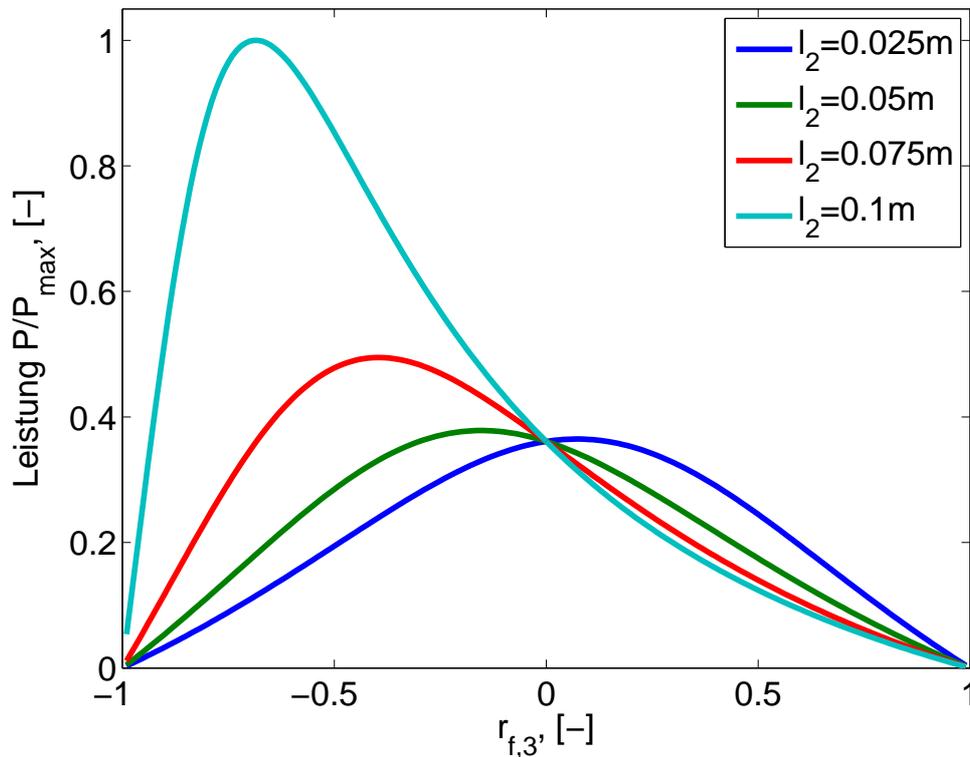
Die Impedanz berechnet sich aus dem Reflexionsfaktor durch

$$Z(x) = \rho_0 c_0 \frac{1 + r_f(x)}{1 - r_f(x)}. \quad (3.51)$$

Die Impedanz  $Z_2$  direkt hinter der Flamme ergibt sich damit zu

$$Z(x=0) = \rho_0 c_0 \frac{1 + e^{2i\kappa l} r_f(l)}{1 - e^{2i\kappa l} r_f(l)}. \quad (3.52)$$

Analog lässt sich auch die Impedanz  $Z_1$  vor der Flamme aus dem Reflexionsfaktor  $r_{f,0}$  am linken Rohrende bestimmen. Mit Gleichung 3.45, können wir mit den beiden Impedanzen  $Z_1, Z_2$  die von der Flamme nach rechts emittierte Leistung bestimmen. Für ein rechtsseitig geschlossenes Rohr ( $r_{f,0} = 1$ ) ist ein Ergebnis dieser Leistungsberechnung in Abbildung 3.7 gezeigt. Die entdimensionierte Leistung wurde in Abhängigkeit des Reflexionsfaktors  $r_{f,3}$  am linken Rand für vier verschiedene Längen  $l_2$  berechnet. Die Dichten vor und hinter der Flamme betragen  $\rho_1 = 1.25 \text{ kg/m}^3, \rho_2 = 0.25 \text{ kg/m}^3$  und die Schallgeschwindigkeiten  $c_1 = 343 \text{ m/s}, c_2 = 700 \text{ m/s}$ . Bemerkenswert ist, dass das Maximum nicht bei  $r_{f,3} = 0$  auftritt, sondern bei einem Reflexionsfaktor zwischen Null und Eins. Nach Gleichung 3.45 entscheiden die Impedanzen

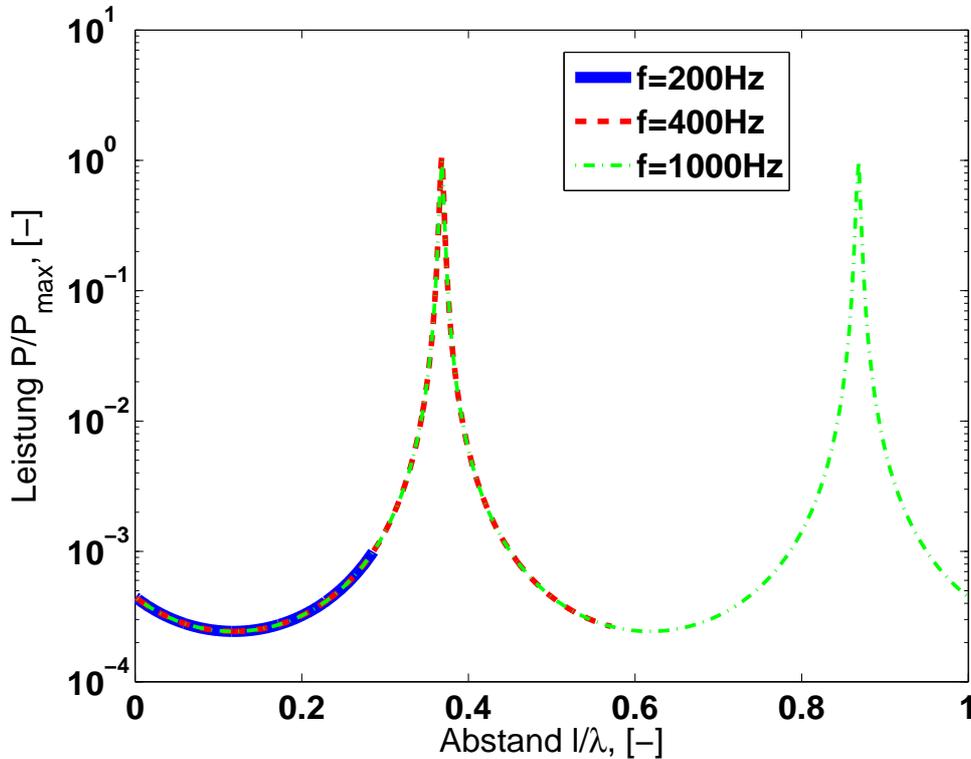


**Abbildung 3.7:** Akustische Leistung  $P$  einer Flamme, aufgetragen über dem Reflexionsfaktor  $r_{f,3}$  am Austritt

vor und hinter der Flamme darüber, wieviel Leistung sie abstrahlen kann. Daraus ergibt sich, dass die Flamme nicht bei einem reflexionsfreien Rohr maximale Energie abstrahlt, sondern bei einem bestimmten Reflexionsfaktor, der vom Abstand zwischen Quelle und Austritt und von der Frequenz abhängig ist. Diesen Sachverhalt hatten wir schon in Abbildung 3.4 gesehen. Dort ist die akustische Intensität in einem Rohr bei variierendem Reflexionsfaktor zu sehen. Auch hier liegt die höchste Intensität nicht bei  $r_f = 0$  vor, sondern darüber.

In Abbildung 3.8 ist die Leistung über dem mit der Wellenlänge  $\lambda$  entdimensionierten Abstand  $l_2/\lambda$  zwischen Flamme und Austritt gezeigt. Der Reflexionsfaktor in der Austrittsebene ist  $r_{f,3} = -0.97$  und gezeigt wird der Verlauf für drei verschiedene Frequenzen (200, 400 und 1000Hz). Die Verläufe sind in allen drei Fällen identisch. Der Quotient aus einer charakteristischen

Länge und der Wellenlänge wird Helmholtz-Zahl  $He$  genannt,  $He = l/\lambda$ . Das bedeutet, die Impedanz weist eine Helmholtzähnlichkeit auf. Daraus

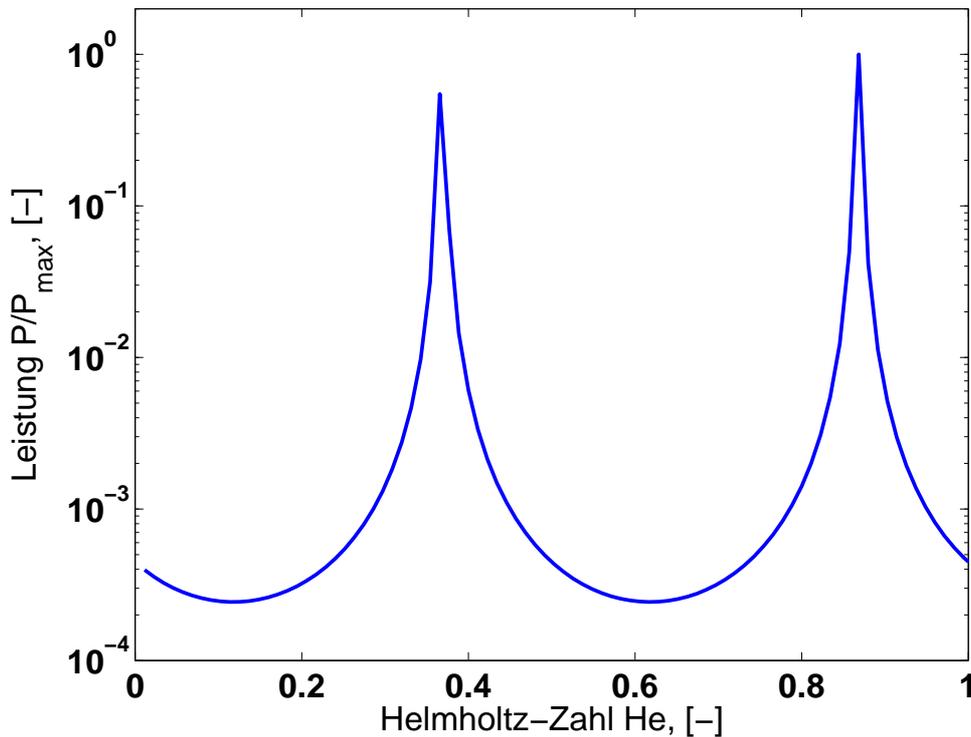


**Abbildung 3.8:** Akustische Leistung  $P$  einer Flamme, aufgetragen über dem mit der Wellenlänge  $\lambda$  entdimensionierten Abstand  $l_2$  zwischen Flamme und Austritt

ergibt sich folgende interessante Analogie. Die Helmholtz-Zahl kann auch als entdimensionierte Frequenz interpretiert werden:

$$He = \frac{l}{\lambda} = f \cdot \frac{l}{c} \quad (3.53)$$

Daher macht es keinen Unterschied für die Impedanz, ob die Frequenz oder der Abstand zur Rohraustrittsebene verändert wird. Plotten wir die akustische Leistung  $P_2$  über der Helmholtz-Zahl (Abbildung 3.9), wobei diesmal die Frequenz variiert wird (Reflexionsfaktor  $r_{f,3} = 0.97$ ), so zeigt sich wieder der gleiche Verlauf wie in Abbildung 3.8. Abstand vom Austritt und Frequenz sind hier demnach gleichwertig in ihrem Einfluss auf die Schallemission.

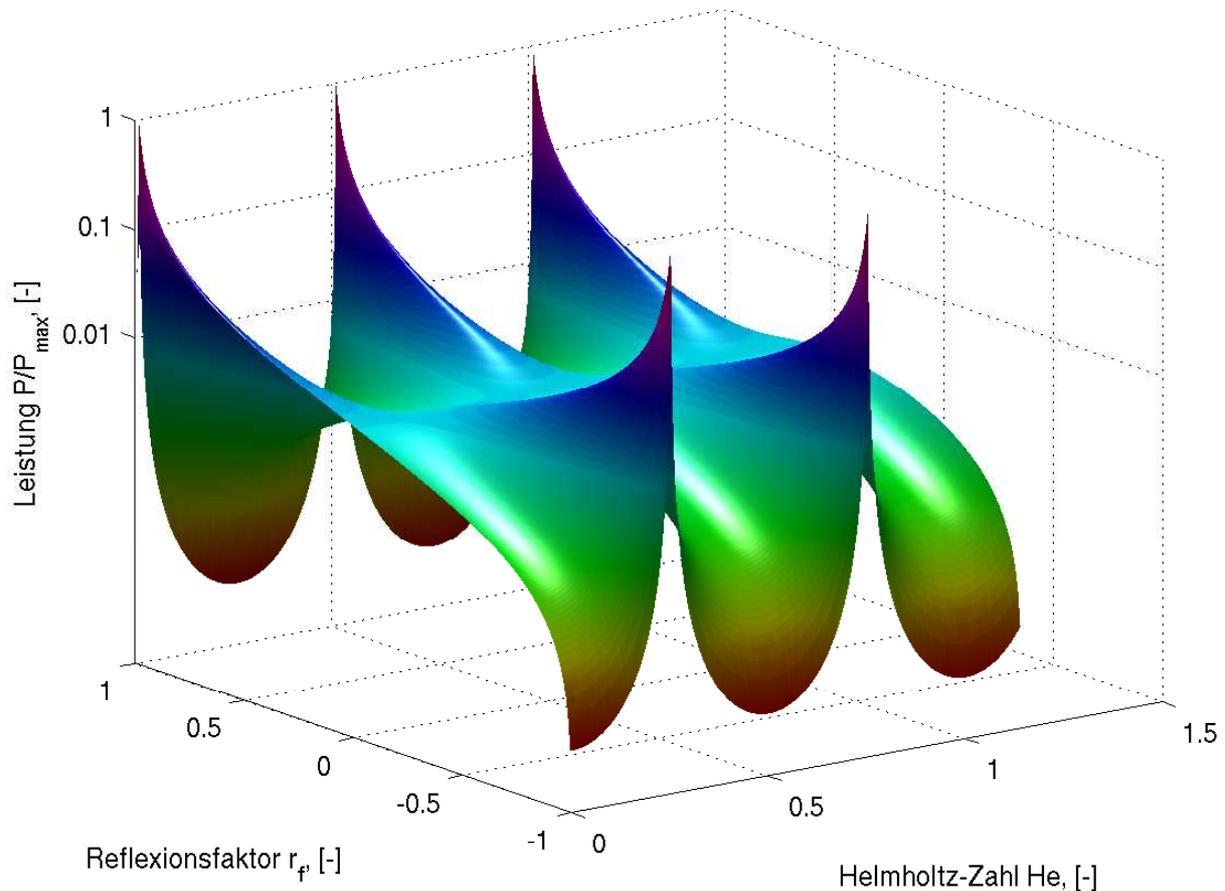


**Abbildung 3.9:** Akustische Leistung  $P$  einer Flamme aufgetragen über der Helmholtz-Zahl

### 3.5 Anwendung auf das Heizgerät

Nach Gleichung 3.45 bestimmen die Impedanzen vor und nach der Flamme, welche akustische Leistung diese abstrahlen kann. Die Impedanz an der Quellposition hängt sowohl vom Reflexionsfaktor am Austritt, als auch von der Frequenz bzw. dem Abstand der Flamme vom Austritt ab. Wie wir im letzten Abschnitt gesehen haben, sind die Abhängigkeit von Frequenz und Abstand zum Austritt gleichwertig und können beide durch die Helmholtz-Zahl beschrieben werden.

Die akustische Leistung in Abhängigkeit von Reflexionsfaktor und Helmholtz-Zahl ist in Abbildung 3.10 dimensionslos dargestellt. Bei einem Reflexionsfaktor  $r_f = 0$ , also einem reflexionsfreien Rohr, ist die Impedanz für alle Frequenzen gleich, da keinerlei Resonanzeffekte auftreten können. Für Reflexionsfaktoren  $r_f \neq 0$  dagegen sehen wir eine deutliche Frequenzabhängigkeit

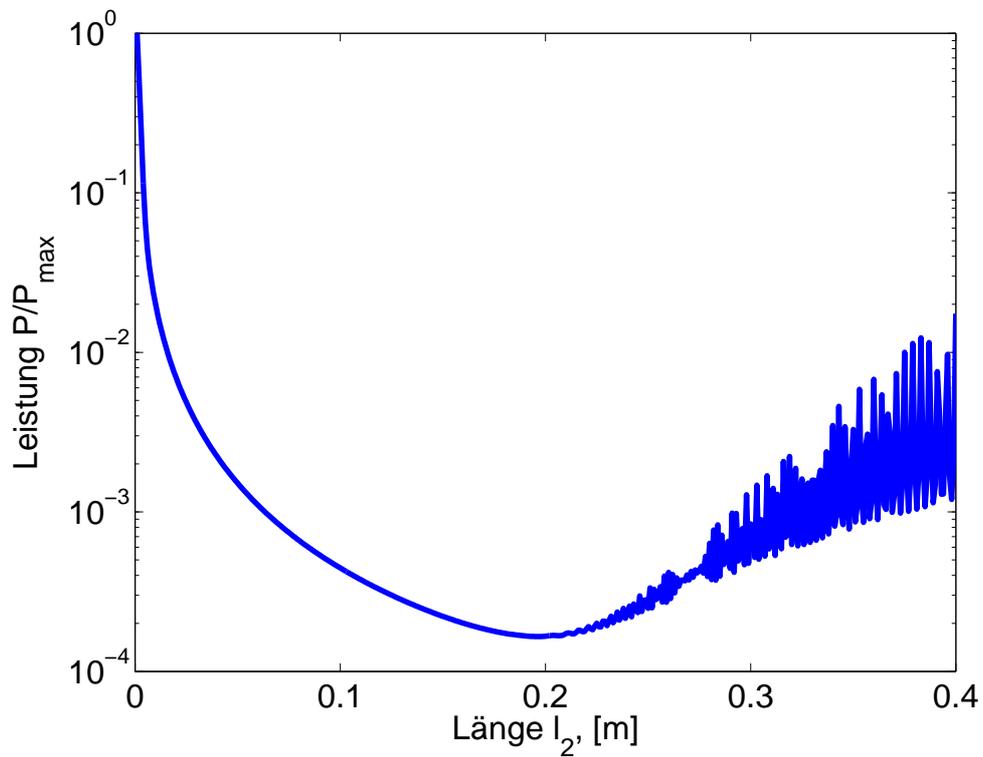


**Abbildung 3.10:** Akustische Leistung  $P$  einer Quelle in Abhängigkeit von Reflexionsfaktor und Helmholtz-Zahl

der Impedanz. Diese Abhängigkeit wächst mit dem Betrag des Reflexionsfaktors  $|r_f|$ . Betrachten wir den Teilbereich  $r_f < 0$ , bei dem eine Art offenes Ende vorliegt (nur eine Art offenes Ende deshalb, weil bei einem idealen offenen Ende ja  $r_f = 0$  gelten müsste). In diesem Bereich treten die Maxima bei  $He = 1/4$  und  $He = 3/4$  auf. Für diese Helmholtz-Zahlen liegt an der Quellposition ein Schwingungsknoten vor. Hier können wir also besonders gut die sich einstellende Eigenschwingung antreiben.

Welche Schlüsse können wir nun aus dem Plot 3.10 hinsichtlich einer optimalen, also lärmarmen Positionierung der Flamme im Brennraum ge-

winnen? Da eine Flamme eine sehr breitbandige Quelle darstellt, ist es nur für einzelne Frequenzen möglich, eine wirklich optimale Flammenposition zu finden. Zur Auffindung der optimalen Position muss demnach die emittierte Leistung aller von der Flamme angeregten Frequenzen aufsummiert werden. Genauer gesagt, die Leistung muss über den gesamten Spektralbereich der Flamme integriert werden. Da eine Flamme nicht jede Frequenz gleich stark anregt, muss hierbei besonders die spektrale Quellstärkenverteilung der Flamme berücksichtigt werden. In Kapitel 8 werden wir das Quellspektrum der Flamme eines automobilen Heizgerätes berechnen (siehe Abbildung 8.18). Wir werden jetzt auf dieses Ergebnis vorgreifen und es hier für die Leistungsberechnung verwenden. Wir betrachten zur Berechnung wieder das einfache Rohr aus Abbildung 3.5, für das wir ja schon die Leistung in verschiedenen Abhängigkeiten bestimmt haben. Diesmal wird aber nicht eine konstante Anregung  $q'_F$  für alle Frequenzen verwendet, sondern für  $q'_F$  das angesprochene Spektrum 8.18 der Heizgerätflamme verwendet. Das Ergebnis wird dann über alle Frequenzen aufintegriert und wir erhalten die Gesamtleistung in Abhängigkeit des Abstandes  $l_2$  zum Austritt (Abbildung 3.11). Der Abstand  $l_1$  zwischen Rohranfang und Flamme wurde mit  $0.05m$  angenommen, am Kammereintritt befindet sich eine schallharte Wand. Am Austritt wird ein frequenzabhängiger Reflexionsfaktor  $r_{f,3}$  verwendet, den wir in Kapitel 8 herleiten werden (siehe Gleichung 8.20). Die akustische Leistung ist stark von der Länge  $l_2$  abhängig und nimmt für  $l_2 = 0.197m$  ihr Minimum an. Diese Länge wäre also im Heizgerät die optimale Länge für einen möglichst leisen Betrieb.



**Abbildung 3.11:** Akustische Leistung des Heizgerätes in Abhängigkeit vom Abstand  $l_2$  zwischen Flamme und Austritt mit Austrittsrandbedingung nach Levine+Schwinger

---

## 4 Turbulente Verbrennung

Verbrennungsvorgänge sind durch eine starke, irreversible Wärmefreisetzung gekennzeichnet, die zu großen Temperaturgradienten führt (typische Flammendicken liegen zwischen 0.1 und 1 mm, wobei das Temperaturverhältnis von Abgas zu Frischgas im Bereich zwischen 5 und 7 liegt [84]). Grundsätzlich werden in der technischen Verbrennung zwei asymptotische Fälle unterschieden, je nachdem wie die Reaktionspartner in die Reaktionszone eingebracht werden. Entweder sind diese bereits vor Eintritt in die Brennkammer gemischt worden (vorgemischte Verbrennung) oder sie werden separat eingebracht (nicht-vorgemischte Verbrennung, Diffusionsflamme). Da bei Vormischflammen die Reaktionspartner schon vor der Verbrennung gemischt werden, sind diese Flammen meist kürzer als Diffusionsflammen. Da allerdings schon vor der eigentlichen Brennkammer ein brennfähiges Gemisch vorliegt, kann die Flamme stromaufwärts aus der Brennkammer wandern (Flammenrückschlag). Reaktionsfähig ist das Gemisch aus Brennstoff und Oxidator nur in einem bestimmten Bereich von Mischungsverhältnissen, dessen Grenzen magere bzw. fette Zündgrenze genannt werden.

Im Gegensatz zu den Vormischflammen sind nicht-vorgemischte Flammen technisch einfacher realisierbar. Ein einfaches Beispiel wäre ein Brennstoffstrahl, der in die Umgebungsluft eingeblasen wird. Ein entscheidender Nachteil nicht-vorgemischter Flammen ist ihre hohe lokale Temperatur. Die höchste Verbrennungstemperatur wird erreicht, wenn Brennstoff und Luft stöchiometrisch gemischt sind. Eine Diffusionsflamme brennt in erster Näherung dort, wo stöchiometrisches Gemisch vorliegt. Eine Vormischflamme dagegen kann bei niedrigeren Temperaturen betrieben werden, indem mehr Luft als bei stöchiometrischen Bedingungen zugegeben wird. Der höhere thermische Ballast durch die überschüssige Luft senkt die Verbrennungstemperatur. Da Stickoxid-Bildung ( $NO_x$ ) stark temperaturabhängig ist, kann auf

diese Weise der  $NO_x$ -Ausstoß gesenkt werden.

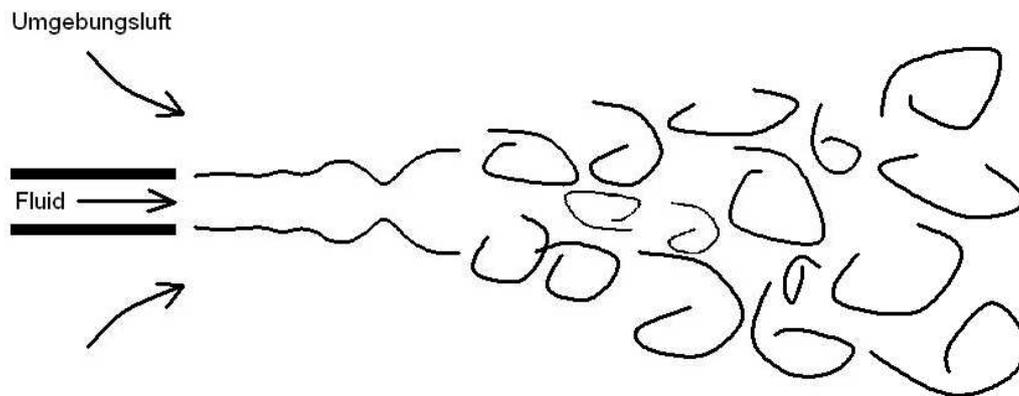
Notwendig für die Verbrennung ist eine Vermischung von Brennstoff und Oxidator (Diffusionsflammen) bzw. heißer Abgase und kaltem Gemisch (Vormischflamme) auf molekularer Ebene. Da zwischen den Wirbeln einer turbulenten Strömung starke Dehnung und Scherung auftritt, werden die Konzentrationsgradienten an der Grenze der zu mischenden Ströme größer [54]. Dadurch wird die molekulare Mischung intensiviert. Weiterhin findet auf makroskopischer Ebene der räumliche Transport der Mischungspartner durch die Wirbel statt und die Grenzfläche wird aufgefaltet. Die Reaktionsoberfläche wird dadurch stark vergrößert, woraus sich der Vorteil der turbulenten Verbrennung ergibt. Die Umsetzungsrate des Brennstoffs steigt an, da der Anteil der Reaktionszone am Gesamtvolumen vergrößert wird. Bei gegebener Leistung ist die Flamme kompakter, wodurch das gesamte Brennersystem kleiner gebaut werden kann.

### 4.1 Turbulente Strömungen

Kennzeichnend für turbulente Strömungen ist das Auftreten verschiedenskaliger Wirbel. Tritt ein Fluid durch eine Düse mit hoher Geschwindigkeit laminar in ein ruhendes Fluid ein, so entsteht durch den großen Geschwindigkeitsgradienten eine instabile Grenzschicht. Die anfänglich laminare Strömung schlägt um und nach einer gewissen Distanz vom Düsenaustritt liegt eine voll entwickelte turbulente Strömung vor (siehe Abbildung 4.1). Um die Längenskalen der Wirbel in so einem turbulenten Freistrahle zu charakterisieren, korrelieren wir die Geschwindigkeit  $v(x, t)$  am Ort  $x$  zur Zeit  $t$  mit der Geschwindigkeit  $v(x + r, t)$  am Ort  $x + r$  zur selben Zeit [54]. Um Verwechslungen mit der Schallschnelle  $u'$  zu vermeiden, wird hier die Geschwindigkeit mit  $v$  und die turbulenten Geschwindigkeitsfluktuationen mit  $v'$  bezeichnet:

$$R(x, r, t) = \overline{v'(x, t) v'(x + r, t)} \quad (4.1)$$

Zu beachten ist hier, dass es sich bei der Mittelung nicht um eine zeitliche, sondern um eine Ensemblemittelung handelt. Daher ist die Korrelationsfunktion  $R(x, r, t)$  auch abhängig von der Zeit  $t$ . Hängt die Korrelation der



**Abbildung 4.1:** Skizze eines turbulenten Freistrahls

Geschwindigkeit nicht vom Ort  $x$  ab, so sprechen wir von homogener Turbulenz. Ist sie zudem richtungsunabhängig, so liegt homogene isotrope Turbulenz vor. Kolmogorov nimmt in seiner Theorie für homogene isotrope Turbulenz an, dass es einen ständigen Energietransfer von den großskaligen Wirbeln hin zu den kleineren Wirbelklassen gibt. Die großskaligen Wirbel werden von der mittleren Strömung erzeugt, nur sie erhalten direkt kinetische Energie aus der Strömung. Alle anderen Wirbel werden von diesen großen Strukturen angetrieben. Die kleinsten in der Strömung vorhandenen Strukturen dissipieren die Energie durch viskose Effekte. Diese Vorstellung der Energieübertragung von den größeren zu den nächst kleineren Wirbeln wird Wirbelkaskade genannt. Ihr Bereich erstreckt sich von den sogenannten integralen Wirbeln der Größe  $L$  bis zu den kleinsten Wirbeln, deren Größe durch das Kolmogorovsche Längenmaß  $\eta$  gegeben ist. Diese kleinsten Wirbel dissipieren die Energie durch viskose Kräfte, daher heißt der Bereich dieser kleinsten Wirbel viskoser Bereich (siehe Abbildung 4.2). In dem zwischen den integralen und den kleinsten Wirbeln gelegenen Inertialbereich ist die jeweils an kleinere Wirbel übertragene Leistung gleich der von den größeren Wirbeln aufgenommenen Leistung. Diese Leistung bezeichnen wir als Dissipationsrate  $\varepsilon$ . Aus der Annahme der Wirbelkaskade folgt damit, dass die Dissipation  $\varepsilon$  im Inertialbereich nicht von der Wirbelgröße abhängig sein kann.

Die integralen Wirbel, bei denen die Kaskade beginnt, enthalten den größten Anteil der in der Turbulenz enthaltenen kinetischen Energie. Ihr Längenmaß  $L$  berechnet sich aus der Geschwindigkeitskorrelation und dem RMS-Wert der Geschwindigkeitsschwankungen (siehe Kapitel 2.2.6) durch das Integral

$$L(t) = \int_0^{\infty} \frac{R(r, t)}{v'_{rms}(t)} dr . \quad (4.2)$$

Bei stationären Strömungen hängt die Korrelation der Geschwindigkeitsfluktuationen und RMS-Geschwindigkeit nicht von der Zeit ab und daher ist in diesem Fall auch die integrale Länge  $L$  keine Funktion der Zeit mehr.

Die in den Wirbelbewegungen gespeicherte Energie wird als turbulente kinetische Energie  $k$  bezeichnet. Diese bestimmt sich aus den RMS-Werten der Geschwindigkeitsschwankungen in die drei Raumrichtungen  $v'_{x,rms}$ ,  $v'_{y,rms}$ ,  $v'_{z,rms}$  durch

$$k = \frac{1}{2} \left( v'^2_{x,rms} + v'^2_{y,rms} + v'^2_{z,rms} \right) . \quad (4.3)$$

Im Fall von isotroper Turbulenz ( $v'_{x,rms} = v'_{y,rms} = v'_{z,rms}$ ) vereinfacht sich dieser Ausdruck zu

$$k = \frac{3}{2} v'^2_{rms} . \quad (4.4)$$

Die turbulente Dissipation  $\varepsilon$  gibt an, wieviel Energie pro Zeiteinheit der Wirbel verliert. Daher können wir aus der kinetischen Energie und der Dissipation ein Zeitmaß für den Wirbel bestimmen:

$$\tau = \frac{k}{\varepsilon} \quad (4.5)$$

Dieses Zeitmaß ist proportional zur Rotationszeit  $L/v'_{rms}$  des Wirbels. Daraus ergibt sich für die Dissipation die Proportionalität

$$\varepsilon \propto \frac{v'^3_{rms}}{L} . \quad (4.6)$$

Zur Charakterisierung der Strömung können wir aus den integralen Maßen eine turbulente Reynoldszahl

$$\text{Re}_t = \frac{v'_{rms} \cdot L}{\nu} \quad (4.7)$$

bilden.  $\nu$  bezeichnen die kinematische Viskosität des Fluids. Für  $Re_t > 1$  liegt eine turbulente Strömung vor.

Die Bewegung der kleinsten Wirbel, die am Ende der Wirbelkaskade stehen, wird von der molekularen Dissipation beeinflusst. Mittels Dimensionsanalyse erhalten wir die Kolmogorovlänge

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad (4.8)$$

als ihre charakteristische Größe. Für die Kolmogorov-Wirbel kann zum Längenmaß  $\eta$  auch eine charakteristische Zeit und Geschwindigkeit definiert werden:

$$v_\eta = (\nu\varepsilon)^{1/4} \quad \tau_\eta = \left( \frac{\nu}{\varepsilon} \right)^{1/2} \quad (4.9)$$

Bilden wir aus den Kolmogorov-Maßen eine Reynoldszahl  $Re_\eta$ , so erhalten wir  $Re_\eta \approx 1$ . Die Reynoldszahl kann als Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften interpretiert werden. Im Bereich der Kolmogorov-Wirbel sind also Zähigkeit und Trägheit in der selben Größenordnung.

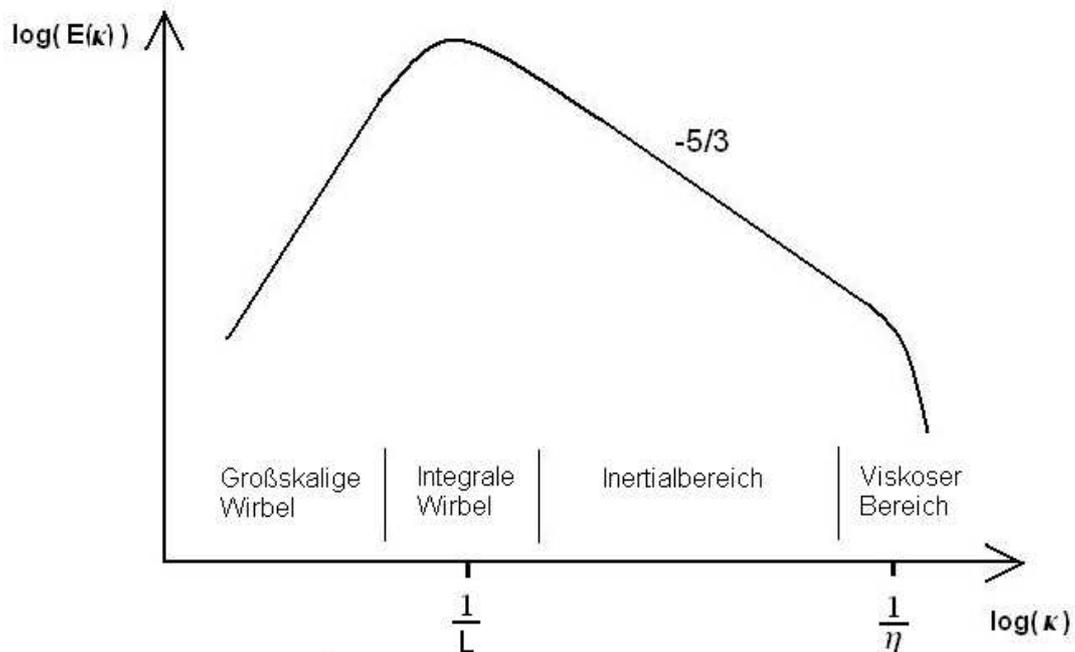
Die Wellenzahl  $\kappa$  einer Wirbelklasse mit Längenmaß  $l_n$  ist  $\kappa = l_n^{-1}$ . Für die kinetische Energie  $v_n^2$  dieser Wirbelklasse ergibt sich mit (4.6) die Proportionalität

$$v_n^2 \propto (\varepsilon l_n)^{2/3} = \varepsilon^{2/3} \kappa^{-2/3} . \quad (4.10)$$

Daraus erhalten wir für das Dichtespektrum der turbulenten kinetischen Energie  $E_k(\kappa)$  im Inertialbereich:

$$E_k(\kappa) = \frac{dv_n^2}{d\kappa} \propto \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \quad (4.11)$$

Das Spektrum  $E_k(\kappa)$  fällt mit dem Exponenten  $-5/3$  mit der Wellenzahl ab. In Abbildung 4.2 ist ein typischer Verlauf des Spektrums  $E_k(\kappa)$  doppellogarithmisch dargestellt. Bei niedrigen Wellenzahlen (also für große Wirbel) wird Energie von der mittleren Strömung in die Turbulenz eingebracht. Das Spektrum steigt daher zunächst an, bis es bei den integralen Wirbeln sein Maximum erreicht. Dieser Bereich ist nicht für alle Strömungen ähnlich, sondern hängt stark von den Randbedingungen ab. Mit steigender Wellenzahl wird



**Abbildung 4.2:** Qualitatives Wellenzahlspektrum der turbulenten kinetischen Energie  $k$

Größe	Integrales Maß	Kolmogorov Maß
Länge	$L = \frac{k^{3/2}}{\varepsilon}$	$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$
Zeit	$\tau = \frac{k}{\varepsilon}$	$\tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}$
Reynolds-Zahl	$Re = \frac{k^2}{\varepsilon \nu}$	$Re_\eta = 1$

**Tabelle 4.1:** Turbulente Skalen

keine Energie mehr direkt aus der Strömung in die Turbulenz eingebracht und der Inertialbereich wird erreicht, in dem die Energie von Wirbelklasse zu Wirbelklasse weitergegeben wird. Hier gilt das eben hergeleitete 5/3-Gesetz der Energiedichte. Mit Erreichen der Kolmogorovlänge  $\eta$  wird die kinetische Energie der Wirbel immer stärker durch Zähigkeitseffekte in innere Energie umgewandelt. Als Folge fällt das Spektrum in diesem Bereich immer stärker ab. In Tabelle 4.1 nach [23] sind alle Turbulenzmaße zusammengefasst.

Tennekes und Lumley [81] führen in Gleichung 4.11 die Proportionali-

tätskonstante  $\alpha$  ein:

$$E_k(\kappa) = \alpha \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \quad (4.12)$$

Basierend auf experimentellen Daten geben sie einen Wert für  $\alpha$  von 1.5 an. Gleichung 4.12 gilt nur für den Inertialbereich. Tennekes und Lumley erweitern das Modell auf den produzierenden und den dissipativen Bereich. Ergebnis ist die folgende Modellgleichung, die alle Bereiche in Abbildung 4.2 beschreibt:

$$E(\kappa) = \alpha \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \exp\left(-\frac{3}{2}\left(\pi\beta\alpha^{1/2}(\kappa L)^{-4/3} + \alpha(\kappa\eta)^{4/3}\right)\right) \quad (4.13)$$

Allerdings ist dieses Spektrum im Bereich der integralen Längenmaße nicht allgemeingültig. Die Konstante  $\beta$  können wir aus der Bedingung bestimmen, dass das Integral über Gleichung 4.13 gleich der Gesamtenergie  $\frac{3}{2}v'_{rms}{}^2$  sein muss. Hieraus ergibt sich  $\beta = 0.3$ .

## 4.2 Verbrennung

Notwendig für die Verbrennung ist immer eine Mischung auf molekularer Ebene. Bei Vormischflammen ist das die Mischung von Frischgas und heißem Abgas (inklusive reaktiver Radikale zum Starten der Reaktion) und bei Diffusionsflammen die Mischung von Brennstoff und Oxidator. Dieser Mischungsprozess auf molekularer Ebene erfolgt durch molekulare Diffusion. Wieviel Brennstoff/Luft bzw. Frischgas/Abgas gemischt werden, hängt von der Kontaktfläche zwischen beiden Stoffen ab. Um die Umsetzung des Brennstoffes zu erhöhen, ist demnach eine Vergrößerung der Kontaktfläche notwendig. Diese Vergrößerung der Kontaktfläche wird durch die turbulente Strömung erreicht. Betrachten wir zwei benachbarte Wirbel in der Strömung; oft werden solche Wirbelstrukturen auch anschaulich als Turbulenzballen bezeichnet. Besteht der eine Ballen aus Brennstoff und der andere aus Luft (oder bei Vormischverbrennung der eine aus Frischgas und der andere aus heißem Abgas), so läuft an der Grenzfläche zwischen beiden die Verbrennung ab. Gleichzeitig interagieren auch beide Ballen, sie falten und strecken sich und zerfallen schließlich in mehrere kleinere Wirbel (vergleiche die

Wirbelkaskade). Mehrere Wirbel besitzen eine größere Kontaktfläche als die ursprünglichen Wirbel, somit steigt die Reaktionsfläche für die Verbrennung. Auch die kleinen Wirbel teilen sich, zerfallen in wiederum kleinere Wirbel unter weiterer Vergrößerung der Oberfläche. Dieser Prozess bleibt bestehen, bis der Kolmogorov-Bereich erreicht wird. Hier sind die Reibungskräfte genauso groß wie die Trägheit der Wirbel. Die Wirbel und damit auch die durch sie erzeugte Oberfläche werden abgebaut.

Turbulenz intensiviert also den Reaktionsumsatz durch eine Vergrößerung der Reaktionsoberfläche. Das legt eine alternative Deutung der Turbulenzkaskade (siehe Abb. 4.2) nahe. Die mittlere Strömung erzeugt großskalige Wirbel und damit auch Oberfläche. In der Turbulenzkaskade wird diese erzeugte Oberfläche weiter vergrößert, bis eine gewisse Grenzwellenzahl erreicht wird, ab der die Oberfläche durch dissipative Effekte wieder abgebaut wird. Bei einer nicht-reagierenden Strömung liegt diese Grenzwellenzahl im Kolmogorov-Bereich. Bei Verbrennung kann dieser Oberflächenabbau schon bei niedrigeren Wellenzahlen erfolgen, wie wir im nächsten Abschnitt sehen werden.

### 4.2.1 Vormischflammen

Bei der Vormischverbrennung werden Brennstoff und Oxidator schon vor Eintritt in die Brennkammer gemischt. Zur quantitativen Beschreibung des Gemischverhältnisses wird die Luftzahl  $\lambda$  verwendet. Sie ist das Verhältnis der im Gemisch enthaltenen Luftmasse  $m_{Luft}$  zu der mindestens notwendigen Luftmasse  $m_{stö}$  (stöchiometrische Luftmasse), die für eine vollständige Verbrennung benötigt wird :

$$\lambda = \frac{m_{Luft}}{m_{stö}} \quad (4.14)$$

Liegt für Kohlenwasserstoffe die Luftzahl bei Normaldruck und Normaltemperatur in etwa zwischen 0.6 und 2 kann sich eine Flamme in dem Gemisch ausbreiten [54]. Ein Vorteil der Vormischverbrennung ist, dass der Brenner bei einer hohen Luftzahl, also mit einem Luftüberschuss, betrieben werden kann. Dadurch können ein vollständiger Brennstoffumsatz und ein niedrigerer

Schadstoffausstoß erreicht werden.

Gehen wir von einer einfachen, nicht-umkehrbaren Ein-Schritt-Chemie aus (Frischgas→Abgas), so können wir die Flamme durch eine einzige Variable beschreiben, nämlich mittels der Fortschrittsvariablen  $c$ . Diese soll im Frischgas den Wert  $c = 0$  und im Abgas den Wert  $c = 1$  annehmen. Diese Fortschrittsvariable können wir als normierten Produktmassenbruch  $Y_{i,Pr} = m_{i,Pr} / m_{gesamt}$  definieren; zur Normierung verwenden wir die Summe der Produktmassenbrüche  $Y_{i,Pr,v}$  nach vollständiger Verbrennung:

$$c = \frac{\sum_{i=1}^n Y_{i,Pr}}{\sum_{i=1}^n Y_{i,Pr,verbrannt}} \quad (4.15)$$

Unter der Annahme, dass die thermische und die stoffliche Diffusion gleich sind (Lewis-Zahl  $Le = 1$ ) und die Verbrennung adiabat verläuft, so beschreibt die Erhaltungsgleichung für die Fortschrittsvariable das gesamte Flammenverhalten [85]. Diese lautet [91]

$$\frac{\partial \rho c}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} c) = \nabla \cdot (\rho D \nabla c) + \dot{\omega} , \quad (4.16)$$

wobei  $\vec{v}$  die Strömungsgeschwindigkeit,  $D$  den Diffusionskoeffizienten und  $\dot{\omega}$  den Quellterm bezeichnet. Da bei der Vormischverbrennung fertiges Gemisch vorliegt, kann sich die Flamme in diesem Gemisch ausbreiten. Sie besitzt eine Eigengeschwindigkeit, die laminare Brenngeschwindigkeit  $s_L$ . Durch diese bleibt sie unter dem Einfluss turbulenter Schwankungen nicht passiv, sondern bewegt sich aktiv gegen diese Störungen. Für die größten Wirbel, deren Schwankungen die Flamme noch ausgleichen kann, muss

$$v' = s_L \quad (4.17)$$

gelten. Das zu dieser Wirbelklasse zugehörige Längenmaß ist die Gibson-Länge  $l_G$ . Rufen wir uns noch einmal den oben erklärten Effekt der Oberflächengenerierung durch die Turbulenz ins Gedächtnis, so wird die Bedeutung des Gibson-Maßes und der zugehörigen Wellenzahl  $\kappa = \frac{1}{l_G}$  klar. Nur bis zu dieser Wellenzahl kann die Turbulenzkaskade Fläche erzeugen. Mit Erreichen des Gibson-Maßes beginnt die Flamme, die Fläche abzubauen.

### 4.2.2 Diffusionsflammen

In vielen Verbrennungssystemen werden Brennstoff und Oxidator getrennt in den Brennraum eingebracht, so dass erst dort die Mischung und die anschließende Verbrennung stattfindet. Die Reaktion findet im Grenzbereich zwischen Brennstoff und Oxidator statt und wird durch die molekulare Diffusion der Reaktanten in die Reaktionszone kontrolliert. Daher werden nichtvorgemischte Flammen auch Diffusionsflammen genannt.

Wir benötigen wie bei der Vormischflamme eine Größe, die uns den Fortschritt der Reaktion angibt. Die Fortschrittsvariable, wie wir sie für Vormischflammen definiert haben, ist zur Beschreibung von Diffusionsflammen ungeeignet, denn sie unterscheidet nur zwischen verbranntem und unverbranntem Gemisch. Bei der Diffusionsflamme liegt kein fertiges Gemisch vor und der Mischungsvorgang von Brennstoff und Luft ist der entscheidende Schritt. Deshalb ist es sinnvoll zur Beschreibung der Flamme eine Variable zu wählen, die den aktuellen Mischungsstatus quantifiziert. Hierfür eignet sich der Mischungsbruch  $Z$ . Wir bezeichnen mit  $\dot{m}_{Br}$  den lokalen Massenstrom, der aus der Brennstoffzuführung stammt und mit  $\dot{m}_{Ox}$  den lokalen Massenstrom, der aus der Oxidatorzuführung stammt. Beide Massenströme können neben dem eigentlichen Brennstoff bzw. Oxidator noch Inertgase wie Stickstoff enthalten. Peters [54] definiert den Mischungsbruch  $Z$  als das lokale Verhältnis von  $\dot{m}_{Br}$  zu der Summe beider Massenströme  $\dot{m}_{Br} + \dot{m}_{Ox}$ :

$$Z = \frac{\dot{m}_{Br}}{\dot{m}_{Br} + \dot{m}_{Ox}} \quad (4.18)$$

In reinem Brennstoff gilt  $Z = 1$  und in reiner Luft  $Z = 0$ . Liegen sowohl Brennstoff als auch Luft vor, gilt  $0 < Z < 1$ . Die Verbrennung findet in Diffusionsflammen in erster Näherung dort statt, wo die Konzentrationen von Sauerstoff und Brennstoff ein stöchiometrisches Gemisch bilden. Analog zur Fortschrittsvariablen  $c$  bei der Vormischflamme, wird das Verhalten der Diffusionsflamme durch die Erhaltungsgleichung für den Mischungsbruch beschrieben:

$$\frac{\partial \rho Z}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v} Z) = \nabla \cdot (\rho D \nabla Z) \quad (4.19)$$

Im Gegensatz zu der Fortschrittsvariablen ist der Mischungsbruch eine Erhaltungsgröße, weswegen in der zugehörigen Erhaltungsgleichung 4.19 kein Quellterm auftaucht.

Da zur Verbrennung die Reaktionspartner von der Strömung gemischt werden müssen, kann sich die Diffusionsflamme im Gegensatz zur Vormischflamme nicht selbstständig ausbreiten, besitzt also keine Brenngeschwindigkeit. Daher kann die Diffusionsflamme sich nicht aktiv gegen die Strömung bewegen und reagiert vollkommen passiv auf die Strömung [56]. Im Gegensatz zur Vormischflamme existiert kein Längenmaß, ab dem die Flamme selbstständig Fläche abbaut. Bei der Diffusionsflamme wird der Flächenabbau durch die Strömung bestimmt und geschieht daher erst im Bereich der Kolmogorov-Länge.

### 4.2.3 Skalare Dissipation

Wir haben gesehen, dass sowohl die Vormischflamme, als auch die Diffusionsflamme mit einer einzigen Variablen beschrieben werden kann. Bei der Vormischflamme ist die zugehörige Erhaltungsgleichung nicht geschlossen, da wir den chemischen Quellterm nicht kennen. Im Folgenden werden wir zeigen, dass dieser in turbulenten Vormischflammen oft nur von einer Größe, nämlich der skalaren Dissipation  $\chi$  maßgeblich bestimmt wird. Und auch bei nicht-vorgemischten Flammen brauchen wir diese Größe, denn aus ihr lassen sich die Produktmassenbrüche  $Y_i$  und die Wärmefreisetzung bestimmen.

Die Flächenerzeugung in der turbulenten Strömung erfolgt durch Zerfall der großen Wirbel in immer kleinere Wirbel. Viele sehr kleine Wirbel besitzen eine größere Oberfläche, als wenige große Wirbel. Diese kleinen Wirbel und damit auch die durch sie erzeugte Fläche werden durch Zähigkeitseffekte dissipiert. Genauer gesagt, geschieht dies auf der Ebene der Turbulenzskalen, wo die molekulare Mischung respektive die laminare Brenngeschwindigkeit relevant wird. Hier wird die von der Turbulenz aufgebaute Fläche wieder abgebaut. Da die Erzeugung von Fläche mit der Schwankung der durch die Fläche getrennten Größe einhergeht, ist die Varianz dieser Größe - der

Fortschrittsvariablen ( $var(c) = \widetilde{c'^2}$ ), bzw. des Mischungsbruchs  $\widetilde{Z'^2}$  - ein Maß für die abgebaute Fläche. Die Transportgleichung für die Varianz der Fortschrittsvariablen lautet:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \widetilde{c'^2}}{\partial t} + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{v} \widetilde{c'^2}) + \nabla \cdot (\bar{\rho} \bar{v}' \widetilde{c'^2}) = \nabla \cdot (\overline{\rho D \nabla c'^2}) + \overline{2c' \nabla \cdot (\rho D \nabla \tilde{c})} \quad (4.20)$$

$$- 2\bar{\rho} \widetilde{v' c'} \cdot \nabla \tilde{c} - \overline{2\rho D \nabla c' \nabla c'} + \overline{2\dot{\omega} c'}$$

Neben den ersten beiden Terme auf der rechten Seite, die klein sind bei großen Reynolds-Zahlen [85], treten zwei wichtige Terme auf: Die skalare Dissipationsrate  $\overline{2\rho D \nabla c' \nabla c'}$  und eine Korrelation, die den chemischen Quellterm beinhaltet  $\overline{2\dot{\omega} c'}$ . Betrachten wir den vereinfachten Fall einer homogenen Flamme ( $\nabla \tilde{c}, \nabla \tilde{Z} = 0$ ), so wird die zeitliche Entwicklung der Varianz der Fortschrittsvariablen (Vormischflamme) bzw. die Varianz des Mischungsbruchs (Diffusionsflamme) von folgenden Gleichungen bestimmt:

$$\frac{\partial \rho \widetilde{c'^2}}{\partial t} = -\overline{2\rho D \nabla c' \nabla c'} + \overline{2\dot{\omega} c'} \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \rho \widetilde{Z'^2}}{\partial t} = -\overline{2\rho D \nabla Z' \nabla Z'} \quad (4.22)$$

Hier taucht jeweils auf der rechten Seite die skalare Dissipation  $\bar{\rho} \tilde{\chi} = \overline{\rho D \nabla c' \nabla c'}$  bzw.  $\bar{\rho} \tilde{\chi} = \overline{\rho D \nabla Z' \nabla Z'}$  auf. Sie ist demnach ein direktes Maß für die Abklingrate der Fluktuationen durch die turbulente kleinskalige Mischung. Die skalare Dissipationsrate ist ein Maß für den Flächenabbau und damit für die Reaktionsrate. Da bei der Vormischflamme der Flächenabbau zwischen Frisch- und Abgas stattfindet, liegt hier eine starke Kopplung von Mischungsprozess und chemischer Reaktion vor. Deshalb taucht auf der rechten Seite von Gleichung 4.21 auch der chemische Quellterm auf ( $\overline{2\dot{\omega} c'}$ ). Bei der Diffusionsflamme dagegen wird die Reaktion von der Mischung allein bestimmt. Daher wird der Transport von  $\widetilde{Z'^2}$  nicht von einem chemischen Quellterm beeinflusst.

Die skalare Dissipation nimmt eine Schlüsselrolle in der Modellierung turbulenter Verbrennung ein. In allen Verbrennungsmodellen taucht direkt oder indirekt die skalare Dissipation in der Gleichung für die mittlere Reaktionsrate auf [85].

#### 4.2.4 Brennregimes

Der Vorgang der turbulenten Verbrennung beinhaltet verschiedene Zeit-, Längen-, und Geschwindigkeitsskalen, die zur Charakterisierung des turbulenten Strömungsfelds und der chemischen Reaktion notwendig sind. Durch einen Vergleich dieser Skalen können wir die physikalischen Zusammenhänge bei der Verbrennung besser verstehen und einen Zusammenhang zwischen dem vorherrschenden Verbrennungsregime und den charakteristischen Größen ableiten.

Das Verhältnis aus dem Zeitmaß  $\tau_{str}$  der Strömung und dem Zeitmaß  $\tau_{chem}$  der chemischen Reaktion heißt Damköhler-Zahl  $Da$  [82]:

$$Da = \frac{\tau_{str}}{\tau_{chem}} \quad (4.23)$$

Für große Damköhler-Zahlen  $Da \gg 1$  ist die chemische Zeit kurz im Vergleich zum Zeitmaß der Strömung. Die Reaktion wird von der Mischung kontrolliert und die chemische Zeit kann vernachlässigt werden. Deshalb wird häufig von einer unendlich schnellen chemischen Reaktion ausgegangen („gemischt ist verbrannt“). Daraus resultiert eine dünne Reaktionszone, die von der Strömung deformiert und konvektiv transportiert wird. Die innere Struktur der Flamme wird von der Turbulenz nicht beeinflusst, die Flamme kann als laminares Flammenelement angesehen werden. So ein laminares Flammenelement werden wir als Flamelet (Flammenhaut) bezeichnen. Durch die Turbulenzwirbel erfolgt lediglich eine leichte Verformung der Flamelets, wir sprechen vom Regime der gewellten Flamelets. Dieser Bereich tritt sowohl bei Vormisch- als auch bei Diffusionsflammen auf. Bei der Diffusionsflamme trennen die Flamelets die Gebiete mit Brennstoff von denen mit Luft, bei der Vormischflamme trennen sie unverbranntes Gemisch und Abgas. Es existiert kein Gebiet, in dem sowohl Brennstoff als auch Luft vorhanden ist, bzw. Gemisch und Abgas. Für den Mischungsbruch bzw. die Fortschrittsvariable bedeutet das, dass sie nur die zwei diskreten Werte  $Z, c = 1$  oder  $Z, c = 0$  annimmt; die Varianzen  $\widetilde{Z'^2}$ ,  $\widetilde{c'^2}$  werden maximal. Bei großen Damköhler-Zahlen brennt sowohl die Diffusionsflamme als auch die Vormischflamme im Flamelet-Regime. Die Reaktionszone ist sehr dünn und liegt in der

Grenzschicht zwischen Brennstoff und Luft (bei der Diffusionsflamme) bzw. zwischen Abgas und frischem Gemisch (bei der Vormischflamme). Die Lage dieser Grenzschicht wird vor allem von der Strömung beeinflusst, weswegen diese die gesamte Verbrennungsreaktion kontrolliert. In Kapitel 5 wird ein Modell für die Lärmemission turbulenter Vormischflammen vorgestellt. Unter der Annahme einer sehr großen Damköhler-Zahl hängen die Eingangsgrößen des Lärmmodells mit Ausnahme der Wärmefreisetzung nur von der Strömung ab. Besitzen wir CFD-Daten einer Diffusionsflamme, bei der die Wärmefreisetzung korrekt berechnet wurde, können wir daher das Vormisch-Modell auch für die Diffusionsflamme verwenden. Eine genaue Beschreibung des Modells und dessen Eingangsparameter folgt im nächsten Kapitel.

Verringern wir die Damköhler-Zahl, so reagieren Diffusions- und Vormischflamme unterschiedlich. Da die Diffusionsflamme keine Eigengeschwindigkeit besitzt und sich nicht entgegen der turbulenten Schwankungen ausbreiten kann, reagiert sie sensibler auf eine Erhöhung der Turbulenz als die Vormischflamme [56]. Die Flamelets werden stärker gewellt und gestreckt, als das bei einer Vormischflamme der Fall ist. Weiter treten bei stärkerer Turbulenz Wirbel auch in das Flamelet ein und beeinflussen die innere Struktur der Flamme. Die Flamme dickt auf, und es existieren Zonen, in denen sowohl Brennstoff als auch Luft vorhanden sind. Daher existieren auch Gebiete, in denen der Mischungsbruch Werte ungleich Null oder Eins annimmt ( $0 < Z < 1$ ). Die Varianz  $\widetilde{Z}^2$  der Fortschrittsvariablen ist daher geringer als im Fall der hohen Damköhler-Zahl. Die Mischung erfolgt teilweise bereits vor der Reaktion, daher entstehen auch vorgemischte Gebiete. Für eine kleine Damköhler-Zahl  $Da \ll 1$  wäre die Mischungszeit geringer als die chemische Zeit. Daher hätten Brennstoff und Luft Zeit sich komplett zu vermischen schon vor der Reaktion. Die Diffusionsverbrennung würde demnach in eine Vormischverbrennung übergehen.

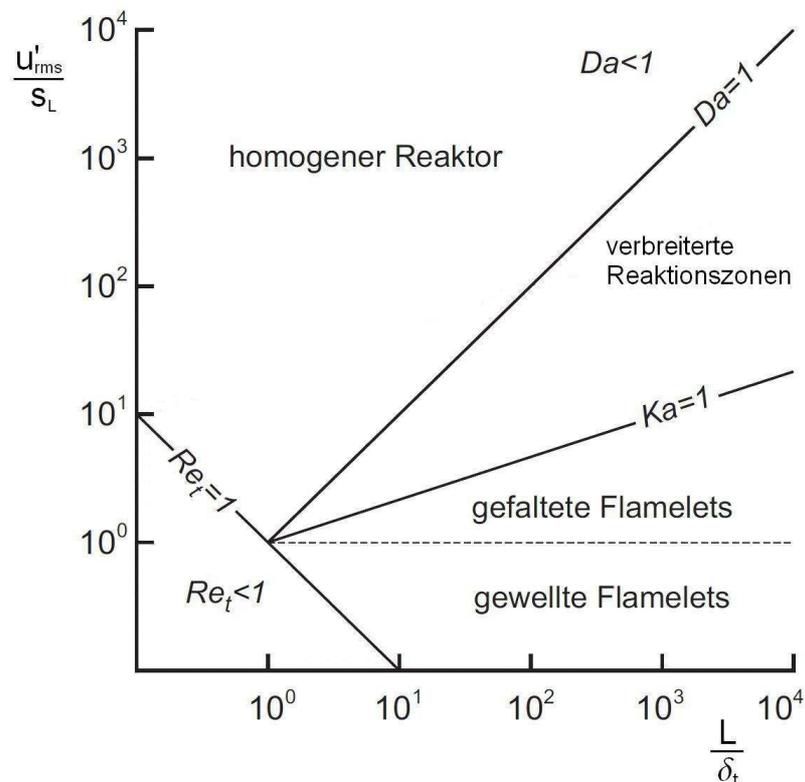
Anders als die Diffusionsflamme besitzt die Vormischflamme eine charakteristische Geschwindigkeit, die laminare Brenngeschwindigkeit  $s_L$ , und eine charakteristische Länge, die laminare Flammendicke  $\delta_L$ . Durch Vergleich

der charakteristischen Größen von Flamme und Strömung können wir genauer als bei der Diffusionsflamme verschiedene Brenn-Regimes identifizieren. Gehen wir vom Flamelet-Regime aus und erhöhen die Turbulenz, so werden wie bei der Diffusionsflamme zuerst die Flamelets gewellt und gefaltet. Steigt die Turbulenzstärke weiter an, so können schließlich die kleinsten Wirbel der Kolmogorov-Länge in die Reaktionszone eindringen und diese aufweiten. Das ist der Fall, wenn das chemische Zeitmaß genau dem Kolmogorov-Zeitmaß entspricht. Das Verhältnis dieser beiden Zeitmaße nennen wir turbulente Karlowitz-Zahl

$$Ka = \frac{\tau_{chem}}{\tau_{\eta}} . \quad (4.24)$$

Das sich bei einer bestimmten Damköhler- und Karlowitz-Zahl einstellende Brennregime ist qualitativ im Borghidiagramm in Abbildung 4.3 [60] dargestellt. Die Diagrammachsen zeigen (jeweils entdimensioniert) das charakteristische Turbulenzlängenmaß  $L/\delta_L$  und die RMS-Werte der Geschwindigkeitsschwankungen  $v'_{rms}/s_L$ . Die Isolinien für  $Da = 1$ ,  $Ka = 1$  und  $Re_t = 1$  trennen die Brennregimes voneinander ab. Für turbulente Reynoldszahlen  $Re_t < 1$  liegt eine laminare Strömung vor und damit auch eine laminare Flamme.

Ab einer Karlowitz-Zahl  $Ka = 1$  wird die innere Struktur der Flamme durch die Kolmogorov-Wirbel stark aufgeweitet, hier ist die Grenze zwischen dem Regime der gefalteten Flamelets und dem der verbreiterten Reaktionszonen. Der diskrete Verlauf der Fortschrittsvariablen (0-1-0-1) geht verloren, die Varianz nimmt ab. Als direkte Folge werden die Wärmefreisetzungsschwankungen geringer. Wir erreichen das Verbrennungsregime der verbreiterten Reaktionszonen (siehe Borghidiagramm, Abbildung 4.3). Für Karlowitz-Zahlen  $Ka > 1$  dringen immer größere Wirbel in die Flammenstruktur ein, weiten diese auf und trennen Teile davon ab. Mit weiter steigender Karlowitz-Zahl werden die Wirbel so stark, dass sie die Reaktion lokal unterbrechen können. Bereits gebildete Zwischenprodukte können an einem anderen Ort wieder zünden. Die geordnete Flammenstruktur geht verloren. Wird die Turbulenz weiter erhöht, ist das Strömungszeitmaß irgendwann kleiner als das chemische, was zu einer Damköhler-Zahl  $Da < 1$  führt. Hier wird das Regime des „idealen Rührreaktors“ erreicht. Eine Flamme im herkömmlichen



**Abbildung 4.3:** Brennregimes bei vorgemischter turbulenter Verbrennung

Sinn mit klar definierter Reaktionszone existiert hier nicht mehr, sondern die Reaktion verläuft langsam und gleichmäßig im ganzen Brennraum.

#### 4.2.5 Modellierung turbulenter Verbrennung

Wie wir gesehen haben, erfolgt die Verbrennung sowohl bei Diffusionsflammen, wie auch bei Vormischflammen hoher Damköhler-Zahl meistens im Flamelet-Regime. Die chemische Reaktion ist schnell im Vergleich mit der Mischung. Nehmen wir eine unendlich schnelle Chemie an und damit eine rein mischungskontrollierte Reaktion ( $Da \gg 1$ ), so wird, wie wir in Kapitel 4.2.3 gesehen haben, die Reaktionsrate allein von der skalaren Dissipation bestimmt. Nach Veynante [85] ist die Reaktionsrate proportional zu der skalaren Dissipation der Fortschrittsvariablen  $c$  (Vormischflamme) bzw. des Mischungsbruchs

Z (Diffusionsflamme).

$$\bar{\omega} = C\bar{\rho}\tilde{\chi} \quad (4.25)$$

Dieser Ansatz geht auf Spalding [78] zurück, in der Literatur wird er als Eddy-Break-Up-Modell bezeichnet. Die Proportionalitätskonstante  $C$  liegt in der Größenordnung eins. Nach Peters [54] ist die skalare Dissipation abhängig von einem charakteristischem Zeitmaß  $\tau_{char}$ :

$$\tilde{\chi} = \frac{\widetilde{c'^2}}{\tau_{char}} \quad (4.26)$$

Da die großen integralen Wirbel hauptsächlich den Mischungsprozess antreiben, ist nach Peters [54] die turbulente Mischungszeit  $\tau_\chi$  proportional zur charakteristischen Zeit der integralen Wirbel. Diese berechnet sich nach Gleichung 4.5 aus der turbulenten kinetischen Energie  $k$  und der Dissipationsrate  $\varepsilon$  gemäß  $\tau_\chi = C_D \frac{k}{\varepsilon}$ . Insgesamt ergibt sich für die skalare Dissipation

$$\tilde{\chi} = C_D \frac{\varepsilon}{k} \widetilde{c'^2}. \quad (4.27)$$

Bei hoher Damköhler-Zahl, also bei schneller Chemie, läuft der Prozess von Mischung und anschließender Reaktion parallel zur Turbulenzproduktion /-dissipation ab (die Flamme brennt in der Scherschicht). Dadurch wird die in Gleichung 4.27 angenommene Proportionalität zwischen der skalaren Dissipation und der turbulenten Dissipation verständlich.

Da wir von einer unendlich schnellen chemischen Reaktion ausgehen, liegt bei einer Vormischflamme überall entweder Frisch- oder Abgas vor. Die Fortschrittsvariable  $c$  nimmt nur die zwei diskreten Werte  $c = 0$  oder  $c = 1$  an. Für die Varianz dieser Verteilung der Fortschrittsvariablen gilt  $\widetilde{c'^2} = \tilde{c}(1 - \tilde{c})$ . Insgesamt lautet das Eddy-Breakup-Modell [85]:

$$\bar{\omega} = C_{EBU} \bar{\rho} \frac{\varepsilon}{k} \tilde{c}(1 - \tilde{c}) \quad (4.28)$$

Ursprünglich tauchte statt der Varianz der Fortschrittsvariablen bei Spalding [78] ein Geschwindigkeitsgradient auf. Mit dieser Formulierung berechnete Spalding mit mäßigem Erfolg auch Diffusionsflammen. Besser für diesen Zweck geeignet ist das Eddy-Dissipation-Modell, das im nächsten Abschnitt vorgestellt wird.

### Eddy-Dissipation-Modell

Das Eddy-Dissipation-Modell nach Magnussen [42] ist eine Erweiterung des Eddy-Breakup-Modells 4.28, speziell für nicht-vorgemischte Verbrennung. Magnussen ersetzt die Varianz der Fortschrittsvariable im Eddy-Breakup-Modell durch den gemittelten Massenbruch derjenigen Spezies, an der es jeweils mangelt (Brennstoff bei magerem Gemisch oder Luft bei fettem Gemisch). Die Reaktionsrate bei nicht-vorgemischter Verbrennung ist gegeben durch [11]

$$\bar{\dot{\omega}} = C_1 \bar{\rho} \frac{\varepsilon}{k} \min \left( \tilde{Y}_F, \frac{\tilde{Y}_{O_2}}{\nu}, C_2 \frac{\tilde{Y}_P}{1 + \nu} \right), \quad (4.29)$$

wobei  $C_1, C_2$  Modellkonstanten und

$$\nu = \frac{Y_{O_2}}{Y_{Br}} \Big|_{\text{stöchiometrisch}} \quad (4.30)$$

das stöchiometrische Sauerstoff/Brennstoffverhältnis bezeichnen. Magnussen wendete das Eddy-Dissipation-Modell sowohl zur Berechnung von Diffusions- wie auch Vormischflammen mit Erfolg an [41]. Das unterstreicht noch einmal die Ähnlichkeit zwischen Diffusionsflammen und Vormischflammen hoher Damköhler-Zahl.

### Schmid-Modell

Um das Eddy-Breakup-Modell vom Flamelet-Regime auf alle Bereiche des Borghidiagramms zu erweitern, berücksichtigen Schmid et al. [74] zusätzlich zur skalaren Dissipation den Einfluss der Chemie. Sie verwenden als charakteristisches Maß für die chemische Reaktion die turbulente Brenngeschwindigkeit  $s_t$  und die turbulente Flammendicke  $\delta_t$ . Diese bestimmen sie in Abhängigkeit von der Damköhler-Zahl [74] mittels

$$s_t = s_l + v'_{rms} (1 + Da^{-2})^{-1/4} \quad (4.31)$$

$$\delta_t = \delta_l + L (1 + Da^{-2})^{1/4}. \quad (4.32)$$

Die Wärmefreisetzung ergibt sich zu

$$\bar{q} = 4.96 \frac{\varepsilon}{k} \bar{c} (1 - \bar{c}) \left( \frac{s_l}{v'_{rms}} + (1 + Da^{-2})^{-1/4} \right)^2 \rho_0 Y_{Br} H_u. \quad (4.33)$$

In die Damköhler-Zahl führt Schmid einen zusätzlichen Faktor  $c_\varepsilon$  aus der Turbulenztheorie ein, dessen theoretischen Wert  $c_\varepsilon = 0.0833$  er allerdings noch leicht anpasst  $c_\varepsilon = 0.09$ .

$$\text{Da} = \frac{0.09 \cdot k s_l^2}{\varepsilon C_\varepsilon^2 a_0} \quad (4.34)$$

Für große Damköhler-Zahlen geht das Schmid-Modell in ein erweitertes Eddy-Break-Up-Modell (siehe Gleichung 4.28) über, wobei die Reaktion durch die laminare Brenngeschwindigkeit  $s_L$  kontrolliert wird:

$$\bar{q} = 4.96 \frac{\varepsilon}{k} \tilde{c} (1 - \tilde{c}) \left( \frac{s_l}{v'} + 1 \right)^2 \rho_0 Y_{Br} H_u \quad (4.35)$$

Die Beziehungen für die turbulente Brenngeschwindigkeit und Flammendicke vereinfachen sich zu

$$s_t = s_l + v'_{rms} \quad (4.36)$$

$$\delta_t = \delta_l + L \approx L. \quad (4.37)$$



---

## 5 Verbrennungslärm

Das Ziel dieser Arbeit ist die Berechnung der spektralen Lärmemission von turbulenten Verbrennungssystemen. Ein wesentlicher Punkt hierbei ist die Bestimmung des Quellspektrums, das die Flamme erzeugt. Hierzu werden wir in diesem Kapitel ein Lärmmodell vorstellen, das Hirsch et al. [28] veröffentlicht haben.

### 5.1 Modellierung von Verbrennungslärm

Unter der Annahme einer genügend hohen Turbulenz ( $Re \gg 1$ ,  $v'_{rms} > s_l$ ,  $L \gg \delta_l$ ), kann die mittlere volumetrische Wärmefreisetzung  $\bar{q}$  durch die mittlere skalare Dissipation  $\tilde{\chi}$  der Varianz der Fortschrittsvariablen  $\widetilde{c'^2}$  angegeben werden [54]:

$$\bar{q} = \rho_0 Y_{Br} H_u \tilde{\chi} \quad (5.1)$$

Die skalare Dissipation  $\tilde{\chi}$  hatten wir schon in Kapitel 4.2.5, Gleichung 4.27 durch eine Proportionalität zur turbulenten Dissipation modelliert:

$$\tilde{\chi} = C_D \frac{\varepsilon}{k} \widetilde{c'^2}, \quad (5.2)$$

Für die Konstante gibt Peters [54] den Wert  $C_D = 2.0$  an. Weiter sind  $H_u$  der untere Heizwert,  $\rho_0$  die Gemischdichte und  $Y_{Br}$  der Brennstoff-Massenbruch. Wir können Gleichung 5.1 und 5.2 benutzen, um aus dem Spektrum der Fortschrittsvariablen  $E_{c'}$  das Spektrum der Wärmefreisetzungsschwankungen zu berechnen:

$$E_q = \rho_0 Y_{Br} H_u C_D \frac{\varepsilon}{k} E_{c'} \quad (5.3)$$

Wenn wir annehmen, dass die Varianz  $\widetilde{c'^2}$  sich wie ein passiver Skalar verhält, können wir ein Modell-Spektrum aus der Turbulenztheorie verwenden, um

sie zu charakterisieren. Wir benutzen hier das mit der turbulenten kinetischen Energie normierte Spektrum von Tennekes und Lumley nach Gleichung 4.13 zur Modellierung von  $E_{c'}$ :

$$\widetilde{c'^2} = \frac{1}{C_D} \frac{k}{\varepsilon} \tilde{\chi} \quad (5.4)$$

$$E_{c'} = \frac{1}{C_D} \frac{k}{\varepsilon} \tilde{\chi} \frac{1}{k} \alpha \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \exp\left(-\frac{3}{2} \left(\pi \beta \alpha^{1/2} (\kappa L)^{-4/3} + \alpha (\kappa \eta_{c^2})^{4/3}\right)\right) \quad (5.5)$$

$$E_{c'} = C_S \tilde{\chi} \varepsilon^{-1/3} \kappa^{-5/3} \exp\left(-\frac{3}{2} \left(\pi \beta \alpha^{1/2} (\kappa L)^{-4/3} + \alpha (\kappa \eta_{c^2})^{4/3}\right)\right) \quad (5.6)$$

Wir haben die Größe  $C_S = \alpha / C_D$  eingeführt. In Gleichung 5.3 eingesetzt ergibt sich

$$E_q(\kappa) = \bar{q} \frac{C_S C_D}{\alpha} \alpha \frac{\varepsilon^{2/3}}{k} \kappa^{-5/3} \exp\left(-\frac{3}{2} \left(\pi \beta \alpha^{1/2} (\kappa L)^{-4/3} + \alpha (\kappa \eta_{c^2})^{4/3}\right)\right) \quad (5.7)$$

Allerdings ist  $\widetilde{c'^2}$  kein passiver Skalar, sein Verhalten wird also nicht vollständig von der turbulenten Strömung bestimmt, denn die Fortschrittsvariable hängt neben der Strömung auch von der chemischen Reaktion ab. Diese Abhängigkeit zeigt sich in zwei Effekten: Zum einen tritt ab bei einer Grenzwellenzahl ein spektraler Cut-Off auf, zum anderen wird die spektrale Amplitude von den chemischen Prozessen bei der Verbrennung beeinflusst. Diese beiden Effekte müssen bei der Modellierung berücksichtigt werden.

### 5.1.1 Berücksichtigung des aktiven Charakters

#### Spektraler Cut-Off

Ein Wirbel im turbulenten Strömungsfeld kann die Flammenfront nur dann beeinflussen, falls seine Umdrehungsgeschwindigkeit höher ist als die laminare Flammengeschwindigkeit. Falls die Umdrehungsgeschwindigkeit niedriger ist als die laminare Brenngeschwindigkeit, bewegt sich die Flammenfront so schnell über den Wirbel hinweg, dass der Wirbel gar nicht genug Zeit hat, die Flammenfront aufzufalten. Die kleinste Wirbelklasse, die in der Lage ist, die Flamme zu beeinflussen muss also eine Geschwindigkeit besitzen, die

gleich der Brenngeschwindigkeit ist:

$$v'_n = s_l \quad (5.8)$$

Aus dieser Beziehung kann man das Längenmaß dieser kleinsten interagierenden Wirbel herleiten:

$$L_G = \frac{s_l^3}{\epsilon} \quad (5.9)$$

Es wird Gibson-Längenmaß genannt und liegt höher als das Kolmogorov-Maß, welches für die kleinsten Wirbel in der Strömung überhaupt steht. Die Gibson-Länge gibt die obere Schranke an, ab der keine Interaktion mehr zwischen turbulenten Wirbeln und Flammenfront stattfindet.

Weitere Faktoren, die den spektralen Cut-Off bei hohen Wellenzahlen beeinflussen sind Streckungs- und Dissipationseffekte. Diese werden ab einer Wellenzahl einflussreich, die durch das Corrsin-Längenmaß gegeben ist. Dieses wird gebildet aus der Temperaturleitfähigkeit  $a$  und der turbulenten Dissipation  $\epsilon$  durch

$$L_C = \left( \frac{a^3}{\epsilon} \right)^{1/4} . \quad (5.10)$$

Hirsch et al. [28] verwenden als wirksame Cut-Off-Länge  $\eta_{c^2}$  für ihr Lärmmodell das Maximum von Gibson- und Corrsin-Länge

$$\eta_{c^2} = \max(c_G L_G, L_C) . \quad (5.11)$$

Die Konstante  $c_G$  wurde empirisch ermittelt und hat einen Wert von  $c_G = 3.0$ .

### Skalierung der spektralen Amplitude

Wenn wir annehmen, dass der Verbrennungsprozess unendlich schnell ist, würde jede Schwankung in der turbulenten Strömung sofort eine Änderung in der örtlichen Wärmefreisetzung nach sich ziehen. Im anderen Fall, wenn die chemische Reaktion extrem langsam ist, würde die Flamme gar nicht mehr auf irgendwelche Störungen in der Strömung reagieren. Das würde zu einer geräuschlosen Verbrennung führen. Das bedeutet, dass das Verhältnis des Zeitmaßes der turbulenten Strömung zum Zeitmaß der chemischen Reaktion die

Amplitude der Wärmefreisetzungsschwankungen bestimmt. Dieses Verhältnis wurde in Kapitel 4.2.4, Gleichung 4.23 als Damköhler-Zahl

$$Da = \frac{\tau_{str}}{\tau_{chem}} \quad (5.12)$$

definiert. Der Faktor  $C_S$  in Gleichung 5.31 muss diese Abhängigkeit der Amplitude von der Damköhler-Zahl wiedergeben. Die Varianz der Fortschrittsvariablen  $\widetilde{c'^2}$  erreicht ihr Maximum, wenn das Zeitmaß der chemischen Reaktion wesentlich kleiner ist als das der Geschwindigkeitsfluktuationen  $v'_{rms}$  im turbulenten Strömungsfeld. Für die Damköhler-Zahl gilt dabei  $Da \rightarrow \infty$ . Im Falle einer langsamen Reaktion sinkt  $\widetilde{c'^2}$  und damit auch der produzierte Lärm. Um diesen Effekt richtig wiederzugeben, muss der Skalierungsfaktor  $C_S$  die Bedingung

$$C_S = \frac{\alpha}{C_D} \frac{\widetilde{c'^2}(Da)}{\widetilde{c'^2}(Da \rightarrow \infty)} \quad (5.13)$$

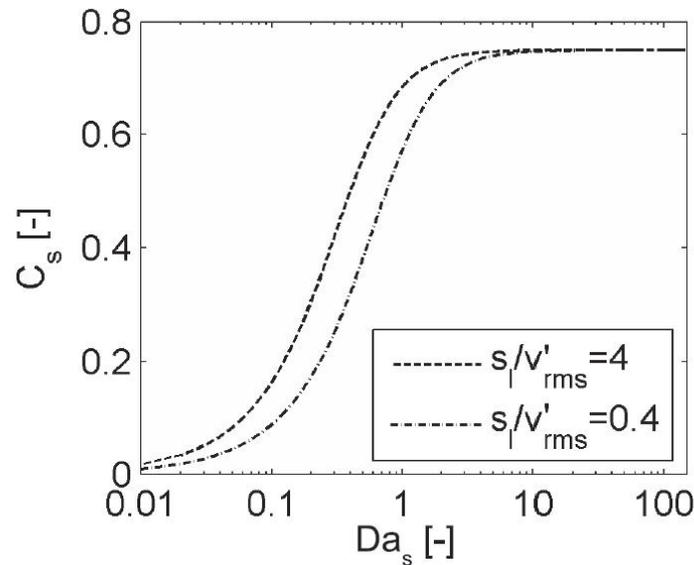
erfüllen. Dadurch verringert  $C_S$  die Amplitude des Lärmspektrums bei langsamen Reaktionen. Die Varianz der Fortschrittsvariable  $\widetilde{c'^2}$  ist nach den Gleichungen 5.1 und 5.2 proportional zur mittleren Wärmefreisetzung  $\bar{q}$ . Daher kann das Verhältnis der Varianzen  $\widetilde{c'^2}$  in Gleichung 5.13 durch das entsprechende Verhältnis der mittleren Wärmefreisetzungen  $\bar{q}$  ersetzt werden. Die mittlere Wärmefreisetzung  $\bar{q}$  können wir nach Schmid et al. [73, 74] durch

$$\bar{q} = 4.96 \frac{\varepsilon}{k} \bar{c} (1 - \bar{c}) \left( \frac{s_l}{v'_{rms}} + (1 + Da^{-2})^{-1/4} \right)^2 \rho Y_{Br} H_u \quad (5.14)$$

bestimmen. Damit ergibt sich aus der Forderung an  $C_S$  (Gleichung 5.13) die Amplitudenskalierung

$$C_S = \frac{\alpha}{C_D} \left( \frac{\frac{s_l}{\sqrt{2/3k}} + (1 + Da_t^{-2})^{-1/4}}{\frac{s_l}{\sqrt{2/3k}} + 1} \right)^2 \quad (5.15)$$

Der Verlauf von  $C_S$  in Abhängigkeit von der Damköhler-Zahl ist in Abbildung 5.1 gezeigt. Die Skalierungsfunktion 5.15 erfüllt die Asymptotenbedingung  $C_S \rightarrow 0$  für  $Da \rightarrow 0$ .



**Abbildung 5.1:** Amplitudenskalierung  $C_s$  zur Berücksichtigung des herrschenden Verbrennungsregimes

### 5.1.2 Übergang vom Wellenzahlspektrum $E_q$ zum Frequenzspektrum $\Phi_q$

Die spektrale Wärmefreisetzung  $E_q(\kappa)$  haben wir im Wellenzahlraum modelliert. Wir benötigen sie jedoch im Frequenzraum  $E_q(\kappa) \rightarrow \Phi_q(f)$ . Tennekes und Lumley stellen in ihrem Buch [81] eine Abbildung zwischen dem räumlichen und zeitlichen Spektrum vor, auf die wir hier zurückgreifen wollen.

Ein Wirbel mit der Wellenzahl  $\kappa$  besitzt die Größe  $\frac{2\pi}{\kappa}$ . Seine Energie beträgt  $\kappa E_k(\kappa)$ , daher ist  $\sqrt{\kappa E_k(\kappa)}$  ein Maß für die charakteristische Geschwindigkeit der  $\kappa$ -Wirbel. Die Dehnungsrate  $\xi(\kappa)$  beträgt

$$\xi(\kappa) = \frac{(\kappa E)^{1/2}}{\frac{2\pi}{\kappa}} = \frac{(\kappa^3 E)^{1/2}}{2\pi}. \quad (5.16)$$

Das Spektrum  $E_k(\kappa)$  der turbulenten kinetischen Energie hatten wir in Kapitel 4.1, (Gleichung 4.12) hergeleitet:

$$E(\kappa) = \alpha \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \quad (5.17)$$

Setzen wir das in die Dehnungsrate  $\xi(\kappa)$  ein, ergibt sich

$$\xi(\kappa) = \frac{\alpha^{1/2}}{2\pi} \varepsilon^{1/3} \kappa^{2/3} . \quad (5.18)$$

Die Kreisfrequenz  $\omega$  ergibt sich aus der Dehnungsrate durch Multiplikation mit  $2\pi$  [81]

$$\omega = \alpha^{1/2} \varepsilon^{1/3} \kappa^{2/3} . \quad (5.19)$$

Lösen wir nach  $\kappa$  auf:

$$\kappa = \frac{\omega^{3/2}}{\alpha^{3/4} \varepsilon^{1/2}} = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\alpha^{3/4} \varepsilon^{1/2}} f^{3/2} \quad (5.20)$$

Die turbulente Dissipation  $\varepsilon$  wird im Allgemeinen in der Turbulenztheorie durch das Verhältnis des turbulenten Längenmaßes zu einem charakteristischen Zeitmaß der Strömung angeben:

$$\varepsilon = \frac{L^2}{\tau^3} \quad (5.21)$$

$L$  ist das integrale Längenmaß der turbulenten Strömung und  $\tau = L/v'_{rms}$  das Zeitmaß der turbulenten Dissipation. Da im Falle einer Flamme nicht die Eigenschaften der Strömung dominieren, sondern die der Flamme, werden die charakteristischen Maße von der Reaktion bestimmt. Bei Vormischverbrennung kann als Zeitmaß die charakteristische Durchgangszeit  $\tau_{char}$  einer typischen turbulenten Struktur durch die Flamme angesehen werden [87](S.42):

$$\tau_{char} = \frac{1}{C_D} \frac{\delta_t}{s_t} \quad (5.22)$$

Hier ist  $\delta_t$  die turbulente Flammendicke und  $s_t$  die turbulente Brenngeschwindigkeit. Die Konstante  $C_D = 2$  ergibt sich aus der Bedingung, dass  $\tau_{char} \rightarrow \tau_{str}$  für  $Da \rightarrow \infty$ . Somit fungiert die turbulente Flammendicke  $\delta_t$  als charakteristisches Längenmaß der Reaktion. Verwenden wir das Schmid-Modell zur Berechnung von turbulenter Brenngeschwindigkeit (Gleichung 4.31) und Flammendicke (Gleichung 4.32), ergibt sich für die charakteristische Zeit

$$\tau_{char} = C_\tau \cdot \frac{\delta_t}{s_t} = C_\tau \cdot \frac{l_t}{u'} \cdot \frac{a_0/(s_l \cdot l_t) + (1 + Da_t^{-2})^{1/4}}{s_l/u' + (1 + Da_t^{-2})^{-1/4}} . \quad (5.23)$$

Für die Dissipation  $\varepsilon$  ergibt sich

$$\varepsilon = \frac{\delta_t^2}{\tau_{char}^3} \quad (5.24)$$

und damit für die Frequenz-Wellenzahlabbildung

$$\kappa = \frac{(2\pi)^{3/2}}{\alpha^{3/4} \delta_t} (\tau_{char} f)^{3/2} . \quad (5.25)$$

Um das Frequenzspektrum  $\Phi_q(f)$  aus dem Wellenzahl-Spektrum  $E_q(\kappa)$  zu bestimmen, fordern wir, dass der spektrale Energieinhalt in jeweils korrespondierenden Skalen erhalten bleiben muss. Es soll also

$$\kappa E_q(\kappa) = \omega \Phi_q(\omega) \quad (5.26)$$

gelten, woraus wir

$$\Phi_q(\omega) = \frac{\kappa}{\omega} E_q(\kappa) \quad (5.27)$$

erhalten. Das Modellspektrum  $\Phi_q$  ist jetzt in Abhängigkeit von der Kreisfrequenz  $\omega = 2\pi f$  formuliert. Um einen besseren Vergleich mit experimentellen Daten, die typischerweise über die Frequenz  $f$  angegeben werden, vornehmen zu können, muss das Modellspektrum richtig skaliert werden. Die Skalierung ergibt sich aus der Notwendigkeit, dass der gesamte Energieinhalt für  $\Phi_q(\omega)$  und  $\Phi_q(f)$  gleich sein muss:

$$\int_0^{\infty} \Phi_q(f) df = \int_0^{\infty} \Phi_q(\omega) d\omega = \int_0^{\infty} \Phi_q(2\pi f) 2\pi df \quad (5.28)$$

Damit gilt zwischen  $\Phi_q(\omega)$  und  $\Phi_q(f)$  die Beziehung

$$\Phi_q(f) = 2\pi \Phi_q(2\pi f) . \quad (5.29)$$

Somit muss der Faktor  $2\pi$  ergänzt werden, um das Leistungsspektrum in Abhängigkeit von der Frequenz  $f$  zu erhalten. Damit lautet das Frequenzspektrum der Wärmefreisetzungsfluktuationen

$$\Phi_q(f) = 2\pi \frac{\kappa(f)}{2\pi f} E_q(\kappa(f)) , \quad (5.30)$$

oder ausführlich

$$\begin{aligned} \Phi_q(f) = 2\pi \bar{q} \frac{\kappa(f)}{2\pi f} \frac{C_S C_D}{\alpha k} \alpha \varepsilon^{2/3} \kappa(f)^{-5/3} \\ \cdot \exp\left(-\frac{2}{3}\left(\pi \beta \alpha^{1/2} (\kappa(f) L)^{-4/3} + \alpha (\kappa(f) \eta)^{4/3}\right)\right). \end{aligned} \quad (5.31)$$

## 5.2 Berechnung der abgestrahlten akustischen Leistung

In Kapitel 2.1.2 haben wir als ein Ergebnis die Wellengleichung mit Thermoakustischem Quellterm (Gleichung 2.17) erhalten:

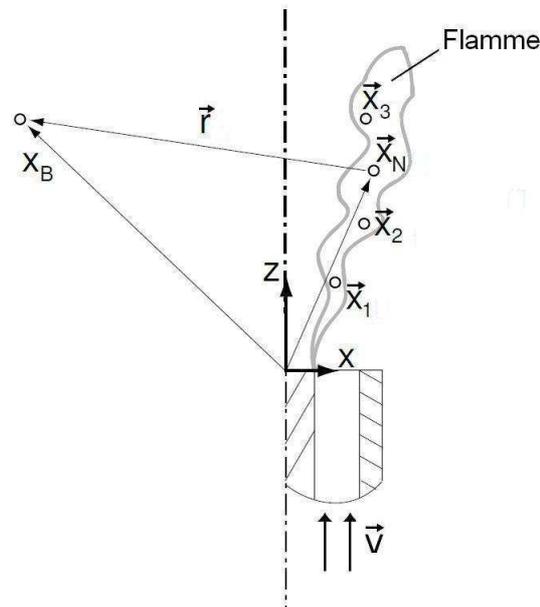
$$\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = \frac{\gamma - 1}{c^2} \frac{\partial \dot{q}}{\partial t} \quad (5.32)$$

Wie in Kapitel 3 gezeigt, kann die Lösung dieser Gleichung für eine Schallquelle im beidseitig reflexionsfreien Rohr mittels der Greenschen Funktion analytisch angegeben werden. Die Druckfluktuation an der Beobachterposition  $\vec{x}_B$  ergibt sich zu [71]

$$p'(\vec{x}_B, t) = \frac{c_0}{A} \frac{\gamma - 1}{c_0^2} \int_{V_S} q'\left(\vec{x}, t - \frac{r}{c_0}\right) d\vec{x}. \quad (5.33)$$

Hier wurde angenommen, dass der Abstand  $\vec{r}(x) = \vec{x} - \vec{x}_B$  zwischen dem Ort  $x$  der Wärmefreisetzung und der Beobachterposition  $\vec{x}_B$  groß ist im Vergleich mit der Abmessung des Quellvolumen  $V_S$ .

Die Flamme setzt sich aus  $N$  Einzelquellen zusammen; in Abbildung 5.2 ist das durch die Positionen  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_N$  verdeutlicht. Falls die Flamme akustisch kompakt ist (klein im Vergleich mit der emittierten Wellenlänge) und der Abstand zwischen Flamme und Beobachter groß, kann  $\vec{r}(x) = \vec{r}$  für alle Quellen als konstant angenommen werden. Die akustische Leistung ist nach Gleichung 2.41 eine Korrelation von Schalldruck und Schallschnelle, integriert über die entsprechende Referenzfläche (im beidseitigem Rohr also die doppelte Querschnittsfläche  $A$ ). Im Fernfeld kann die Schallschnelle  $u'$  durch



**Abbildung 5.2:** Skizze einer turbulenten Flamme mit  $N$  Einzelquellen und der Beobachterposition  $x_B$ , [64]

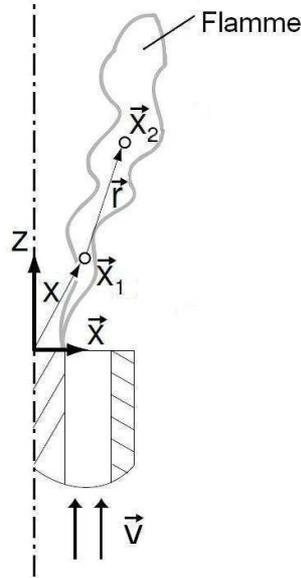
den Schalldruck  $p'$  mittels der Impedanz  $Z = \rho_0 c_0 = p' / u'$  ersetzt werden:

$$P = \int_A \overline{p' u'} d\vec{x} = \int_A \frac{\overline{p'^2}}{\rho_0 c_0} d\vec{x} = \frac{\overline{p'^2}}{\rho_0 c_0} \cdot A \quad (5.34)$$

Setzen wir Gleichung 5.33 in Gleichung 5.34 ein, erhalten wir die folgende Beziehung zwischen der Wärmefreisetzung als Quelle und der integralen akustischen Leistung

$$P = \frac{2c_0}{A\rho_0} \left( \frac{\gamma - 1}{c_0^2} \right)^2 \overline{\int_{V_S} \int_{V_S} (q'(\vec{x}_1, t_1)) (q'(\vec{x}_2, t_2)) d\vec{x}_2 d\vec{x}_1} . \quad (5.35)$$

Gleichung 5.35 zeigt eine wichtige Eigenschaft der Lärmentstehung in turbulenten Flammen auf: Die Schwankungen der Wärmefreisetzung in der Flamme müssen eine gewisse Kohärenz aufweisen, damit effektiv Lärm abgestrahlt wird. Die Wärmefreisetzung wird stark durch die turbulente Strömung moduliert, weswegen Strahle [79] vorgeschlagen hat, Kreuzkorrelationsfunktionen zu nutzen, um die gemittelte Korrelation in Gleichung 5.35 zu bestimmen. Abbildung 5.3 zeigt die lokale Trennung zweier Quellen an den Positionen  $x_1$



**Abbildung 5.3:** Trennung zweier Quellen in einer Flamme

und  $x_2$ . Der räumliche Abstand zwischen beiden ist der Abstandsvektor  $\vec{r}$ , der zeitliche Abstand die Verzugszeit  $\tau$ . Die Beziehung zwischen beiden lässt sich durch die Autokorrelation  $R_{qq}$  der Wärmefreisetzungsfluktuationen

$$R_{qq}(\vec{x}_1, t_1, \vec{r}, \tau) = \overline{q'(\vec{x}_1, t_1) q'(\vec{x}_1 + \vec{r}, t_1 + \tau)} \quad (5.36)$$

bestimmen. Die Korrelation der Wärmequellen, beschrieben durch  $R_{qq}$ , wird mit dem RMS-Wert der Schwankung  $q'_{rms}$  normiert und durch eine Kohärenzfunktion  $\Gamma(\vec{r}, \tau)$  ersetzt [3]. Dabei wird angenommen, dass  $q'_{rms} = q'_{rms,1} \approx q'_{rms,2}$ . Somit erhalten wir mit Gleichung 5.36 eingesetzt in 5.35 für die Leistung

$$P = \frac{2c_0}{A\rho_0} \left( \frac{\gamma - 1}{c_0^2} \right)^2 \int \int q'^2_{rms} \Gamma(\vec{r}, \tau) d\vec{r} d\vec{x}. \quad (5.37)$$

Zur Vereinfachung schreiben wir  $\vec{x} = \vec{x}_1$ . Die Kohärenzfunktion  $\Gamma(\vec{r}, \tau)$  beinhaltet sowohl die räumliche als auch die zeitliche Korrelation. Die räumliche Korrelation werden wir durch ein charakteristisches Volumen ersetzen. Dazu wird die Funktion  $\Gamma(\vec{r}, \tau)$  für  $\tau = 0$  über  $\vec{r}$  integriert

$$V_{koh} = \int_r \Gamma(\vec{r}, 0) d\vec{r}. \quad (5.38)$$

Als Ergebnis dieser Integration erhalten wir die Größe eines virtuellen statistischen Volumens  $V_{koh}$ , in dem die Wärmefreisetzung völlig kohärent erfolgt. Gleichung 5.37 beschreibt den Schalldruck im Zeitbereich. Um den spektralen Charakter zu bestimmen, Fourier-transformieren wir Gleichung 5.37. Ergebnis der Fourier-Transformation (FT) von  $\Gamma(0, \tau)$  für  $\vec{r} = 0$  ist ein Leistungsdichtespektrum. Wir verwenden den RMS-Wert der Wärmefreisetzung, um die spektrale Wärmefreisetzung zu erhalten:

$$\Phi_{qq}(2\pi f) = FT\left(q'_{rms}^2 \cdot \Gamma(0, \tau)\right) \quad (5.39)$$

Um das Schalldruckspektrum in der Einheit  $W/Hz$  zu erhalten, muss der Faktor  $2\pi$  eingeführt werden:

$$P_{spek}(f) = \frac{4\pi c_0}{A\rho_0} \left(\frac{\gamma-1}{c_0^2}\right)^2 \int_{V_{fl}} \Phi_{qq}(2\pi f) V_{koh} d\vec{x} \quad [W/Hz] \quad (5.40)$$

Die gesamte abgestrahlte Leistung erhalten wir durch Integration über alle Frequenzen:

$$P = \int_0^{\infty} P(f) df \quad (5.41)$$

### 5.3 Kohärenzvolumen

Nur wenn die Wärmefreisetzung an unterschiedlichen Orten zu einem gewissen Grad gleichförmig schwankt, produziert die Flamme effektiv Lärm. Falls zwischen benachbarten Punkten keinerlei Kohärenz bestehen würde, käme es zum einen zu Auslöschungseffekten, zum anderen hängt die Effektivität einer akustischen Quelle sehr stark von ihrem Volumen ab. Die Wirbel in einer turbulenten Strömung sind kohärente Strukturen der Strömung. Durch sie entstehen auch in der Wärmefreisetzung kohärente Strukturen. Frühzeitig wurde es deshalb als gesichert betrachtet, dass die Größe der kohärenten Strukturen eng mit den Strukturen in der Strömung verknüpft ist und näherungsweise als das Volumen einer Kugel betrachtet werden kann:

$$V_{koh} \sim L_{kor}^3 \quad (5.42)$$

Hier steht  $L_{kor}$  für ein Korrelationslängenmaß der Wärmefreisetzung, das noch nicht näher bekannt war. Allerdings darf der Einfluss der chemischen Reaktion auf das Kohärenzvolumen nicht vernachlässigt werden. Das führte zu vielen verschiedenen Ansätzen. Strahle [80] war der erste, der ein kombiniertes, aus Turbulenz- und Chemiegrößen basiertes Modell vorstellte:

$$V_{koh} = C_{koh} \delta_l^{3-n} L^n \quad (5.43)$$

Für die Konstante gilt  $C_{koh} = O(L^3)$ , und  $0 \leq n \leq 2$ . Einen wichtigen Beitrag lieferten Boineau et al. [4], die zum ersten Mal Kohärenzvolumen experimentell bestimmt haben. Dazu maßen sie die Lichtemission der  $CH^*$ -Radikale mittels eines traversierten und eines festen Photomultipliers und korrelierten anschließend beide Daten. Für die Korrelation der Wärmefreisetzung fanden sie eine räumliche Abhängigkeit, die sehr ähnlich zu der ist, die Hinze in [27] vorstellte:

$$\Gamma(r) = e^{-\frac{\pi}{4} \left( \frac{r}{L_{kor}} \right)^2} \quad (5.44)$$

Wäsele [87] baute auf diesem Ansatz auf und bestimmte daraus das Kohärenzvolumen wie folgt: Das Kohärenzvolumen kann als Kugelvolumen angesehen werden mit  $V_{koh} = 4/3\pi L_{kor}^3$ , wodurch die räumliche Abhängigkeit des Korrelationskoeffizienten verloren geht. Deshalb wird das Kohärenzvolumen durch Integration der Korrelationsfunktion nach Gleichung 5.44 berechnet:

$$V_{koh} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty e^{-\frac{\pi}{4} \left( \frac{r}{L_{kor}} \right)^2} r^2 \sin(\phi) dr d\phi d\vartheta \quad (5.45)$$

Das ergibt

$$V_{koh} = 4\pi \frac{\sqrt{\pi}}{4 \left( \sqrt{\frac{\pi}{4L_{kor}^2}} \right)^3} = 4^{3/2} L_{kor}^3 \quad (5.46)$$

Um den Einfluss der chemischen Prozesse zu berücksichtigen, wird die turbulente Flammendicke  $\delta_t = \delta_L + L(1 + Da_t^{-2})^{1/4}$  als Längenmaß  $L_{kor}$  der Wärmefreisetzung verwendet, da die turbulente Flammendicke Strömungs- und chemische Skalen verbindet. Damit ergibt sich für das Kohärenzvolumen

$$V_{coh} = 8 \cdot \delta_t^3 \quad (5.47)$$

## 5.4 Akustisches Leistungsdichtespektrum der eingeschlossenen Flamme

Um mittels Gleichung 5.40 die Schalleistung einer Flamme berechnen zu können, benötigen wir das zeitliche Korrelationspektrum  $\Phi_{qq}(f)$ , für das

$$\Phi_{qq}(f) = \Phi_q(f) \cdot \Phi_q^*(f) = \Phi_q^2(f). \quad (5.48)$$

gilt. Setzen wir das eben berechnete Kohärenzvolumen 5.47 in das Leistungsdichtespektrum 5.40 ein, erhalten wir für die frei brennende Flamme

$$P(f) = \frac{(2\pi)^3 2c_0}{A\rho_0} \left( \frac{\gamma-1}{c_0^2} \right)^2 \int_{V_S} \left( \frac{\kappa(f)}{f} E_q(\kappa, x) \right)^2 8 \cdot \delta_t(x)^3 d\vec{x} \quad [\text{W/Hz}]. \quad (5.49)$$

## 5.5 Diffusionsflammen

Das hier vorgestellte Lärmmodell ist für Vormischflammen entwickelt worden. Im Nachfolgenden werden wir die einzelnen Eingangsgrößen näher betrachten und feststellen, dass diese bei hohen Damköhler-Zahlen fast ausschließlich von der Strömung bestimmt werden. Daher kann das Lärmmodell auch auf Diffusionsflammen angewendet werden.

Das Kohärenzvolumen berechnet sich nach Gleichung 5.47 aus der turbulenten Flammendicke mittels  $V_{koh} = 8 \cdot \delta_t^3$ . Wie wir gesehen haben, ist die Damköhler-Zahl bei einer Diffusionsflamme sehr groß und die turbulente Flammendicke ist in diesem Fall nach Gleichung 4.37 ungefähr gleich dem turbulenten Längenmaß  $\delta_t \approx L$ . Für das Kohärenzvolumen gilt demnach  $V_{koh} \approx 8 \cdot L^3$ , ist also nur von einer Strömungsgröße abhängig. Das verwendete Lärmspektrum nach Tennekes und Lumley 4.13 entspringt aus der Theorie turbulenter Strömungen und beschreibt eine nicht reagierende Strömung. Also beinhaltet auch dieser Teil des Lärmmodells keinerlei spezifische Eigenschaften von Vormischflammen. Die Amplitudenskalierung  $C_S$  nach Gleichung 5.15 geht für eine große Damköhler-Zahl bei Diffusionsflammen

über in

$$C_S = \frac{\alpha}{C_D}, \quad (5.50)$$

beinhaltet also nur noch zwei Konstanten. Die Grenzwellenzahl  $\eta_{c^2}$ , ab der die Flamme nicht mehr den Turbulenzwirbel folgen kann, wird in Gleichung 5.11 aus dem Maximum von Gibson- ( $L_G$ ) und Corrsion-Länge  $L_C$  bestimmt. Die Corrsin-Länge  $L_C$  berechnet sich aus Temperaturleitfähigkeit  $a$ , einer Stoffgröße, und der turbulenten Dissipation  $\varepsilon$ , einer Strömungsgröße. Die Gibson-Länge  $L_G$  dagegen berechnet sich aus der laminaren Brenngeschwindigkeit  $s_l$  und hängt damit hauptsächlich von der Art des Brennstoffes und der Temperatur ab. Außerdem ist der Einfluss der Grenzwellenzahl auf die berechneten Spektren sehr gering, da der größte Teil des Lärms bei wesentlich niedrigeren Wellenzahlen emittiert wird. Oberhalb der Grenzwellenzahl sind die Amplituden so gering, dass deren Anteil an der Gesamtemission ohnehin vernachlässigbar ist. Die Frequenz-Wellenzahl-Abbildung 5.25 beinhaltet die turbulente Flammendicke  $\delta_t$  und über die charakteristische Zeit  $\tau_{char}$  die laminare Brenngeschwindigkeit  $s_l$ . Beide werden wie schon angesprochen nur von Strömungs- und Stoffgrößen bestimmt.

Der wichtigste Eingangsparameter in das Lärmmodell ist die Wärmefreisetzung  $\dot{q}(x)$ . Für eine korrekte Lärmprognose muss diese möglichst korrekt in das Modell eingehen. Im Kapitel 8 werden wir Daten einer CFD-Simulationen benutzen, um das Lärmspektrum einer Diffusionsflamme zu berechnen. Die Simulation wurde mit dem in Kapitel 4.2.5 vorgestellten Eddy-Dissipation-Modell durchgeführt, das ja speziell für nicht-vorgemischte Verbrennung entwickelt wurde. Das bedeutet, dass in den Berechnungen der Charakter der Diffusionsflamme korrekt berücksichtigt wird und die Ergebnisse die Wärmefreisetzung  $\dot{q}(x)$  korrekt wiedergeben. Wird auf Basis dieser Daten das Lärmspektrum berechnet, ist daher auch für die Lärmberechnung der unvorgemischte Charakter der Flamme korrekt berücksichtigt.

Wir wir gesehen haben beinhalten die Eingangsgrößen des Lärmmodells keinerlei spezifischen Größen einer Vormischverbrennung. Verwenden wir zur Berechnung des Lärmspektrums als Datenbasis eine CFD-Simulation, in der die Flammencharakteristik korrekt berücksichtigt ist, so können wir das

Lärmmodell auch für eine Diffusionsflamme verwenden.



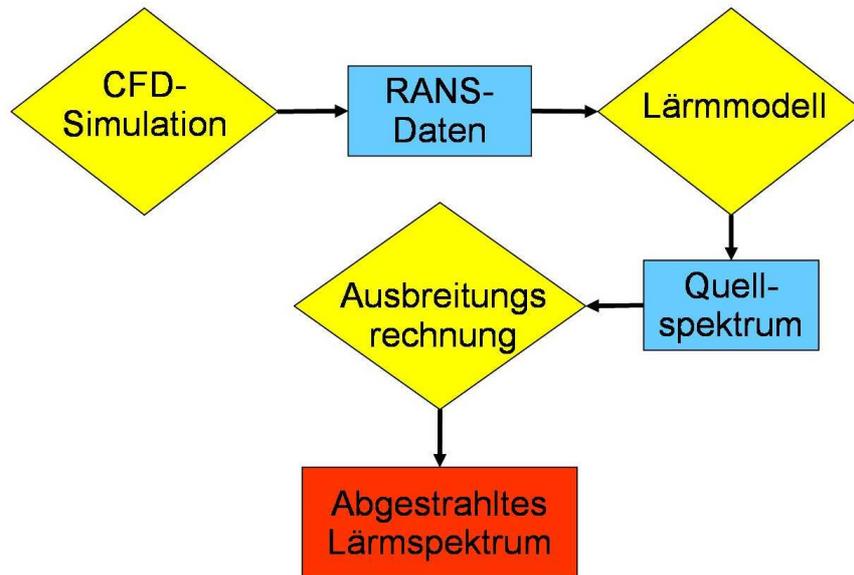
---

## 6 Lärmberechnung

Im letzten Kapitel haben wir ein Modell hergeleitet, das uns aus den Daten der reagierenden Strömung das Lärmquellspektrum der Flamme berechnet. Zusammen mit den akustischen Grundlagen, die wir in den Kapiteln 2 und 3 kennen gelernt haben, besitzen wir damit die komplette Theorie, um den von Flammen emittierten Lärm berechnen zu können. In diesem Kapitel werden wir als erstes die entwickelte Berechnungsmethode im Ganzen vorstellen und anschließend auf die noch offen stehenden Teilaspekte eingehen.

### 6.1 Berechnungsmethode

Die Methode, die wir zur Berechnung der Schallemission von Verbrennungssystemen nutzen werden ist eine hybride Methode, das bedeutet, dass sie im Wesentlichen aus zwei Teilen besteht: Einer CFD-Simulation der reagierenden Strömung und einer separaten Berechnung der Schallausbreitung. Das genaue Verfahren ist in dem Flussdiagramm 6.1 dargestellt. Grundlage der Berechnung ist eine stationäre RANS-CFD-Rechnung des reagierenden Strömungsfelds. RANS-Simulationen sind mittlerweile auch in der industriellen Entwicklung Standard und können heute ohne großen zeitlichen Aufwand durchgeführt werden. Dadurch müssen für die Lärmberechnung keine zusätzlichen Simulation durchgeführt werden. Die Ergebnisse der CFD-Simulation liefern die Eingangsdaten für das Lärmmodell aus Kapitel 5. Dieses liefert uns das Quellspektrum der Flamme. Allerdings erhalten wir nur Informationen über die Amplitude und keinerlei Phaseninformationen. Dass das für unsere Berechnung ausreichend ist, zeigen wir in Kapitel 6.3. Um aus dem Quellspektrum das resultierende Lärmspektrum zu bestimmen, müssen wir die Schallausbreitung im Gerät und weiter in der Umgebung berechnen. Eine



**Abbildung 6.1:** Ablauf der Lärmberechnung

Schallquelle erzeugt ein akustisches Feld, das durch die Helmholtzgleichung 2.20 beschrieben wird. Zur Berechnung des akustischen Feldes einer Flamme werden wir in Kapitel 7 und 8 zwei Verfahren nutzen, die jetzt vorgestellt werden. Zum einen werden wir die in Kapitel 2.1.5 gefundene eindimensionale Lösung der ebenen Wellen (Gleichung 2.26) verwenden, was zu den akustischen Netzwerkmodellen führt. Zum anderen werden wir die Helmholtzgleichung 2.20 direkt mit der Finite-Elemente-Methode (FEM) lösen. Da diese im Gegensatz zur Netzwerkmethod auch 3D-Effekte berücksichtigt, betrachten wir diese Ergebnisse als exakt. Wir werden daher die FEM-Ergebnisse auch dazu nutzen, das Netzwerkmodell zu kalibrieren. Komplizierte Brennerbauteile, in denen die Akustik nicht eindimensional ist, können nur unzureichend mit einem Netzwerk modelliert werden können. Aus der FE-Simulation können wir entsprechende Randbedingungen und Transfermatrizen gewinnen, die das Netzwerkmodell vereinfachen, gleichzeitig aber auch die Ergebnisse verbessern. Mit einem solchen angepassten Netzwerkmodell erhalten wir schließlich das Schallfeld mit der gleichen Ergebnisqualität wie beim 3D-FE-Modell bei einem Bruchteil der Rechenzeit. Für die Schallausbreitung vom Gerät in die Umgebung können wir auf die analytische Freifeldlösung zurückgreifen. Diese liefert schließlich das abgestrahlte Lärmspektrum.

## 6.2 Numerische Verfahren

Wie oben beschrieben, werden wir das Schallfeld mit zwei unterschiedlichen Verfahren berechnen, mit der Netzwerk- und der Finite-Element-Methode. Wir werden im Folgenden auf beide Verfahren genauer eingehen.

### 6.2.1 Finite-Elemente-Methode

Bei der Helmholtzgleichung 2.20 handelt es sich um eine partielle Differentialgleichung (PDG). Analytische Lösungen dieser Art Gleichung existieren nur selten und sind im Allgemeinen schwer zu ermitteln. Die Lösung erfolgt daher in der Regel numerisch. Es existieren mehrere Verfahren zur Lösung, die bekanntesten sind die Finite-Differenzen-, die Finite-Volumen-, und die Finite-Elemente-Methode. Welches dieser Verfahren sich am besten zur Lösung einer bestimmten PDG eignet, hängt von deren Eigenschaften ab. Die für uns wichtige Helmholtzgleichung 2.20 ist eine elliptische Differentialgleichung [37]. Elliptische Differentialgleichungen beschreiben typischerweise stationäre Probleme, ihre Lösungen sind in der Regel stetig. Sie haben keinen Ausbreitungscharakter, sondern Potentialcharakter, d. h. eine lokale Störung wirkt sich sofort im ganzen Lösungsgebiet aus. Für die Lösung elliptischer PDGs ist die Finite-Elemente-Methode am besten geeignet, weshalb wir nur auf diese genauer eingehen werden.

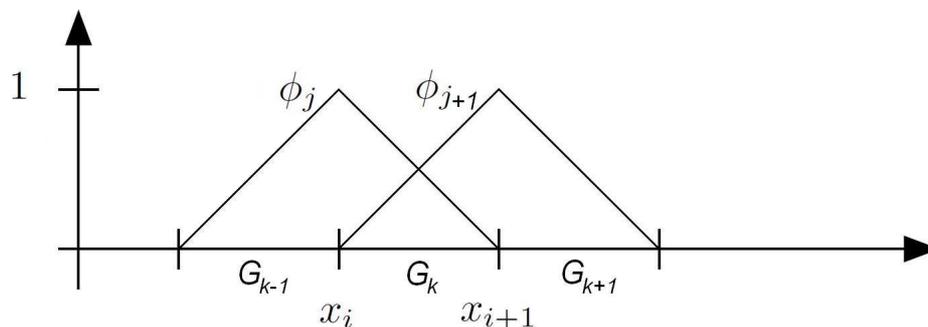
Die Finite-Element-Methode (FEM) ist ein sogenanntes Ansatzverfahren. Idee hierbei ist, die Lösung als Linearkombination von Ansatzfunktionen  $\phi_j(x)$  darzustellen [5]:

$$\hat{p}_{FE}(x) = \sum_{j=1}^n b_j \phi_j(x) \quad (6.1)$$

Das Rechengebiet  $G$  wird bei der FEM in kleinere Teilgebiete aufgeteilt, meist Dreiecke im zweidimensionalen, bzw. Tetraeder im dreidimensionalen Fall. Diese Teilgebiete  $G_k$  werden Elemente genannt. Wichtig ist, dass die Ansatzfunktionen  $\phi_j(x)$  jeweils nur auf wenigen Elementen  $G_k$  des gesamten Rechengebietes  $G$  ungleich Null sind. Diese endlichen Ansatzfunktion werden

Finite Elemente genannt [5]. Im Normalfall werden Polynome niedrigen Grades gewählt, die auf jedem der Elemente lokal definiert sind. Die einfachsten verwendeten Ansatzfunktionen sind die linearen Lagrange-Elemente, deren eindimensionale Darstellung in Abbildung 6.2 dargestellt ist.

Sind die Ansatzfunktionen gewählt, so wird der Ansatz  $\hat{p}_{FE}$  nach Gleichung



**Abbildung 6.2:** Eindimensionale lineare Ansatzfunktionen

6.1 in die PDG eingesetzt und mit Testfunktionen multipliziert. Meistens werden als Testfunktionen nochmals die Ansatzfunktionen verwendet. In diesem Fall sprechen wir von einer Galerkin-Formulierung. Anschließend wird die resultierende Gleichung über das Rechengebiet  $G$  integriert

$$\int_G PDG(\hat{p}_{FE}) \cdot \phi_j(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, n. \quad (6.2)$$

Die höchste in dieser Gleichung vorkommende Ableitung kann mittels partieller Integration noch reduziert werden. Gleichung 6.2 bezeichnen wir als schwache Form der Differentialgleichung (die ursprüngliche PDG wird als starke Formulierung bezeichnet). Die Lösung  $\hat{p}_{FE}$  wird deshalb auch als schwache Lösung bezeichnet. Unter gewissen Voraussetzungen können wir zeigen, dass eine schwache Lösung auch die starke Formulierung erfüllt und damit eine starke Lösung ist. Da einige Ableitungen der Lösung durch die partielle Integration auf die Testfunktion abgewälzt werden, muss eine schwache Lösung eine geringere Differenzierbarkeit aufweisen als eine starke Lösung. Deshalb kann z.B. bei unstetigen Randbedingungen eine schwache Lösung gefunden werden, obwohl keine starke Lösung existiert.

Wurden als Ansatz- und als Testfunktionen Polynome gewählt, kann die Integration in Gleichung 6.2 einfach durchgeführt werden. Es ergibt sich daraus ein lineares Gleichungssystem mit den Koeffizienten  $b_j$  als Unbekannte. Dieses kann mit Standardverfahren für lineare Gleichungssysteme gelöst werden. Somit sind die Koeffizienten des Lösungsansatzes 6.1 bekannt und wir können die Näherungslösung  $\hat{p}_{FE}$  berechnen.

### Finite-Elemente-Methode für die Helmholtzgleichung

Die im vorhergehenden Abschnitt kurz vorgestellte FE-Methode werden wir jetzt auf die vereinfachte Helmholtzgleichung 3.1

$$-\frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} - k^2 \hat{p} = S$$

anwenden. Zur Vereinfachung betrachten wir den eindimensionalen Fall, das Rechengebiet  $G$  ist das Intervall  $0 \leq x \leq l$ . Als erstes leiten wir die schwache Form dieser Gleichung her. Dazu multiplizieren wir die Gleichung mit einer Testfunktion  $w(x)$  und integrieren anschließend die Gleichung über das Rechengebiet. Einzige Bedingung an die Testfunktion  $w(x)$  ist, dass sie auf den Rändern des Rechengebietes verschwindet  $w(0) = w(l) = 0$ .

$$-\int_0^l w \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} dx - k^2 \int_0^l w \hat{p} dx = \int_0^l w S dx \quad (6.3)$$

Der erste Term auf der rechten Seite enthält die zweite Ableitung von  $\hat{p}$ . Durch Anwendung der partiellen Integration wird eine Ableitung auf die Testfunktion „abgewälzt“:

$$\int_0^l w \frac{\partial^2 \hat{p}}{\partial x^2} dx = \underbrace{w \frac{\partial \hat{p}}{\partial x}}_{=0} \Big|_0^l - \int_0^l \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} dx \quad (6.4)$$

Der erste Term auf der linken Seite verschwindet wegen der speziellen Wahl der Testfunktion  $w(0) = w(l) = 0$ . Die schwache Form der Helmholtzgleichung lautet daher

$$\int_0^l \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} dx - k^2 \int_0^l w \hat{p} dx = \int_0^l w S dx. \quad (6.5)$$

Auf diese Schwache Formulierung wenden wir den Galerkin-Ansatz an, setzen also den Ansatz  $\hat{p}_{FE}(x) = \sum b_j \phi_j(x)$  ein und verwenden als Testfunktionen  $w(x)$  die Ansatzfunktionen  $\phi_k(x)$ :

$$\int_0^l \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \sum_{j=1}^n b_j \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx - k^2 \int_0^l \phi_i \sum_{j=1}^n b_j \phi_j dx = \int_0^l \phi_i S dx \quad i = 1, \dots, n \quad (6.6)$$

Integration und Summation dürfen wir vertauschen:

$$\sum_{j=1}^n b_j \int_0^L \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx - \sum_{j=1}^n b_j k^2 \int_0^L \phi_i \phi_j dx = \int_0^L \phi_i S dx \quad i = 1, \dots, n \quad (6.7)$$

Die beiden Integrale können wir als Matrizen interpretieren

$$\int_0^L \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx =: M_1 \quad (6.8)$$

$$k^2 \int_0^L \phi_i \phi_j dx =: M_2 \quad (6.9)$$

und die rechte Seite von Gleichung 6.7 als Vektor

$$\int_0^L \phi_i S dx =: \vec{l} \quad (6.10)$$

Damit können wir Gleichung 6.7 kurz als Matrixgleichung

$$(M_1 - M_2) \vec{b} = \vec{l} \quad (6.11)$$

formulieren. Wir haben die Helmholtzgleichung in ein lineares Gleichungssystem für die unbekanntenen Ansatzkoeffizienten  $b_j = \vec{b}$  überführt. Dieses können wir mit Standardmethoden wie der LU-Zerlegung lösen und erhalten die FE-Lösung  $\hat{p}_{FE}(x) = \sum b_j \phi_j(x)$  als Ergebnis.

### Simulationsumgebung

Für die notwendigen dreidimensionalen Berechnungen wurde das kommerzielle Programmpaket *COMSOL Multiphysics* gewählt. Dieses Programm ver-

wendet die Finite-Element-Methode, um weitgehend beliebige Systeme partieller Differentialgleichungen zu lösen [1]. *COMSOL* verfügt über einen Präprozessor zur Definition und Vernetzung der Geometrie. Es können sowohl strukturierte als auch unstrukturierte Gitter erzeugt werden, wodurch auch komplexe Geometrien realisiert werden können. Für die Berechnung der Schallausbreitung verfügt *COMSOL* über einen eigenen Akustik-Modus. Hier ist die Helmholtzgleichung 2.20 und verschiedene spezielle akustische Randbedingungen bereits vorimplementiert. Wahlweise kann eine Eigenfrequenzanalyse oder eine Schallfeldberechnung für eine bestimmte Frequenz durchgeführt werden.

### 6.2.2 Akustische Netzwerkmethoden

Wie in Kapitel 2.2.1 dargestellt, ist bei Frequenzen unterhalb der Cut-Off-Frequenz die Schallausbreitung in Rohren eindimensional und wir sprechen von ebenen Wellen. Werden an Stellen, an denen sich die Geometrie stark ändert, wie zum Beispiel an einem Flächensprung, höhere Moden erzeugt, werden diese exponentiell gedämpft. Brennkammersysteme weisen oft eine Rohr-ähnliche Geometrie auf und die Wellenlängen des erzeugten Verbrennungslärms sind groß im Vergleich mit dem Brennkammerdurchmesser. Deshalb kann die Schallausbreitung in diesen Systemen in guter Näherung als eindimensional angenommen werden. Die Akustik kann hier mit so genannten Netzwerkmodellen modelliert werden. Netzwerkmethoden besitzen zwei wesentliche Vorteile: Zum einen ist der rechentechnische Aufwand gering, zum anderen ist die Implementierung einer neuen Geometrie einfach und schnell. Das macht diese Methode auch für einen Einsatz in der industriellen Entwicklung attraktiv. Ein weiterer Vorteil dieser Methode ist, dass Verluste akustischer Energie leicht berücksichtigt werden können. Bei der FE-Methode ist die Berücksichtigung von Verlusten noch in der Entwicklung, siehe z.B. [86]. Details zu der Theorie akustischer Netzwerkmethoden finden sich zum Beispiel in [21].

Für die Modellierung eines Verbrennungssystem mittels Netzwerkmethode wird zuerst das System in seine akustischen Einzelkomponenten aufgeteilt.

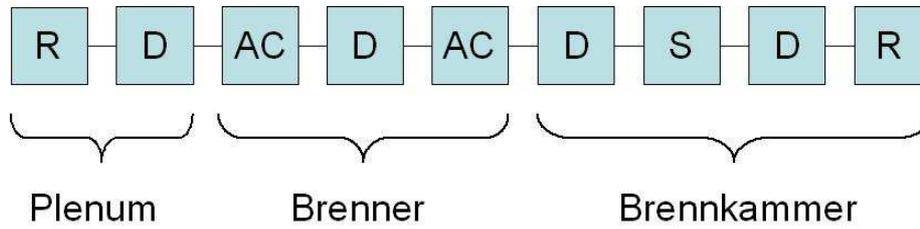
Die wichtigsten Komponenten sind hierbei Rohrstücke, Flächensprünge, die Flamme und Randbedingungen mit einem bestimmten Reflexionsfaktor. Diese Einzelkomponenten werden bei der Netzwerkmodellierung Elemente genannt. Zur Verbindung der einzelnen Elemente führen wir virtuelle Knoten ein. Nehmen wir an, dass in jedem Element die Akustik rein linear und eindimensional ist, dann können wir jedes Element durch eine lineare Transformation  $T$ , also eine Matrix, darstellen. Diese Transformation verbindet den Schalldruck und die Schnelle auf beiden Seiten der Komponente miteinander. Liegt ein bestimmtes Element zwischen den Knoten Nummer  $i$  und Nummer  $i+1$ , dann hängen Schalldruck und Schnelle an den zwei Knoten  $i$  und  $i+1$  über die komplexe  $(2 \times 2)$ -Matrix  $T_{ij}$  voneinander ab:

$$\begin{pmatrix} \frac{p'}{\rho c} \\ u' \end{pmatrix}_{i+1} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{p'}{\rho c} \\ u' \end{pmatrix}_i \quad (6.12)$$

Verbinden wir die Transformationsmatrizen aller Elemente des Gesamtsystems miteinander, so erhalten wir ein lineares Gleichungssystem mit den Werten von Schalldruck und Schnelle an den Knoten als Unbekannte. Dieses Gleichungssystem beschreibt die Akustik des Gesamtsystems. In Abbildung 6.3 ist ein Netzwerkmodell eines Verbrennungssystems zu sehen. Es besteht aus einem Plenum, einem Brenner und einer Brennkammer. Diese drei Hauptkomponenten werden als Rohrstück („Duct“  $D$ ) modelliert, wofür analytische Modelle existieren. Verändern sich wichtige Parameter wie Mach-Zahl, Querschnittsfläche oder Dichte, wird ein spezielles Element, der allgemeine Flächensprung („Area Change“  $AC$ ) verwendet. Die bestimmenden Gleichungen werden aus der linearisierten Bernoulli- und Kontinuitätsgleichung gewonnen. Am Anfange und Ende wird das System von reflektierenden Randbedingungen („Reflecting Exit“  $R$ ) begrenzt. Hier wird eine bekannte Impedanz angenommen. Angeregt wird das System durch ein Quellelement („Source“  $S$ ), das die Lärmerzeugung durch die Flamme wiedergibt.

### Implementierung des Quellelements

In Kapitel 2.3.1 hatten wir die Rankine-Hugoniot-Bedingungen hergeleitet, die Schalldruck und -schnelle vor (Index „i,“) und hinter (Index „i+1,“) einer



**Abbildung 6.3:** Einfaches Netzwerkmodell eines Verbrennungssystems

Flamme in Beziehung setzen. Als Ergebnis erhielten wir die vereinfachten Beziehungen:

$$p'_2 = p'_1$$

$$u'_2 = u'_1 + \left( \frac{\gamma - 1}{\rho c^2} \right) q'_F$$

Diese werden wir dazu benutzen, den Lärmquellterm der Flamme in das akustische Netzwerkmodell einzubringen. Dazu werden wir aus den Rankine-Hugoniot-Bedingungen zusammen mit dem Lärmmodell ein Netzwerkelement ableiten. Das Spektrum von  $Q'$  können wir aus dem modellierten Wärmefreisetzungsspektrum berechnen. Das Energiespektrum  $QQ(\omega)$  der Wärmefreisetzungsschwankungen ist gegeben durch

$$QQ(\omega) = \int_{V_s} \phi_q^2(\omega) V_{koh} d\vec{x}. \quad (6.13)$$

Wir suchen das Frequenzspektrum:

$$\phi_q(\omega) = \frac{\kappa E_q(\kappa)}{\omega} \Rightarrow \phi_q(f) = \frac{2\pi\kappa E_q(\kappa)}{2\pi f} \quad (6.14)$$

Wir erhalten:

$$QQ(f) = \int_{V_s} \phi_q^2(f) V_{koh} d\vec{x} = \int_{V_s} \left( \frac{2\pi\kappa E_q(\kappa)}{2\pi f} \right)^2 V_{koh} d\vec{x} \quad (6.15)$$

Der Quellterm in den Rankine-Hugoniot-Bedingungen lautet demnach

$$q'_F(f) = \frac{\sqrt{QQ}}{A} = \frac{1}{A} \sqrt{\int_{V_s} (2\pi)^3 \left( \frac{\kappa E_q(\kappa)}{f} \right)^2 V_{koh} dx} \quad [W/m^2 Hz]. \quad (6.16)$$

Das Netzwerkelement für den Flammenlärm als Schallquelle ergibt sich zu

$$\begin{pmatrix} p' \\ u' \end{pmatrix}_{i+1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p' \\ u' \end{pmatrix}_i + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\gamma-1}{\rho_i c_i^2} q'_F \end{pmatrix}. \quad (6.17)$$

### Dämpfung

Die Dämpfung kann in einem Netzwerkmodell mittels eines Verlustfaktors  $\zeta$  berücksichtigt werden [24]. Dieser ist analog dem Druckverlust durch Reibung in einer Rohrströmung [7] definiert:

$$\Delta p_t = \zeta \rho \frac{v^2}{2} \quad (6.18)$$

Hier bezeichnet  $v$  die Strömungsgeschwindigkeit in dem Rohr. Wichtig ist, dass nicht der normale Druckverlust, sondern der Totaldruckverlust  $p_t = \frac{\rho}{2} v^2 + p_0$ , bestehend aus Staudruck und statischem Druck, den Verlust über das Element widerspiegelt. Der Verlustkoeffizient  $\zeta$  kann somit aus dem Druckverlust über dem Element berechnet werden:

$$\zeta = \frac{2\Delta p}{\rho v^2} \quad (6.19)$$

Das zugehörige Verlustelement für das Netzwerkmodell findet sich zum Beispiel in [21]:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & \left[ 1 - \zeta - \left( \frac{A_1}{A_2} \right)^2 \right] Ma_1 - i \frac{\omega}{c} l_{eff} \\ -i \frac{\omega}{c} l_{red} - Ma_2 & \frac{A_1}{A_2} \end{pmatrix} \quad (6.20)$$

Es benötigt neben den Machzahlen  $Ma_1$  und  $Ma_2$  stromauf und stromab des Flächensprungs auch noch zwei Längen, die reduzierte Länge  $l_{red}$  und die effektive Länge  $l_{eff}$ , durch die kapazitive Effekte des akustischen Elementes berücksichtigt werden. Der Druckverlust kann experimentell ermittelt werden. Für die Berechnungen in den folgenden Kapiteln wurde er allerdings aus den CFD-Rechnung entnommen.

## 6.3 Simulation von turbulentem Verbrennungslärm

Nach Berechnung des Quellspektrums steht für jede Frequenz die Amplitude der Quelle zur Verfügung. Informationen über die Phase erhalten wir nicht. Hier ergeben sich zwei Fragen. Erstens, ob turbulenter Flammenlärm überhaupt mit einer konstanten Phase darstellbar ist. Und zweitens, ob bei konstanter Phase die Phasenlage für die Berechnung des Schallfeldes von Bedeutung ist.

### 6.3.1 Berechnung mit konstanter Phase

Turbulenter Verbrennungslärm besitzt aufgrund seiner Ursache, der turbulenten Strömung, einen stochastischen Charakter. Analysieren wir turbulenten Lärm mittels eines Bandpassfilters bei einer bestimmten Frequenz  $f_0$ , so erhalten wir für den jeweiligen Messwert keine konstante Phase, sondern zufällige Phasensprünge.

Durch eine Fourier-Transformation wird das Zeitsignal nach den darin enthaltenen Frequenzen analysiert. Dabei wird jeder Frequenz eine Amplitude  $B(f)$  und Phase  $\varphi(f)$  zugeordnet. Aus diesen Daten kann das Zeitsignal wieder eindeutig rekonstruiert werden. Die Rekonstruktion ist eine Überlagerung harmonischer Schwingungen aller enthaltenen Frequenzen, jeweils mit Amplitude  $B(f)$  und Phase  $\varphi(f)$ .

Turbulenter Lärm zeigt für eine bestimmten Frequenz  $f_0$ , die mittels Bandpassfilterung gewonnen wird, keine konstante Phase, wie sie bei der Rekonstruktion der Zeitreihe mittels inverser Fourier-Transformation, verwendet wird. Diese Phasensprünge ergeben sich aus den grundlegenden Eigenschaft von Turbulenz, Wirbelzerfall/Wirbelstreckung. Verursacht ein Wirbel Lärm einer bestimmten Frequenz  $f_0$ , so verändert sich diese Frequenz durch Wirbelstreckung nach kurzer Zeit. Dafür erscheint sofort ein neuer Wirbel mit Frequenz  $f_0$ , was zu einem Sprung in der Phase führt. Durch diesen Sprung kommen in das Signal weitere Frequenzen hinein. Somit kann eine bei der

Frequenz  $f_0$  bandpassgefilterte Zeitreihe nicht mit der Amplitude  $A(f_0)$  und Phase  $\varphi(f_0)$  des Frequenzspektrums bei der Frequenz  $f_0$  gleichgesetzt werden. Ein solches Frequenzspektrum wird von der Fourier-Transformation geliefert. Diese analysiert ein Zeitsignal nach den darin enthaltenen harmonischen Schwingungen. Jedes Zeitsignal kann unter gewissen Bedingungen Fourier-transformiert werden. Ergebnis ist ein komplexes Spektrum, also Amplituden- und Phaseninformation für jede Frequenz. Da die Zeitreihe auf harmonische Schwingungen analysiert wurde, ist für jede Frequenz die berechnete Phase konstant. Das gilt auch, wenn die untersuchte Zeitreihe das von turbulentem Lärm emittierte Schalldrucksignal ist. Umgekehrt kann aus dem Lärmspektrum mit den für jede Frequenz konstanten Phasenwinkeln wieder das originale Schalldrucksignal reproduziert werden. Somit ist unser Ansatz mit Verwendung einer konstanten Phase gerechtfertigt.

### 6.3.2 Einfluss der Phasenlage

Nehmen wir an, das System wird für eine Frequenz  $f_0$  mit turbulentem Lärm der Amplitude  $S(\kappa)$  angeregt. Die Frage ist, ob dabei die Phase der Anregung eine Rolle spielt. Sei  $\hat{p}_1$  eine Lösung der Helmholtzgleichung 3.1 bei der Wellenzahl  $\kappa$  unter einer Anregung  $S(\kappa)$

$$-\Delta \hat{p} - \kappa^2 \hat{p} = S(\kappa) . \quad (6.21)$$

Wir suchen die Lösung  $\hat{p}_2$  der Gleichung

$$-\Delta \hat{p}_2 - \kappa^2 \hat{p}_2 = S(\kappa) e^{i\varphi}, \quad (6.22)$$

bei der die Anregung  $S(\kappa) e^{i\varphi}$  um den Winkel  $\varphi$  phasenverschoben zur ursprünglichen Anregung ist. Setzen wir für  $S(\kappa)$  in Gleichung 6.22 die rechte Seite von Gleichung 6.21 ein, erhalten wir

$$-\Delta \hat{p}_2 - \kappa^2 \hat{p}_2 = (-\Delta \hat{p}_1 - \kappa^2 \hat{p}_1) e^{i\varphi} \quad (6.23)$$

$$-\Delta \hat{p}_2 - \kappa^2 \hat{p}_2 = -\Delta \hat{p}_1 e^{i\varphi} - \kappa^2 \hat{p}_1 e^{i\varphi} . \quad (6.24)$$

Es folgt also:

$$\hat{p}_2 = \tilde{p}_1 e^{i\varphi} \quad (6.25)$$

Beide Lösungen sind um den Winkel  $\varphi$  phasenverschoben, ansonsten aber gleichwertig. Somit ist die Phasenlage der Quelle nicht von Bedeutung.

### 6.3.3 Lärmberechnung im Frequenzbereich

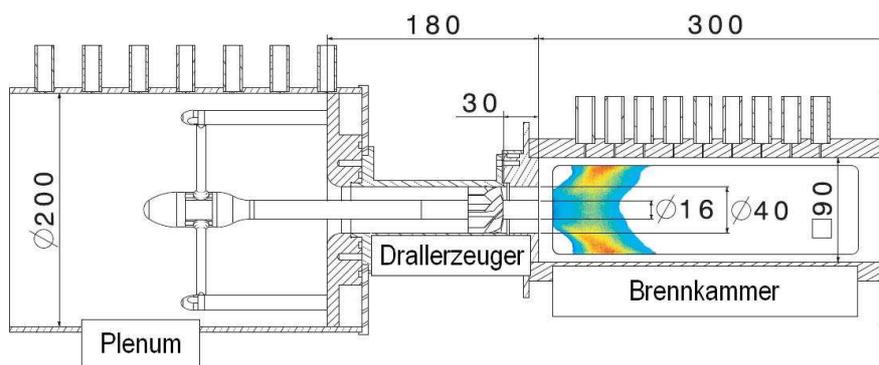
Bei beiden vorgestellten Berechnungsmethoden, der Netzwerkmethod und der direkten Lösung der Helmholtzgleichung mittels FE-Methode, wird das Schallfeld für jede Frequenz separat berechnet. Im vorangegangenen Abschnitt haben wir gezeigt, dass wir hierzu die mit dem Lärmmodell berechnete Quellamplitude für die jeweilige Frequenz bei beliebiger Phase verwenden können. Allerdings können bei diesem Vorgehen die einzelnen Moden nicht miteinander agieren. Da unsere Modellierung des Schallfeldes komplett linear ist, sind solche Interaktionen a priori nicht möglich. Somit ist die hier vorgeschlagene Berechnungsmethode anwendbar.



---

## 7 Berechnung BRS-Brenner

In diesem Kapitel werden wir das in Kapitel 5 vorgestellte Lärmmodell verwenden, um die Lärmemission einer eingeschlossenen Flamme zu berechnen. Der BRS-Brenner (Beschaufelter-Ring-Spalt), ist ein Drall-stabilisierter Vormischbrenner und wurde im Rahmen des KW21/GV6 Projektes (Forschungsinitiative Kraftwerke des 21. Jahrhunderts, Gemeinschaftsprojekt der Länder Bayern und Baden-Württemberg) am Lehrstuhl für Thermodynamik der TU München entwickelt [38]. Eine Zeichnung des BRS-Brennerteststandes ist in Abbildung 7.1 gegeben. Das Methan/Luftgemisch tritt auf der linken Seite in das Plenum ein. Danach fließt es durch den axialen Drallerzeuger in die Brennkammer. Diese hat einen quadratischen Querschnitt von  $90 \times 90$  mm und eine Länge von 300 mm. Um akustische Reflexionen gering zu halten, wird die Brennkammer durch ein Lochblech mit  $18.84 \text{ cm}^2$  Öffnungsfläche abgeschlossen. Die theoretische Drallzahl des Brenners beträgt 0.74.



**Abbildung 7.1:** BRS-Brenner

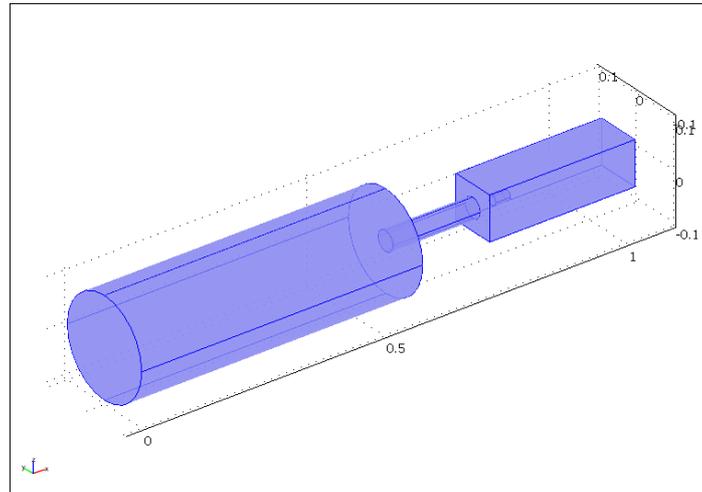
## 7.1 Akustische Modellierung

Der einfache Aufbau des BRS-Teststandes ermöglicht eine einfache Modellierung. In Abbildung 7.2 ist das 3D-FE-Modell dargestellt, in Abbildung 7.3 das zugehörige Netzwerkmodell. Das Netzwerkmodell besteht aus neun Elementen: Am Anfang und Ende steht jeweils ein Rand-Element  $R$  mit vorgegebenen Reflexionsfaktor (siehe nächster Abschnitt). Das Plenum, das Verbindungsrohr und die Brennkammer werden durch Rohr-Elemente  $D$  („Duct“) dargestellt. Als Verbindungselement zwischen den Rohr-Elementen wird der verlustbehaftete Flächensprung  $AC$  („Area Change“) verwendet. Die Flamme als Lärmquelle wird mit dem Quell-Element  $S$  („Source“) nach Gleichung 6.17 eingebunden.

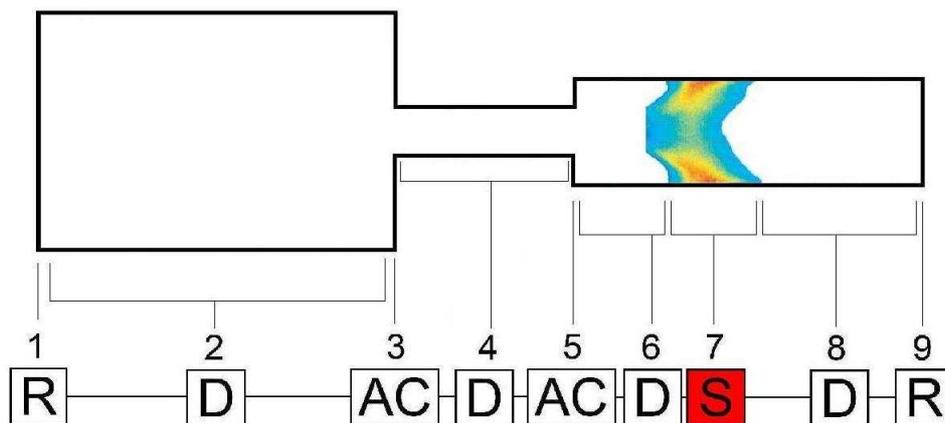
Die Stoffdaten für die Netzwerkberechnung wurden aus der CFD-Simulation entnommen. Danach hat die Luft die durch Plenum und Brennerrohr in die Brennkammer strömt eine Temperatur von  $T = 293K$  und eine Dichte von  $\rho = 1.20kg/m^3$ ). Nach der Flamme herrscht in der Brennkammer eine Durchschnittstemperatur von  $T = 1625K$  und eine Dichte  $\rho = 0.259$ . Der erste Flächensprung vom Plenum in das Brennerrohr besitzt einen Druckverlustbeiwert von  $\zeta = 0.8$ . Für die Bestimmung des Verlustbeiwertes über den Flächensprung vom Brennerrohr in die Brennkammer wurde der erste Referenzpunkt vor den Drallerzeuger und der zweite hinter den Flächensprung gesetzt. Dadurch wird der Druckverlust über den Drallerzeuger in diesem Wert mitberücksichtigt und es ergibt sich ein Wert von  $\zeta = 1.7$ .

### 7.1.1 Randbedingungen

Die Wände des kompletten Teststandes können als akustisch hart angenommen werden. Die Brennkammer des BRS-Brenners wird am Ende von einer Platte mit sechs Löchern (Durchmesser 2cm) abgeschlossen. Durch diese Löcher tritt das heiße Abgas aus. Die Interaktion durchströmter Löcher oder durchströmter Lochbleche mit Schallwellen ist äußerst kompliziert und stark von der Strömungsgeschwindigkeit abhängig (siehe hierzu z.B. das Buch von



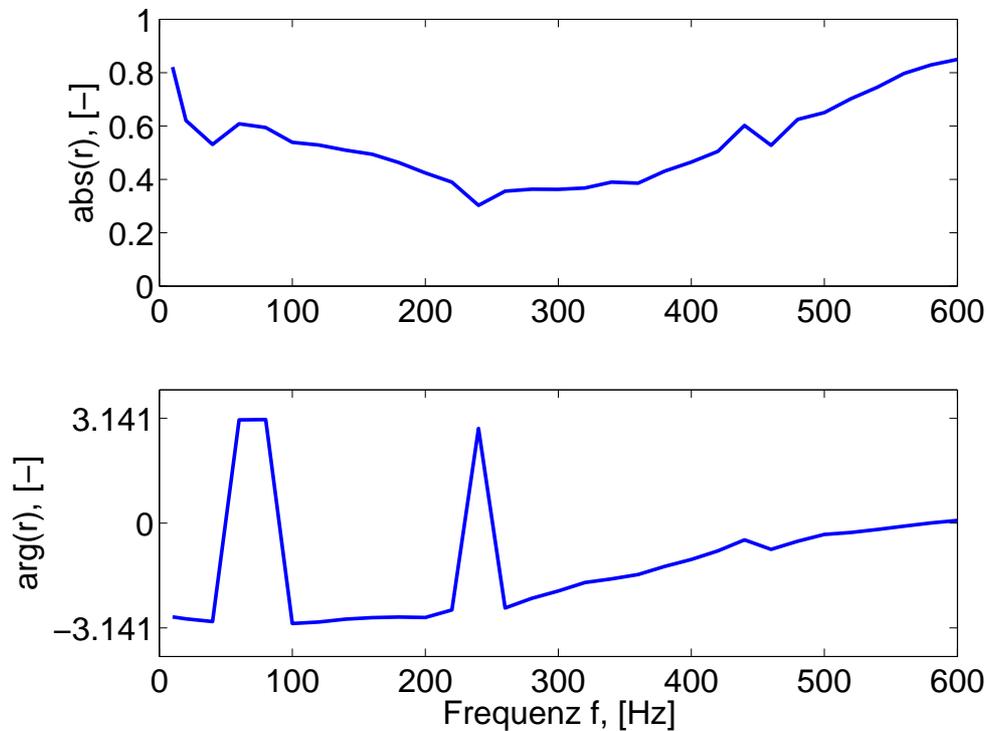
**Abbildung 7.2:** Dreidimensionales FE-Modell des BRS-Teststandes



**Abbildung 7.3:** Netzwerkmodell des BRS-Teststandes

Howe [30]). Daher ist eine Modellierung des Abschlussbleches im FE-Modell oder auch mit dem Netzwerkmodell kaum möglich. Aus Messungen am Teststand ergibt sich der in Abbildung (7.4) gezeigte Reflexionsfaktor. Für sehr niedrige Frequenzen geht der Betrag des Reflexionsfaktors gegen eins und die Phase gegen  $-\pi$ . Mit steigender Frequenz sinkt der Betrag bis auf Werte von 0.3 bei  $f = 240\text{Hz}$  um danach wieder anzusteigen. Die Phase sinkt über den gesamten Frequenzbereich und erreicht bei  $350\text{Hz}$  den Wert Null. Für die Berechnungen wurde dieser gemessene Reflexionsfaktor als Randbedingung am

Austritt verwendet. Stromauf wird wie bei allen anderen Wänden eine akustisch harte Randbedingung angenommen.



**Abbildung 7.4:** Amplitude und Phase des Reflexionsfaktors am Abgasaustritt des BRS-Versuchsstandes

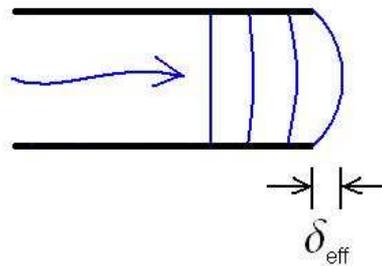
### 7.1.2 Netzwerkmodell

Die „akustisch wirksame“ Länge eines Rohres ist nicht gleich seiner tatsächlichen Länge. Die Schallwelle wird nämlich nicht direkt an der Rohrendfläche reflektiert, sondern die Welle tritt ein Stück weit aus dem Rohr aus, bevor sie zurückgeworfen wird, siehe Abbildung 7.5. Diese Endkorrektur kann theoretisch bestimmt werden und beträgt für ein Rohr mit Radius  $r_0$  ohne Flansch [48]

$$\delta_{eff} = 0.6r_0, \quad (7.1)$$

und für ein Rohrende mit unendlich großem Flansch

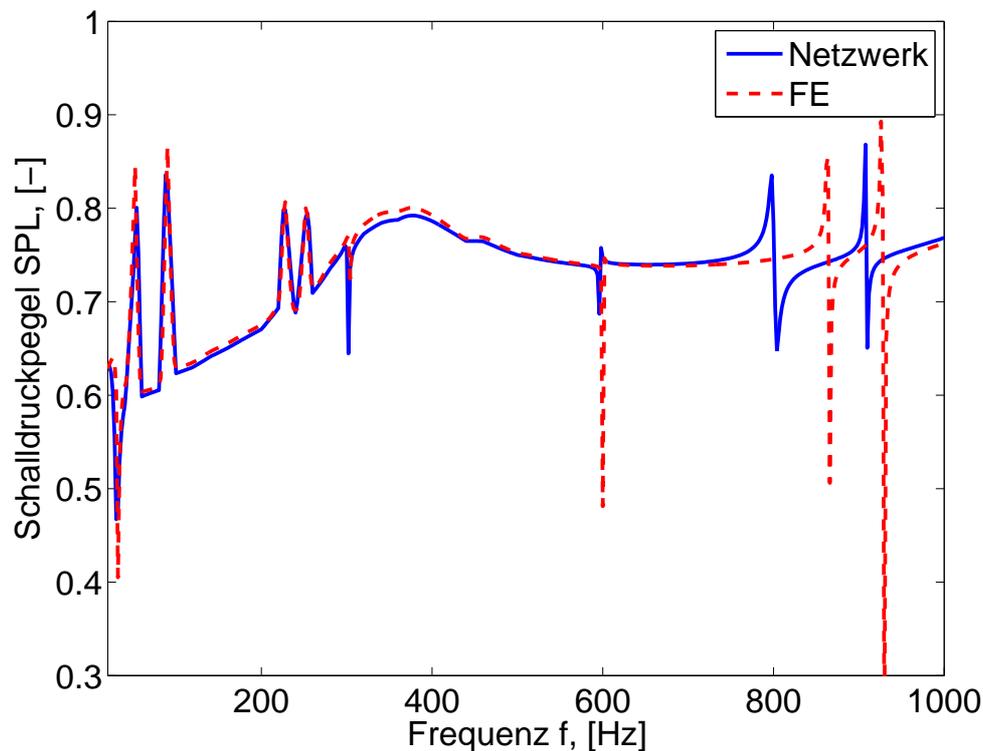
$$\delta_{eff} = 0.85r_0. \quad (7.2)$$



**Abbildung 7.5:** Endkorrektur  $\delta_{eff}$  am Rohrende

Bei dem BRS-Brenner muss für das Brennerrohr, das Plenum und Brennkammer miteinander verbindet, eine solche effektive Länge berücksichtigt werden. Da dieses im BRS-Teststand zwar keinen unendlich großen Flansch besitzt, jedoch groß ist im Vergleich mit dem Rohrradius werden wir den Wert  $\delta_{eff} = 0.85r_0$  verwenden. Dieser muss auf beiden Seiten des Rohres addiert werden. Für das Plenum können wir die tatsächliche Länge verwenden, da die Wände des Plenums schallhart sind und die Flächenkontraktion beim Übergang zum Brennerrohr groß ist (Flächenverhältnis 25 : 1). Auch der Übergang von der Brennkammer zum Brennerrohr besitzt ein großes Flächenverhältnis von 6,5 : 1, so dass auf dieser Brennkammerseite der störende Einfluss des Brennerrohres ebenfalls zu vernachlässigen ist. Auf der anderen Brennkammerseite wird die effektive Länge durch den gemessenen Reflexionsfaktor implizit berücksichtigt.

Im Gegensatz zum Netzwerkmodell müssen bei der FE-Berechnung keinerlei Längenkorrekturen durchgeführt werden, da die beschriebenen Effekte am Rohrende in der Simulation voll berücksichtigt werden. Hinzu kommt, dass hier das akustische Feld komplett dreidimensional berechnet wird, und daher auch höhere Moden, die an den Flächensprüngen teilweise angeregt werden, berücksichtigt werden. Daher können wir die FE-Simulation als exakte Vergleichslösung ansehen. Um das Netzwerkmodell zu validieren, vergleichen wir die Ergebnisse von FE- und Netzwerksimulation (siehe Abbildung 7.6). Die Übereinstimmung beider Ergebnisse ist bis 700 Hz sehr gut. Die beiden Resonanzen, die die FE-Simulation bei 860 Hz und 925 Hz zeigt, sind im Netzwerkergebnis deutlich nach unten verschoben. Da der

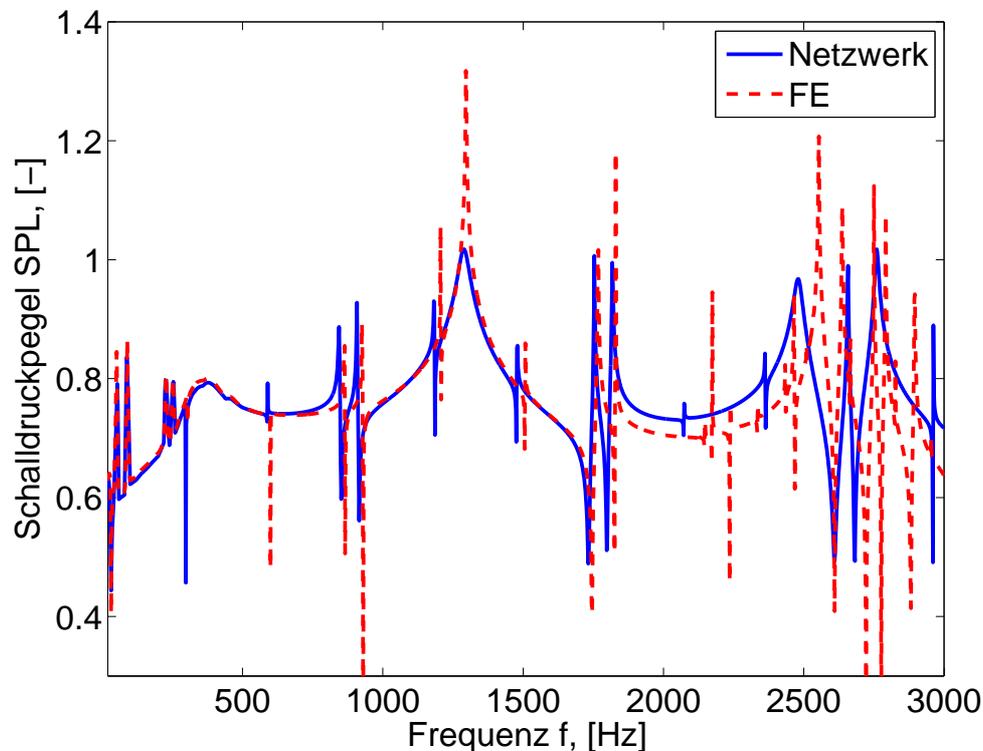


**Abbildung 7.6:** Spektren des BRS-Brenners bei konstanter Anregung. Die Längen im Netzwerkmodell wurden aus der Theorie abgeleitet

Hauptanteil des Lärms des BRS-Brenners unterhalb von 800 Hz liegt, sollte diese Abweichung keine gravierenden Auswirkungen haben. Trotzdem werden wir versuchen, das Netzwerkmodell zu verbessern. Da die Rohrenden des mittleren Rohres nicht wie im Idealfall ins Freifeld münden, sondern in das Plenum bzw. die Brennkammer, sollten die realen Werte der Endkorrektur von den theoretischen Werten nach den Gleichungen 7.2 bzw. 7.1 abweichen.

Durch eine empirische Untersuchung erhalten wir für das mittlere Rohr eine Endkorrektur von  $\delta_{eff} = 0.375 \cdot r$ , was deutlich unter den beiden theoretischen Werten für das Rohr mit unendlich großem Flächensprung liegt. Auch für die Brennkammer und das Plenum erhalten wir eine, wenn auch geringe Endkorrektur von  $0.08 \cdot r$  (Plenum) und  $0.04 \cdot r$  (Brennkammer). Verwenden wir diese Korrekturen im Netzwerkmodell, so erhalten wir ein Spektrum, das auch bei hohen Frequenzen gut mit dem Referenzspektrum übereinstimmt (Abbildung 7.7). Bis fast 2000 Hz werden die Eigenfrequenzen

sehr gut getroffen und auch die Amplitude korrekt wiedergegeben.



**Abbildung 7.7:** Vergleich von FE-Simulation und empirisch angepasstem Netzwerkmodell

## 7.2 Lärmberechnung

Mit dem in Kapitel 5 vorgestellten Lärmmodell wird in diesem Abschnitt Schallspektrum des BRS-Brenners berechnet. Als Datenbasis hierfür werden die Ergebnisse einer CFD-Simulation genutzt.

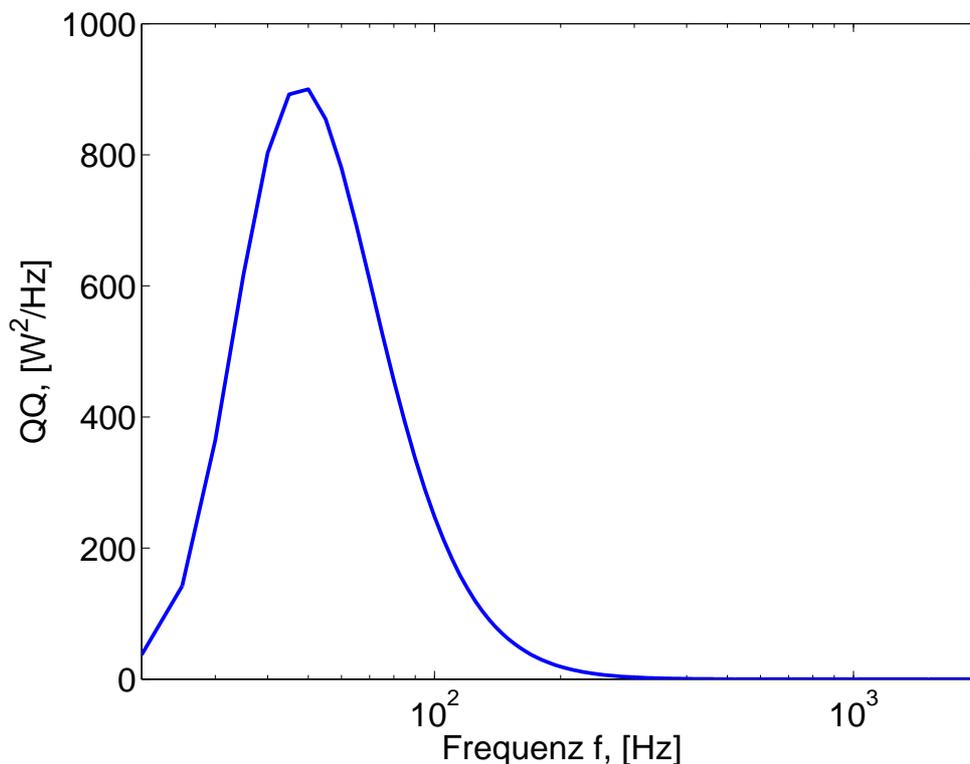
### 7.2.1 CFD-Simulation

Die CFD-Daten des BRS-Brenners wurden freundlicherweise von Dipl.-Ing. Thomas Komarek zur Verfügung gestellt. Die Berechnungen wurden mit dem

Softwarepaket ANSYS-CFX durchgeführt. Es handelt sich um eine RANS-Simulation. Die Turbulenzmodellierung erfolgte mit dem Standard  $k - \varepsilon$ -Modell, für die Verbrennung wurde das TFC-Modell von Zimont [92] verwendet. Da allerdings das Standardmodell nur schlechte Übereinstimmungen mit experimentellen Daten zeigte, wurde das TFC-Modell derart erweitert, dass auch Wärmeverluste berücksichtigt werden [38].

### 7.2.2 Quellspektrum

Aufgrund der CFD-Ergebnisse liefert das Lärmmodell 6.15 das in Abbildung 7.8 gezeigte Spektrum. Das Maximum liegt sehr tieffrequent bei ca. 50 Hz. Zu höheren Frequenzen fällt das Spektrum stark ab, so dass es bereits bei ca. 300 Hz nahe Null ist. Für eine Flamme dieser Leistung und Größe ist allerdings Lärm mit einer deutlich höher liegenden Peakfrequenz zu erwarten. Die



**Abbildung 7.8:** Quellspektrum des BRS-Brenners bei 50 kW,  $\lambda = 1.3$

Ursache des zu tiefen Spektrums ist in der verwendeten charakteristischen

Zeit  $\tau_{char}$  zu suchen. Das Verbrennungsmodell, das den CFD-Rechnungen zu Grunde liegt (Zimont und Polifke [91]) verwendet als charakteristisches Flammenzeitmaß das Verhältnis

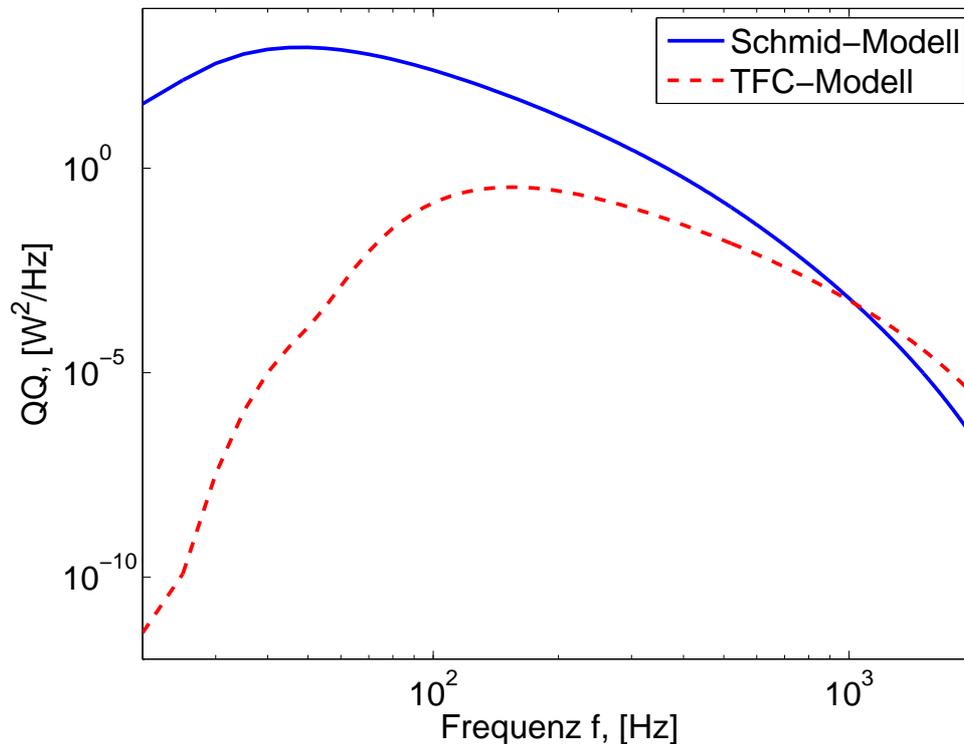
$$\tau_{char} = \frac{\delta_l}{s_l}, \quad (7.3)$$

aus den laminaren Flammengrößen. Für die Berechnung des Quellspektrums 7.8 aus den CFD-Daten wurde dagegen ein auf den turbulenten Größen  $\tau_{char} = \frac{1}{C_D} \frac{\delta_t}{s_t}$  basierendes Zeitmaß verwendet. Die Wahl eines charakteristischen Verbrennungszeitmaßes  $\tau_{char}$  ist oftmals der kritische Punkt in einem Verbrennungsmodell. Häufig wird angenommen, dass die integralen Wirbel die Flammenfaltung kontrollieren und somit das integrale Zeitmaß  $\tau = \varepsilon/k$  eine geeignete Wahl ist [56]. Andere Modelle gehen von der Vorstellung aus, dass die kleinsten Wirbel die Verbrennung kontrollieren und verwenden das Kolmogorov-Zeitmaß  $\tau_\eta$ , z.B. CPB-Modell [12] oder CH1-Modell [13]. Grundsätzlich gibt es aber keinen Grund, warum nur die größten oder kleinsten Wirbel die turbulente Flammenstruktur beeinflussen sollten. Sehr viel wahrscheinlicher ist, dass viele Wirbelgrößen daran beteiligt sind. Außerdem beeinflussen neben der Strömung auch die Flammengrößen wie die Brenngeschwindigkeit  $s_l$  die Interaktion zwischen Flamme und Strömung. Die Wahl des Zeitmaßes in den Verbrennungsmodellen ist somit in gewisser Weise willkürlich und stellt das schwächste Glied in den Verbrennungsmodellen dar [56]. Ein genauerer Ansatz wäre z.B. die Herleitung einer Bilanzgleichung für die charakteristische Zeit, wie es Mantel und Borghi [44] vorgeschlagen haben.

Um mit dem Verbrennungsmodell konsistent zu bleiben, wird das Quellspektrum noch einmal mit dem Zeitmaß 7.3 des CFD-Verbrennungsmodells berechnet. Ebenfalls konsistent wird die Damköhler-Zahl berechnet

$$Da = \frac{L \cdot s_l^2}{u' \cdot a} = \frac{k \cdot s_l^2}{\varepsilon \cdot a}, \quad (7.4)$$

wodurch sich das Spektrum in Abbildung 7.9 ergibt. Das Maximum wird jetzt bei höheren Frequenzen erreicht, ca. bei 150 Hz. Der größte Unterschied ergibt sich in der Amplitude, die fast im gesamten Bereich um einige Zehnerpotenzen niedriger liegt. Das Zeitmaß  $\tau_{char}$  geht nur in die Frequenz-Wellenzahlabbildung ein und bestimmt somit die Wellenzahl  $\kappa$ , wodurch sich



**Abbildung 7.9:** Quellspektrum berechnet mittels Schmid- bzw. TFC-Modell

direkt die Verschiebung der Peakfrequenz erklärt. Und da  $\kappa$  in den Vorfaktor eingeht, wird die Änderung in der Amplitude plausibel. Direkte Vergleichsdaten (Messwerte) existieren vom Quellspektrum nicht. Schalldruckmessungen des erzeugten Lärms allerdings werden wir im nächsten Abschnitt mit den Rechenergebnissen vergleichen.

Bei einer höheren thermischen Leistung erwarten wir eine höhere emittierte akustische Leistung. In Abbildung 7.10 ist ein Vergleich der Quellspektren, für eine thermische Leistung von 50 und 70 kW gezeigt (beide mit dem TFC-Modell berechnet). Wie erwartet ist das 70kW-Spektrum höher, die Peakfrequenz aber ist unverändert. Dieses Verhalten wurde in Experimenten schon früher gefunden: In Abbildung 7.11 sind die Messpektren eines Drallbrenners (TD1-Brenner, [22]) für verschieden Leistungen gezeigt. Turbulenz und Brennregime sind vergleichbar mit dem des BRS-Brenners. Deutlich zeigt sich die Erhöhung der Amplitude mit steigender Leistung. Die Peakfrequenz allerdings bleibt konstant.

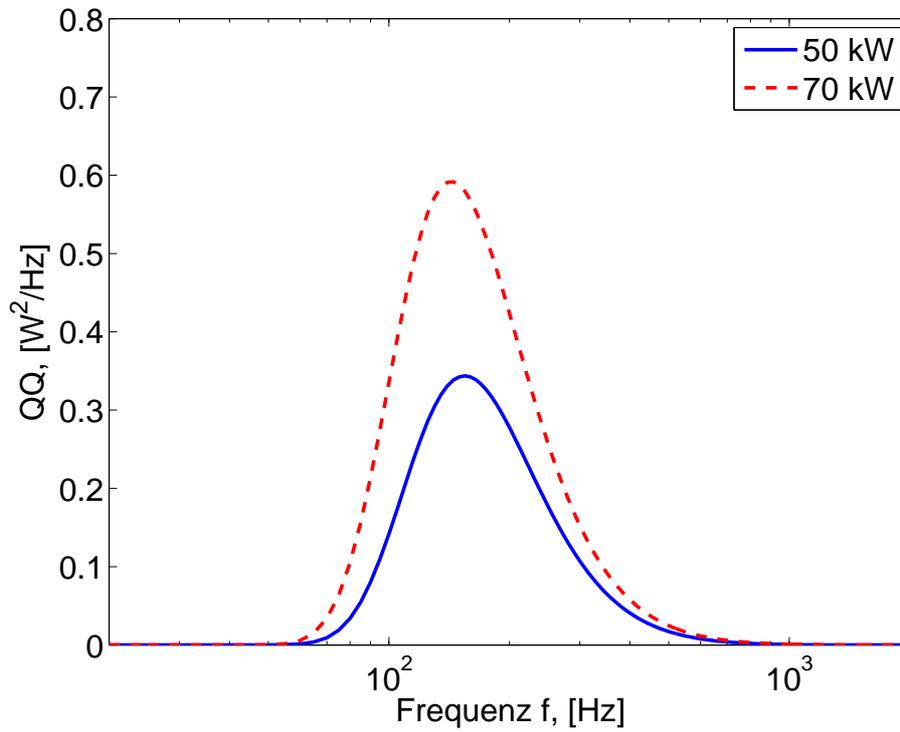


Abbildung 7.10: Vergleich Quellspektrum für zwei verschiedene Leistungen

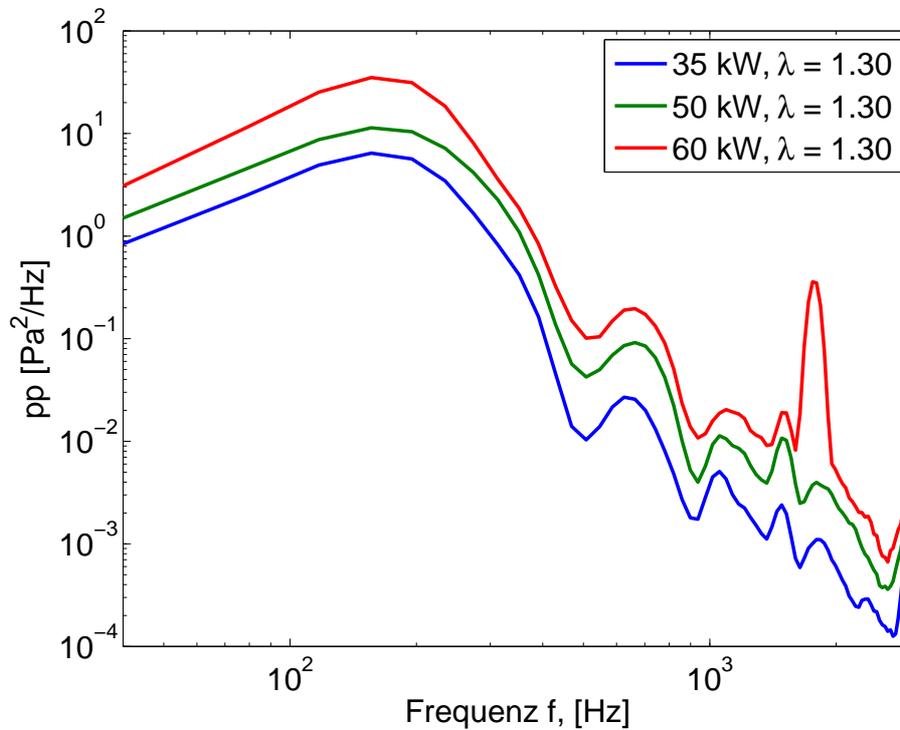
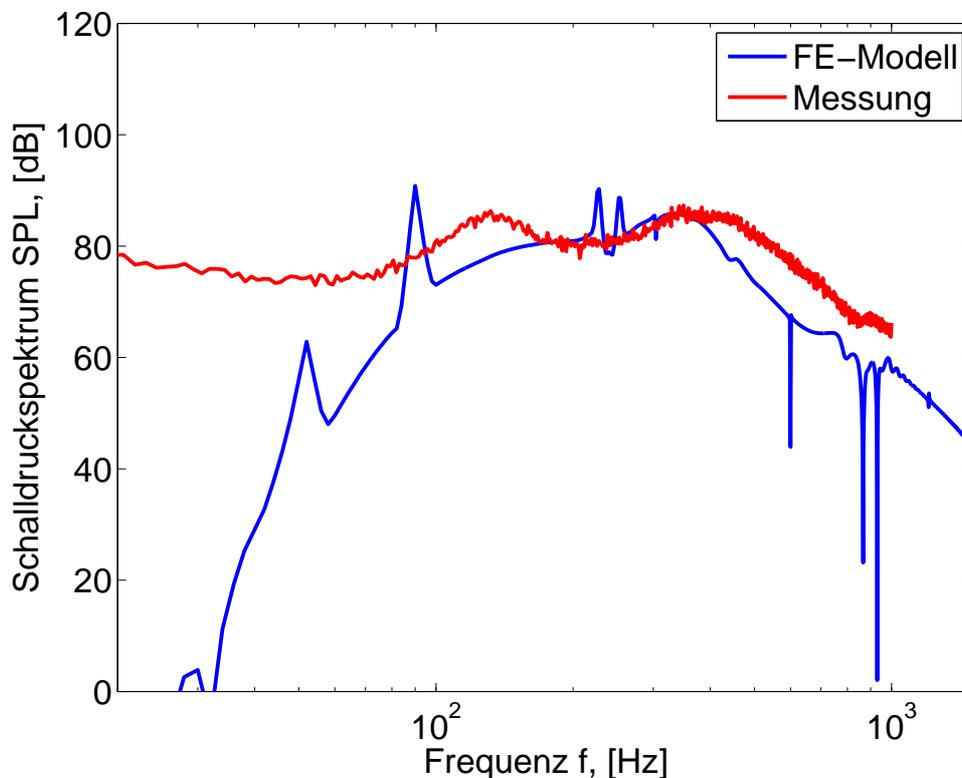


Abbildung 7.11: Schallspektrum des TD1-Drallbrenners im Einzelprüfstand

### 7.2.3 Schalldruckberechnung FE-Modell

Wir nehmen das im vorangegangenen Abschnitt für den BRS-Brenner berechnete Quellspektrum und bestimmen mit der in Kapitel 6.1 vorgestellten Methode das Lärmspektrum mittels der FE-Methode. Die Schallausbreitung vom Brenner in die Umgebung müssen wir hier nicht berechnen, da die zugehörigen Messungen in der Brennkammer gemacht wurden. In Abbildung 7.12 ist das so berechnete Spektrum (blau) im Vergleich mit dem gemessenen Spektrum (rot) gezeigt. Im niederfrequenten Bereich zeigt sich eine starke



**Abbildung 7.12:** Vergleich der FE-Rechnung mit der Messung

Differenz zwischen Rechnung und Messung, was mehrere Ursachen haben dürfte. Zum einen ist im gemessenen Spektrum nicht nur Verbrennungslärm enthalten, sondern auch rein strömungsinduzierter Lärm. Diesen Lärm kann das hier vorgestellte Modell nicht nachbilden. Ein weiterer Grund liegt in dem verwendeten Modellspektrum 4.13 begründet. Der Bereich der großskaligen und der integralen Wirbel ist hier nicht allgemein gültig, so dass eine

Abweichung des Modellspektrums von den tatsächlichen Verhältnissen im niedrigen Wellenzahlbereich wahrscheinlich ist. Hinzu kommt außerdem, dass die Messung tiefer Frequenzen fehleranfällig ist. Um die genaue Ursache dieser Abweichung von Rechnung und Messung festzustellen, wären Messungen des kalten Strömungsfelds notwendig, die im Rahmen dieser Arbeit aber nicht durchgeführt wurden. Weiter ist zu bedenken, dass der Anteil dieses niederen Frequenzbereichs an der integralen Gesamtemission nur sehr gering ist. Im mittleren Frequenzbereich gibt das Modell die gemessenen Werte qualitativ gut wieder. Der Abfall bei hohen Frequenzen wird von dem Modell sehr gut gezeigt. Allerdings treten im Bereich um 1000 Hz Resonanzeffekte auf. Da das FE-Modell keinerlei Dämpfung enthält, führen diese zu starken und schmalbandigen Resonanzpeaks im Lärmspektrum.

Das Lärmmodell liefert als Ergebnis einen aufintegrierten Quellterm. Dieser wird an der Flammenposition im FE-Modell in ein Quellvolumen eingebracht. Hier stellt sich die Frage, ob die Form, Größe und Lage des Ersatzquellvolumens einen bedeutenden Einfluss auf das Ergebnis hat. Hierzu wurden drei Fälle untersucht: Einmal wurde der Quellterm in einem Querschnitt des gesamten Brenners eingebracht (siehe Bild 7.13). Als zweiter Fall wurde als Quellvolumen ein kleiner Zylinder auf der Brennerachse in Höhe der Flamme verwendet (siehe Bild 7.14).

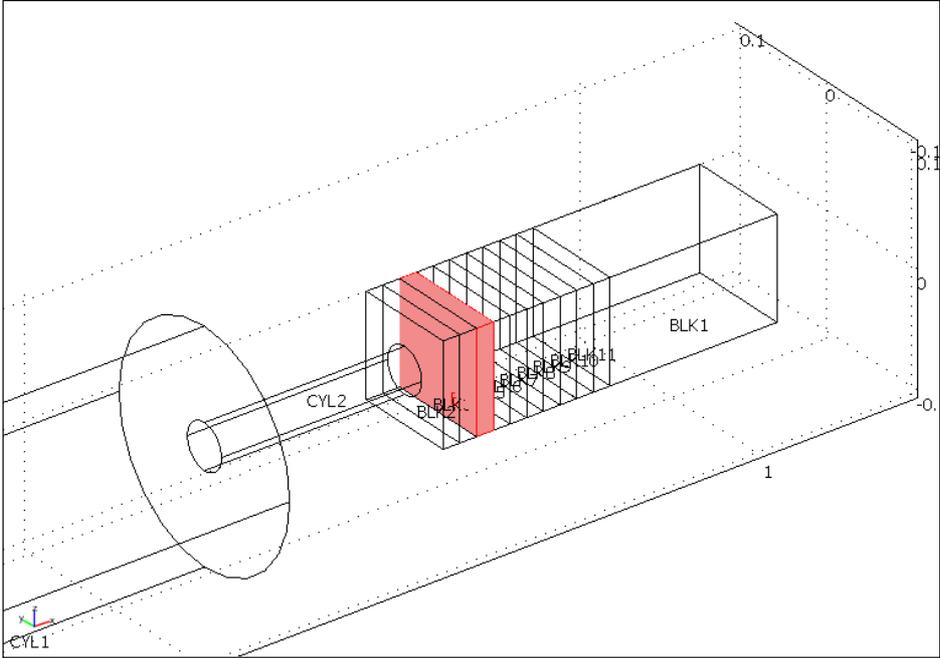


Abbildung 7.13: Quellenanordnung 1

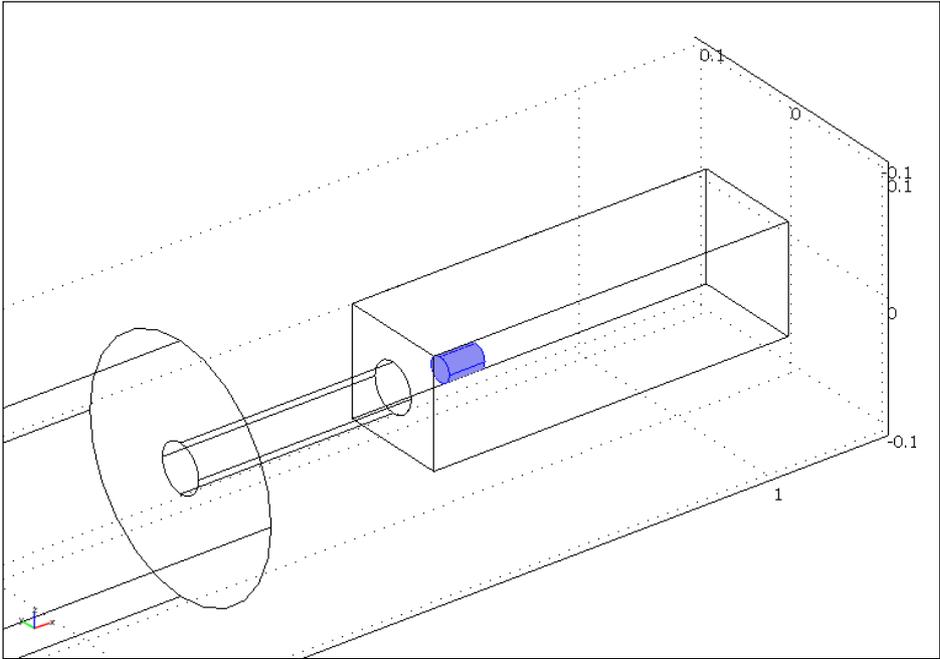
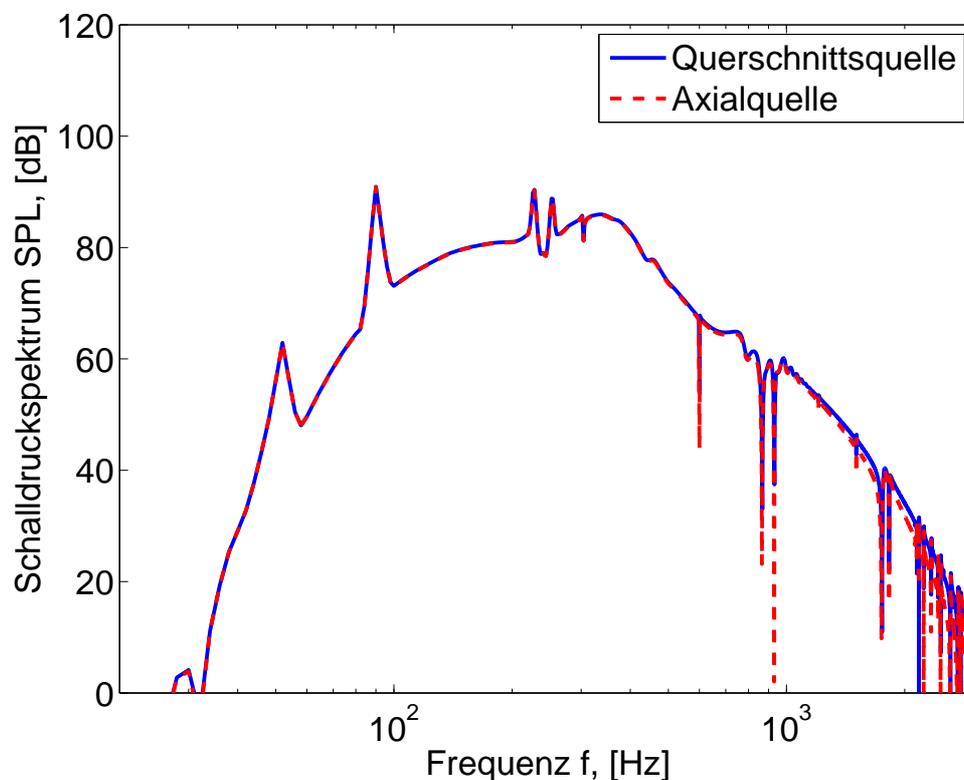


Abbildung 7.14: Quellenanordnung 2

Denkbar wäre hier, dass in diesem Fall nicht direkt ebene Welle abgestrahlt werden. Ein Vergleich der Ergebnisse der Axialzylinderquelle und der Querschnittsquelle ist in 7.15 gezeigt. Deutlich zu sehen ist, dass für Frequenzen unterhalb von 1000Hz praktisch keine Unterschiede zwischen den beiden Rechnungen bestehen. Bei höheren Frequenzen ergeben sich zwar geringe Unterschiede, die allerdings vernachlässigbar klein sind. Ein ähnliches Ergebnis ergibt sich auch für den Vergleich der ursprünglichen Querschnittsquelle mit einer wesentlich längeren Querschnittsquelle (siehe Bild 7.16). Auch hier zeigen sich nur bei hohen Frequenzen geringe Unterschiede beider Ergebnisse.

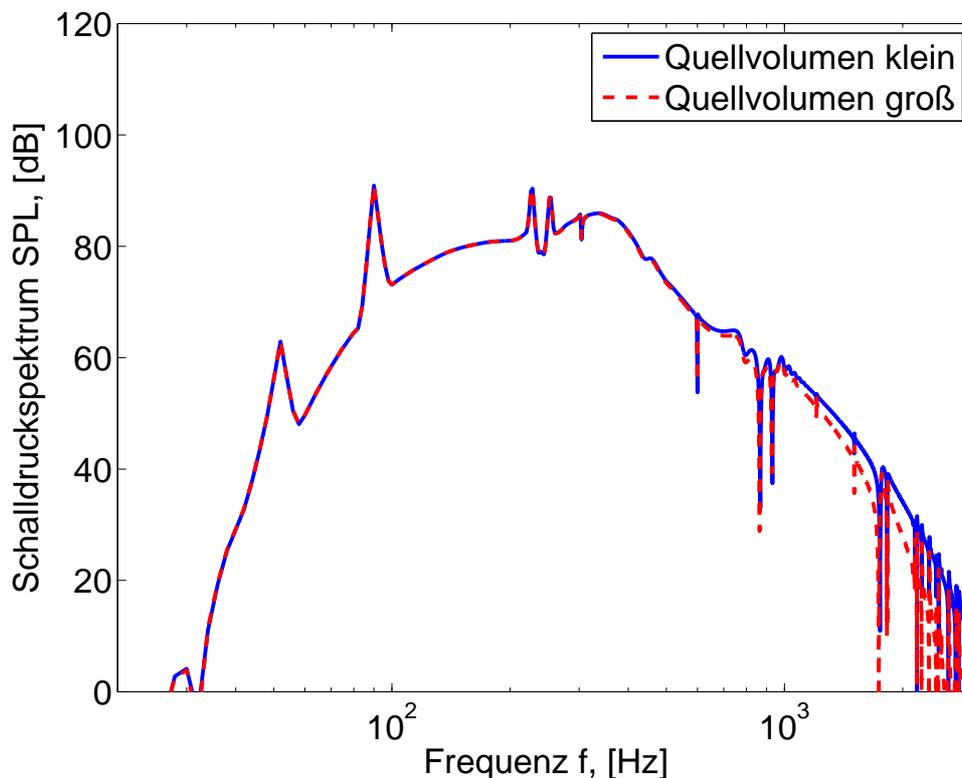


**Abbildung 7.15:** Vergleich verschiedener Quellgebiete

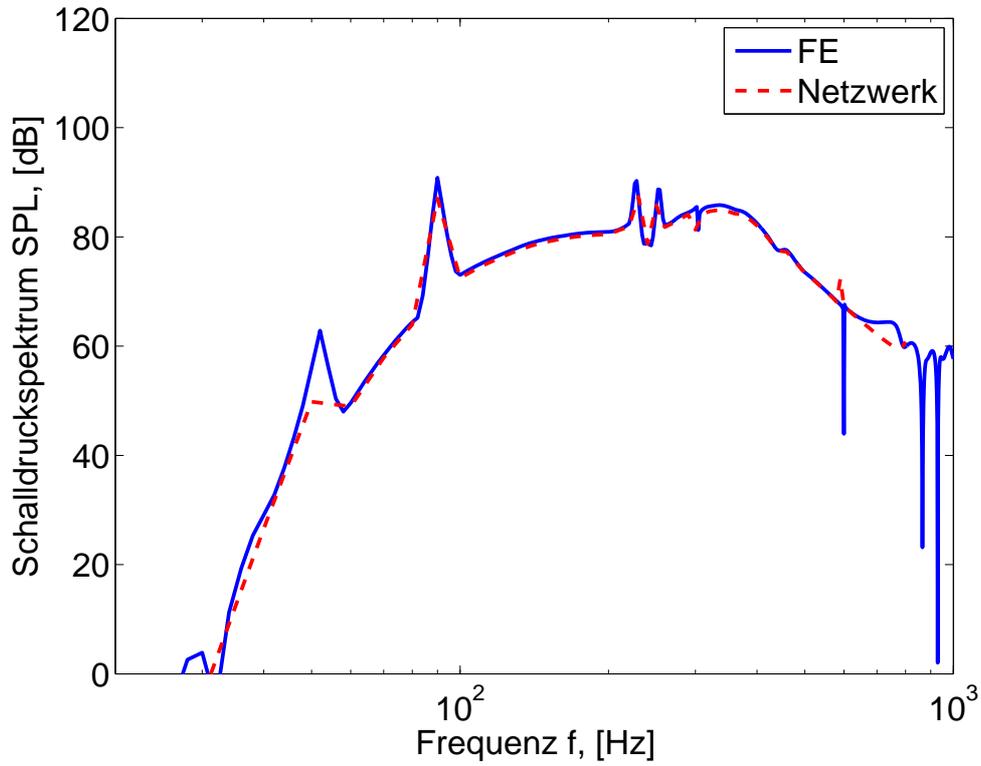
#### 7.2.4 Schalldruckberechnung Netzwerk

In Kapitel 7.1.2 haben wir das Netzwerkmodell so angepasst, dass es zum FE-Modell äquivalente Ergebnisse liefert. Wir werden dieses Netzwerkmodell

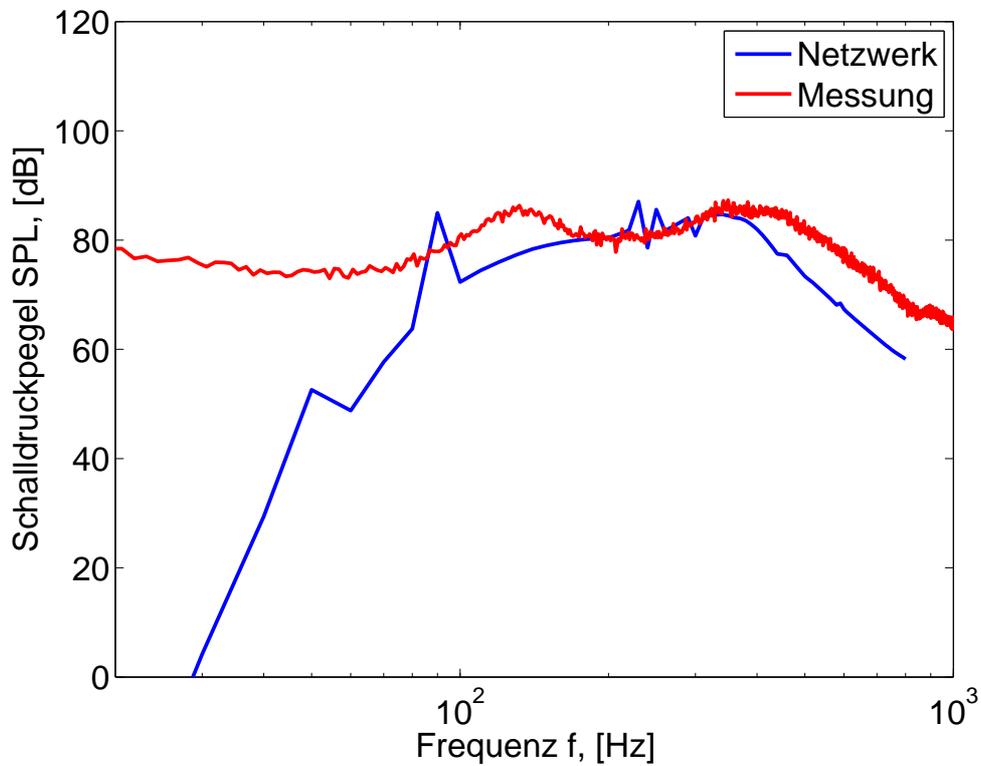
dazu verwenden, das von der Flamme hervorgerufene Schallspektrum zu berechnen. In Abbildung 7.17 ist das Ergebnis zu sehen, das das Netzwerkmodell liefert. Zum Vergleich ist noch einmal das Ergebnis der FE-Berechnung bis 1000 Hz gezeigt. Da das Netzwerkmodell für diese Rechnung nicht gedämpft wurde, sind starke Resonanzeffekte zu sehen. Diese scharfen Peaks treten in der Wirklichkeit nicht auf, da sie durch Dämpfungseffekte zum einen weniger hoch ausfallen und zum anderen über einen größeren Frequenzbereich verschmiert werden. Berechnen wir aus den Druckverlusten im Strömungsfeld die Druckverlustbeiwerte  $\zeta$  und berücksichtigen diese bei der Berechnung des Schallfeldes, so erhalten wir das in Abbildung 7.18 gezeigte Ergebnis. Im Vergleich mit den ungedämpften Rechnungen zeigt sich im niederen Frequenzbereich kein großer Unterschied. Die scharfen Resonanzpeaks bei den hohen Frequenzen allerdings sind kaum mehr zu sehen.



**Abbildung 7.16:** Vergleich der Schalldruckspektren bei Verwendung unterschiedlich großer Quellvolumen



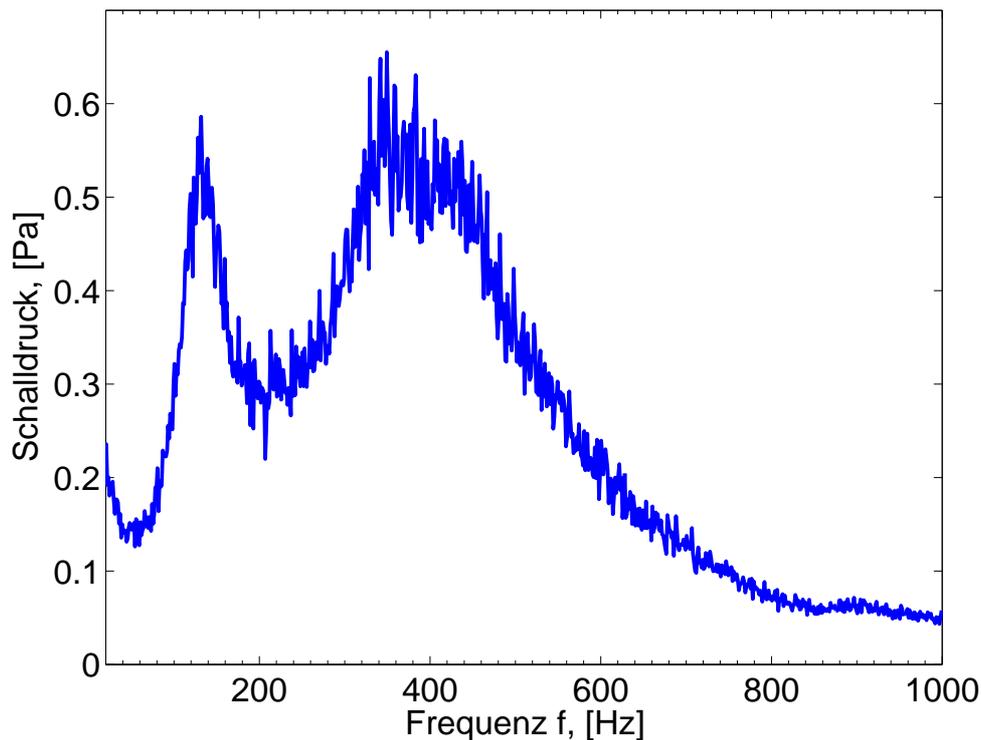
**Abbildung 7.17:** Vergleich der 3D-FE Rechnung mit der Netzwerksimulation



**Abbildung 7.18:** Vergleich der Netzwerksimulation mit der Messung

### 7.3 Analyse der Messdaten

Schauen wir uns das gemessene Spektrum linear über der Frequenz aufgetragen an (Abbildung 7.19), fällt deutlich auf, dass die erste Frequenzspitze bei ca. 130 Hz im Vergleich mit der zweiten (um 380 Hz) sehr schmalbandig ist. Der Schalldruck ist hier um mehr als das doppelte überhört. Solche starken,

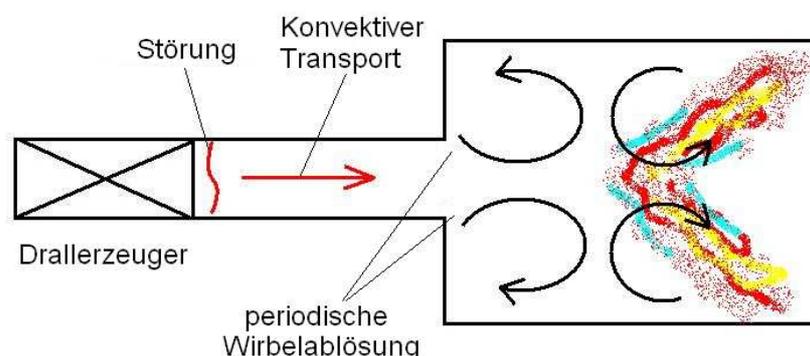


**Abbildung 7.19:** Experimentell ermitteltes Schalldruckspektrum des BRS-Brenners

schmalbandigen Überhöhungen sind meistens auf akustische Resonanzeffekte zurückzuführen. Schätzen wir die niedrigsten Eigenfrequenzen des Systems aus den Rohrlängen und den Schallgeschwindigkeiten ab, so ergibt sich allerdings, dass in diesem niederen Frequenzbereich nicht mit akustischen Eigenmoden zu rechnen ist. Die im Messpektrum auftauchende Frequenzspitze muss demnach eine andere Ursache haben. Einen Mechanismus, der ebenfalls zu einer starken Überhöhung im Spektrum führen kann, werden wir im nächsten Abschnitt betrachten.

## 7.4 Strömungsinduzierte Resonanzeffekte

Neben dem schon besprochenen turbulenten Verbrennungslärm (Kap. 5) gibt es noch weitere Mechanismen, die zu Druckpulsationen führen können. In Gleichung 2.17 hatten wir gesehen, dass Schwankungen in der Wärmefreisetzung direkt als akustische Quelle wirken. Diese Schwankungen können, wie schon gesehen, zum einen durch die Turbulenzwirbel in der Strömung verursacht werden. Zum anderen aber auch, wenn die Zufuhr an Frischgas und damit die Brennstoffmenge schwankt. Zu solchen Fluktuationen im Frischgaszustrom zur Flamme kommt es meist durch Interaktion von Akustik und Strömung. Der von der Flamme erzeugte turbulente Verbrennungslärm breitet sich als eine Art Störung im ganzen System aus. An bestimmten Stellen kann es zu einem starken Einfluss dieser Störung auf die Strömung kommen. Ein typischer Effekt ist, dass sich an dem Flächensprung vom Brenner in die Brennkammer, ausgelöst durch die akustischen Schwankungen, großskalige Wirbel ablösen und stromabwärts in die Flamme konvektieren. Dort haben sie eine Schwankung der Wärmefreisetzung zur Folge (siehe Abbildung 7.20). Weiter können akustische Schnelleschwankungen am Brenneraustritt direkt zu einer Modulation des austretenden Massenstromes führen. Die Modulation im Massenstrom wird konvektiv stromab transportiert und erreicht die Flamme nach einer Verzugszeit  $\tau$ . Hier resultieren sofort Schwankungen der Wärmefreisetzung und damit des Drucks in der Brennkammer. Der zusätzlich



**Abbildung 7.20:** Thermoakustische Quellmechanismen

erzeugte Lärm kann nun wieder auf die Strömung zurückwirken und sich

selbst neu erzeugen, eine Rückkopplung ist entstanden. Diese Rückkopplung können wir als eine Art thermoakustische Mode auffassen. Ihre Frequenz ist abhängig von vielen Einflussfaktoren, hauptsächlich aber von der konvektiven Verzugszeit  $\tau$ . Zu einer thermoakustischen Instabilität kann es kommen, falls zwischen der Störung der Strömung und der veränderten Wärmefreisetzung die richtige Phasenlage besteht. In diesem Fall kann die Störung durch den Rückkopplungskreis immer weiter verstärkt werden.

Ein erster Modellierungsansatz für diese Verbrennungsinstabilitäten ist das  $n - \tau$ -Modell, das von Crocco et al. [17] bei der Untersuchung von Instabilitäten in Flüssigtreibstoffraketen entwickelt wurde. Er koppelte die Wärmefreisetzungsschwankungen mit den Druckfluktuationen am Injektor. Ein Interaktionsindex  $n$  beschreibt, wie stark Störungen in der Strömung auf die Wärmefreisetzung wirken und eine Verzugszeit  $\tau$  gibt die Zeit an, die zwischen Ursache und Wirkung vergeht. Dieser Ansatz wird oft auch als Zeitverzugsmodell bezeichnet. Wir werden die Wärmefreisetzung allerdings nicht an den Druck  $p'$ , sondern an die Schnelle  $u'$  koppeln [57]:

$$\dot{q}'(t) = n \cdot u'(x_0, t - \tau) \quad (7.5)$$

Die Geschwindigkeitsfluktuation  $u'(x_0, t - \tau)$  wird an einem bestimmten Referenzpunkt  $x_0$ , an dem die Störung erzeugt wird, bestimmt. Der Interaktionsindex ist [57]

$$n = \frac{T_2}{T_1} - 1. \quad (7.6)$$

mit  $T_1$  der Temperatur vor und  $T_2$  der Temperatur nach der Flamme. Der Zeitverzug  $\tau$  hängt vom konkret wirksamen Mechanismus ab, kann für Vormischverbrennung aber gut durch die konvektive Zeit zwischen dem Ort der Störung und der Flamme bestimmt werden [62]. Das  $n - \tau$ -Modell 7.5 kann in Netzwerksimulationen verwendet werden. Die zugehörige Netzwerkelementformulierung lautet [57]

$$\begin{aligned} p'_2 &= p'_1 \\ u'_2 &= (1 + n \cdot e^{-i\omega\tau}) u'_1. \end{aligned} \quad (7.7)$$

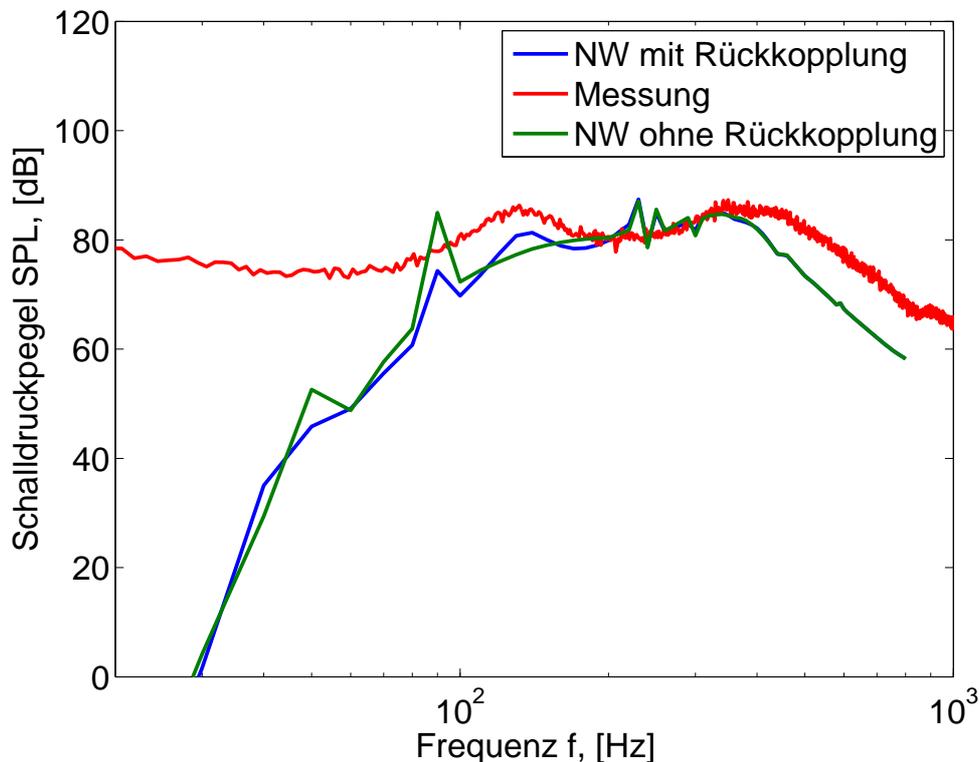
Es hat sich allerdings gezeigt [58, 70], dass die Annahme einer einzigen festen Verzugszeit  $\tau$  nur näherungsweise gültig ist und besser durch eine Verzugs-

zeitverteilung ersetzt wird. Schuermanns et al. [75] nehmen eine normalverteilte Verzugszeit an, wodurch das Modell 7.7 nur durch die Berücksichtigung der Standardabweichung  $\sigma_\tau$  erweitert werden muss

$$\begin{aligned} p'_2 &= p'_1 \\ u'_2 &= \left(1 + n \cdot e^{-i\omega\tau - \frac{1}{2}\omega^2\sigma_\tau^2}\right) u'_1. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Der Exponentialterm  $e^{-i\omega\tau - \frac{1}{2}\omega^2\sigma_\tau^2}$  stellt einen Tiefpassfilter dar, je höher die Frequenz  $\omega$  oder je größer  $\sigma_\tau$ , desto weniger reagiert die Flamme auf die ursächliche Störung.

Berücksichtigen wir in der Netzwerksimulation zusätzlich diese thermoakustischen Effekte mittels des erweiterten  $n - \tau$ -Modells 7.8, so zeigt sich im Ergebnisspektrum (siehe Abbildung 7.21) bei ca. 140 Hz eine deutliche Überhöhung. Diese liegt nur knapp über der gemessenen Resonanz bei 130 Hz. Für die Berechnung wurde als Verzugszeit  $\tau = 9\text{ms}$  verwendet, was der konvektiven Zeit zwischen Drallerzeuger und Flamme entspricht. Für den Interaktionsindex wurde ein Wert von  $n \approx 3$  ermittelt. Insgesamt zeigt dieses Ergebnis eine sehr gute Übereinstimmung mit dem experimentell ermittelten Daten. Der starke Unterschied im unteren Frequenzbereich dürfte mehrere Ursachen haben. Zum einen ist im gemessenen Spektrum nicht nur Verbrennungslärm enthalten, sondern auch rein strömungsinduzierter Lärm, dessen Anteil durch eine Vermessung der kalten Strömung ermittelt werden müsste. Diesen Lärm kann das hier vorgestellte Modell nicht nachbilden. Ein weiterer Grund liegt in dem verwendeten Modellspektrum 4.13 begründet. Der Bereich der großskaligen und der integralen Wirbel ist hier nicht allgemein gültig, so dass eine Abweichung des Modellspektrums von den tatsächlichen Verhältnissen im niedrigen Wellenzahlbereich wahrscheinlich ist. Hinzu kommt außerdem, dass die Messung tiefer Frequenzen fehleranfällig ist. Zur integralen Gesamtemission trägt dieser niedrige Wellenzahlbereich nur wenig bei, da er sich nur bis etwa 80 Hz erstreckt. Im größeren Frequenzbereich ab 80 Hz bis 800 Hz ist die Übereinstimmung dagegen gut.



**Abbildung 7.21:** Berechnetes Spektrum bei Berücksichtigung von thermoakustischen Effekten mittels  $n - \tau$ -Modell

#### 7.4.1 FE-Simulation mit Rückkopplung

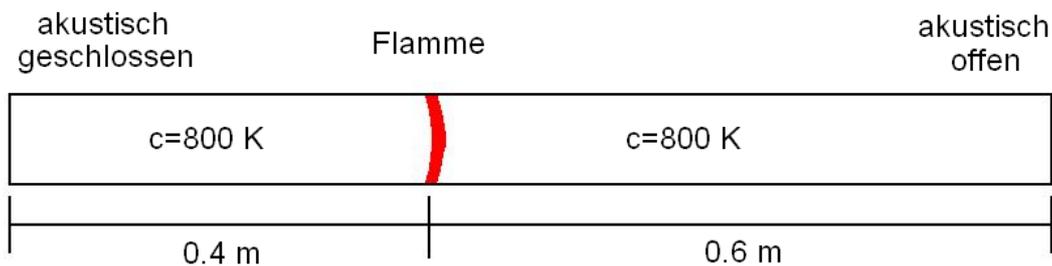
Die Simulation von Rückkopplungseffekten mit der FE-Methode wurde bisher meist nur im Zeitbereich durchgeführt (siehe z.B. [52]). Martin et al. [45] berechnen mittels FE-Methode die Eigenwerte eines rückgekoppelten Verbrennungssystems durch lösen einer Helmholtzgleichung. Sie waren damit die ersten, die Verbrennungsinstabilitäten mittels FE-Methode im Frequenzbereich berechnet haben. Als Ergebnis erhalten sie die komplexen Eigenwerte des Systems, wobei der Realteil die Frequenz und der Imaginärteil die Wachstumsrate angibt. Ist die Wachstumsrate eines Eigenwertes positiv, so ist dieser Eigenmode instabil. Bei seiner Frequenz könnte sich im realen System eine Instabilität ausbilden.

Wir werden hier eine ähnliche Implementierung wählen und ebenfalls

die Helmholtzgleichung lösen. Wir halten aber an dem bisher verwendeten Verfahren fest und suchen nicht nach den instabilen Eigenfrequenzen, sondern lösen die Helmholtzgleichung sukzessive jeweils für jede Frequenz im interessanten Frequenzbereich. Hierbei wird die Lärmquelle  $\hat{q}$ , die der turbulente Flammenlärm verursacht, durch den rückgekoppelten sekundären Verbrennungslärm erweitert. Hierfür verwenden wir wie im Netzwerk das klassische  $n-\tau$ -Modell. Die Summe aus beiden Lärmquellen erhält den Index  $RK$  um zu verdeutlichen, dass hier Rückkopplungseffekte mit einbezogen sind:

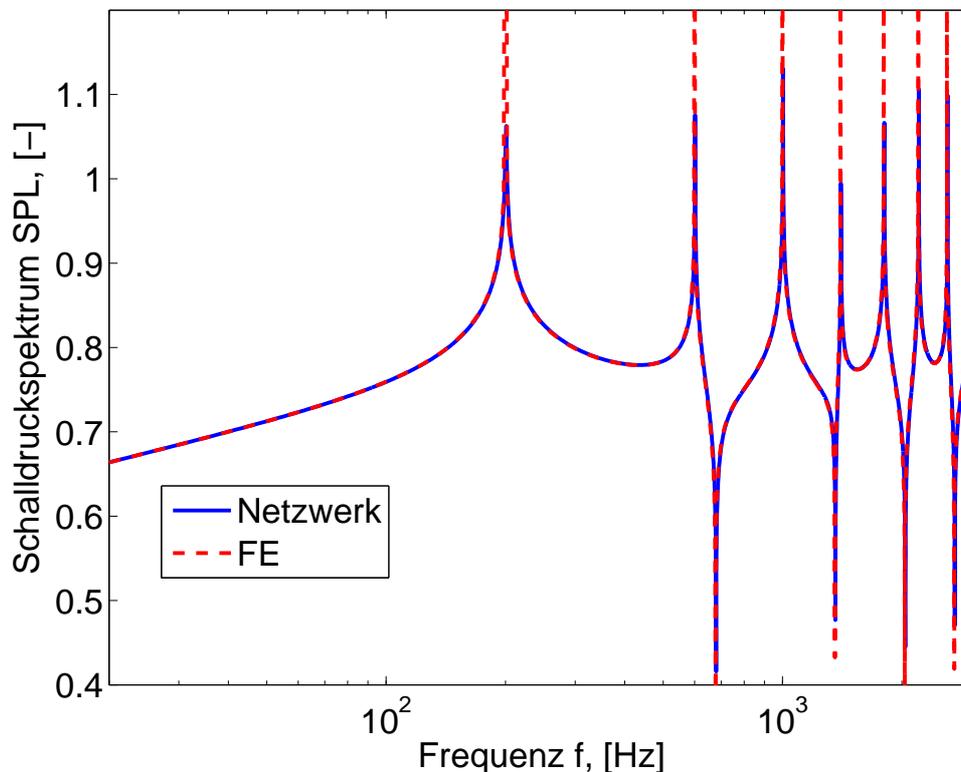
$$\hat{q}_{RK} = \hat{q} + n \cdot \bar{q} \frac{\hat{u}_{ref}}{\bar{u}} e^{-i\omega\tau - \frac{1}{2}\omega^2\sigma_\tau^2} \quad (7.9)$$

Dieses Vorgehen ist neu. Daher werden wir zunächst eine Testrechnung an einem einfachen eindimensionalen Modellsystem vornehmen. Das System besteht aus einem Rohr der Länge  $l = 1$ , bei dem sich an der Stelle  $x = 0.4$  eine Flamme befindet (siehe Abbildung 7.22). Dieses System wird mit der



**Abbildung 7.22:** Einfaches Modell zum Test der Rückkopplung mittels FE-Ansatz

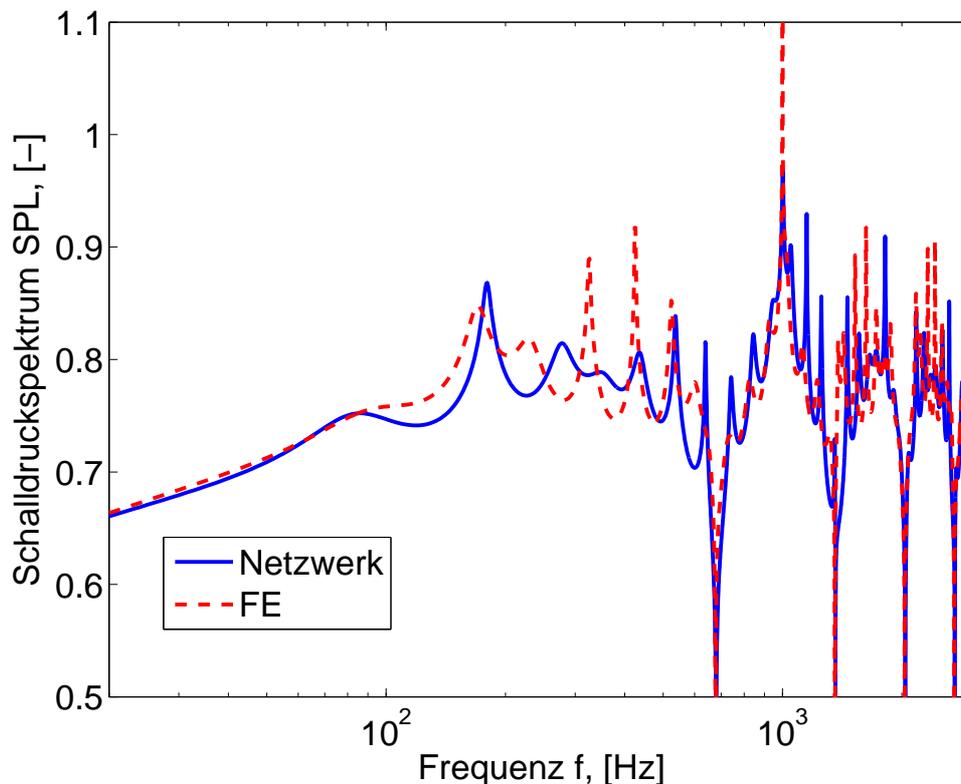
erprobten Netzwerkmethodem und dem neuen Vorgehen mittels FE-Ansatz berechnet und verglichen. Zunächst wird das System ohne Rückkopplung berechnet und beide Ergebnisse verglichen (Abbildung 7.23). Erwartungsgemäß sind die Ergebnisse beider Methoden identisch. Die ersten beiden Eigenmoden sind die  $\lambda/4$ - und die  $\frac{3}{4}\lambda$ -Welle. Deren analytisch berechneten Frequenzen liegen bei genau  $f = 200\text{Hz}$  und  $f = 600\text{Hz}$ , was auch die beiden Simulationen zeigen. Schalten wir bei der Berechnung nun die Rückkopplung zu, so zeigen sich im Spektrum zahlreiche zusätzliche Resonanzspitzen (Abbildung 7.24). In deren Bereich wird die Quelle durch die Rückkopplung verstärkt. Vergleichen wir Netzwerk- und FEM-Lösung, so zeigt sich zwischen



**Abbildung 7.23:** Vergleich von Netzwerk- und FEM-Ergebnis für den einfachen Testfall ohne Rückkopplung

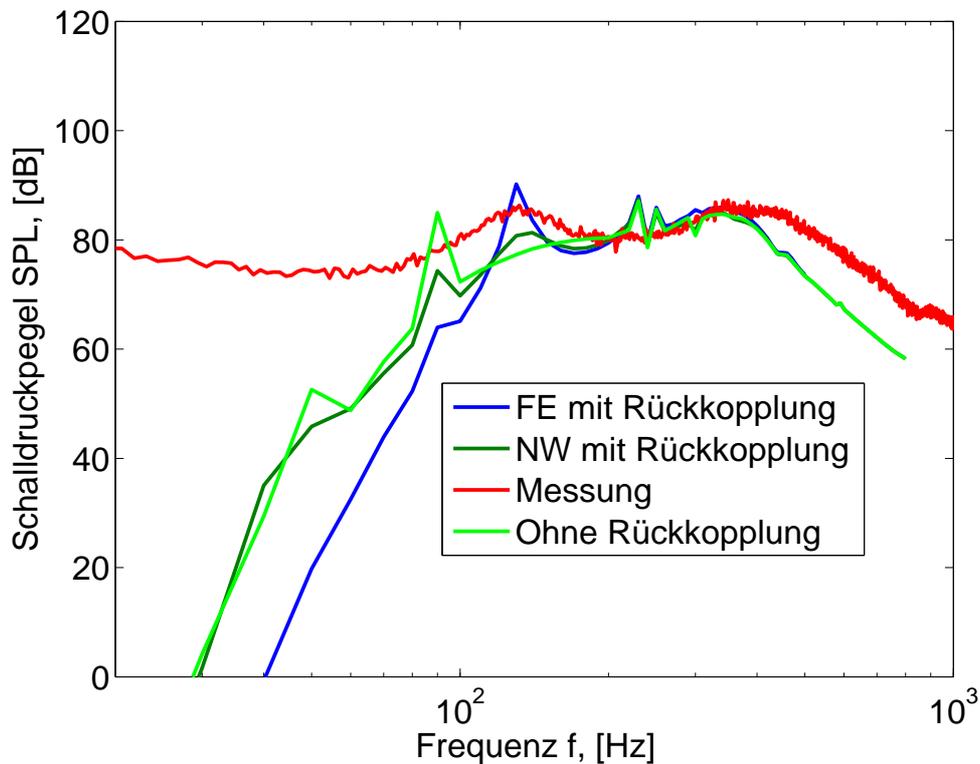
beiden eine gute Übereinstimmung. Unterhalb von 80 Hz sind die Verläufe fast identisch, da hier noch keine Resonanzeffekte auftreten. Die Resonanzspitzen, die das Netzwerkmodell zeigt, werden von der FE-Berechnung gut wiedergegeben. Teilweise sind sie im Vergleich zum Netzwerkergebnis leicht zu niedrigeren Frequenzen verschoben, nur die dritte Spitze zeigt das FE-Modell bei einer deutlich niedrigeren Frequenz. Die Amplitudenüberhöhung der Resonanzspitzen ist bei den ersten drei Resonanzen in gutem Einklang zwischen Netzwerk und FEM, bei Peak vier und fünf zeigt die FEM eine deutlich stärkere Resonanz als das Netzwerk. Insgesamt können wir folgern, dass die Berücksichtigung von Rückkopplungseffekten auch mit dem vorgestellten FE-Ansatz funktioniert. Im Vergleich mit dem Netzwerkmodell zeigt sich eine gute, wenn auch nicht perfekte Übereinstimmung.

Verwenden wir die FE-Methode, um das Lärmspektrum des BRS-Brenners



**Abbildung 7.24:** Vergleich von Netzwerk- und FEM-Ergebnis für den einfachen Testfall mit Rückkopplung

mit Rückkopplung zu berechnen, so erhalten wir das in Abbildung 7.25 gezeigte Ergebnis. Auch das FE-Modell kann jetzt das erste Maximum nachbilden. Im Vergleich mit dem ebenfalls dargestellten Netzwerkergebnis ist die Peak-Frequenz leicht nach unten verschoben. Dieser Trend hatte sich schon in dem einfachen Testbeispiel gezeigt. Die Frequenzüberhöhung fällt bei der FE-Berechnung stärker aus, das Maximum hat eine spitze Form, verglichen mit dem eher flachen Verlauf im Netzwerkergebnis. Bei höheren Frequenzen ist die Übereinstimmung von Netzwerk und FEM wieder ideal. Im Bereich tiefer Frequenzen allerdings liegt das FE-Ergebnis deutlich unter dem des Netzwerkes. Hier wirkt die Rückkopplung im FE-Modell dämpfend auf das System.



**Abbildung 7.25:** Simulation des BRS-Brenners unter Berücksichtigung des Rückkopplungseffektes

## 7.5 Fazit

Die Berechnungen für den BRS-Brenner haben deutlich gezeigt, dass die Vorhersage des Lärmspektrums immer nur so gut sein kann wie das Modell. Bei der Lärmemission spielen viele Faktoren und Mechanismen eine Rolle. Zunächst ist hier die Flamme selbst zu nennen. Sie ist die eigentliche Lärmquelle und deren Modellierung ist natürlicherweise Kernpunkt jeder Lärmsimulation. Jetzt läge die Vermutung nahe, dass damit die Hauptarbeit schon erledigt ist. Wie wir aber in Kapitel 3 gesehen haben, bestimmt letztendlich der Einschluss, ob und in welchem Maße die Quelle überhaupt Lärm emittieren kann. Eine möglichst genaue Modellierung der Systemakustik ist deshalb ebenfalls notwendig. Vor allem bei durchströmten Bauteilen wird das allerdings schwierig, wie das Beispiel des Austrittsblechs der BRS-Brennkammer zeigt. Hier mussten wir auf experimentelle Daten zurückgreifen. Damit gelang

uns eine Lärmberechnung, die zumindest schon teilweise das gemessene Spektrum wiedergeben konnte (Abbildung 7.18). Trotzdem konnte eine deutliche Überhöhung im Spektrum nicht reproduziert werden. Berücksichtigten wir im Modell zusätzlich thermoakustische Rückkopplungseffekte, so gelang die Berechnung des Schalldruckspektrums in sehr guter Übereinstimmung mit dem experimentellen Daten (Abbildung 7.21).

Zusammenfassend können wir sagen, dass die Lärmberechnung eingeschlossener Flammen kompliziert ist und gute Kenntnis des aktiven akustischen Systems und der wirksamen Mechanismen benötigt. Eine Berechnung gelingt unter diesen Voraussetzungen mit guter Genauigkeit, außer bei sehr niedrigen Frequenzen.



---

## 8 Berechnung Heizgerät

An moderne KFZ-Heizgeräte werden hohe Anforderungen gestellt, aus denen sich die folgenden Entwicklungsziele ergeben:

Das Gerät muss schnellstartfähig sein, d.h. die volle Heizleistung muss innerhalb kürzester Zeit zur Verfügung stehen. Die Qualität und Zusammensetzung des Brennstoffes kann nach Jahreszeit (Winter-/Sommerdiesel) und Region stark schwanken. Trotzdem muss das Heizgerät immer einwandfrei arbeiten und darf vor allem die Grenzwerte für den Schadstoffausstoß keinesfalls überschreiten. Die eingeschränkten Platzverhältnisse in einem Kraftfahrzeug erzwingen eine sehr kompakte Bauweise. Die hohe benötigte Heizleistung von ca. 6 kW bei einem KFZ lässt sich deshalb nur durch die Verwendung stark turbulenter Flammen erreichen. Die Lärmemission in die Umgebung muss gering gehalten werden. Da turbulente Flammen mit hoher Leistungsdichte naturgemäß viel Lärm erzeugen, wurden bisher aufwändige Schalldämpfungssysteme sowohl in den Abgasstrom als auch in den Frischluftpfad eingebaut. Diese zusätzlichen Komponenten kosten weiteren Bauraum, erhöhen das Gewicht und verteuern das Endprodukt. Um den Preis niedrig zu halten, soll der Brenner aus wenigen Einzelteilen bestehen, die zusätzlich noch einfach zu fertigen sein müssen.

Das Entwicklungsziel kompaktester Abmessungen erfordert eine hohe Leistungsdichte und daher eine turbulente Verbrennung, was sich negativ auf die Lärmentwicklung auswirkt. Turbulente Flammen emittieren immer Lärm, deshalb kann seine Entstehung in den Heizgeräten nur bis zu einem gewissen Maß vermieden werden. Um die Belästigung der Umgebung in Grenzen zu halten sind Schalldämpfer erforderlich, deren Kosten und Gewicht es zu minimieren gilt. Eine wirksame Möglichkeit hierbei wäre es, den Verbrennungslärm auf die Charakteristik der zu Verfügung stehenden Schalldämpfer

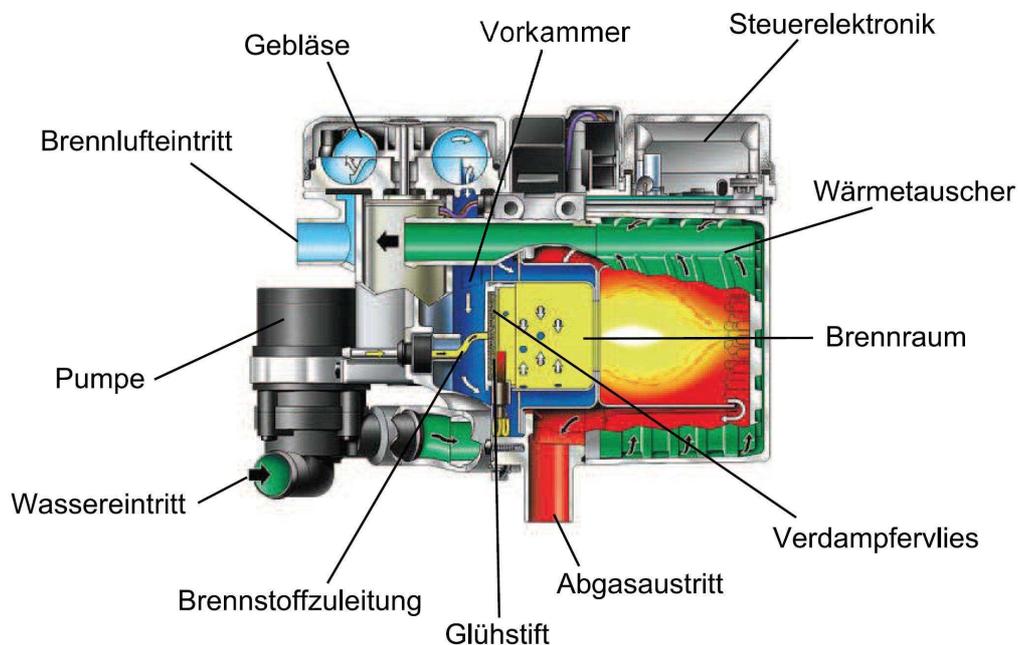
hin abzustimmen. So würde die Verwendung einfacherer und damit billigerer Dämpfer möglich. Ein Heizgerät lärmtechnisch zu optimieren, war bisher nur eingeschränkt möglich. Da der Lärm erst am fertigen Prototyp gemessen werden konnte, war eine iterative Verbesserung sehr teuer und zeitaufwändig. Es fehlte eine Möglichkeit, die zu erwartende Lärmemission schon im Designprozess abschätzen zu können. Im voran gegangenen Kapitel haben wir die Lärmerzeugung eines einfachen vorgemischten Brennersystems mit der in Kapitel 6.1 präsentierten Methode berechnen können. Jetzt werden wir diese Methode nutzen, um die Lärmemission eines realen Heizgerätes zu berechnen. Da dieses Gerät einen komplizierteren Aufbau als der BRS-Brenner besitzt, müssen wir allerdings die bisherige Methode im Bereich der Netzwerkmodellierung erweitern. Bei diesem Gerät interessieren wir uns vor allem für das Schallfeld, das das Gerät in seiner Umgebung erzeugt. Hierzu muss die Schallabstrahlung vom Gerät in das Freifeld und dort die weitere Ausbreitung berechnet werden. Hierzu werden wir die bisherige Methode entsprechend ergänzen.

### **8.1 Aufbau und Funktion**

Bei dem im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Heizgerät handelt es sich um einen Vliesbrenner, bei dem der Brennstoff in einem Metallvlies verdampft wird. Als Brennstoff wird je nach Motorentyp entweder Benzin oder Diesel verwendet. Die Leistung beträgt sechs Kilowatt. In Abbildung 8.1 ist schematisch der Aufbau des Heizgerätes gezeigt. Hieran lässt sich das Funktionsprinzip des Gerätes erklären:

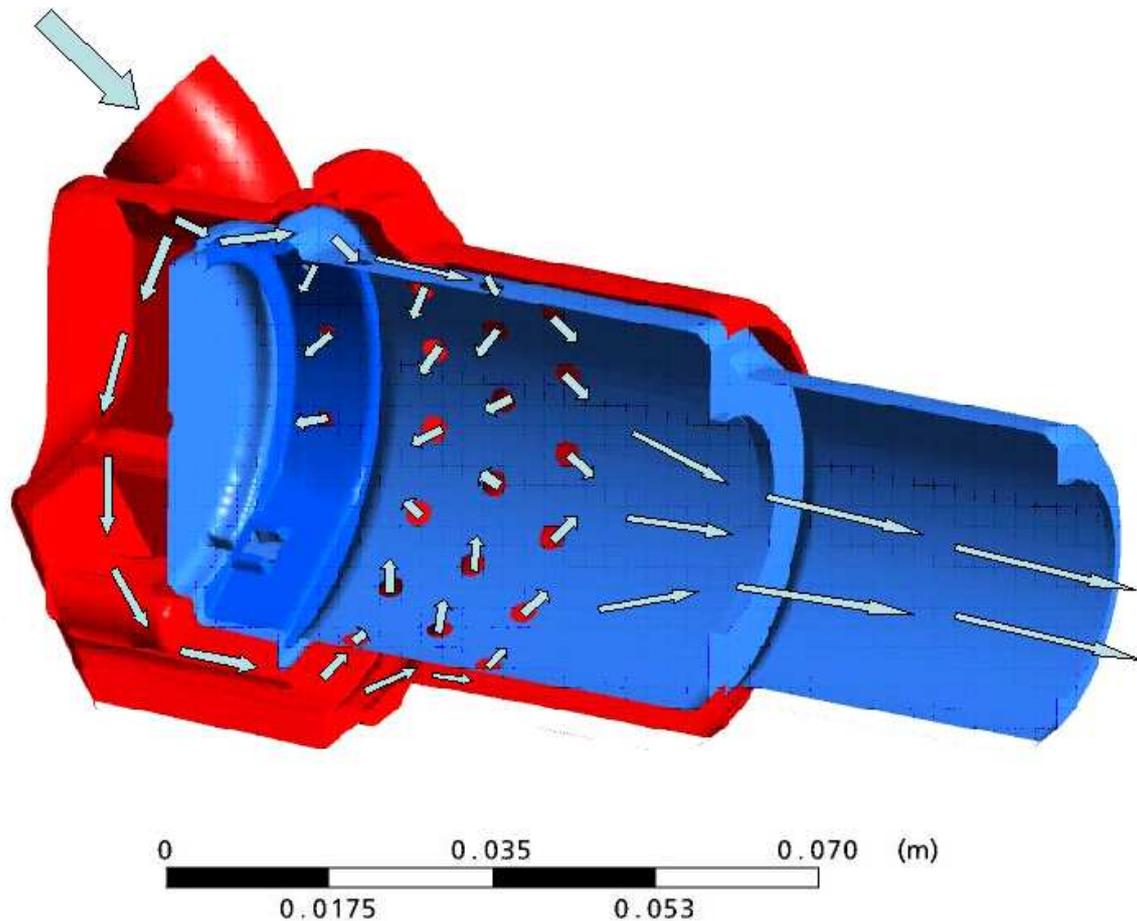
Eine Dosierpumpe befördert impulsweise Benzin oder Diesel durch die Brennstoffleitung in das Verdampfervlies. Dort wird der Brennstoff mittels eines Glühstiftes erhitzt und verdampft. Gleichzeitig wird vom Gebläse Frischluft in den Brennraum eingeblasen, damit der Brennstoffdampf mit Luft vermischt wird. Sobald der Glühstift das System genügend aufgeheizt hat, entzündet sich das Gemisch. Durch die beginnende Verbrennung wird der Brenner im Ganzen und besonders das Verdampfervlies stark aufgeheizt.

Der Glühstift kann daher nach einer gewissen Zeit abgeschaltet werden und die Verbrennung liefert die notwendige Energie zur Brennstoffverdampfung im Vlies. Die heißen Abgase treten nach der Brennkammer in einen Wärmetauscher ein, in dem sie ihre Wärme an den Kühlkreislauf des Motors abgeben. Damit kann sowohl der Motor vorgewärmt, als auch die Fahrerkabine temperiert werden. Die Vorkammer und der eigentliche Brennraum sind



**Abbildung 8.1:** Aufbau und Funktion des Heizgerätes

in Abbildung 8.2 noch einmal genauer gezeigt. Hier ist auch der Strömungspfad verdeutlicht. Die Luft strömt durch die Vorkammer und umspült die Brennkammer. Durch mehrere Reihen von Löchern in der Wand tritt die Luft dann aus der Vorkammer in den Brennraum ein.



**Abbildung 8.2:** Strömung durch die Vorkammer in den Brennraum

## 8.2 Anpassung des Lärmmodells

Bei dem zu untersuchenden Heizgerät werden Brennstoff und Luft getrennt in den Brennraum eingeführt; es liegt daher zunächst eine nichtvorgemischte Verbrennung (Diffusionsflamme) vor. Sowohl im Experiment als auch in der CFD-Simulation zeigt sich allerdings, dass die Verbrennung nicht nur im vorderen Teil der Brennkammer abläuft, sondern im ganzen Brennraum. Daher können wir im hinteren Teil von einer Teilvormischung ausgehen.

Der reaktionslimitierende Faktor ist im Falle des Heizgerätes die Mischung von Luft und Brennstoffdampf. Die Geschwindigkeit der chemischen Reaktion ist um ein Vielfaches größer und kann daher vernachlässigt werden

(„unendlich schnelle Chemie“). Die Damköhler-Zahl ist folglich sehr groß. Wie in Kapitel 4.2.4 dargestellt, liegt eine Verbrennung im Flameletregime vor. Wie in Kapitel 5.5 dargestellt, hängen in diesem Fall die Eingangsparameter des Lärmmodells ausschließlich von der Strömung ab. Wenn die Eingangsgrößen für die Lärmberechnung aus einer CFD-Simulation stammen, in der der Vormischcharakter bei der Berechnung der Wärmefreisetzung korrekt berücksichtigt wird, so können wir das Modell auch für nicht-vorgemischte Flammen verwenden.

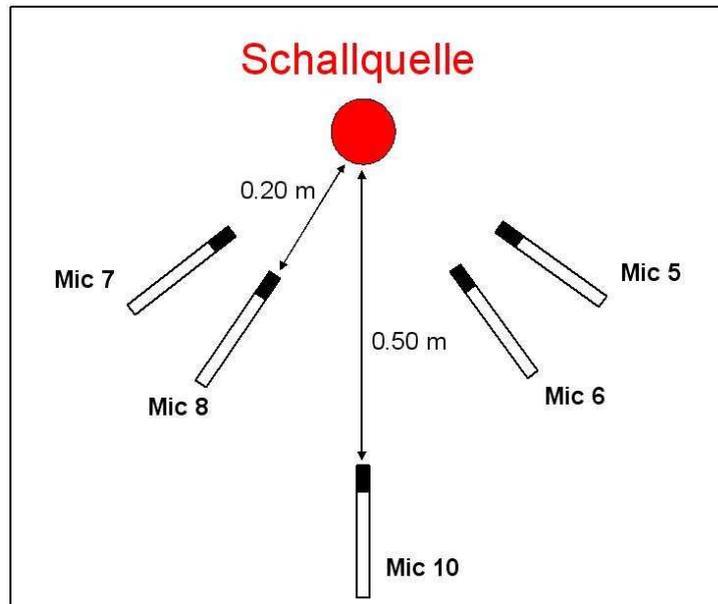
### **8.3 Schallabstrahlung in die Umgebung**

In Kapitel 2.2.5 haben wir gesehen, dass am idealisierten offenen Ende eines Rohres die Schallwelle vollständig reflektiert wird. Auf einen Brenner übertragen würde das bedeuten, dass durch die Abgasöffnung keinerlei Schall in die Umgebung dringen kann. Dass dem nicht so ist, zeigt die Erfahrung. Im Folgenden werden wir zuerst die Schallabstrahlung des Heizgerätes anhand von Messdaten untersuchen. Weiter werden wir den realen Fall der Abstrahlung von einem Rohrende in die Umgebung theoretisch betrachten. Als Ergebnis werden wir die Impedanz eines realen offenen Rohres erhalten. Diese beschreibt im Gegensatz zum idealen offenen Rohr keine vollständige Reflexion, sondern eine teilweise Abstrahlung vom Rohr in die Umgebung. Diese Abstrahlimpedanz werden wir später als Randbedingung in unserem Rechenmodell verwenden. Weiter werden wir herleiten, wie wir aus den akustischen Größen am Abgasaustritt auf analytischem Weg den Schalldruckpegel in der Umgebung berechnen können.

#### **8.3.1 Schallabstrahlung des Heizgerätes**

Die Abstrahlung einer Schallquelle ist im Allgemeinen nicht in jede Richtung gleich stark, sondern richtungsabhängig. Bei niedrigen Frequenzen sollte diese Abhängigkeit gering sein. Um die Richtungsabhängigkeit der Schallabstrahlung des Webasto-Brenners zu bestimmen, werden die Messspektren

verschiedener Mikrofone in unterschiedlichem Abstand und unterschiedlichem Winkel vom Abgasaustritt verglichen. Der Messaufbau ist in Abbildung 8.3 zu sehen. In Abbildung 8.4 sehen wir den Vergleich der Spektren gemessen

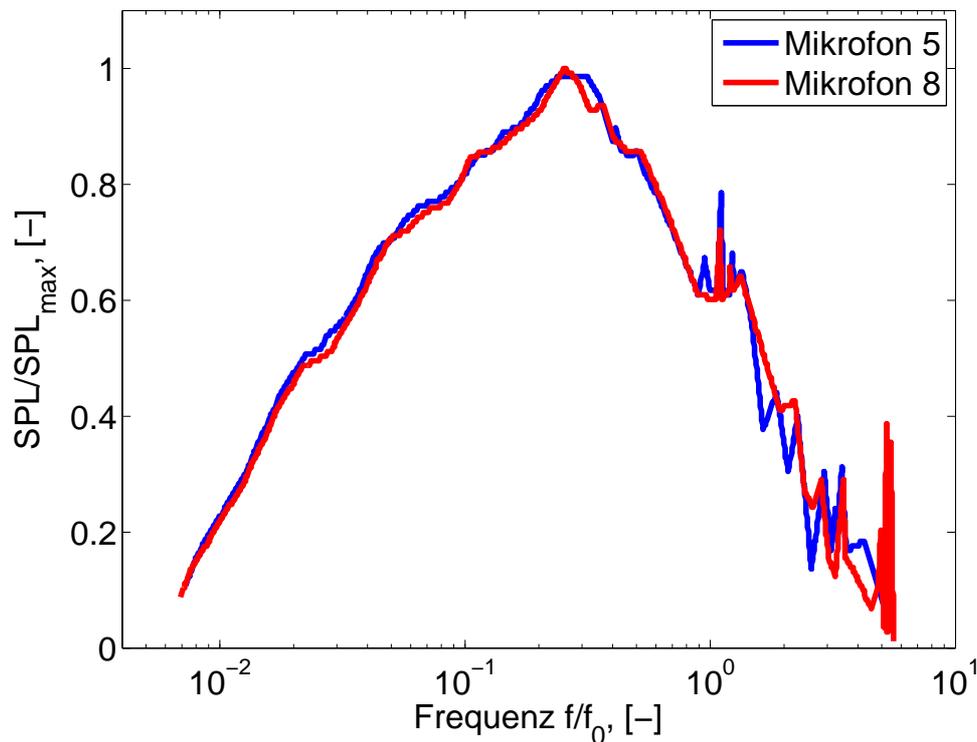


**Abbildung 8.3:** Messaufbau

an den Mikrofonpositionen fünf und acht. Beide befinden sich im Abstand  $r = 0,2\text{m}$  vom Brenneraustritt, aber in unterschiedlichen Winkeln zu diesem. Der Vergleich zeigt deutlich, dass bis ca. 4000 Hz keine Unterschiede bestehen.

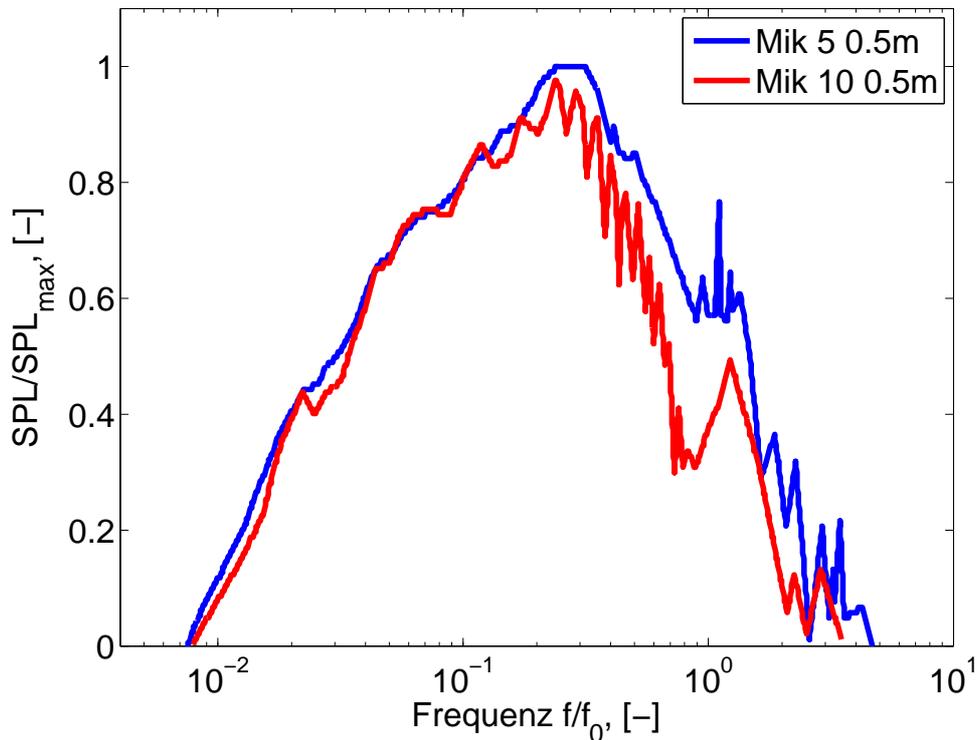
In Abbildung 8.5 ist das Spektrum von Mikrofon 10 (direkt hinter dem Austritt im Abstand  $r = 0,5\text{m}$ ) verglichen mit dem Spektrum von Mikrofon 5. Da dieses in einem Abstand  $r = 0,2\text{m}$  vom Brenneraustritt positioniert ist, wurde das Spektrum entsprechend skaliert. Auch hier zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung bis fast 1000 Hz. Ab dieser Frequenz machen sich im Spektrum von Mikrofon 10 allerdings Raumakustikeffekte bemerkbar, sichtbar an den regelmäßigen Frequenz-Peaks. Deshalb ist in diesem Bereich eine perfekte Übereinstimmung beider Spektren nicht mehr zu erwarten.

Anhand eines 2D-achsensymmetrischen Modells des Webasto-Brenners (siehe Kapitel 8.4.1 für eine ausführlichere Beschreibung) wurde dessen



**Abbildung 8.4:** Vergleich des gemessenen Spektrums an zwei unterschiedlichen Mikrofonpositionen

Richtcharakteristik mit Comsol numerisch berechnet. Hierzu wurde die Schallausbreitung nicht nur im Gerät, sondern auch durch den Abgasaustritt und im umgebenden Freifeld berechnet. Die Modellierung des Freifeldes erfolgte durch ein kugelförmiges Rechenggebiet um den Austritt, wobei das Kugelgebiet mit nichtreflektierenden Randbedingungen abgeschlossen wurde, siehe Abbildung 8.6. Im Freifeld wurde eine Schallgeschwindigkeit von  $c = 343\text{m/s}$  und eine Dichte von  $\rho = 1.25\text{kg/m}^3$  angenommen. In Abbildung 8.7 ist farbige die Schalldruckverteilung bei einer Frequenz von  $3000\text{Hz}$  gezeigt. Gut zu sehen ist, dass das Schallfeld in der Umgebung des Brenners näherungsweise kugelförmig ist. In Abbildung 8.8 ist der entdimensionierte Schalldruckpegel  $SPL$  am äußeren Rand des Rechenggebietes abhängig vom Winkel zur Brenneraustrittsebene dargestellt. Diese sogenannte Richtcharakteristik des Webasto-Brenners ist für drei verschiedene Frequenzen ( $100\text{Hz}$ ,  $1000\text{Hz}$ ,  $3000\text{Hz}$ ) dargestellt. Wie erwartet nimmt mit steigender Frequenz die Winkelabhängigkeit zu. Allerdings bewegen sich die Abweichungen im



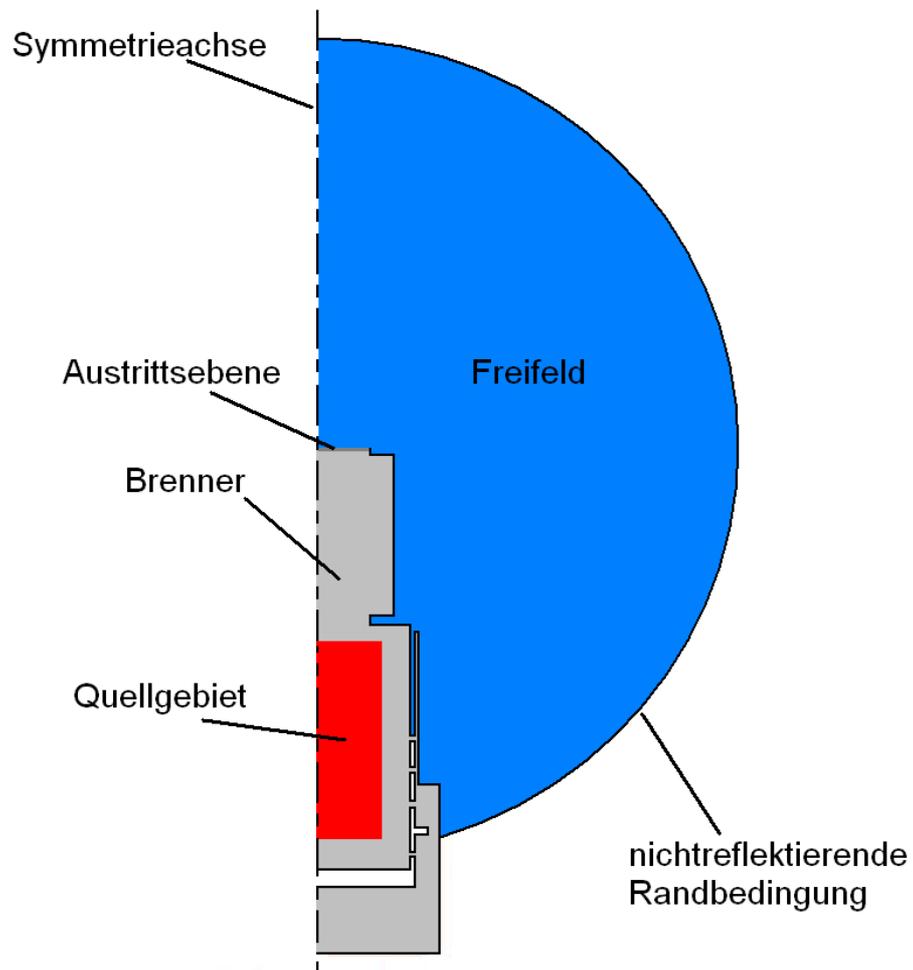
**Abbildung 8.5:** Vergleich von zwei g Spektren Mikrofonpositionen

Prozentbereich und sind deshalb vernachlässigbar. Das emittierte Schallfeld ist daher ein fast ideales Kugelfeld. In diesem Fall können wir das Schallfeld in der Umgebung analytisch bestimmen. Genauer gesagt kann das Schalldruckspektrum im Fernfeld durch eine Skalierung der Werte in der Brenneraustrittsebene berechnet werden, was wir im nächsten Abschnitt durchführen werden.

### 8.3.2 Berechnung des Schalldruckpegels im Fernfeld

Da die Auswertung der Mikrofonmessungen gezeigt hat, dass das Schallfeld des Brenners eine zu vernachlässigende Richtungsabhängigkeit aufweist, können wir das Schallfeld in der Umgebung des Brenners relativ einfach analytisch bestimmen.

Die Schalleistung, die abgestrahlt wird, errechnet sich nach Gleichung



**Abbildung 8.6:** Modell zur Berechnung der Schallausbreitung in das Freifeld

2.42 aus der Intensität in der Austrittsebene ( $AE$ ) mal der Austrittsfläche

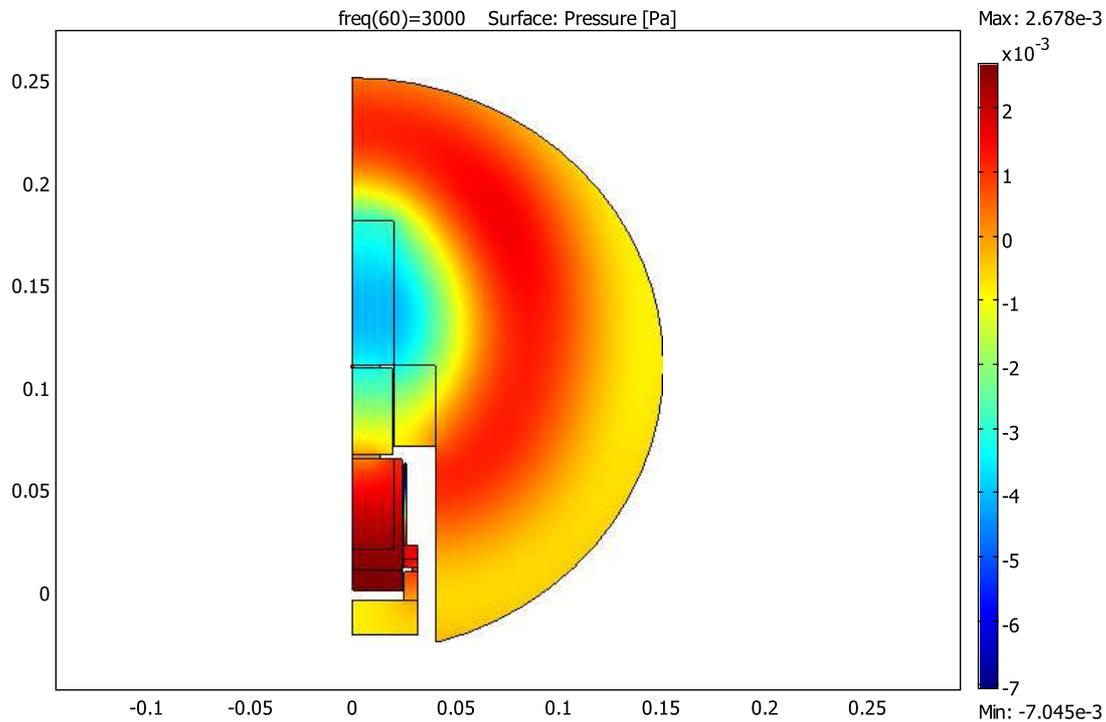
$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{p} \hat{u}^*) A_{AE} . \quad (8.1)$$

Der Schall breitet sich näherungsweise kugelförmig von der Austrittsebene aus. Deshalb muss die gesamte Schalleistung auf einer Kugelschale mit Radius  $r$  gleich der abgestrahlten Leistung sein:

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{p}_{AE} \hat{u}_{AE}^*) A_{AE} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{p}(r) \hat{u}^*(r)) A(r) \quad (8.2)$$

Wir haben hier angenommen, dass auf allen Kugelschalen die Schallfeldgrößen konstant sind. Im Freifeld besteht zwischen Schalldruck und -schnelle der

### 8.3 Schallabstrahlung in die Umgebung



**Abbildung 8.7:** COMSOL-Modell mit Freifeld

Zusammenhang

$$\hat{u} = \frac{\hat{p}}{\rho_0 c_0} \quad (8.3)$$

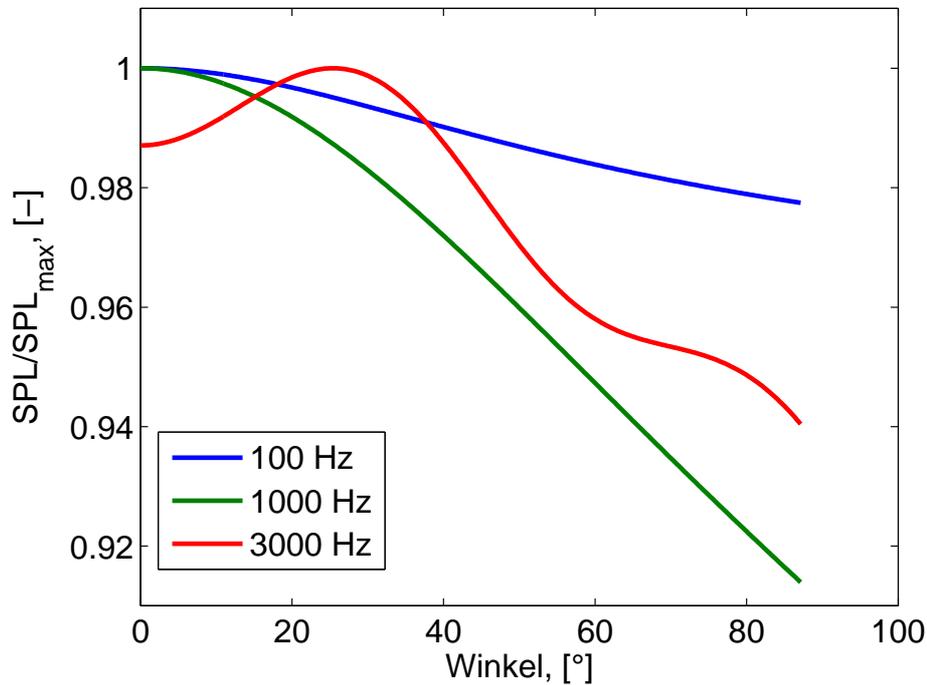
und damit

$$\frac{1}{2} \operatorname{Re}(\hat{p}_{AE} \hat{u}_{AE}^*) A_{AE} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{\hat{p}(r) \hat{p}^*(r)}{\rho_0 c_0} \right) A(r) \quad (8.4)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{|\hat{p}(r)|^2}{\rho_0 c_0} \right) A(r) \quad (8.5)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{|\hat{p}(r)|^2}{\rho_0 c_0} A(r) . \quad (8.6)$$

Setzen wir für die Austrittsfläche  $A_{AE}$  die Kreisfläche  $\pi r_{AE}$  und für die Fläche  $A(r)$  im Freifeld die Kugeloberfläche  $4\pi r^2$  und lösen das nach dem Schall-



**Abbildung 8.8:** Richtcharakteristik des Webasto-Brenners

druck  $\hat{p}(r)$  im Freifeld auf, ergibt sich

$$|\hat{p}(r)| = \sqrt{\operatorname{Re}(\hat{p}_{AE} \hat{u}_{AE}^*) \rho_0 c_0 \frac{\pi r_{ae}^2}{4\pi r^2}} \quad (8.7)$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{\operatorname{Re}(\hat{p}_{AE} \hat{u}_{AE}^*) \rho_0 c_0 \frac{r_{ae}}{r}}. \quad (8.8)$$

Der Schalldruckpegel ist nach Gleichung 2.54 und 2.55 durch

$$SPL = 20 \cdot \log \left( \frac{|\hat{p}(r)|}{\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 10^{-5} Pa} \right) \quad (8.9)$$

gegeben. Für den Schalldruckpegel in Entfernung  $r$  vom Rohrende ergibt sich demnach

$$SPL(r) = 20 \cdot \log \left( \frac{1}{2} \sqrt{\operatorname{Re}(\hat{p}_{AE} \hat{u}_{AE}^*) \rho_0 c_0 \frac{r_{ae}}{r}} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot 2 \cdot 10^{-5} Pa} \right) \quad (8.10)$$

Damit können wir den Schalldruckpegel im Freifeld analytisch aus den akustischen Größen in der Austrittsebene des Heizgerätes berechnen. Die Modellierung des Systems ist nur bis zu der Austrittsebene notwendig. In dieser Ebene

wird das Netzwerk- bzw. das FE-Modell mit der Abstrahl-Randbedingung 8.20 abgeschlossen. Somit ist für die Berechnung der Schallausbreitung in die Umgebung kein zusätzlicher Rechenaufwand notwendig.

### 8.3.3 Abstrahlimpedanz

Im Fall großer Wellenlängen im Vergleich mit dem Rohrradius kann die Strömung am Rohrende als inkompressibel betrachtet werden [68]. Daher wirkt das Rohrende als akustische Monopolquelle und die Quellstärke ergibt sich aus der Schallschnelle  $u'$  am Rohrende. Die akustische Leistung  $P_{AE}$ , die durch die Fläche der Austrittsebene  $A_{AE}$  tritt, muss gleich der Leistung  $P_{FF}$  sein, die die Monopolquelle ins Freifeld abstrahlt

$$P_{AE} = P_{FF} . \quad (8.11)$$

Für die Leistung gilt nach Gleichung 3.43 für den allgemeinen Fall eines Rohres

$$P = \frac{1}{2} |\hat{u}|^2 \operatorname{Re}(Z) A . \quad (8.12)$$

Der akustische Massenfluss im Rohr  $u'_{AE} A_{AE}$  muss beim Übergang ins Freifeld gleich bleiben. Mit dieser Bedingung lässt sich die Schnelle der Monopolquelle berechnen. Wir nehmen hier an, dass das Rohr dünnwandig ist und daher in den ganzen Raum abstrahlt. Der Monopolstrahler ist eine Sphäre mit Radius  $r$  und Fläche  $4\pi r^2$ . Dass die Annahme einer kugelförmigen Abstrahlung gerechtfertigt ist, hatten wir anhand der Ergebnisse im letzten Abschnitt 8.3.1, siehe Abb. 8.7, gesehen. Es gilt

$$u'_{AE} A_{AE} = u'_{FF} (4\pi r^2) \quad (8.13)$$

und die Schnelle der Monopolquelle ist daher

$$u'_{FF} = \frac{A_{AE}}{4\pi r^2} u'_{AE} . \quad (8.14)$$

Für die Impedanz einer Monopolquelle bei radialer Abstrahlung ins Freifeld gilt nach Gleichung 3.25

$$Z_{rad} = \rho c \frac{\kappa r}{1 + \kappa^2 r^2} (\kappa r + i) . \quad (8.15)$$

Ist das Produkt aus Wellenzahl und Radius klein,  $\kappa r \ll 1$ , gilt für den Realteil der Impedanz in guter Näherung

$$\operatorname{Re}(Z_{rad}) \approx \kappa^2 r^2 \rho c. \quad (8.16)$$

Setzen wir das alles in Gleichung 8.11 ein, erhalten wir

$$\frac{1}{2} |\hat{u}_{AE}|^2 \operatorname{Re}(Z) A_{AE} = \frac{1}{2} \left( \frac{A_{AE}}{4\pi r^2} |\hat{u}_{AE}| \right)^2 \kappa^2 r^2 \rho c (4\pi r^2). \quad (8.17)$$

Hieraus ergibt sich unmittelbar der Realteil der Abstrahlimpedanz  $\operatorname{Re}(Z)$  am Rohrende zu

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{1}{4\pi} \kappa^2 A_{AE} \rho_0 c_0. \quad (8.18)$$

Bei einem Radius  $r_{AE}$  des Rohres ist demnach die Impedanz

$$\operatorname{Re}(Z) = \frac{1}{4} (\kappa r_{AE})^2 \rho_0 c_0. \quad (8.19)$$

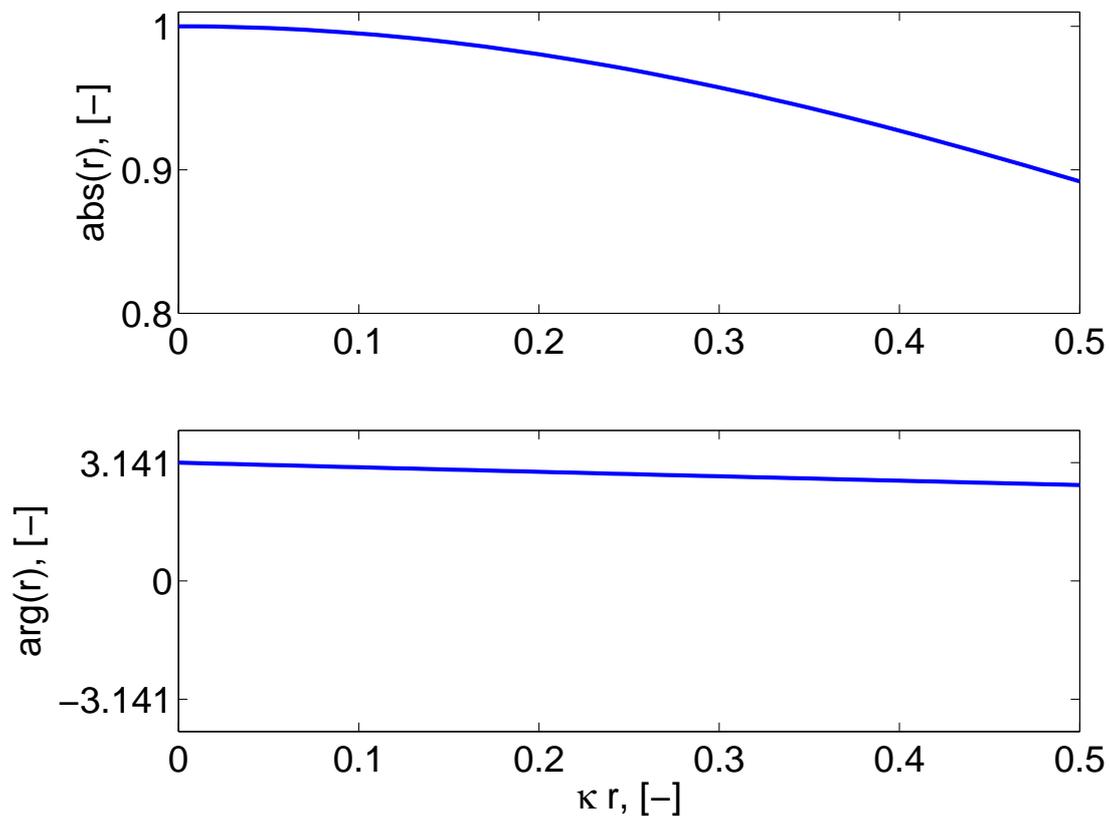
Um den Imaginärteil zu bestimmen, müssen wir bedenken, dass dieser die Trägheit der Strömung in dem kleinen Gebiet unmittelbar nach dem Rohrende widerspiegelt. Im Nahfeld des Monopolstrahlers unmittelbar nach dem Rohrende ist der Schalldruck um den Faktor  $\rho_0 c_0 \kappa r$  niedriger als die akustische Geschwindigkeit. Innerhalb des Rohres unterscheiden sich Druck und Schnelle um den wesentlich größeren Faktor  $\rho_0 c_0$ . Deshalb zwingt das äußere Feld den Druck im Rohr, an einer Stelle kurz nach dem Austritt zu verschwinden. Der Abstand  $\delta_{eff}$  dieses fiktiven Punktes von der Austrittsebene ist geometrieabhängig, wird aber vor allem von der Größe des Rohres bestimmt  $\delta_{eff} = O(r_{AE})$ . Daher führt die Endkorrektur  $\delta_{eff}$  hauptsächlich zu einem Phasenverzug der reflektierten Welle und damit zu einem rein imaginären Impedanzanteil. Die Gesamtimpedanz am Rohrende ergibt sich zu einer Ordnung von  $(\kappa r_{AE})^2$  zu

$$Z = \left( \frac{1}{4} (\kappa r_{AE})^2 + i \kappa \delta_{eff} \right) \rho_0 c_0. \quad (8.20)$$

Die Endkorrektur  $\delta_{eff}$  hängt von der genauen Geometrie ab und liegt im Bereich von [48]

$$0.6 r_{AE} \leq \delta_{eff} \leq 0.85 r_{AE}. \quad (8.21)$$

Der untere Wert gilt für ein normales Rohrende, der obere für ein Rohrende mit unendlich großem Flansch. Die in der Herleitung von Gleichung 8.20 getroffenen Annahmen gelten nur für niedrige Wellenzahlen. Gleichung 8.20 stellt den Grenzfall der allgemeinen Lösung für die Impedanz der Rohrabstrahlung nach Levine und Schwinger [39] dar. In Abbildung 8.9 ist der aus der komplexen Impedanz 8.20 berechnete Reflexionsfaktor (Betrag und Phase) über der Frequenz dargestellt. Interessant ist, dass im gesamten betrachteten Frequenzbereich der Reflexionsfaktor größer als ungefähr 0.90 ist. Es kann also nicht einmal 10% der akustischen Energie den Brenner verlassen.



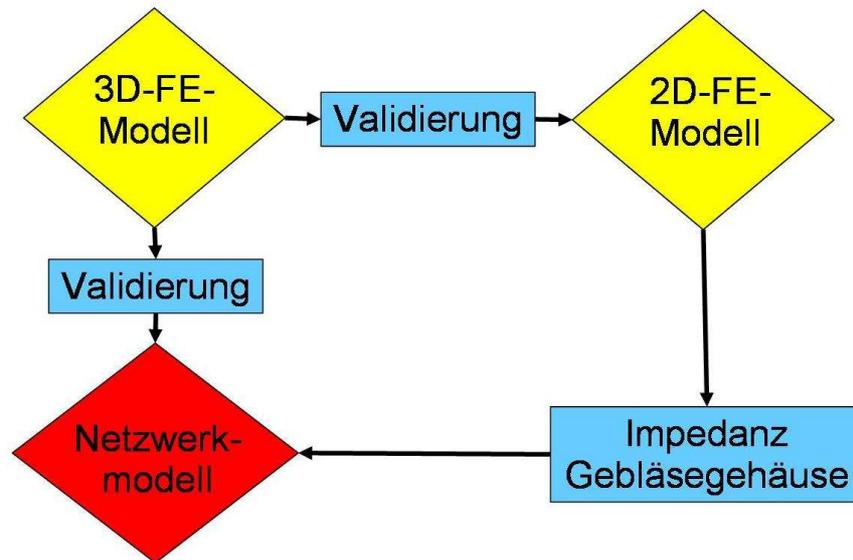
**Abbildung 8.9:** Reflexionskoeffizient am Rohraustritt (ohne Flansch,  $\delta_{eff} = 0.061$ )

## 8.4 Akustische Modellierung

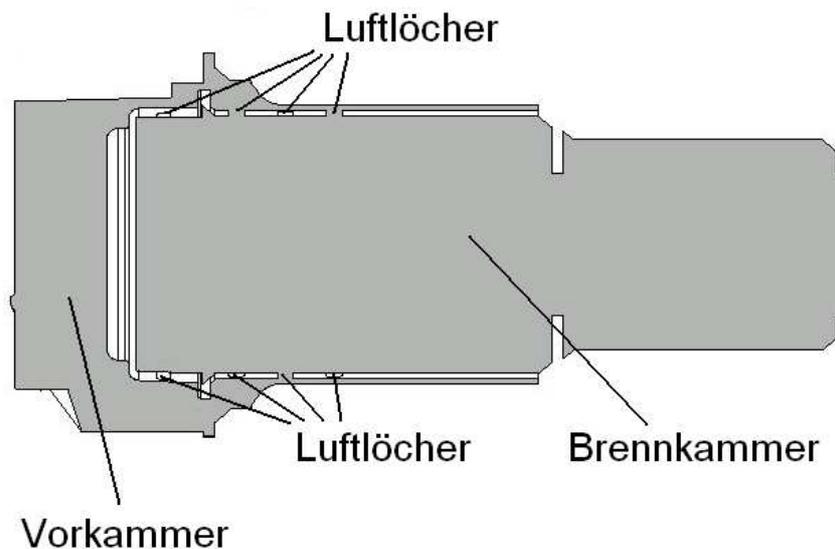
Das Ziel ist, die Schallfeldberechnung mit geringem Rechen- und Modellierungsaufwand mittels der akustischen Netzwerkmethodik durchzuführen. Im Gegensatz zum BRS-Brenner aus Kapitel 7 ist das zu untersuchende Heizgerät komplizierter aufgebaut und mit Netzwerkmodellen nur schwer zu modellieren. Wir erstellen deshalb zunächst ein dreidimensionales Modell des Heizgerätes und führen die Berechnungen mittels der FE-Methode durch. Anschließend gehen wir einen ersten Schritt zu einem vereinfachten Modell und erstellen ein zweidimensional achsensymmetrisches Modell des Heizgerätes, das ebenfalls mit der FE-Methode berechnet wird. Dieses validieren wir anhand der 3D-Rechnung und passen es entsprechend an, so dass es die Systemakustik korrekt wiedergibt. Im nächsten Schritt wird das Netzwerkmodell erstellt. Der eigentliche Brenner kann gut mit einem Netzwerk abgebildet werden, da er nur aus Rohrstücken unterschiedlichen Durchmessers besteht. Schwierig mit einem Netzwerk zu modellieren ist allerdings die Vorkammer. Daher entnehmen wir aus dem 2D-FE-Modell entsprechende Impedanzen an den Übergängen zwischen Vorkammer und Brennraum und setzen diese als Randbedingungen in das Netzwerkmodell ein. Dieses validieren wir wieder mit den 3D-FE-Ergebnissen. Ergebnis dieser Prozedur ist ein Netzwerkmodell, das mit dem 3D-FE-Modell in einem großen Frequenzbereich äquivalent ist. In Abbildung 8.10 wird das Vorgehen noch einmal mittels einem Verlaufsdigramm veranschaulicht. Im Folgenden werden wir auf die einzelnen Schritte genauer eingehen.

### 8.4.1 Zweidimensionales Modell

Die Abbildung 8.2 zeigt die Vor- und die Brennkammer des Heizgerätes und die Strömung der Luft, die durch mehrere Reihen von Luftlöchern von der Vorkammer in die Brennkammer gelangt. Ein Schnitt durch Vor- und Brennkammer ist in Abbildung 8.11 gezeigt. Deutlich zu erkennen ist, dass die Brennkammer achsensymmetrisch ist und auch die Vorkammer in guter Näherung als achsensymmetrisch angesehen werden kann. Daher wurde das in Abbil-

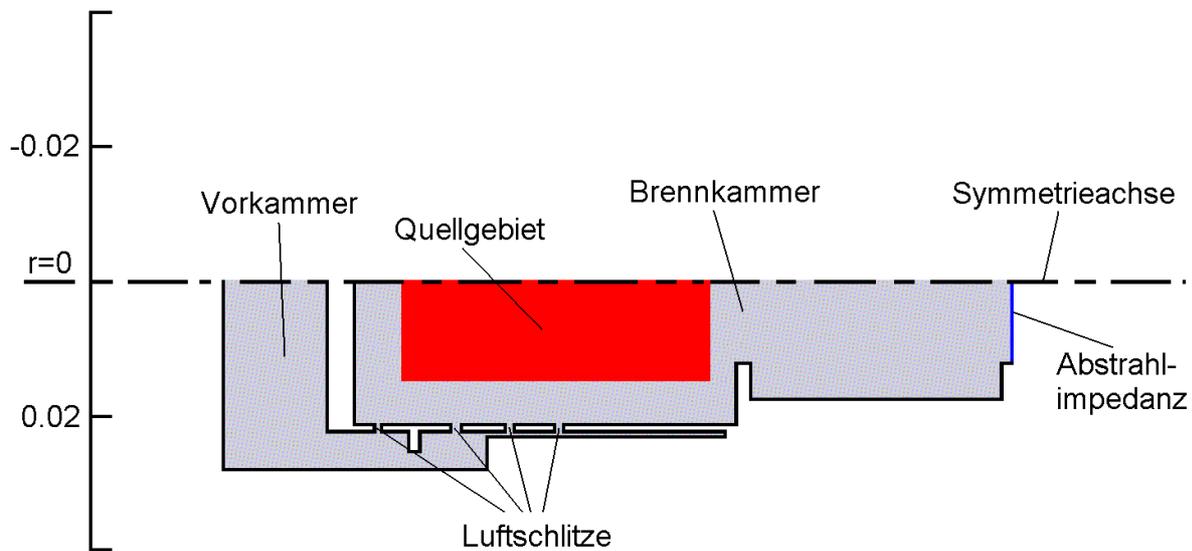


**Abbildung 8.10:** Verlaufsdiagramm des angewendeten Verfahrens



**Abbildung 8.11:** Schnitt durch Vor- und Brennkammer des Heizgerätes

Abbildung 8.12 gezeigte achsensymmetrische 2D-Modell in COMSOL implementiert. Im achsensymmetrischen Fall vereinfacht sich die zu lösende Wellengleichung zu der in Gleichung 2.23 angegebenen Form. Ein gravierender Unterschied zwischen dem dreidimensionalen Modell und dem achsensymmetrischen Modell ergibt sich aus den Löchern zwischen Vor- und Brennkam-



**Abbildung 8.12:** Achsensymmetrisches FE-Modell des Heizgerätes

mer (siehe Abbildung 8.2). Diese kann das achsensymmetrische Modell nicht nachbilden, die Übergänge zwischen Vor- und Brennkammer entsprechen hier Schlitzen, die einmal komplett um die Brennkammer gehen. Hier stimmen 3D- und 2D-Modell also nicht überein. Durch richtige Wahl der Schlitzhöhe kann allerdings die Systemakustik beider Modelle zu einer guten Übereinstimmung gebracht werden. Allerdings gestaltet sich die Bestimmung der richtigen Schlitzhöhe schwierig. Wir werden im folgenden Abschnitt versuchen, diese abzuschätzen.

#### 8.4.2 Abschätzung der äquivalenten Lochgrößen

Um 2D- und 3D-Modell in Einklang zu bekommen, ist es notwendig, die Höhe der Schlitze zwischen Vor- und Brennkammer so zu bestimmen, dass das akustische Verhalten beider Modelle übereinstimmt. Wir benötigen eine äquivalente Schlitzhöhe. Das System bestehend aus der Vorkammer und den Luftlöchern können wir vereinfacht als ein Volumen ansehen, das über eine enge Verbindung mit einem anderen Volumen verbunden ist. Eine solche Anordnung wird in der Akustik als Helmholtz-Resonator bezeichnet. Um zu einer Abschätzung der äquivalenten Schlitzhöhe zu gelangen, bedienen wir uns der

Theorie dieser Helmholtz-Resonatoren.

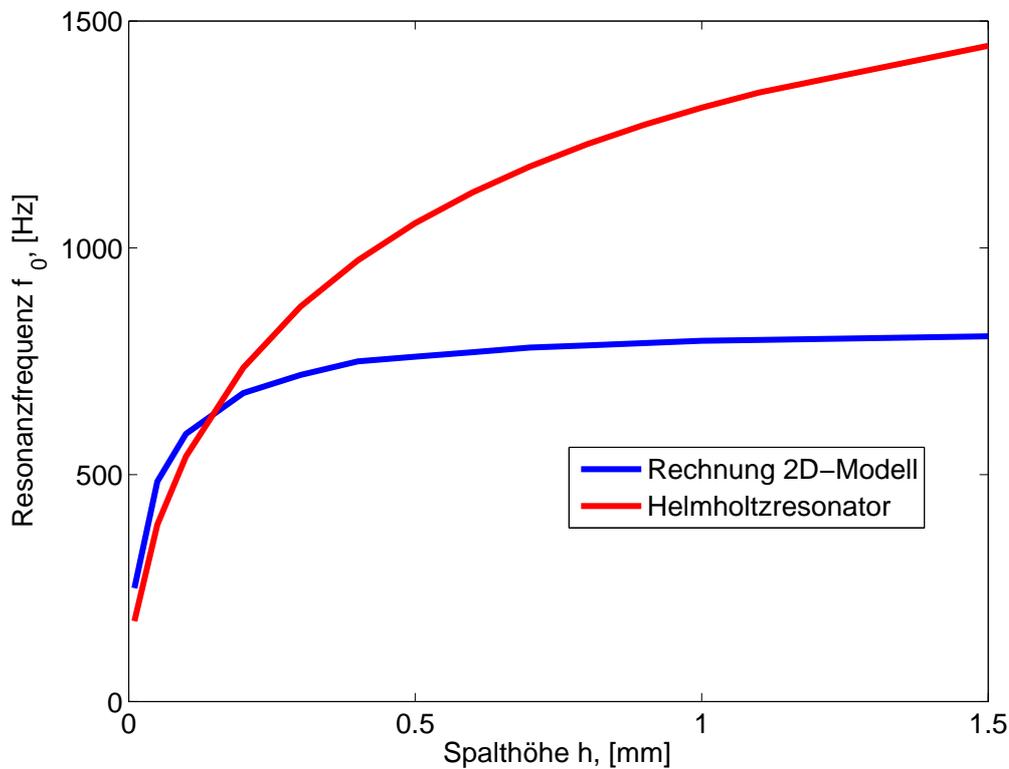
### **Helmholtz-Resonator**

Ein Helmholtz-Resonator ist ein akustischer Resonator. Er besteht aus einem Gasvolumen mit einer engen Öffnung nach außen. Durch die Elastizität des Luftvolumens im Inneren in Kombination mit der trägen Masse  $m = \rho l A$  der in der Öffnung befindlichen Luft entsteht ein mechanisches Masse-Feder-System mit einer ausgeprägten Eigenresonanz. Die Resonanzfrequenz beträgt:

$$f_0 = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A}{V(l + \delta_{eff})}} \quad (8.22)$$

Hierbei bezeichnet  $A$  die Querschnittsfläche des Resonatorhalses,  $l$  die Länge des Resonatorhalses und  $\delta_{eff}$  die Mündungskorrektur. Für diese ist hier der Wert  $\delta_{eff} = 0.85$  eines Rohres, das mit einem sehr großen Flansch endet, zu verwenden (siehe Gleichung 8.21). Genaueres zur Theorie des Helmholtzresonator findet sich zum Beispiel in [48].

Die Frage ist, ob die Vorkammer als Helmholtzresonator an der Brennkammer gesehen werden kann. Dazu wurde die Resonanzfrequenz, die sich in Abhängigkeit der Spalthöhe im 2D-Modell ergeben hat, mit der entsprechenden theoretischen Resonanzfrequenzen des Helmholtz-Resonators nach Gleichung 8.22 verglichen. Die Ergebnisse sind in Abbildung 8.13 dargestellt. Die beiden Kurven zeigen qualitativ eine Übereinstimmung und der Wertebereich des 2D-Modells wird von der theoretischen Lösung gut getroffen. Eine bessere Übereinstimmung beider Kurven kann von dieser einfachen Abschätzung allerdings nicht erwartet werden. Die theoretische Resonanzfrequenz nach Gleichung 8.22 setzt voraus, dass das Resonatorvolumen abgeschlossen ist, was im Falle der Vorkammer nicht der Fall ist. Außerdem ist die Vorkammer kompliziert geformt und weist mehrere Flächensprünge auf, wodurch die Resonanzfrequenz des Vorkammer zusätzlich beeinflusst wird.



**Abbildung 8.13:** Resonanzfrequenz des 2D-Modells in Abhängigkeit von der Spalthöhe im Vergleich mit den theoretischen Werten des Helmholtz-Resonators

#### Abschätzung der äquivalenten Spalthöhe

Damit die Ergebnisse des 2D-Modells mit dem 3D-Modell übereinstimmen, muss für das 2D-Modell eine zu den Luftlöchern im 3D-Modell äquivalente Spalthöhe ermittelt werden. Diese kann mit Gleichung 8.22 aus der Resonatortheorie bestimmt werden. Als Ansatz fordern wir, dass die Resonanzfrequenz im drei-dimensionalen Modell gleich der Resonanzfrequenz im zwei-dimensionalen Modell sein muss:

$$\frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A_{\text{Löcher}}}{V(l + \delta_{\text{Loch}})}} = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{A_{\text{Schlitz}}}{V(l + \delta_{\text{Schlitz}})}} \quad (8.23)$$

Daraus ergibt sich

$$\frac{A_{\text{Löcher}}}{(l + \delta_{\text{Loch}})} = \frac{A_{\text{Schlitz}}}{(l + \delta_{\text{Schlitz}})}, \quad (8.24)$$

und weiter

$$\frac{nd^2 \frac{\pi}{4}}{(l + \delta_{\text{Loch}})} = \frac{h\pi d_{BK}}{(L + \delta_{\text{Schlitz}})}. \quad (8.25)$$

Der Durchmesser der Löcher ist hier mit  $d$  bezeichnet,  $d_{BK}$  der Durchmesser der Brennkammer,  $n$  ist die Anzahl der Löcher und  $h$  die Schlitzhöhe. Für die Mündungskorrekturen gilt

$$\delta_{\text{Loch}} = 2 \cdot 0.85 \cdot r \quad (8.26)$$

$$\delta_{\text{Schlitz}} = 2 \cdot 0.85 \cdot h. \quad (8.27)$$

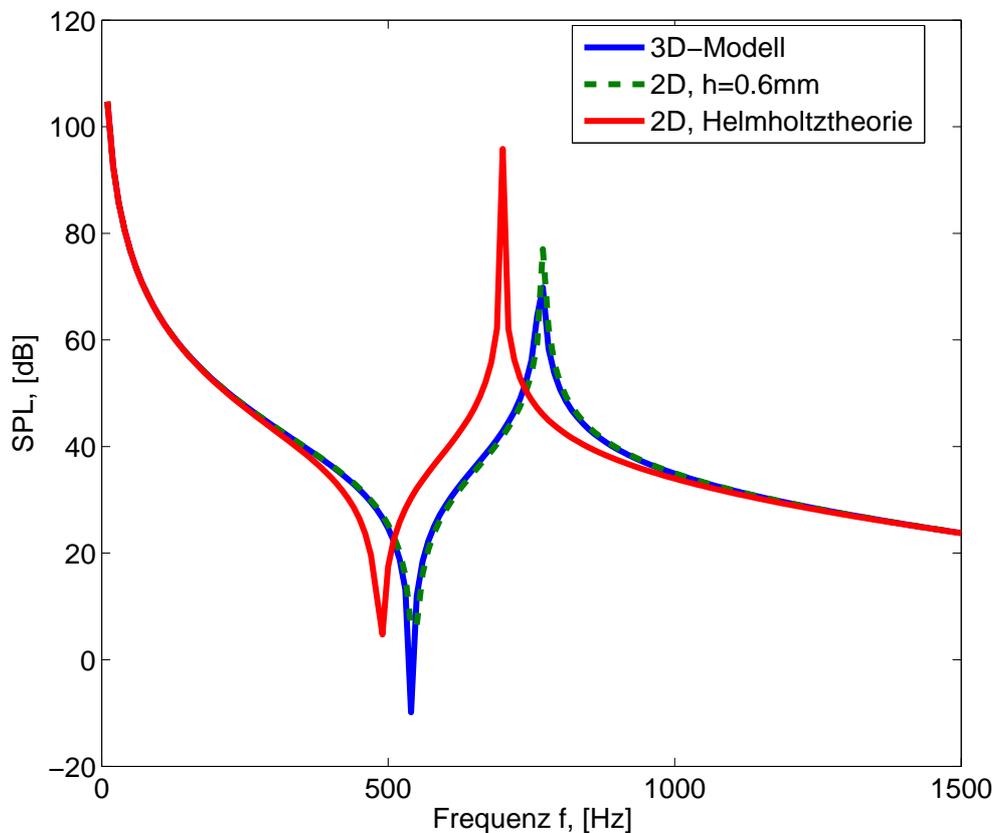
Für die Schlitzhöhe ergibt sich

$$h = \frac{nd^2 l}{4D(l + 0.85d) - nd^2 0.85}. \quad (8.28)$$

In Abbildung 8.14 ist das Ergebnis der 2D-Rechnung mit der abgeschätzten Schlitzhöhe (rot) im Vergleich mit dem 3D-Ergebnis (blau) gezeigt. Zusätzlich ist auch noch das 2D-Ergebnis mit der empirisch ermittelten optimalen Höhe gezeigt (grün).

### 8.4.3 Vergleich der zwei- und dreidimensionalen Rechnung

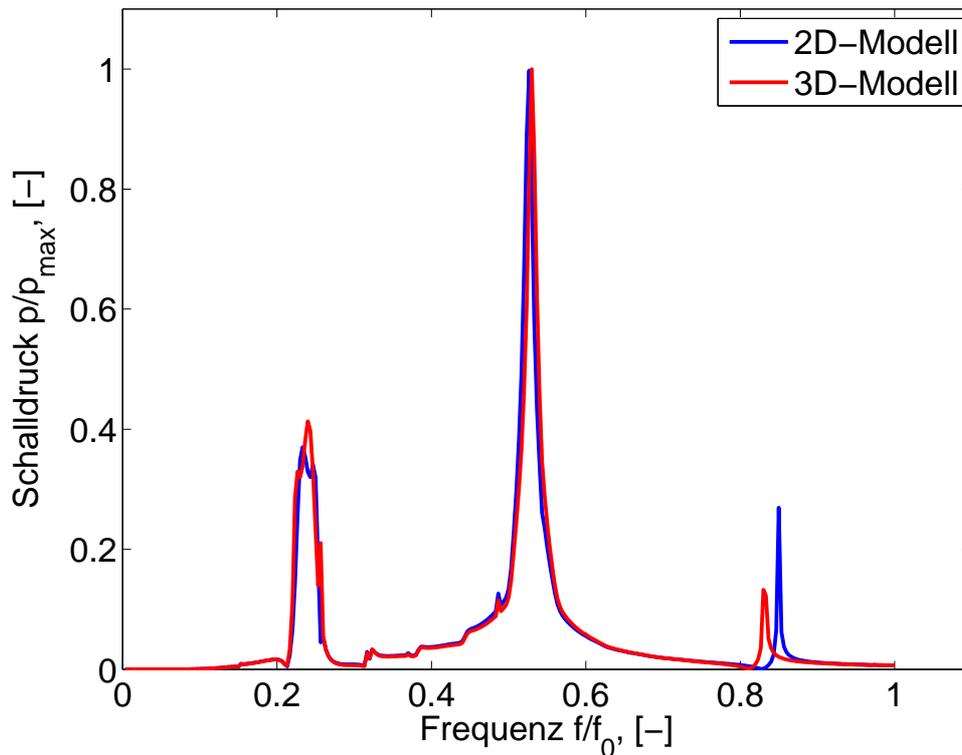
Mittels der Abschätzungen kann die äquivalente Spalthöhe größenordnungsmäßig erfasst werden. Der genaue Wert muss aber durch probieren und manuelle Optimierung ermittelt werden. In Abbildung 8.15 ist ein Vergleich von optimal angepasstem 2D-Modell und der 3D-Simulation zu sehen. Das simulierte System ist das aus Abbildung 8.12. Für den Vergleich wurden beide Systeme mit einer über alle Frequenzen konstanten Amplitude angeregt. Aufgetragen ist der Absolutwert des Schalldrucks am Brennerende über der Frequenz. Bis über 2000 Hz sind beide Kurven nahezu identisch. Insbesondere die zwei Resonanzfrequenzen bei ungefähr 750 und 1600 Hz gibt das 2D-Modell korrekt wieder. Erst bei der Resonanz im Bereich von 2500 Hz tritt ein leichter Unterschied in der Peak-Frequenz auf.



**Abbildung 8.14:** Vergleich des Schalldruckspektrums des 3D-Modells mit dem 2D-Modell, Schlitzhöhe  $h = 0.24\text{mm}$  aus der Resonatortheorie und der empirischen optimalen Höhe  $h = 0.6\text{mm}$

#### 8.4.4 Netzwerkmodell

Die Brennkammer des Heizgerätes ist einfach aufgebaut, sie besteht im Wesentlichen aus Rohrstücken und Flächensprüngen. Kompliziert ist die Verbindung über die Luftlöcher zur Vorkammer und deren Modellierung. Vor- und Brennkammer und deren Durchströmung sind in Abbildung 8.2 zu sehen. Um die Modellierung zu vereinfachen, werden wir einen hybriden Ansatz verwenden. Die Brennkammer wird komplett mit dem Netzwerk modelliert. Die Vorkammer jedoch wird nicht extra modelliert, sondern wird durch eine entsprechende Impedanzrandbedingung in das Netzwerkmodell einge-

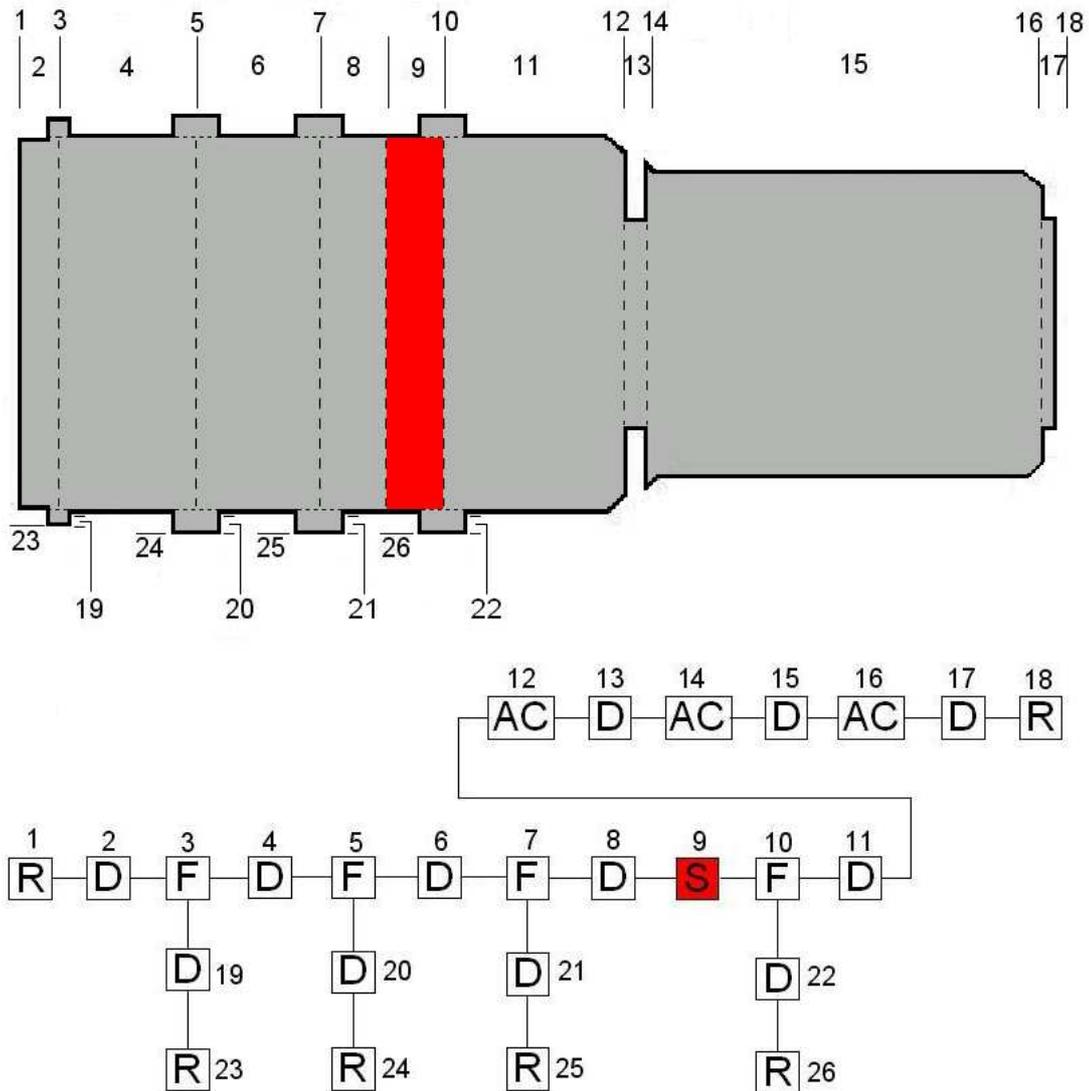


**Abbildung 8.15:** Vergleich von 2D- und 3D-Simulation des Heizgerätes

bracht. Dazu wurde die frequenzabhängige Impedanz aus der zweidimensionalen FE-Berechnung entnommen. Das entsprechende Netzwerkmodell ist in Abbildung 8.16 gezeigt. Das auf diese Weise berechnete Schalldruckspektrum ist in Abbildung 8.17 im Vergleich mit dem FE-Ergebnis dargestellt. Bis ca. 700 Hz ist das Netzwerkmodell (blau) identisch mit dem FE-Ergebnis (rot), das zum Vergleich mit eingezeichnet ist. Auch bei höheren Frequenzen bleibt die Übereinstimmung sehr gut. Nur die Resonanzpeaks sind im Netzwerkmodell deutlich weniger ausgeprägt als im FE-Modell.

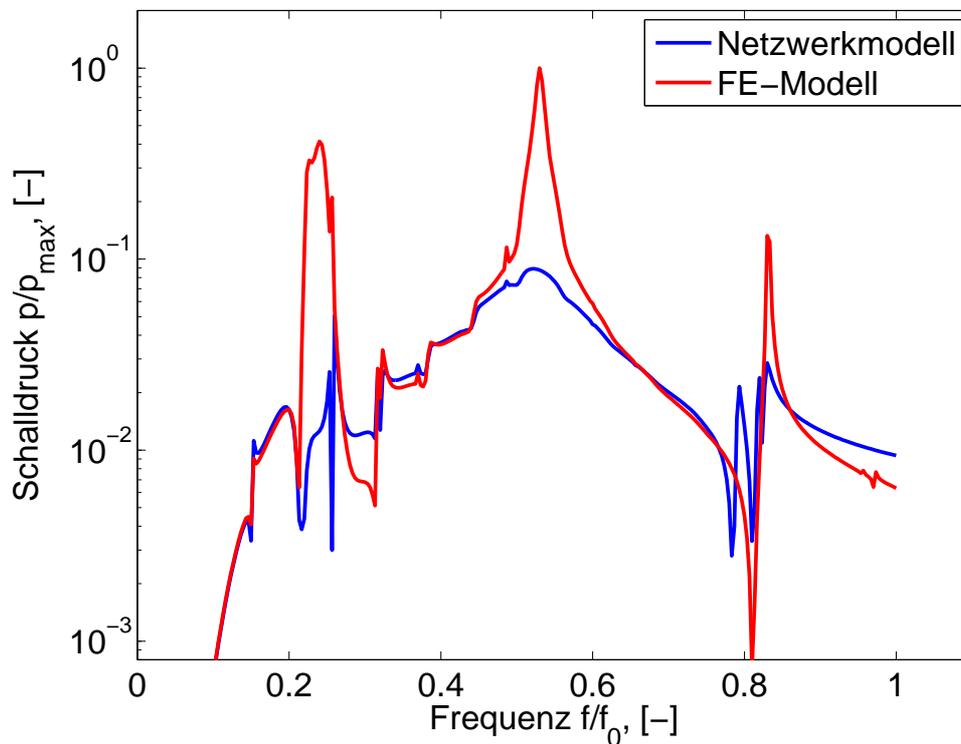
## 8.5 Ergebnis

Das mit diesem Vorgehen aufgebaute Netzwerkmodell werden wir jetzt dazu benutzen, um das emittierte Schallspektrum des Heizgerätes zu berechnen. Die Parameter der einzelnen Elemente können aus der Tabelle 8.1 entnom-



**Abbildung 8.16:** Netzwerkmodell des Heizgerätes

men werden. Da die Flächensprünge 12 und 14 mit nur sehr kurzem Abstand aufeinander folgen, ist es nur schwer möglich, für beide einen einzelnen Verlustbeiwert zu bestimmen. Daher wurde der Wert über beide bestimmt, dieser aber in dem Modell vollständig dem Flächensprung 14 zugewiesen (dem Flächensprung 12 entsprechend der Wert 0). Die Verlustbeiwerte in den Rohren 19-20, also in den Übergängen von der Vorkammer in das Plenum erscheinen auf den ersten Blick hoch. Werden diese allerdings mit Literaturwerten für Blenden mit großem Flächenverhältnis (um nichts anderes



**Abbildung 8.17:** Schalldruck in der Austrittsebene hervorgerufen durch turbulenten Verbrennungslärm, Vergleich von Netzwerk- und FE-Simulation

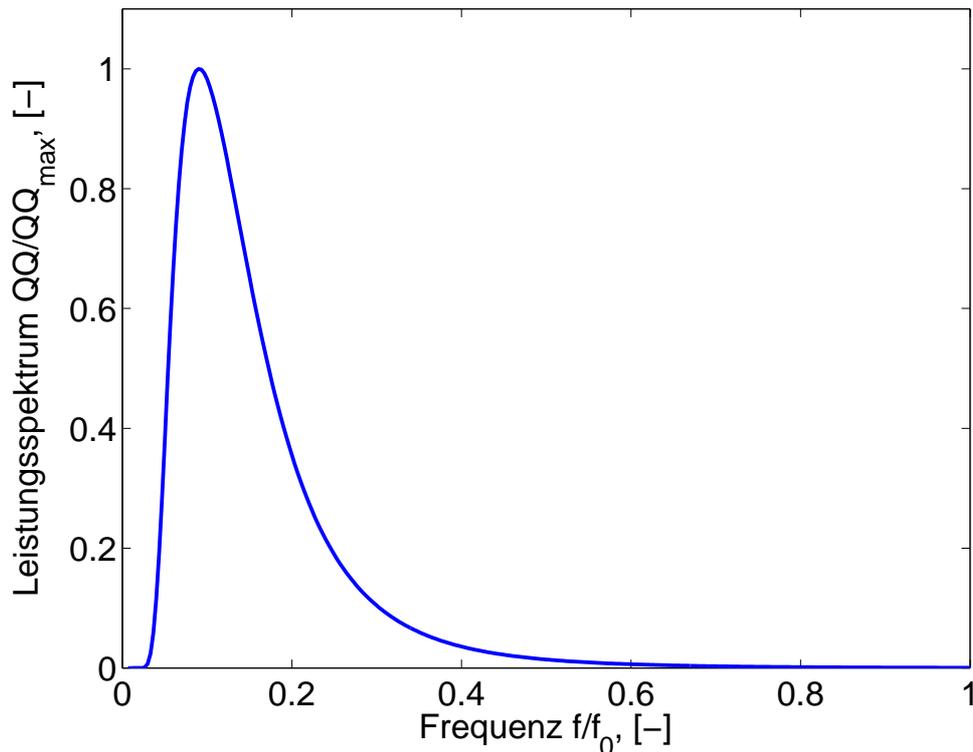
handelt es sich in unserem Fall) [2] verglichen, so zeigt sich, dass diese Werte im gleichen Größenbereich oder noch darüber liegen. Für die Lärmberechnung muss mittels des Lärmmodells aus Kapitel 5 das Quellspektrum aus CFD-Daten berechnet werden. Die notwendigen CFD-Simulation wurden mit dem kommerziellen Programmpaket ANSYS CFX Version 11.0 durchgeführt. Als Turbulenzmodell wurde das  $k-\omega$ -SST-Modell nach Menter [46] verwendet und als Verbrennungsmodell das in Kapitel 4.2.5 vorgestellte Eddy-Dissipation-Modell (EDM). Das Rechengitter bestand aus 4,7 Millionen Knoten und 6 Millionen Elementen.

Das berechnete Quellspektrum (siehe Abbildung 8.18) steigt bis zu seinem Maximum bei der entdimensionierten Frequenz 0.09 stark an und fällt dann mit höher werdender Frequenz immer langsamer ab. Dieses Quellspektrum wird mittels den Rankine-Hugoniot-Bedingungen 2.70 in

Nr.	Typ	l	d	$\rho$	c	$\zeta$
1	geschlossenes Ende	0.0	32mm	$0.33 \text{ kg/m}^3$	788 m/s	-
2	Rohr	5.2mm	32mm	$0.33 \text{ kg/m}^3$	788 m/s	-
3	Verzweigung	0mm	32mm	$0.33 \text{ kg/m}^3$	788 m/s	-
4	Rohr	13.3mm	32mm	$0.33 \text{ kg/m}^3$	788 m/s	-
5	Verzweigung	0mm	48mm	$0.33 \text{ kg/m}^3$	788 m/s	-
6	Rohr	8mm	48mm	$0.33 \text{ kg/m}^3$	788 m/s	-
7	Verzweigung	0mm	48mm	$0.33 \text{ kg/m}^3$	788 m/s	-
8	Rohr	8mm	48mm	$0.33 \text{ kg/m}^3$	788 m/s	-
9	Quelle	0mm	48mm	$0.21 \text{ kg/m}^3$	859 m/s	-
10	Verzweigung	0mm	48mm	$0.21 \text{ kg/m}^3$	859 m/s	-
11	Rohr	29.5mm	48mm	$0.21 \text{ kg/m}^3$	859 m/s	-
12	Flächensprung	0mm	13.5mm	$0.21 \text{ kg/m}^3$	859 m/s	0
13	Rohr	2mm	13.5mm	$0.21 \text{ kg/m}^3$	859 m/s	-
14	Flächensprung	0mm	19.5mm	$0.21 \text{ kg/m}^3$	859 m/s	0.5
15	Rohr	42.6mm	19.5mm	$0.21 \text{ kg/m}^3$	859 m/s	-
16	Flächensprung	0mm	13.5mm	$0.21 \text{ kg/m}^3$	859 m/s	0.2
17	Rohr	1mm	13.5mm	$0.21 \text{ kg/m}^3$	859 m/s	-
18	Randbedingung	0mm	13.5	$0.21 \text{ kg/m}^3$	859 m/s	-
19	Rohr	1mm	0.3mm	$1.2 \text{ kg/m}^3$	343 m/s	2.7
20	Rohr	1mm	1mm	$1.2 \text{ kg/m}^3$	343 m/s	5.0
21	Rohr	1mm	1mm	$1.2 \text{ kg/m}^3$	343 m/s	5.0
22	Rohr	1mm	1mm	$1.2 \text{ kg/m}^3$	343 m/s	5.0
23	Randbedingung	0mm	0.3mm	$1.2 \text{ kg/m}^3$	343 m/s	-
24	Randbedingung	0mm	1mm	$1.2 \text{ kg/m}^3$	343 m/s	-
25	Randbedingung	0mm	1mm	$1.2 \text{ kg/m}^3$	343 m/s	-
26	Randbedingung	0mm	1mm	$1.2 \text{ kg/m}^3$	343 m/s	-

**Tabelle 8.1:** Parameter des Netzwerkmodelles

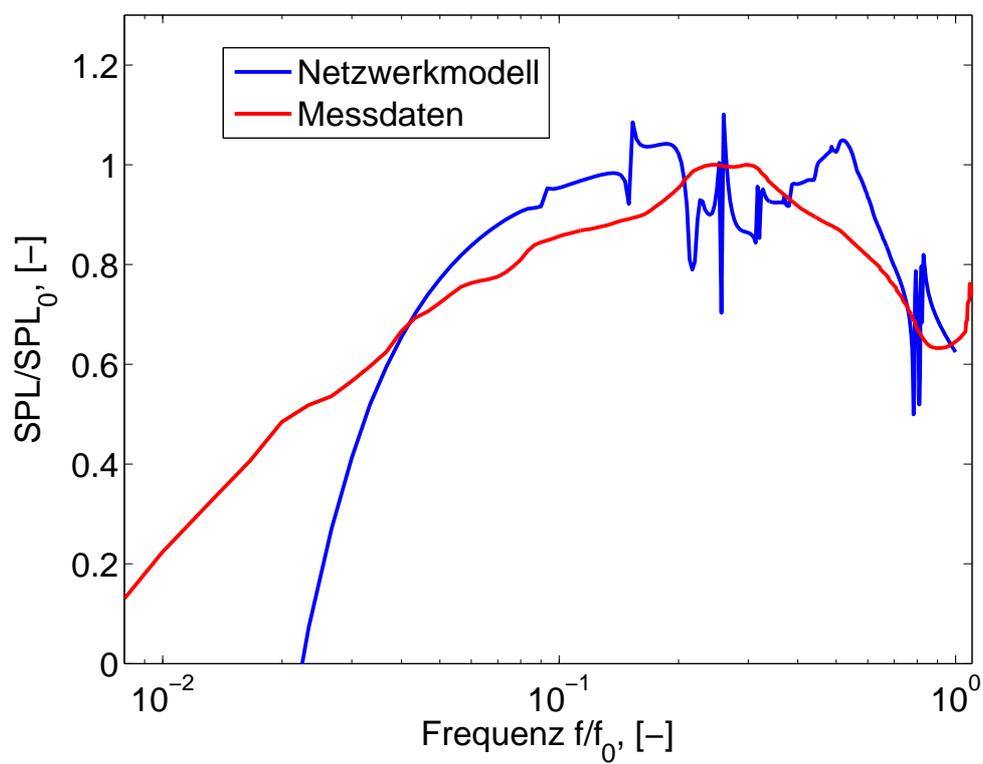
das Netzwerkmodell als Quelle eingebracht. Die Simulation liefert dann die Geschwindigkeits- und Druckwerte an den einzelnen Knoten. Mit den Werten am Austritt kann mittels der in Kapitel 8.3.2 hergeleiteten Beziehung 8.10 das Schalldruckspektrum im Freifeld berechnet werden. Ergebnis dieser Berechnung ist das in Abbildung 8.19 gezeigte Spektrum (blau), zum Vergleich ist in rot das gemessene Spektrum gezeigt. Da im Gegensatz zur Realität in dieser Rechnung keinerlei dämpfende Effekte berücksichtigt wurden, zeigen sich einige starke Resonanzeffekte in den Rechendaten. Qualitativ zeigt die Simulation eine gute Übereinstimmung mit den Messdaten. Wenn wir das Ergebnisspektrum mit dem Quellspektrum in Abbildung 8.18 vergleichen,



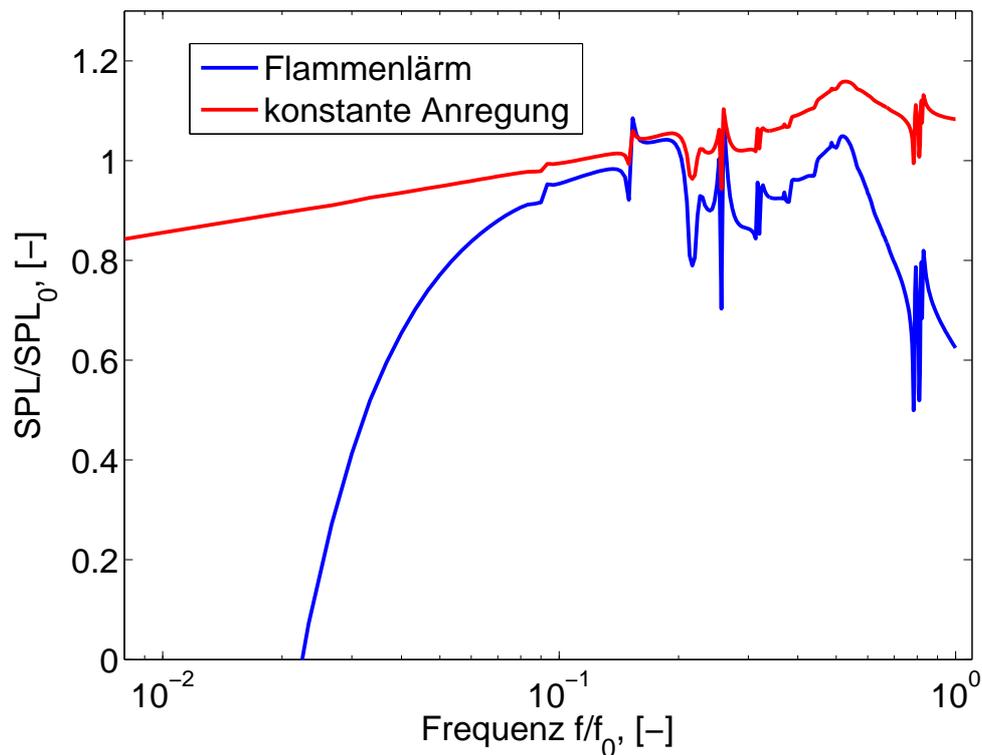
**Abbildung 8.18:** Quellspektrum des Heizgerätes

fällt auf, dass der Schalldruck die höchsten Werte erreicht, wenn das Quellspektrum schon wieder stark abgefallen ist. Das hat zwei Ursachen: Zum einen beeinflusst die Systemakustik, wieviel akustische Leistung eine Quelle abstrahlen kann (siehe Kapitel 3). Der andere Grund ist in der Helmholtz-Gleichung 2.20 zu finden. Diese beschreibt das Schallfeld hervorgerufen durch eine thermoakustische Quelle. Der Quellterm auf der rechten Seite beinhaltet die Kreisfrequenz  $\omega$ , wodurch bei höheren Frequenzen relativ gesehen mehr Lärm abgestrahlt wird. Das hat zur Folge, dass das Maximum des emittierten Schalleistungsspektrums bei einer höheren Frequenz liegt, als das Maximum des Quellspektrums. Wenn statt des echten Quellspektrums ein konstantes Quellspektrum in der Lärmberechnung verwendet wird, wird dieser Effekt deutlich, siehe Abbildung 8.20, rote Kurve. Zum Vergleich ist noch einmal das originale Schalldruckspektrum gezeigt (blau). Deutlich zu sehen ist, dass das rote Spektrum mit der Frequenz ansteigt.

Berücksichtigen wir im Netzwerkmodell dämpfende Effekte mittels dem

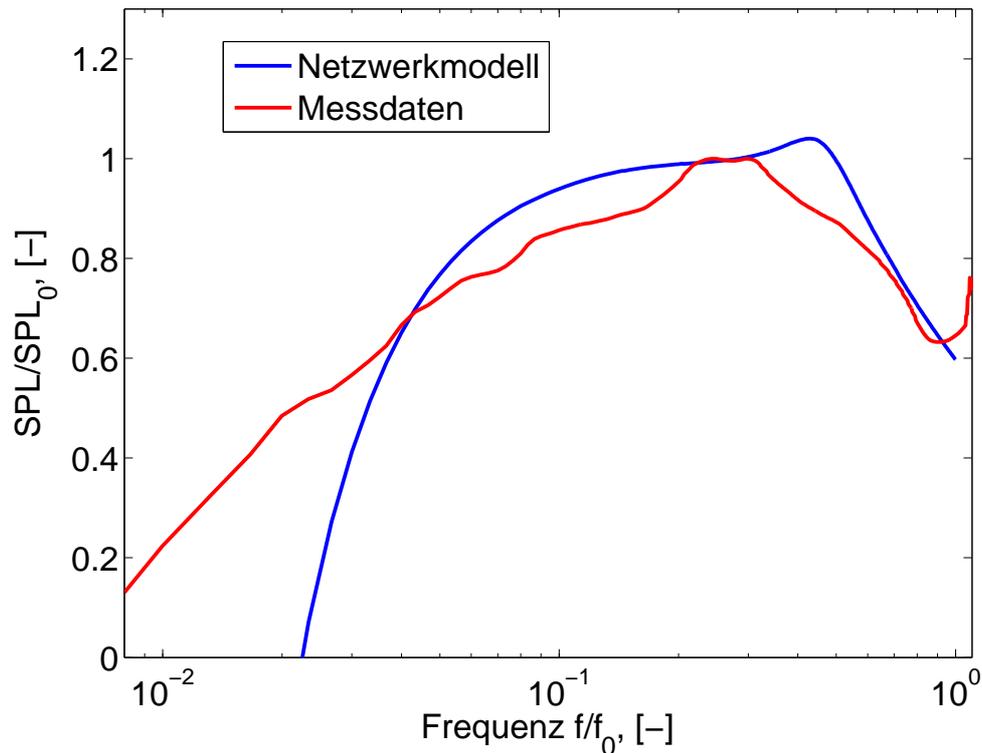


**Abbildung 8.19:** Vergleich zwischen Netzwerkergebnis und Messung



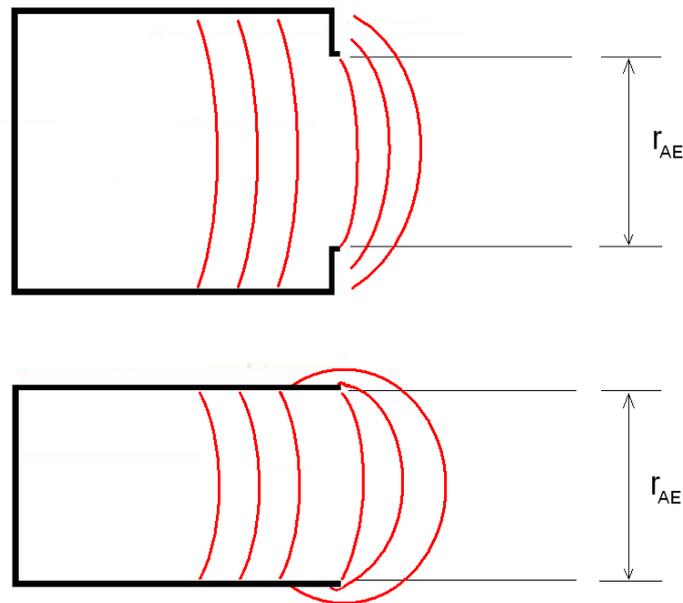
**Abbildung 8.20:** Emittiertes Schalldruckspektrum bei Annahme eines konstanten Quellspektrums

in Kapitel 6.2.2 vorgestellten  $l - \zeta$ -Modell (Gleichung 6.20), so verschwinden alle feinen Resonanzspitzen und es bleibt nur die relativ breite Resonanz um die Frequenz  $f/f_0 = 0.43$ . Bei dem gemessenen Spektrum liegt das Maximum um die Frequenz  $f/f_0 = 0.28$  und damit deutlich tiefer als das berechnete Maximum. Dieser Unterschied stammt zumindest teilweise von der schon im Kapitel 7.1.2 angesprochenen Endkorrektur. In der verwendeten Impedanz-Randbedingung 8.20 ist zwar eine Endkorrektur berücksichtigt, diese gilt allerdings nur für ein einfaches Rohr. Da bei der vorliegenden Geometrie kurz vor dem Austritt ein Flächensprung erfolgt, ändert sich die Endkorrektur stark. In der Abbildung 8.22 ist ein Rohr mit Flächensprung am Ende und ein einfaches Rohr ohne Flächensprung skizziert. Beide Rohre weisen den gleichen Austrittsradius  $r_{AE}$  auf. Der Resonanzpeak der  $\lambda/4$ -Mode beider Rohre ist in Abbildung 8.23 zu sehen. Die Berechnung erfolgte mit COMSOL. Das erste ist ein einfaches Rohr (blau), das andere besitzt die gleiche



**Abbildung 8.21:** Vergleich Netzwerk (gedämpft) und Messung

Blende am Austritt wie das Heizgerät. Die Resonanzfrequenz des eingeschnürten Rohres liegt deutlich unter der des normalen Rohres. Berechnen wir aus beiden Frequenzen die Endkorrektur  $\delta_{eff}$ , so erhalten wir für das normale Rohr  $\delta_{eff} = 0.6126 \cdot r_{AE}$ , was sehr gut mit dem theoretischen Wert  $\delta_{eff} = 0.6 \cdot r_{AE}$  [30] übereinstimmt. Für das abgeschnürte Rohr erhalten wir  $\delta_{eff} = 2.7546 \cdot r_{AE}$  also einen wesentlich höheren Wert. Verwenden wir den neu erhaltenen Wert für die Endkorrektur des Brenners, so ergibt sich das Ergebnis in Abbildung 8.24. Die Peakfrequenz des Simulationsergebnisses ist deutlich nach unten gerutscht und liegt nur knapp über dem gemessen. Der Vergleich der Ergebnisse in den Abbildungen 8.21 und 8.24 und die Ursache in Form der unterschiedlichen Endkorrektur zeigt auch, welchen starken Einfluss die Formgebung des Auslasses auf die Lärmemission hat. Durch die Einschnürung wird die Resonanzfrequenz des Systems herabgesetzt, wodurch sich auch das Maximum des emittierten Schalldruckspektrums nach unten verschiebt. Dadurch kann sich die integrale Gesamtemission



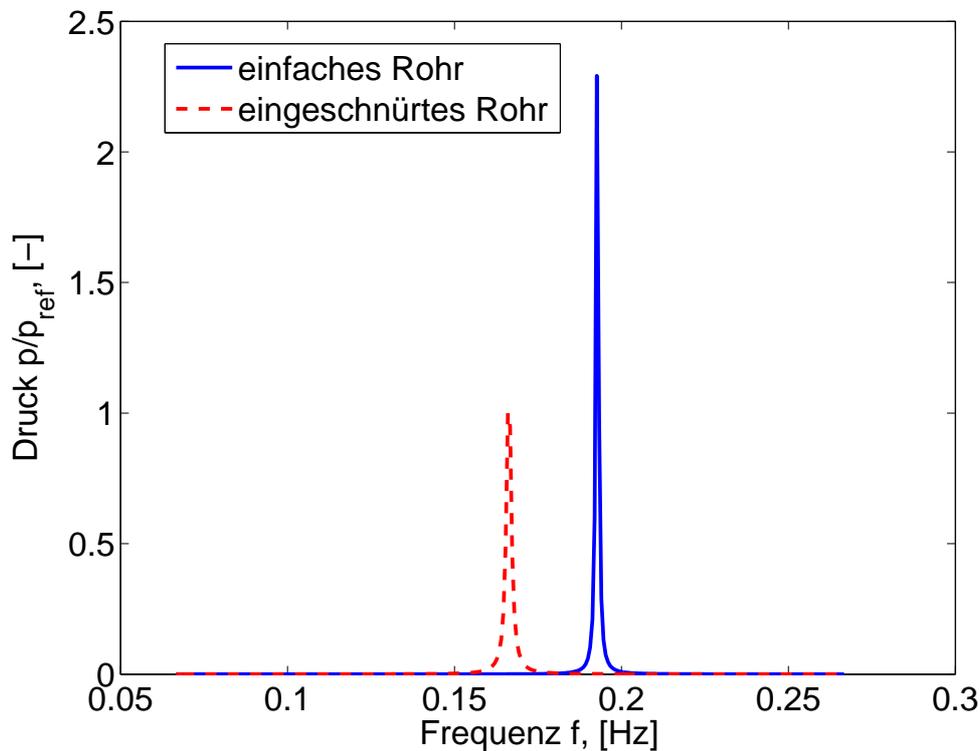
**Abbildung 8.22:** Rohr mit einer Einschnürung am Austritt (äquivalent zum Heizgerät) und einfaches Rohr mit gleichem Austrittsradius  $r_{AE}$

verringern. Da tiefere Frequenzen vom menschlichen Gehör außerdem als weniger störend empfunden werden, wird dadurch der Lärm subjektiv leiser. Allerdings kann höher-frequenter Lärm besser mit Schalldämpfern gedämmt werden, weshalb auch eine Verschiebung der Emission zu hohen Frequenzen hilfreich sein kann. Somit ist die Gestaltung des Auslasses ein möglicher Ansatzpunkt für eine lärmtechnische Optimierung des Heizgerätes.

## 8.6 Interpretation

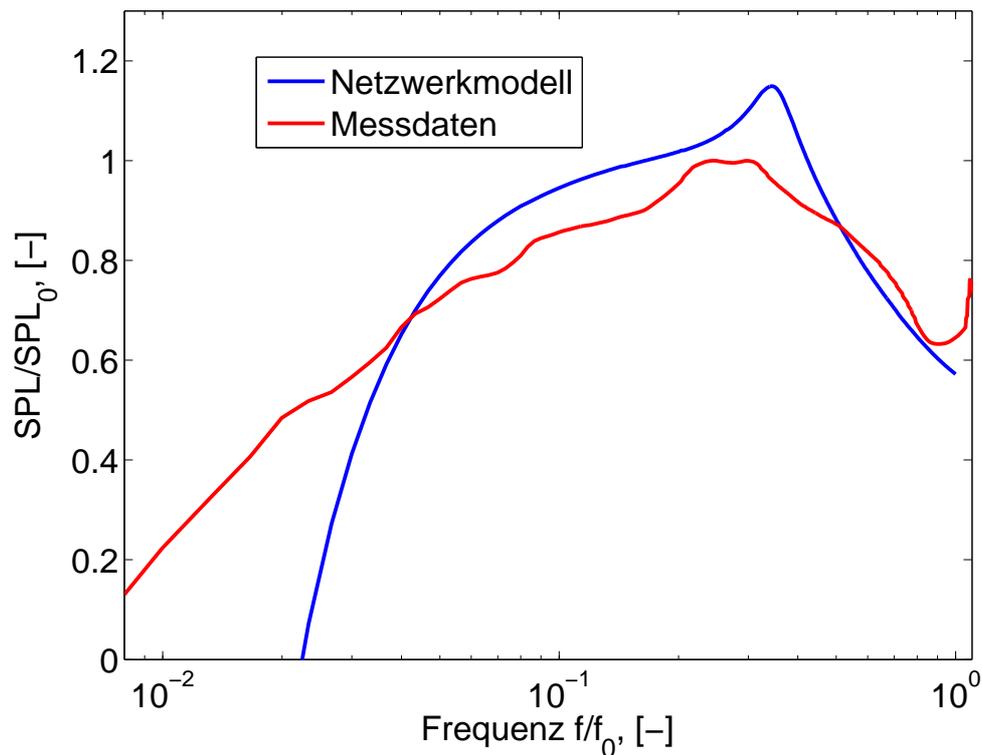
Das Spektrum 8.24 liegt über einen großen Frequenzbereich über dem gemessenen Spektrum. Im Folgenden werden die möglichen Gründe analysiert.

Zur Berechnung des Verbrennungslärms im Heizgerät wurde ein Modell verwendet, das ursprünglich für Vormischflammen entwickelt worden ist. In Kapitel 5.5 konnten wir zeigen, dass das Lärmmodell bei großen



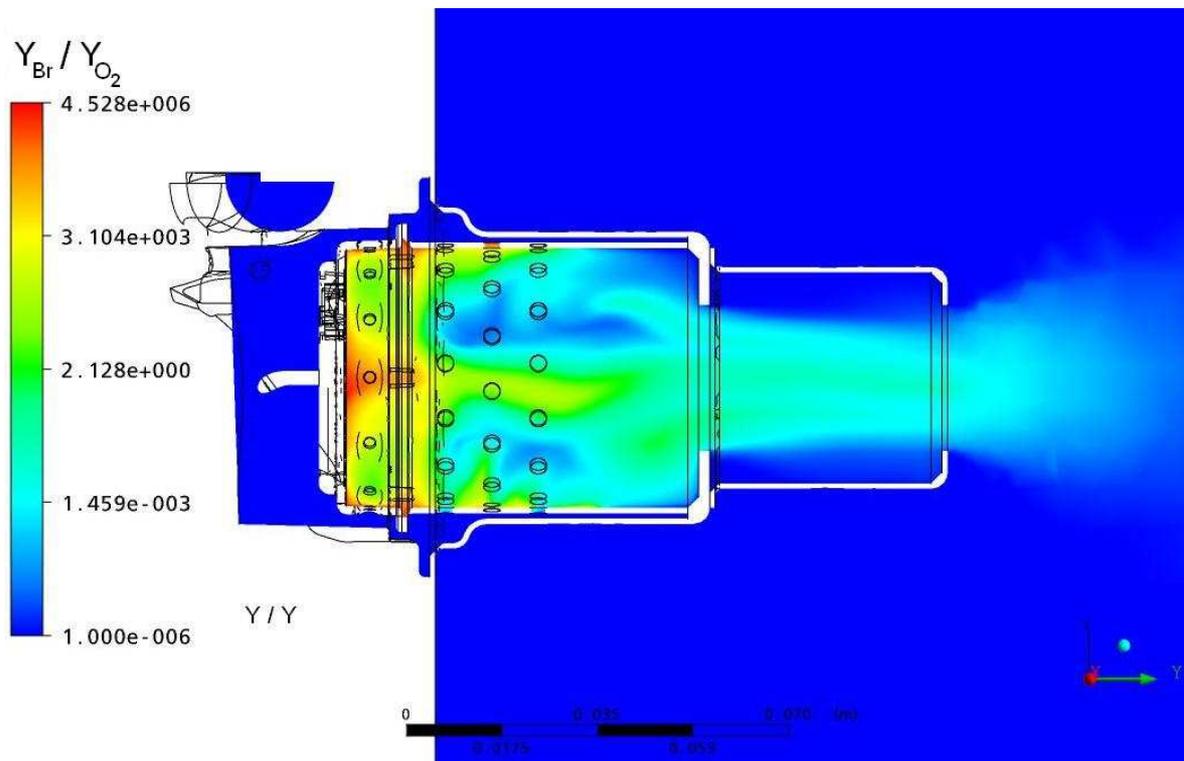
**Abbildung 8.23:** Vergleich der Resonanzfrequenzen zweier gleich langer Rohre bei unterschiedlichem Austritt; als Referenzdruck  $p_{ref}$  wurde der maximale Wert des eingeschnürten Rohres verwendet

Damköhler-Zahlen auch für Diffusionsflammen gültig ist. Außerdem wurden die Eingangsdaten von einer CFD-Berechnung geliefert, bei der, durch die Verwendung des Eddy-Dissipation-Modells, der Diffusionscharakter der Flamme korrekt berücksichtigt wurde. Durch die Annahme einer sehr großen Damköhler-Zahl wird die Amplitudenskalierung  $C_s$  (Gleichung 5.15) auf ihren Maximalwert festgesetzt. Das zu hohe Spektrum deutet darauf hin, dass dieser Maximalwert nicht immer zutreffend ist. Es gibt also in der Flamme auch Bereiche vorgemischter Verbrennung mit niedrigeren Damköhler-Zahlen. Im Heizgerät liegt daher stellenweise auch eine teilvorgemischte Verbrennung vor. Dies zeigen auch die Ergebnisse der CFD-Simulation. Das Verhältnis von Brennstoffmassenbruch zu Sauerstoffmassenbruch (siehe Abbildung 8.25) zeigt, dass im hinteren Teil des Brenners teilweise eine Mischung von Brennstoff und Luft vorliegt und sogar noch unverbrannter Brennstoff das Gerät



**Abbildung 8.24:** Ergebnis der Netzwerkberechnung mit korrekter Endkorrektur

verlässt. Um den Einfluss der Damköhler-Zahl auf das Quellspektrum genauer zu untersuchen, wird es noch einmal für kleinere, aber weiterhin konstante Damköhler-Zahlen berechnet. In Abbildung 8.26 sind die Quellspektren für die drei Damköhler-Zahlen  $Da = 10$ ,  $Da = 1$  und  $Da = 0.5$  zu sehen. Nicht eingezeichnet ist das ursprüngliche Quellspektrum, das unter der Annahme einer extrem großen Damköhler-Zahl  $Da \gg 1$  berechnet wurde, da es mit dem Spektrum für  $Da = 10$  fast identisch ist. Deutlich zu sehen ist, dass mit der Damköhler-Zahl sowohl die Peakfrequenz, als auch die Amplitude sinkt. Das Absinken der Amplitude wird sofort klar, wenn wir noch einmal die Abhängigkeit der Amplitudenskalierung  $C_S$  von der Damköhler-Zahl betrachten (siehe Abbildung 5.1). Um das Absinken der Peakfrequenz zu erklären betrachten wir die von Winkler et al. [90] angegebene Proportionalität für die



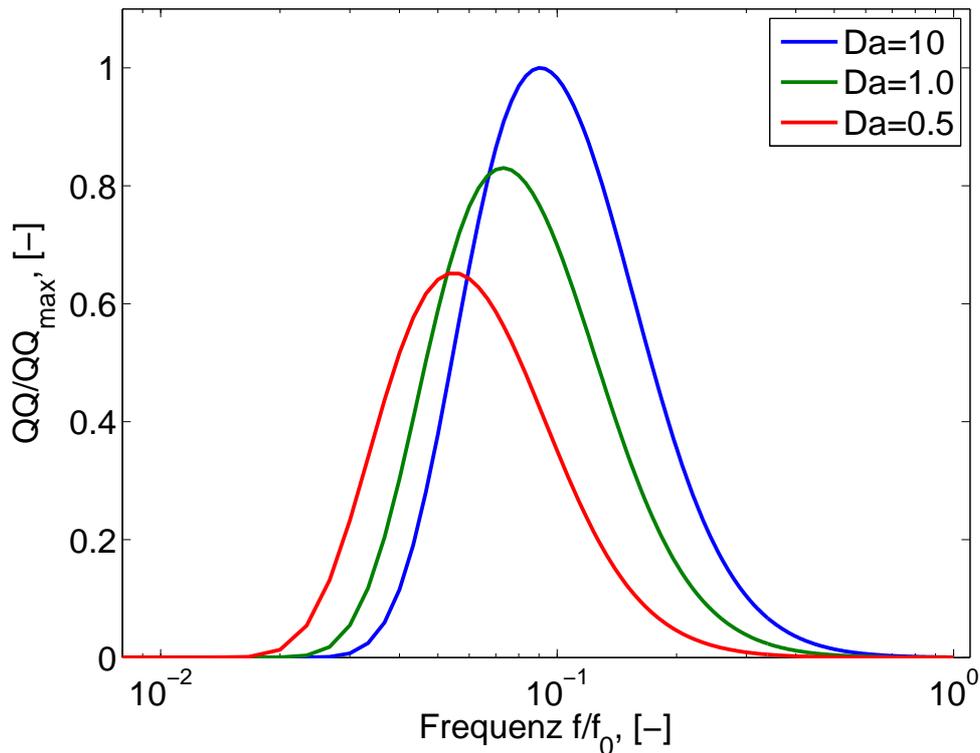
**Abbildung 8.25:** Verhältnis von Brennstoffmassenbruch  $Y_{Br}$  zu Sauerstoffmassenbruch  $Y_{O_2}$  als Maß für die Vorgemischtheit

Peakfrequenz  $f_{peak}$

$$f_{peak} \propto \frac{\delta_t}{s_t} = \frac{s_l + v' (1 + Da^{-2})^{-\frac{1}{4}}}{\delta_l + L (1 + Da^{-2})^{\frac{1}{4}}}, \quad (8.29)$$

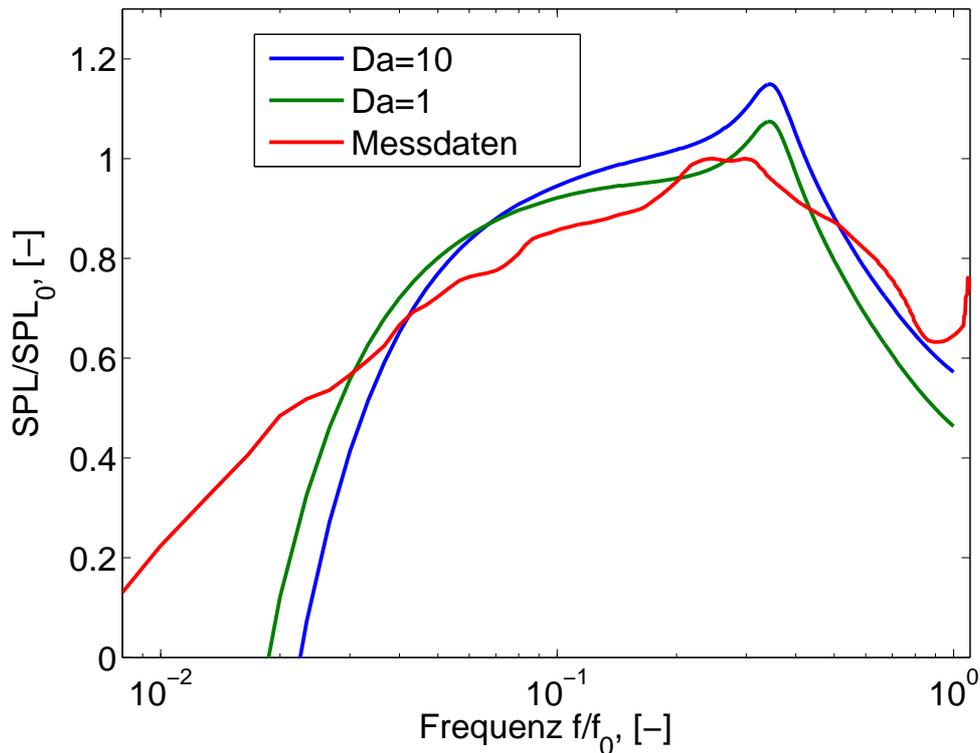
wobei hier noch die Beziehungen 4.31 und 4.32 für die turbulente Brenngeschwindigkeit  $s_t$  und Flammendicke  $\delta_t$  verwendet wurden. Für große Damköhler-Zahlen geht daher die Peakfrequenz  $f_{peak}$  gegen den festen Wert  $(s_l + v')/(\delta_l + L)$  und mit kleiner werdender Damköhler-Zahl sinkt die Peakfrequenz.

Verwenden wir das Quellspektrum, das wir für die Damköhler-Zahl  $Da = 1$  erhalten haben, zur Berechnung der Schallemission des Heizgerätes, so erhalten wir das in Abbildung 8.27 gezeigte Ergebnis. Im Gegensatz zu dem ursprünglichen Ergebnis (blau dargestellt) ist das neue Spektrum (rot darge-



**Abbildung 8.26:** Vergleich der Quellspektren bei verschiedenen Damköhler-Zahlen

stellt) über einen großen Frequenzbereich deutlich nach unten verschoben. Nur bei sehr niedrigen Frequenzen unterhalb von  $200\text{ Hz}$  liegt die Amplitude höher. Dieses Verhalten wird durch die hin zu niedrigeren Frequenzen verschobenen Peakfrequenzen hervorgerufen. Dieser Vergleich zeigt, dass die Annahme einer konstant sehr groß angenommenen Damköhler-Zahl nicht überall in der Flamme gerechtfertigt ist. Es existieren Gebiete, in denen die Reaktionsgeschwindigkeit nicht als unendlich schnell angenommen werden darf. Trotzdem zeigt der Vergleich zwischen der berechneten Lärmemission und der Messung eine akzeptable Übereinstimmung. Besonders betont muss hier noch werden, dass im Gegensatz zum BRS-Brenner keinerlei gemessene Reflexionsfaktoren existieren und daher auf analytische, bzw. berechnete Werte zurückgegriffen werden musste. Da eine Simulation immer nur so gut sein kann wie die verwendeten Randbedingungen, können wir von einer guten Vorhersage des entwickelten Verfahrens sprechen.



**Abbildung 8.27:** Vergleich der Spektren berechnet mit unterschiedlicher Damköhler-Zahl

## 8.7 Möglichkeiten zur Verringerung der Lärmemission

In Kapitel 3 haben wir den Einfluss des Einschlusses auf die Schallabstrahlung einer Flamme untersucht. Als Ergebnis haben wir für die emittierte Schallleistung den Zusammenhang

$$P = \frac{1}{2} \left| \frac{Z_1}{Z_1 - Z_2} \right|^2 \operatorname{Re}(Z_2) \left( \frac{\gamma - 1}{\rho_1 c_1^2} q'_F \right)^2 A$$

(Gleichung 3.43) gefunden. Danach haben wir zwei Ansatzpunkte um die abgegebene akustische Leistung des Heizgerätes zu verringern. Zum einen können wir versuchen, die Wärmefreisetzungsschwankungen  $q'_F$  und damit die Lärmproduktion der Flamme direkt zu verringern. Die andere Möglichkeit ist, die Impedanzen  $Z_1, Z_2$  vor und hinter der Flamme zu verändern. Genauer gesagt, wir müssen die Akustik des Systems so gestalten, dass die Flamme den Lärm nicht mehr effektiv abstrahlen kann, bzw. das Heizgerät den Lärm

nicht mehr effektiv in die Umgebung emittieren kann. Weiterhin existiert noch eine dritte Möglichkeit, die aber nicht aus Gleichung 3.43 ersichtlich ist. Wir könnten die Lärmemission des Heizgerätes gar nicht verringern, sondern den Charakter des Lärms so verändern, dass er von Schalldämpfern besser abgedämpft werden kann.

Wir werden zuerst diese dritte Möglichkeit aufgreifen. Schalldämpfer sind besonders wirkungsvoll bei hohen Frequenzen. Je weiter wir also das Emissionsspektrum des Heizgerätes hin zu höheren Frequenzen verschieben, desto effizienter können wir ihn dämpfen. Diese Verschiebung könnte zum Beispiel durch eine Erhöhung des Turbulenzgrades erfolgen.

Damit die Flamme selbst weniger Lärm produziert, wäre eine einfache Möglichkeit, die Flamme in möglichst viele Einzelflammen aufzuteilen. Denn die akustische Leistung  $P$  der Flamme ist proportional zu dem Quadrat des Volumens:

$$P \sim V^2 \quad (8.30)$$

Wird das Volumen  $V$  in zwei Teilvolumen  $V_1$  und  $V_2$  aufgeteilt ( $V = V_1 + V_2$ ), so gilt für die akustische Leistung

$$P \sim V_1^2 + V_2^2 < (V_1 + V_2)^2. \quad (8.31)$$

Das bedeutet, mehrere kleine Flammen sind leiser als eine große. Um die Flamme selbst leiser zu machen, können wir auch das Kohärenzvolumen 5.42  $V_{koh} \sim L_{kor}$  verkleinern. Dazu muss das Längenmaß  $L_{kor}$ , das von der charakteristischen Länge des Brenners bestimmt wird, verringert werden. Durch gitterartige Strukturen innerhalb des Brennraumes könnte die charakteristische Länge des Brenners und damit auch  $L_{kor}$  stark vermindert werden. Dadurch sinkt die Lärmemission und zusätzlich verschiebt sich das Spektrum hin zu höheren Frequenzen, wodurch es, wie oben schon beschrieben, besser gedämpft werden kann. Zusätzlich positiv auf die Lärmentwicklung in der Flamme würde sich auch eine Vergrößerung des Brennraumes, also eine Absenkung der Leistungsdichte, machen.

Als weitere Möglichkeit bleibt noch, die Akustik des Brenners so zu optimieren, dass weniger Lärm vom Brenneraustritt abgestrahlt werden kann.

Wie schon der Vergleich des einfachen Rohres mit dem eingeschnürten Rohr in Abbildung 8.22 bzw. 8.23 gezeigt hat, hat die Formgebung des Austrittes einen großen Einfluss auf die Systemakustik. Die in dieser Arbeit vorgestellte Methode kann zum Beispiel für eine Optimierung der Austrittsgeometrie genutzt werden. Eine weitere Möglichkeit für eine lärmtechnische Optimierung haben wir schon in Kapitel 3.5 vorgestellt. Der optimale Abstand zwischen Flamme und Austritt wurde dort zu  $0.197\text{ m}$  bestimmt.



---

## 9 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde eine Methode vorgestellt, mit der es mit geringem rechentechnischem Aufwand möglich ist, das emittierte Schall-druckspektrum automobiler Heizgeräte zu berechnen. Die Methode ist so allgemein, dass damit auch die Lärmemission von Haushalts-Brennern oder industrieller Verbrennungssysteme rechnerisch bestimmt werden kann.

Die erarbeitete Methode ist von hybrider Natur, besteht also aus zwei Teilen: Einer CFD-Simulation der reagierenden Strömung zum einen und einer Berechnung der Schallausbreitung im Gerät und weiter in die Umgebung zum anderen. Ein zentraler Punkt ist das Lärmmodell, das auf Basis einer RANS-CFD-Simulationen das von der Flamme erzeugte Lärmquellspektrum bestimmt. RANS-Berechnungen gehören zum Standard in der industriellen Entwicklung, wodurch die Lärmberechnung keinen großen Mehraufwand erfordert. Das verwendete Lärmmodell wurde ursprünglich für Vormischflammen entwickelt [28]. Bei hohen Damköhler-Zahlen werden die Eingangsparameter ausschließlich von den Strömungs- und Stoffdaten bestimmt. Daher kann das Modell auch auf nicht-vorgemischte Flammen hoher Damköhler-Zahl angewendet werden. Da in der zugehörigen CFD-Simulation der nicht-vorgemischte Charakter für die Berechnung der Wärmefreisetzung berücksichtigt wird, und in das Verbrennungsmodell ansonsten keine verbrennungsspezifischen Größen eingehen, ist dieses Vorgehen gerechtfertigt.

Wie wichtig die korrekte Modellierung des akustischen Systems ist, konnte ebenfalls in dieser Arbeit gezeigt werden. Welche akustische Leistung eine Flamme abstrahlen kann, wird demnach von der Impedanz am Ort der Flamme bestimmt. Die Schallausbreitung wird mit zwei Methoden berechnet: Zum einen mit der FE-Methode, mit der eine voll dreidimensionale Berechnung möglich ist, zum anderen mit der einfacheren Netzwerkmethod, bei der

---

die Akustik als eindimensional angenommen wird. Durch eine Kombination beider Methoden kann der rechentechnische und der Modellierungsaufwand stark verringert werden, ohne an Genauigkeit zu verlieren. Hierzu wurde das Gebläsegehäuse des Brenners, in dem die Akustik nicht als eindimensional betrachtet werden kann, mit der dreidimensionalen Methode berechnet und daraus entsprechende Randbedingungen für die Netzwerksimulation gewonnen. Eine weitere Vereinfachung ergibt sich, indem nur die Schallausbreitung im Gerät, nicht aber die in die Umgebung numerisch berechnet wird. Hierzu wird in der Simulation der Brenner am Abgasaustritt mit einer Abstrahlrandbedingung [39] versehen. Die Berechnung des Schallfeldes in der Umgebung erfolgt dann auf analytischem Weg unter Annahme, dass der Abgasaustritt einen idealen Kugelstrahler darstellt. Diese Annahme konnte durch Analyse der Messergebnisse gerechtfertigt werden.

Für den BRS-Brenner zeigte sich, dass der turbulente Verbrennungslärm nicht die einzige Quelle für Druckpulsationen in der Brennkammer darstellt. Zusätzlich treten hier Rückkopplungseffekte auf, die ebenfalls in der Lärmberechnung berücksichtigt werden müssen. Hierdurch konnte das gemessene Schalldruckspektrum mit guter Übereinstimmung berechnet werden. Die Simulation des Heizgerätes ist aufwändiger, da hier zusätzlich die Schallabstrahlung am Austritt und die Ausbreitung in die Umgebung berechnet werden musste. Auch hier zeigt das berechnete Spektrum eine gute Übereinstimmung mit den Messwerten. Die entwickelte Methode kann für die Entwicklung leiserer Brenner eingesetzt werden.

Verbesserungen sind sowohl in der Modellierung der Quellmechanismen als auch der Systemakustik möglich. Wie im letzten Kapitel angesprochen, liegt in den KFZ-Heizgeräten keine ideale nicht-vorgemischte Verbrennung vor. Die hier durchaus vorhandene Teilvormischung führt dazu, dass nicht überall in der Flamme die Näherung für hohe Damköhler-Zahlen gerechtfertigt ist. Die bisher bei der CFD-Simulation verwendeten Eddy-Breakup- und Eddy-Dissipation-Modelle vernachlässigen allerdings die chemische Reaktionszeit gegenüber der Mischungszeit, gehen also von einer unendlich großen Damköhler-Zahl aus. PDF-Modelle (siehe z.B. [23]) könnten hier ge-

nauere Ergebnisse liefern. Ebenso darf bei einer niedrigeren Damköhler-Zahl das Lärmmodell nicht mehr ohne Änderung für eine nicht-vorgemischte Flamme verwendet werden. Weiter wäre denkbar, das Modell noch durch andere, weniger starke Quellmechanismen zu erweitern. Hier sei der reine Strömungslärm genannt, deren Einfluss sich allerdings nur bei Systemen stark bemerkbar machen sollte, die wesentlich höhere Machzahlen aufweisen, als die in dieser Arbeit betrachteten Brenner. Im Hinblick auf die akustische Modellierung wäre eine genaue experimentelle Untersuchung der KFZ-Heizgeräte sinnvoll. Durch Vermessung von Reflexionsfaktoren und Transfermatrizen könnten die bestehenden Modellvorstellungen validiert und verbessert werden.



---

## Literaturverzeichnis

- [1] AB, Comsol: *Comsol Multiphysics User's Guide, 2008*
- [2] BOHL, W.: *Technische Strömungslehre*. Vogel Buchverlag, 1984
- [3] BOINEAU, P. ; GERVAIS, Y. ; MORICE, V.: An aerothermoacoustic model for computation of sound radiated by turbulent flames. In: *International Congress on Noise Control Engineering*. Liverpool, 1996 (Proc. Internoise 96)
- [4] BOINEAU, P. ; GERVAIS, Y. ; TOQUARD, M.: Spatio-frequential optical measurements of acoustic sources in a turbulent flame. In: *International Congress on Noise Control Engineering*. Budapest, Hungary, August 25-27 1997 (Proc. Internoise 97)
- [5] BRAESS, D.: *Finite Elemente*. Springer, 2003
- [6] BRAGG, S. L.: Combustion Noise. In: *J. of the Institute of Fuel* 36 (1963), S. 12–16
- [7] BÖSWIRTH: *Technische Strömungslehre*. Vieweg, 1985
- [8] BUI, T.P.: *Theoretical and Numerical Analysis of Broadband Combustion Noise*, RWTH Aachen, Diss., 2008
- [9] BUI, T.P. ; MEINKE, M. ; SCHRÖDER, W.: A Hybrid Approach to Analyze the Acoustic Field Based on Aerothermodynamic Effects. In: *Proceedings of CFD/Daga '04*, 2004
- [10] BUI, T.P. ; SCHRÖDER, W. ; MEINKE, M.: Acoustic perturbation equations for reacting flows to compute combustion noise. In: *Journal of Aeroacoustics* 4 (2007), S. 335 –355

- [11] CANT, R.S. ; MASTORAKES, E.: *An Introduction to Turbulent Reacting Flows*. Imperial College Press, 2008
- [12] CANT, R.S. ; POPE, S.B. ; BRAY, K.N.C.: Modelling of flamelet surface-to-volume ratio in turbulent premixed combustion. In: *Twenta-Third Symposium (Int.) on Combustion / The Combustion Institute* (1990), S. 809–815
- [13] CHOI, Chang R. ; HUH, Kang Y.: Development of a Coherent Flamelet Model for a Spark-Ignited Turbulent Premixed Flame in a Closed Vessel. In: *Combustion and Flame* 114 (1998), Nr. 3-4, 336 - 348.  
DOI: 10.1016/S0010-2180(97)00194-6. – ISSN 0010-2180
- [14] CHU, B.T.: On the generation of pressure waves at a plane flame front. In: *Fourth Symposium on Combustion* 4 (1953), S. 603–612
- [15] CLAVIN, P. ; SIGGIA, E. D.: Turbulent Premixed Flames and Sound Generation. In: *Combustion Science and Technology* 78 (1991), S. 147–155
- [16] CRIGHTON, D.G. ; DOWLING, A.P. ; FLOWERS WILLIAMS, J.E. ; HECKL, M. ; LEPPINGTON, F.G.: *Modern Methods in Analytical Acoustics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1992
- [17] CROCCO, L. ; CHENG, S.I.: *Theory of combustion instability in liquid propellant rocket motors*. Butterworths Science Publication, 1956
- [18] EHRENFRIED, K.: *Strömungsakustik, Skript zur Vorlesung*. Mensch&Buch Verlag, 2004
- [19] EWERT, R.: RPM - the fast Random Particle-Mesh method to realize unsteady turbulent sound sources and velocity fields for CAA applications. In: *13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2007
- [20] EWERT, R. ; SCHRÖDER, W.: Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering. In: *J. of Computational Physics* 188 (2003), S. 365–398

- [21] FISCHER, A.: *Hybride, thermoakustische Charakterisierung von Drallbrennern*. München, Germany, Technische Universität München, Diss., April 2004
- [22] FISCHER, A. ; HIRSCH, C. ; SATTELMAYER, T.: Comparison of multi-microphone transfer matrix measurements with acoustic network models of swirl burners. In: *Journal of Sound and Vibration* 298 (2006), S. 73–83
- [23] FOX, R.O.: *Computational Models for Turbulent Reacting Flows*. Cambridge University Press, 2003
- [24] GENTEMANN, A. ; FISCHER, A. ; EVESQUE, S. ; POLIFKE, W.: Acoustic Transfer Matrix Reconstruction and Analysis for Ducts with Sudden Change of Area. In: *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit*, 2003
- [25] GERLINGER, P.: *Numerische Verbrennungssimulation*. Springer, 2005
- [26] GOLDSTEIN, M.E.: *Aeroacoustics*. Mc Graw-Hill, 1976
- [27] HINZE, J. O. ; CLARK, B. J. (Hrsg.): *Turbulence*. 2. Auflage. Mc Graw-Hill, 1975
- [28] HIRSCH, C. ; WÄSLE, J. ; WINKLER, A. ; SATTELMAYER, T.: A Spectral Model for the Sound Pressure from Turbulent Premixed Combustion. In: *31st Symp (Int.) on Combustion*, 2007, S. 1435–1441
- [29] HIRSCH, C. ; WINKLER, A. ; WÄSLE, J. ; SATTELMAYER, T.: Calculating the Turbulent Noise Source of Premixed Swirl Flames from Time Mean Reactive RANS Variables. In: *13th International Congress on Sound and Vibration*, 2006
- [30] HOWE, M.S.: *Acoustics of Fluid-Structure Interactions*. Cambridge University Press, 1998
- [31] JÖRG, Ch.: *CFD-Simulation der teilvorgemischten turbulenten Verbrennung von Erdgas unter Berücksichtigung von Luftzahlschwankungen*, Technische Universität München, Diplomarbeit, 2008

- [32] KEMP, J.A.: *Theoretical and experimental study of wave propagation in brass musical instruments*, University of Edinburgh, Diss., 2002
- [33] KIESEWETTER, F.: *Modellierung des verbrennungsinduzierten Wirbelauflaufens in Vormischbrennern*, Technische Universität München, Diss., 2005
- [34] KINSLER, L.E. ; FREY, A.R. ; COPPENS, A.B. ; SANDERS, J.V.: *Fundamentals of Acoustic*. John Wiley, 2000
- [35] KLEIN, S. A. ; KOK, J. B. W.: Sound Generation by Turbulent Non-premixed Flames. In: *Combustion Science and Technology* 149/1-6 (1999), S. 267–295
- [36] KLEIN, S.A.: *On the acoustics of turbulent non-premixed flames*, University of Twente, Diss., 2000
- [37] KNABNER, P. ; ANGERMANN, L.: *Numerik partieller Differentialgleichungen*. Springer, 2000
- [38] KOMAREK, T. ; TAY, L.W.C. ; ZELHUBER, M. ; A., Huber. ; POLIFKE, W.: Modeling the Effect of Heat Loss on Flame Stabilization in Shear Layers. In: *Int. Conf. on Jets, Wakes and Separated Flows, ICJWSF*, 2008
- [39] LEVINE, H. ; SCHWINGER, J.: On the radiation of sound from an unflanged circular pipe. In: *Physical review* 73(4) (1948), S. 383–406
- [40] Lighthill, M. J.: On sound generated aerodynamically. In: *Proc. Royal Soc. London, Series a* 211 (1952), S. 564–587
- [41] MAGNUSSEN, B. F.: On the Structure of Turbulence and a Generalized Eddy Dissipation Concept for Chemical Reaction in Turbulent Flow. In: *19th Aerospace Science Meeting, St. Louis, Missouri* (1981), January, S. 6
- [42] MAGNUSSEN, B.F. ; HJERTAGER, B.H.: On mathematical modeling of turbulent combustion with special emphasis on soot formation and combustion. In: *Sixteenth Symposium (Int.) on Combustion*, 1977, S. 719–729
- [43] MAHAN, J. R. ; JONES, J.D.: Recovery of Burner Acoustic Source Structure from Far-Field Sound Spectra. In: *AIAA Journal* 22 (1984), S. 631–637

- [44] MANTEL, T. ; BORGHI, R.: A new model of premixed wrinkled flame propagation based on a scalar dissipation equation. In: *Combustion and flame* 96 (1994), S. 443–457
- [45] MARTIN, C. ; BENOIT, L. ; NICLOUD, F. ; POINSOT, T.: Analysis of acoustic energy and modes in a turbulent swirled combustor. In: *Center for Turbulence Research, NASA Ames/Stanford University* (2004), S. 377–394
- [46] MENTER, F.R.: Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. In: *AIAA Journal* 32 (1994), Nr. 8, S. 1598–1605
- [47] MÜHLBAUER, B. ; EWERT, R. ; KORNOW, O. ; NOLL, B. ; DELFS, J. ; AIGNER, M.: Simulation of combustion noise using CAA with stochastic sound sources from RANS. In: *14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Vancouver, 2008*
- [48] MUNJAL, M.L.: *Acoustics of ducts and mufflers*. John Wiley, 1987
- [49] NAGAMATSU, H. T. (Hrsg.): *Aeroacoustics: Jet and Combustion Noise; Duct Acoustics*. AIAA, The MIT Press, 1975
- [50] NIEDERBERGER, A.S.P. ; SCHUERMANN, B.H. ; GUZELLA, L.: Parameter identification for a low-order network model of combustion instabilities. In: *Int. J. of spray and combustion dynamics* 1 (2009), Nr. 1, S. 113–142
- [51] PANKIEWITZ, C.: *Hybrides Berechnungsverfahren für thermoakustische Instabilitäten von Mehrbrennersystemen*, Technische Universität München, Diss., 2004
- [52] PANKIEWITZ, C. ; SATTELMAYER, T.: Time Domain Simulation of Combustion Instabilities in Annular Combustors. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 125 (2003), Nr. 3, S. 677–685
- [53] PETERS, N.: A Spectral Closure for Premixed Turbulent Combustion in the Flamelet Regime. In: *J. of Fluid Mech.* 242 (1992), S. 611–629
- [54] PETERS, N.: *Turbulent Combustion*. Cambridge University Press, 2000
- [55] PIERCE, A. D.: *Acoustics*. Acoustical Society of America, 1991

- [56] POINSOT, T. ; VEYNANTE, D.: *Theoretical and Numerical Combustion*. Edwards, 2005
- [57] POLIFKE, W.: *Combustion Instabilities*. Von Karman Institute, Advances in Aeroacoustics and Applications, 2004
- [58] POLIFKE, W. ; KOPITZ, J. ; SERBANOVIC, A.: Impact of the Fuel Time Lag Distribution in Elliptical Premix Nozzles on Combustion Stability. In: *7th AIAA/CEAS Aeroacoustic Conference, 2001/ Maastricht*, 2001
- [59] POLIFKE, W. ; PASCHEREIT, C. O. ; DÖBBELING, K.: Constructive and Destructive Interference of Acoustic and Entropy Waves in a Premixed Combustor with a Choked Exit. In: *Int. J. of Acoustics and Vibration* 6 (2001), Nr. 3, S. 1–38
- [60] PORUBA, C.: *Turbulente Flammenausbreitung in Wasserstoff-Luft-Gemischen*, Technische Universität München, Diss., 2003
- [61] PROUDMAN, I.: The Generation of Noise by Isotropic Turbulence. In: *Proceedings of the Royal Society of London, Series A. Mathematical and Physical Sciences* Bd. 214, 1952, S. 119–132
- [62] PUTNAM, A.: *Combustion driven oscillations in industry*. Elsevier, New York, 1971
- [63] RAJARAM, R. ; GRAY, J. ; LIEUWEN, T.: Premixed Combustion Noise Scaling: Total Power and Spectra. In: *12th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA-2006-2612*, 2006
- [64] RAJARAM, R. ; LIEUWEN, T.: Parametric Studies of acoustic radiation from premixed flames. In: *Combustion Science and Technology* 175 (2003), Nr. 12
- [65] RAJARAM, R. ; LIEUWEN, T.: Effect of Approach Flow Turbulence Characteristics on Sound Generation from Premixed Flames. In: *42nd AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit, AIAA-2004-0461*, 2004
- [66] RAJARAM, R. ; PREETHAM, P. ; LIEUWEN, T.: Frequency Scaling of Turbulent Premixed Flame Noise. In: *11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, AIAA-2005-2828*, 2005

- [67] RIBNER, H. S.: Quadrupole correlation governing the pattern of jet noise. In: *J. of Fluid Mech.* 38 (1969), Nr. 1, S. 1–24
- [68] RIENSTRA, S.W. ; HIRSCHBERG, A.: *An Introduction to Acoustics*. Eindhoven University of Technology : Internet, Oktober 2004
- [69] ROTTA, J.C.: *Turbulente Strömungen*. Teubner Verlag, 1972
- [70] SATTELMAYER, Th.: Influence of the Combustor Aerodynamics on Combustion Instabilities From Equivalence Ratio Fluctuations. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 125 (2003), Nr. 1, S. 11–19
- [71] SATTELMAYER, Th. ; HIRSCH, Ch. ; N., Krasznai ; WÄSLE, J. ; A., Winkler: Lärmerzeugung von Drallflammen: Charakteristika und Modellierung. In: *BMBF Workshop Turbulenz in der Energietechnik*, 2004
- [72] SCHADE, H. ; KUNZ, E.: *Strömungslehre*. de Gruyter, 1989
- [73] SCHMID, H.-P.: *Ein Verbrennungsmodell zur Beschreibung der Wärmefreisetzung von vorgemischten turbulenten Flammen*, Fakultät für Chemieingenieurwesen, TH Karlsruhe, Diss., 1995
- [74] SCHMID, H.-P. ; HABISREUTHER, P: A model for calculating heat release in premixed turbulent flames. In: *Combustion and Flame* 113 (1998), S. 79–91
- [75] SCHUERMANS, B. ; BELLUCCI, W. ; GUETHE, F. ; MEILI, F. ; FLOHR, P. ; PASCHEREIT, O.: A detailed analysis of thermoacoustic interaction mechanisms in a turbulent premixed flame. In: *ASME Turbo Expo 2004, Vienna, Austria, June 14-17, 2004*
- [76] SHALABY, H. ; THEVENIN, D. ; BUI, T.P. ; SCHRÖDER, W. ; MEINKE, M.: DNS/CAA Analysis of the Sound Field Radiated from a Turbulent Premixed Flame. In: *13th International Congress on Sound and Vibration, ICSV 13, 2006*
- [77] SMITH, T. J. B. ; KILHAM, J. K.: Noise generation by open turbulent flames. In: *Journal of the Acoustic Society of America* 35(5) (1963), S. 715–724

- [78] SPALDING, D. B.: Mixing and Chemical Reaction in Steady Confined Turbulent Flames. In: *13th Symp (Int.) on Combustion*, 1971
- [79] STRAHLE, W. C.: On Combustion Generated Noise. In: *J. of Fluid Mech.* 49 (1971), Nr. 2, S. 399–414
- [80] STRAHLE, W. C.: Combustion Noise. In: *Prog. Energy Combust. Sci.* 4 (1978), S. 157–176
- [81] TENNEKES, H. ; LUMLEY, J. L.: *A First Course in Turbulence*. 11. Auflage. The MIT Press, 1972. – ISBN 0-262-200198
- [82] TURNS, S.R.: *An Introduction to Combustion*. Boston : McGraw-Hill, 2000
- [83] VEIT, I.: *Technische Akustik*. Vogel Buchverlag, 1988
- [84] VEYNANTE, D.: Introduction to Turbulent Combustion. In: *ERCOFTAC Bulletin 70*. ERCOFTAC, September 2006
- [85] VEYNANTE, D. ; VERVISCH, L.: Turbulent combustion modeling. In: *Progress in Energy and Combustion Science* 28, 2002, S. 193–266
- [86] WANKE, E.: *unveröffentlicht*, TU München, Diss., 2009
- [87] WÄSLE, H.: *Vorhersage der Lärmemission turbulenter Vormischflammen*, Technische Universität München, Diss., 2007
- [88] WÄSLE, J. ; WINKLER, A. ; SATTELMAYER, T.: Influence of the Combustion Mode on Acoustic Spectra of Open Turbulent Swirl Flames. In: *12th International Congress on Sound and Vibration*, 2005
- [89] WEYERMANN, F. ; HIRSCH, C. ; SATTELMAYER, T.: Numerische Simulation der Schallabstrahlung von eingeschlossenen turbulenten Flammen. In: *Fortschritte der Akustik 2008*, DEGA, 2008
- [90] WINKLER, A. ; WÄSLE, J. ; HIRSCH, C. ; SATTELMAYER, T.: Peak Frequency Scaling of Combustion Noise From Premixed Flames. In: *13th International Congress on Sound and Vibration*, 2006

- [91] ZIMONT, V. ; POLIFKE, W. ; BETTELINI, M. ; WEISENSTEIN, W.: An Efficient Computational Model for Premixed Turbulent Combustion at High Reynolds Numbers Based on a Turbulent Flame Speed Closure. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 120 (1998), Nr. 3, S. 526–532
- [92] ZIMONT, V.L. ; LIPATNIKOV, A.N.: A Numerical Model of Premixed Turbulent Combustion of Gases. In: *Chem. Phys. Reports* Bd. 14, 1995, S. 993–1025