

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Institut für Energietechnik

Lehrstuhl für Thermodynamik

FE-Verfahren zur Analyse der thermoakustischen Stabilität nichtisentroper Strömungen

Elke Petra Wanke

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der
Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades
eines

DOKTOR – INGENIEURS

genehmigten Dissertation.

Vorsitzende:

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Sonja Berensmeier

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattelmayer

2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Birgit Vogel-Heuser

Die Dissertation wurde am 09.11.2009 bei der Technischen Universität München eingereicht
und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 15.02.2010 angenommen.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand im Rahmen der bayerisch / baden-württembergischen Forschungsinitiative *KW21-Kraftwerke des 21. Jahrhunderts* (Phase I (2004-2008), Teilprojekt: *GV5 - Designsystem Brennkammerschwingungen*) am Lehrstuhl für Thermodynamik der Technischen Universität München. Sie wurde von der MTU Aero Engines AG, der Bayerischen Forschungstiftung und den Bayerischen Staatsministerien für Wissenschaft, Forschung und Kunst sowie Wirtschaft, Infrastruktur, Verkehr und Technologie gefördert.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattelmayer, für die Ermöglichung und die Betreuung meiner Arbeit sowie für die intensiven und richtungsweisenden Gespräche, die mir stets eine wertvolle Hilfe waren. Danken möchte ich auch für sein reges Interesse am Fortgang meiner Arbeit sowie für die Freiheit bei der wissenschaftlichen Arbeit und das mir entgegengebrachte Vertrauen.

Frau Prof. Dr.-Ing. Birgit Vogel-Heuser danke ich für die freundliche Übernahme des Koreferates und Frau Prof. Dr. rer. nat. Sonja Berensmeier für den Vorsitz bei der mündlichen Prüfung.

Ein herzlicher Dank geht auch an meine früheren Kolleginnen und Kollegen am Lehrstuhl für Thermodynamik, zum einen für die fachlichen Anregungen und Diskussionen, zum anderen aber auch für die freundschaftliche Atmosphäre am Lehrstuhl und die kameradschaftliche Unterstützung während und nach meiner Zeit am Lehrstuhl. Darüber hinaus danke ich den Studenten und wissenschaftlichen Hilfskräften für ihren Einsatz und die tatkräftige Unterstützung.

Besonders möchte ich mich an dieser Stelle bei Dr. Andreas Huber, Stephan Föller, Oberingenieur Dr. Christoph Hirsch, Roland Kaess, Thomas Komarek, Marco Konle, Klaus Mösl, Prof. Wolfgang Polifke, Dr. Jutta Pieringer, Prof. Sujith und ganz besonders bei meinem langjährigen Bürokollegen Fabian Weyermann für den Ansporn und die diversen fachlichen Anregungen dan-

ken, die mir stets sehr hilfreich waren. Vielen herzlichen Dank in diesem Zusammenhang auch an Reddy Alemela, Valter Bellucci, Dan Fanaca, Stephan Föller, Roland Kaess, Thomas Komarek und Luis Tay dafür, dass sie mir ihre Forschungsergebnisse als Validierungsdaten zur Verfügung gestellt haben.

Meine Freunde und früheren wie auch aktuellen Kollegen - Carola Dunker, Martin Lauer, Roland Kaess, Karin Wanke und Fabian Weyermann haben in ihrer Freizeit diese Arbeit Korrektur gelesen. Vielen herzlichen Dank dafür!

Auch bei meinem Industriepartner, der MTU Aero Engines AG, sowie bei den beteiligten Bayerischen Staatsministerien und der Bayerischen Forschungsförderung möchte ich mich bedanken. Ein besonderer Dank gilt darüber hinaus meinem neuen Arbeitgeber, der Müller-BBM GmbH, den dortigen Vorgesetzten und Kollegen, für die Unterstützung und das mir entgegengebrachte Vertrauen in der Zeit der Fertigstellung dieser Arbeit.

Ganz herzlich danke ich meinen langjährigen Freunden Annemarie und Horst Dinkelbach, meiner Schwester Karin Wanke und natürlich ganz besonders meinen Eltern für die langjährige Unterstützung und den Beistand während der vielen Jahre meiner Ausbildung und insbesondere der Fertigstellung der Dissertation. Ihnen allen widme ich diese Arbeit.

München, im November 2009

Elke Wanke

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Verbrennungsinstabilitäten und Thermoakustik	1
1.2	Modellierungsansätze	7
1.3	Berechnungsverfahren nach Pankiewitz	10
1.4	Zielsetzung der Arbeit	16
2	Akustische Grundlagen	18
2.1	Linearisierte Eulergleichungen	18
2.2	Wellengleichung	20
2.3	Harmonische Wellen und Helmholtzgleichung	22
2.4	Ebene Wellen	25
2.5	Akustische Netzwerke und Transfermatrizen	27
2.6	Akustische Energie und akustische Intensität	30
2.7	Fluid-Schall-Wechselwirkungen	32
2.7.1	Aeroakustische Analogie	33
2.7.2	Akustische Mode, Vorticity-Mode und Entropie-Mode . .	34
2.7.3	Akustische Verluste am Freistrahle	37
3	Berechnungsverfahren	40
3.1	Entwicklungsumgebung und Finite Elemente Methode	40
3.2	Numerische Verluste	42
3.2.1	Modellierungsansatz	42
3.2.2	Zeitliche Diskretisierung	44
3.2.3	Örtliche Diskretisierung	44
3.2.4	Zusammenfassung	46
4	Validierung der Wellengleichung und der Helmholtzgleichung	48

4.1	Dichtegradienten	48
4.1.1	Historische Entwicklung	48
4.1.2	Dichtegradienten ohne Wärmefreisetzung	51
4.1.2.1	Homogenes Temperaturfeld	52
4.1.2.2	Axiale Dichtegradienten	53
4.1.2.3	Radiale Dichtegradienten	55
4.1.3	Einfluss der Modellierung axialer Dichtegradienten auf thermoakustische Systeme	57
4.2	Mittlere Geschwindigkeit	63
4.3	Möglichkeiten der Implementierung akustischer Verluste	66
4.3.1	Direkte Implementierung eines Verlustterms	66
4.3.2	Komplexe Wellenzahl	67
4.4	Zusammenfassung	70
5	Akustische Verluste in der Helmholtz- und der Wellengleichung	71
5.1	Eindimensionale Verlustbetrachtung	72
5.1.1	Herleitung des eindimensionalen Verlustterms	72
5.1.2	Validierung des eindimensionalen Verlustterms	75
5.2	Dreidimensionale Verlustbetrachtung	81
5.2.1	Herleitung des dreidimensionalen Verlustterms	81
5.2.2	Validierung anhand einer abrupten Querschnittserweiterung	83
5.2.2.1	CFD-Interface	83
5.2.2.2	Validierungsfälle	89
5.2.2.3	Validierung des Verlustmodells	94
5.2.3	Validierung anhand eines Einzelbrennerprüfstands	100
5.2.3.1	Konfiguration des Einzelbrennerprüfstands	100
5.2.3.2	CFD-Interface	103
5.2.3.3	Validierung des Verlustmodells	110
5.3	Zusammenfassung	115
6	Randbedingungen	116
6.1	Akustische Verluste an den Rändern eines Berechnungsgebiets	116
6.2	Liner	117
6.3	Frequenzabhängige Randbedingungen im Zeitbereich	120

6.4	Implementierung der Randbedingungen	123
6.5	Validierung der Randbedingungen	124
6.5.1	Beschreibung der Testfälle	124
6.5.2	Eindimensionale Betrachtung	125
6.5.3	Dreidimensionale Betrachtung	129
6.6	Zusammenfassung	131
7	Stabilitätsbetrachtungen anhand eines Einzelbrennerprüfstands	132
7.1	Geometrie und Prüfstandskonfiguration	132
7.2	Geometrische Modellierung	133
7.3	CFD-Interfaces	135
7.4	Randbedingungen	137
7.5	Wärmefreisetzung	140
7.6	Entdimensionierung	142
7.7	Modellaufbau	143
7.8	Ergebnisse der transienten Stabilitätsbetrachtung	144
7.9	Zusammenfassung	146
8	Resümee und Ausblick	148
	Literaturverzeichnis	150
A	Anhang	164

Nomenklatur

Lateinische Buchstaben

<i>a</i>	Vorfaktor der approximierten Randbedingung [-]
<i>A</i>	Fläche [m ²]
<i>b</i>	Dämpfungskonstante der approximierten Randbedingung [-]
<i>B</i>	Totalenthalpie pro Masse [m ² /s ²]
<i>c</i>	Schallgeschwindigkeit [m/s]
<i>c_E</i>	entdimensionierte Schallgeschwindigkeit [-]
<i>d</i>	Dämpfungskonstante [s/m ²]
<i>D</i>	Durchmesser [m]
<i>D_E</i>	entdimensionierter Durchmesser [-]
<i>e</i>	akustische Energie [J/m ³]
<i>Ė</i>	Energiestrom [W/m ³]
<i>f</i>	Riemann Invariante [m/s]
<i>f</i>	Frequenz [Hz]
<i>f_E</i>	entdimensionierte Frequenz [-]
<i>f_i</i>	Quellterm der Lighthill-Analogie [m ⁴ /s ²]
<i>g</i>	Riemann Invariante [m/s]
<i>g</i>	approximierte Lösung des eigentlichen Problems (FEM)
<i>G</i>	Unbekannte des Gleichungssystems (FEM)
<i>h</i>	Dicke der perforierten Platte [m]
<i>He</i>	Helmholtzzahl [-]
<i>i</i>	imaginäre Einheit [-]
<i>I</i>	akustische Intensität [W/m ²]
<i>k</i>	Wellenzahl [1/m]
<i>k</i>	Wellenvektor [1/m]

Nomenklatur

K	Proportionalitätskonstante der akust. Randbedingung [$\text{m}^2 \text{s}/\text{kg}$]
l	Länge [m]
l_E	entdimensionierte Länge [-]
L	akustischer Verlust im Inneren eines Gebiets [$\text{Pa W}/\text{m}^3$]
L_p	Schalldruckpegel [dB]
L_R	akustischer Verlust am Rand [$\text{Pa W}/\text{m}^2$]
\dot{m}	Massenstrom [kg/s]
M	Machzahl [-]
n	Interaktionsindex [-]
\mathbf{n}	Normalenvektor [-]
\mathbf{N}_v	numerischer Verlust pro Wellenlänge [-]
p	Druck [Pa]
p_E	entdimensionierter Druck [-]
P	reelle Druckamplitude [Pa]
P	Leistung [W]
\dot{q}	Wärmestrom pro Volumeneinheit [W/m^3]
Q	Quellterm der Lighthill-Analogie [$\text{kg}/(\text{m}^3 \text{s}^2)$]
r	Reflexionskoeffizient / -faktor [-]
R	Radius [m]
t	Zeit [s]
t_E	entdimensionierte Zeit [s]
t	Transmissionskoeffizient [-]
T	Temperatur [$^{\circ}\text{C}$]
\mathcal{T}	Schwingungsperiode [s]
T_{ij}	Lighthill-Tensor [$\text{kg}/(\text{m} \text{s}^2)$]
\mathbf{u}	Geschwindigkeitsvektor [m/s]
u	Geschwindigkeitskomponente [m/s]
u_E	entdimensionierte Geschwindigkeitskomponente [-]
v	Geschwindigkeitskomponente [m/s]
V	Volumen [m^3]
V_{hyd}	hydrodynamischer Verlustanteil [$\text{kg}/(\text{m}^3 \text{s})$]
w	Geschwindigkeitskomponente [m/s]
x, \mathbf{x}	Ortskoordinate, Ortsvektor [m]
x_E	entdimensionierte Ortskoordinate [-]

y	Ortskoordinate [m]
z	Ortskoordinate [m]
Z	Impedanz [kg/(s m ²)]
Z_0	charakteristische Impedanz [kg/(s m ²)]

Griechische Buchstaben

α	Flächenverhältnis [-]
α^*	Solverparameter aus COMSOL MULTIPHYSICS
β	Dämpfungskonstante [1/m]
Γ	Quellterm der akustischen Energiegleichung [W/m ³]
δ_{ij}	Kronecker Delta [-]
ζ	Druckverlustbeiwert [-]
κ	Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten [-]
λ	Wellenlänge [m]
λ_{BL}	Luftzahl [-]
μ	Sättigungsparameter im Flammenmodell [-]
ν	Anpassungsparameter der approximierten Randbedingung [1/m]
π	Kreiszahl [-]
ρ	Dichte [kg/m ³]
ρ_E	entdimensionierte Dichte [-]
σ	Wachstumsrate [-]
σ_E	entdimensionierte Wachstumsrate [-]
τ	Zeitverzug [s]
τ_E	entdimensionierter Zeitverzug [-]
τ	Schubspannungstensor [W s/m ³]
Υ	relativer akustischer Intensitätsverlust [-]
ϕ	akustisches Potential [m ² /s]
Φ	Ansatzfunktion (FEM)
φ	Phasenwinkel [rad]
ω	Kreisfrequenz [1/s]
ω_0	Eckfrequenz eines Tiefpassfilters [1/s]
$\omega_{0,E}$	entdimensionierte Eckfrequenz eines Tiefpassfilters [-]

ω Wirbelstärke [1/s]

Indizes

a akustische Mode
an Anregung
b mittig (bulk)
B Brenner
CFD CFD
d stromab (downstream)
du von stromab nach stromauf
e Entropie-Mode
E entdimensioniert
eff effektiv
FEM Finite Elemente Methode
hyd hydrodynamisch
in hinein
l- ζ *l- ζ* -Modell
max maximal
min minimal
n Normalenrichtung
out heraus
p Druck
r Rest
red reduziert
s Entropie
t total
u stromauf (upstream)
ud von stromauf nach stromab
v Vorticity-Mode
V Verlust
w Wand
x x-Richtung

y	y-Richtung
z	z-Richtung
0	charakteristische Größe, Ausgangswert
1	Referenzebene /-punkt 1
1.3	für $\lambda = 1.3$
2	Referenzebene /-punkt 2
∞	Umgebung
\bar{x}	mittlerer Anteil einer Größe x
x'	fluktuierender Anteil einer Größe x
\hat{x}	komplexe Amplitude einer Größe x
\mathbf{x}	vektorielle Größe x

Abkürzungen

BDF	Backward Differential Formula
CFD	Computational Fluid Dynamics
DNS	Direct Numerical Simulation
FEM	Finite Elemente Methode
fft	Fast-Fourier-Transformation
\Im	Imaginärteil
k	Ordnung der longitudinalen Mode
l	Ordnung der transversalen Mode
LES	Large Eddy Simulation
LES-SI	Large Eddy Simulation mit Systemidentifikation (WHI)
m	Ordnung der radialen Mode
mV	mit Verlusten
NW	Netzwerk
oV	ohne Verluste
\Re	Realteil
RANS	Reynolds Averaged Navier Stokes
T	Transfermatrix
T	Transfermatrizelement
S	Streumatrix

S	Streumatrixelement
UDF	User Defined Function
URANS	Unsteady Reynolds Averaged Navier Stokes
WHI	Wiener-Hopf-Inversion

Formeln

$$\frac{D}{Dt} \quad \frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$$

$$\frac{\bar{D}}{Dt} \quad \frac{\bar{D}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla$$

Hinweis

Im Gegensatz zur üblichen deutschen Konvention wird als Dezimaltrenner hier ein Punkt anstelle eines Kommas verwendet.

1 Einleitung

In den vergangenen Jahrzehnten erfolgten verschiedene innovative Weiterentwicklungen im Bereich der Energie- und Antriebstechnik, nicht zuletzt auch vor dem Hintergrund deutlich verschärfter politischer, wirtschaftlicher und ökologischer Forderungen. Die bestmögliche Erfüllung der unterschiedlichen und teils kontroversen Anforderungen an moderne Verbrennungssysteme stellt jedoch bis heute eine Herausforderung dar. Dies bezieht sich insbesondere auf die Reduzierung von Emissionen bei gleichzeitiger Erhöhung der Zuverlässigkeit und der Effizienz neuer, aber auch bestehender Anlagen, in Verbindung mit der Forderung nach einer generellen Minderung von Entwicklungsrisiken.

1.1 Verbrennungsinstabilitäten und Thermoakustik

Eine spezielle Rolle kommt dabei den Gasturbinen zu. Als Triebwerke von Flugzeugen finden sie breite Anwendung in der Verkehrstechnologie. Im bodengebundenen Betrieb dienen sie, als stationäre Gasturbinen, in der Regel dem Abfangen von Lastspitzen der Stromversorgung. In Kombination mit einem Dampfturbinenprozess (GuD-Anlage) können sie jedoch auch zur Sicherung der Grund- und Mittellast beitragen. Dies resultiert in hohen Wirkungsgraden bei gleichzeitig deutlich geringerem Emissionsausstoß im Vergleich zur Verstromung mit Kohle, Müll oder Erdöl mittels Dampferzeugern.

Als nachteilig galt lange Zeit jedoch der hohe Stickoxidausstoß von Gasturbinen. NO_x entsteht dabei im Wesentlichen durch die hohen Verbrennungstemperaturen und die langen Verweilzeiten der Verbrennungsprodukte im Brennraum, wie sie im Rahmen der Diffusionsverbrennung in älteren Brennkammern üblich waren [1]. Um dies zu umgehen, wurden Magerverbrennungs-

technologien entwickelt. Diese ermöglichen eine Reduzierung der Verbrennungstemperaturen und folglich der Stickoxidemission durch einen hohen Luftüberschuss während der Verbrennung [1, 2]. Um die Leistung der Anlagen bei verkleinertem Bauraum zu steigern, wurden gleichzeitig Brenner mit stark drall- bzw. turbulenzbehafteten Flammen (weiter-) entwickelt. Der Einsatz von Magerverbrennungssystemen führte zu einem Durchbruch bezüglich der Umweltverträglichkeit solcher Systeme [2]. Gleichzeitig erwiesen sie sich aber als anfällig hinsichtlich der Ausbildung thermoakustischer Schwingungen bzw. Verbrennungsinstabilitäten [2].

Unter thermoakustischen Prozessen versteht man allgemein Wechselwirkungen zwischen der Wärmefreisetzung und der Akustik eines Systems, wobei auch strömungsmechanische Vorgänge, wie Turbulenz und Wirbelablösung, eine entscheidende Rolle spielen können. Durch diese Interaktionen können solch hohe Schwankungen der akustischen Feldgrößen erzeugt werden, dass der Betrieb einer technischen Anlage stark beeinträchtigt bis unmöglich gemacht wird. Auswirkungen thermoakustischer Instabilitäten sind zum Beispiel mechanische Schwingungen bis starke Vibrationen, eine erhöhte thermische Beanspruchung der Brennkammerkomponenten, erhöhte Emissionswerte oder auch ein Verlöschen der Flamme bzw. Flammenrückschlag. Dies kann wiederum zu einer verringerten Leistungsfähigkeit oder auch Lebensdauer der Anlage führen, zum Beispiel durch vorzeitiges Ermüden bzw. Versagen von Bauteilen [3, 4].

Die einzelnen physikalischen Wirkmechanismen thermoakustischer Prozesse und ihr Zusammenspiel sind in der Regel sehr komplex, insbesondere im Rahmen hochverdrallter Strömungen mit Wärmefreisetzung, wie sie in der technischen Praxis zumeist vorkommen [3]. Die Gründe für das Auftreten von Verbrennungsschwingungen sind zwar im Grundsatz verstanden, jedoch gelingt es bis heute kaum, die einzelnen Mechanismen quantitativ zu erfassen und somit exakte oder auch nur näherungsweise genaue Werte für Stabilitätsgrenzen zu finden [3].

Wesentliche Effekte, die zur Ausbildung von thermoakustischen Instabilitäten beitragen können, sind [2]:

- Der turbulente Verbrennungslärm, als eine unmittelbare Eigenschaft der turbulenten Verbrennung. Er entsteht dadurch, dass das turbulente, reagierende Strömungsfeld selbst ein breitbandiges Lärmspektrum aufgrund lokaler Fluktuationen der Wärmefreisetzung erzeugt. Dieses Lärmspektrum wird direkt vom Turbulenzspektrum in der Wärmefreisetzungszone beeinflusst. Je nach Flammenart kann dabei die eigentliche Lärmquelle aus der lokalen zeitlichen Änderung der Flammenoberfläche resultieren oder auch aus lokalen zeitlichen Schwankungen der Brennstoff-Luft-Mischung (Luftzahl).
- Daneben können kohärente Strukturen thermoakustische Instabilitäten bedingen. Dabei handelt es sich im Wesentlichen um abgelöste Wirbel in turbulenten Scherschichten oder Wirbelströmungen. Diese können zu einer Modulation des konvektiven Transports des Brennstoff-Luft-Gemischs in die Flamme führen und somit Wärmefreisetzungsschwankungen generieren.
- Ihnen gegenüber stehen Mechanismen, die durch Rückkopplungseffekte bestimmt werden und somit selbstverstärkend wirken können. Treibende Kräfte können auch hier kohärente Strukturen sein, die nun jedoch durch eine pulsierende reagierende Strömung erzeugt wurden, oder auch die klassischen Mechanismen selbsterregter Verbrennungsschwingungen. Rückkopplungsmechanismen zeichnen sich im Gegensatz zum breitbandigen Verbrennungslärm durch eine tonale Systemantwort aus [2, 3]. Das System schwingt dann in der Regel in der Nähe einer oder mehrerer seiner natürlichen akustischen Moden, der Eigenmoden [3].

Oben genannte Rückkopplungsmechanismen sind dadurch gekennzeichnet, dass Schwankungen in der Strömung und/oder den thermodynamischen Zustandsgrößen zu Wärmefreisetzungsschwankungen führen [4]. Die Wärmefreisetzungsschwankungen erzeugen akustische Störungen, welche wiederum die Strömung und die thermodynamischen Zustandsgrößen beeinflussen können [4]. Dadurch wird der Rückkopplungsmechanismus geschlossen (vgl. Abbildung 1.1).

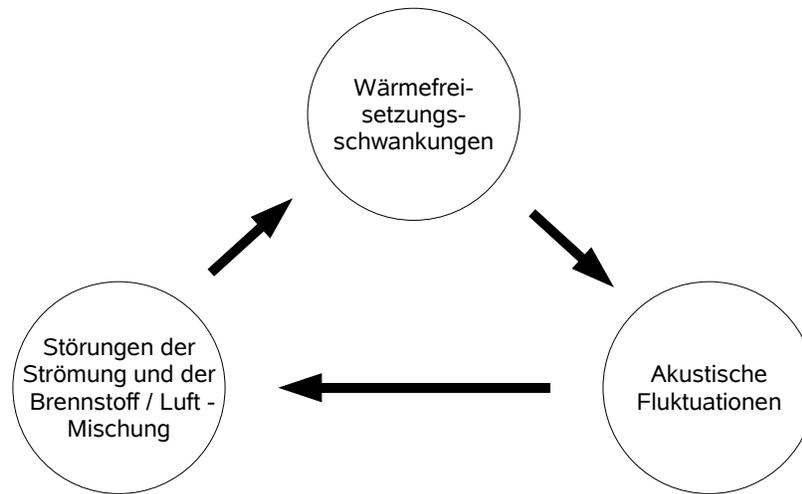


Abbildung 1.1: Rückkopplungsmechanismus zur Ausbildung von Verbrennungsinstabilitäten [4]

Ist das System, wie in realen technischen Anlagen, nicht perfekt vorgemischt, so können Schwankungen der Luftzahl einen entscheidenden Beitrag zur Ausbildung und Anfachung thermoakustischer Instabilitäten leisten [1, 2]. Luftzahlschwankungen können durch verschiedene Mechanismen generiert werden, wie zum Beispiel einem fluktuierenden Brennstoff- oder Luftmassenstrom oder auch instationären Mischungs-, Verdampfungs- und Zerstäubungsvorgängen [4]. Auch kohärente Strukturen können aufgrund ihrer Beeinflussung des konvektiven Transports des Brennstoffgemisches zu Luftzahlschwankungen führen [2]¹. In Abbildung 1.2 sind zusammenfassend verschiedene Effekte dargestellt, die zur Ausbildung thermoakustischer Schwingungen in realen technischen Verbrennungssystemen beitragen können.

Eine erste qualitative Formulierung der physikalischen Zusammenhänge zur Ausbildung thermoakustischer Instabilitäten stammt aus dem 19. Jahrhundert von Lord Rayleigh². Das sogenannte Rayleighkriterium (bzw. das Rayleighintegral) stellt einen lokalen Zusammenhang zwischen der Druckfluktuation p' und der Wärmefreisetzungsschwankung \dot{q}' her.

¹Schwankungen in den Zufuhrleitungen des Brennstoffes sind generell als wenig entscheidend einzustufen, da solche Leitungen in der Regel akustisch steif ausgeführt sind, im Gegensatz zu den Versorgungssystemen der Luftzufuhr [1].

²Die Erläuterungen hierzu folgen den Ausführungen von Zinn und Lieuwen [4].

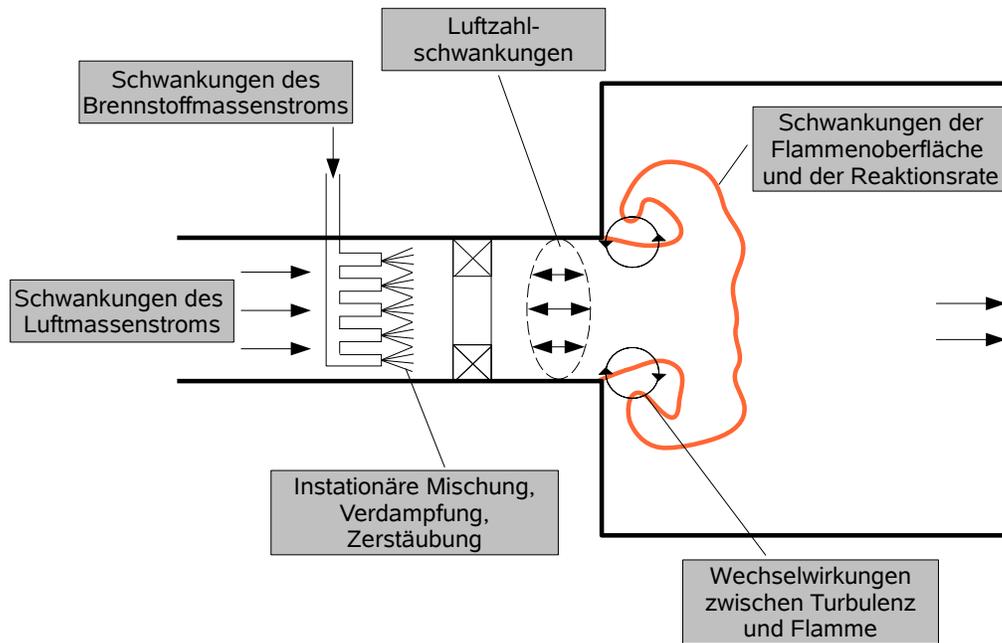


Abbildung 1.2: Strömungs- und Flammenprozesse, die Verbrennungsinstabilitäten in Gasturbinen bedingen können [4]

$$\int_t p'(t) \dot{q}'(t) dt > 0. \quad (1.1)$$

Es gibt an, ob eine akustische Störung im betrachteten Zeitintervall aufgrund thermoakustischer Rückkopplung lokal angefacht oder gedämpft wird. Entscheidend ist dabei bei harmonischen Schwingungen insbesondere die Phasenlage zwischen den beiden Schwankungsgrößen p' und \dot{q}' . Sie bestimmt das Vorzeichen des Integrals. Wenn der Betrag der Phasendifferenz größer 90° ist, ist es negativ. Es bildet sich keine akustische Instabilität aufgrund thermoakustischer Rückkopplung aus. Wenn der Betrag der Phasendifferenz jedoch kleiner 90° ist, ist das Vorzeichen positiv. In diesem Fall wird Energie vom Wärmefreisetzungsprozess auf die akustischen Schwankungen übertragen. Dies kann zur Ausbildung thermoakustischer Instabilitäten führen³. Vor-

³Allgemein gilt für nichtharmonische Schwingungen, dass sich eine thermoakustische Instabilität prinzipiell ausbilden kann, wenn das Integral aus Gleichung 1.1 bei einer Integration über eine vollständige Schwingungsperiode positiv ist. Es bildet sich hingegen keine thermoakustische Instabilität aufgrund solcher Rückkopplungseffekte aus, wenn das entsprechende Integral negativ ist [5].

aussetzung dafür ist, dass die den Schwankungsgrößen zugeführte Energie die gleichzeitig im System existierende Dämpfung betragsmäßig übersteigt. Eine solche Dämpfung kann zum Beispiel aus Abstrahlung und Konvektion akustischer Energie an den Rändern, aus viskoser Dissipation oder auch aus Wärmeübertragung resultieren. Das (oben genannte, klassische) Rayleighkriterium ist folglich eine notwendige, aber nicht hinreichende Voraussetzung für die Ausbildung thermoakustischer Instabilitäten. Im Fall einer akustischen Instabilität steigen die Amplituden der Schwingungsmode so lange an, bis nichtlineare Effekte zu einer Sättigung und damit zur Ausbildung eines Grenzyklus führen. Anfachende und dämpfende Effekte halten sich dann die Waage. Eine entsprechend erweiterte Formulierung des Rayleighkriteriums, aufbauend auf einer Formulierung von Zinn und Lieuwen [4], lautet zum Beispiel:

$$\int_V \int_{\mathfrak{T}} p'(\mathbf{x}, t) \dot{q}'(\mathbf{x}, t) dt dV \geq \int_V \int_{\mathfrak{T}} \sum_i L_i(\mathbf{x}, t) dt dV + \int_A \int_{\mathfrak{T}} \sum_j L_{R,j}(\mathbf{x}, t) dt dA. \quad (1.2)$$

V entspricht dem Brennkammervolumen, \mathfrak{T} der Periode einer Schwingung, $L_i(\mathbf{x}, t)$ dem i -ten Verlustprozess akustischer Energie im Inneren des betrachteten Gebiets und $L_{R,j}(\mathbf{x}, t)$ dem j -ten Verlustprozess akustischer Energie über die zugehörige Randfläche A des Gebiets. Im Gegensatz zu Gleichung 1.1 ist diese Formulierung auf das gesamte System bezogen. Das Gleichheitszeichen symbolisiert den Grenzyklus.

Erste Beobachtungen von Verbrennungsinstabilitäten (sog. *singende Flammen*) stammen aus dem Jahr 1777 (vgl. hierzu u. a. [3, 4]). Lange Zeit galten thermoakustische Schwingungen jedoch als ein überwiegend akademisches Problem bzw. im Wesentlichen limitiert auf Nischen wie militärische Anwendungen oder die Raumfahrt. Bekanntestes Beispiel hierzu ist das F1-Triebwerk der Saturn-Rakete, welches entscheidender Bestandteil der ersten bemannten Mondmission war [4]. Aber auch diverse weitere Fest- und Flüssigbrennstoffraketen, wie z. B. die Booster des Space Shuttles oder auch der Antrieb der ARIANE-Trägerrakete wiesen teils thermoakustische Instabilitäten auf [4, 6]. Ähnliche Probleme sind auch aus dem Bereich der Nachbrenner bekannt [4].

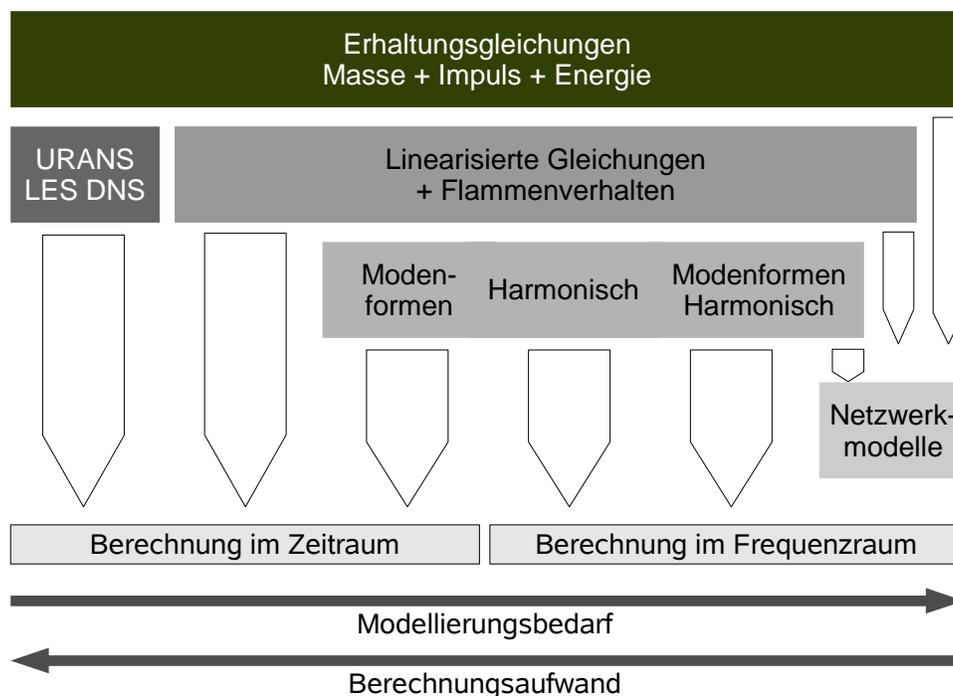


Abbildung 1.3: Übersicht über verschiedene Verfahren zur Berechnung von Verbrennungsschwingungen nach [6] bzw. [3]

Insbesondere durch die Einführung von industriellen Verbrennungstechnologien hoher Leistungsdichte in Kombination mit Magerverbrennungskonzepten treten Verbrennungsschwingungen heute auch vermehrt im Bereich der Stromerzeugung (stationäre Gasturbinen), der Dampferzeuger, der Heizsysteme und der industriellen Feuerungen auf [4].

1.2 Modellierungsansätze

Zur Analyse thermoakustischer Instabilitäten und zur Erstellung von Vorbeugemaßnahmen wurden in den letzten Jahrzehnten diverse Modellierungsansätze entwickelt [6]. Ein Überblick über verschiedene Berechnungsverfahren hierzu wird unter anderem von Pankiewitz [3] gegeben. Pieringer [6] greift diesen auf und diskutiert die verschiedenen Ansätze hinsichtlich ihrer Anwendbarkeit auf die Berechnung von Verbrennungsinstabilitäten in Raketenschub-

kammern. In beiden Fällen reicht das Portfolio von der Verwendung von Netzwerkmodellen bis zu komplexen CFD-Ansätzen (Abbildung 1.3) mit den jeweiligen Vor- und Nachteilen bzw. Grenzen.

In Anlehnung an Pankiewitz [3] und Pieringer [6] wird im Folgenden eine kurze Zusammenfassung der bestehenden Modellierungsansätze gegeben. Für eine detailliertere Darstellung sei auf diese beiden Arbeiten verwiesen.

Die Berechnungsverfahren zur Bestimmung thermoakustischer Prozesse basieren stets auf den Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie (vgl. Abbildung 1.3). Je nach Art des verwendeten Simulationsverfahrens erfolgen die Untersuchungen im Frequenz- oder auch im Zeitbereich. Der numerische Aufwand der einzelnen Methoden variiert dabei beträchtlich in Abhängigkeit vom Modellierungsbedarf.

Die Verfahren mit den geringsten Anforderungen hinsichtlich des Rechenaufwandes, bei gleichzeitig hohem Modellierungsbedarf, stellen Netzwerkmodelle dar. Dabei wird ein komplexes System in ein Netzwerk einzelner akustischer Elemente unterteilt [7] (vgl. Abschnitt 2.5). Das Transferverhalten der einzelnen Elemente kann generell analytisch (z. B. [7–10]), numerisch (z. B. [3, 9, 11, 12]) oder auch experimentell (z. B. [8, 9, 13, 14]) bestimmt werden. Voraussetzung dafür ist im klassischen Fall neben einer harmonischen, eine ebene Wellenausbreitung an den Schnittstellen zwischen den Elementen. Die ursprüngliche Limitierung auf ein ausschließlich eindimensionales akustisches Feld wurde inzwischen erweitert auf eine eventuell benötigte quasi 2D- bzw. quasi 3D-Betrachtung [15, 16]. Auch die Analyse komplexer Modenformen in komplexen Geometrien ist mittlerweile möglich, unter anderem durch Ansätze im Zustandsraum [17, 18]. Zur Bestimmung der Stabilität der betrachteten Systeme werden regelungstechnische Ansätze verwendet (z. B. [9, 10, 12, 18, 19]). Entscheidend für die Qualität des Verfahrens ist insbesondere die korrekte Wiedergabe des Übertragungsverhaltens der Flamme [3], die sogenannte Flammentransfermatrix (z. B. [18, 20]), welche häufig über den Umweg der Flammentransferfunktion bestimmt wird (z. B. [8, 11, 13, 21–24]). Netzwerkmodelle werden seit den 60er Jahren zur Bestimmung der Stabilität thermoakustischer Systeme verwendet [10]. Seit dem Ende der 90er Jahre finden sie in diversen Formen und Erweiterungen verstärkt Einsatz zur Vorher-

sage der Stabilität von Nachbrennern, Gasturbinenbrennkammern bzw. entsprechenden Prüfstandskonfigurationen [10] (z. B. [9, 13, 17, 18, 22, 25, 26]).

Das andere Extremum hinsichtlich der Berechnung thermoakustischer Instabilitäten sind instationäre CFD-Rechnungen reaktiver Strömungen in komplexen, dreidimensionalen Geometrien. Der Modellierungsbedarf ist dabei deutlich geringer, da insbesondere die physikalischen Zusammenhänge, Wechselwirkungen und Nichtlinearitäten zwischen den akustischen Größen und der schwankenden Wärmefreisetzung direkt durch das Lösen der Erhaltungsgleichungen bestimmt werden können. Jedoch sind auch hier in der Regel noch Modelle bezüglich der Verbrennung und der Turbulenz erforderlich, da eine detaillierte Auflösung dieser Zusammenhänge für komplexe Verbrennungsvorgänge bis heute noch nicht realisierbar ist. Bei Verwendung eines DNS-Ansatzes ist der Bedarf an numerischer Rechenzeit und -leistung generell enorm. Der Aufwand reduziert sich für die Durchführung einer LES- bzw. einer URANS-Simulation, ist aber nach wie vor als vergleichsweise sehr hoch einzustufen. Untersuchungen anhand vereinfachter Konfigurationen, unter Verwendung von LES [27] und insbesondere URANS [28], konnten jedoch bereits erfolgreich realisiert werden, auch mittels einer kommerziellen Software [29]. Die entsprechende Betrachtung von Hantschk und Vortmeyer [29] z. B. musste jedoch noch auf ein zweidimensionales, achsensymmetrisches Rechengebiet beschränkt werden (URANS). In jüngster Vergangenheit veröffentlichten Staffelbach et al. [24] nun jedoch dreidimensionale LES-Berechnungen der thermoakustischen Stabilität einer komplexen Helikopter-Ringbrennkammer mit 15 Brennern. Die Rechnungen fanden unter Verwendung einer enormen Anzahl von CPUs statt. Dies unterstreicht zwar die generelle Realisierbarkeit des Vorgehens, zeigt jedoch gleichzeitig auch die Grenzen der Einsetzbarkeit dieser Methode für derzeitige Entwicklungsprozesse in Unternehmen auf.

Neben diesen ausschließlich auf CFD-Methoden basierenden Stabilitätsbetrachtungen von gesamten Verbrennungssystemen, finden entsprechend reduzierte Ansätze auch breite Anwendung zur Bestimmung des komplexen Übertragungsverhaltens einzelner akustischer Elemente, wie zum Beispiel Flammen, Liner oder Flächensprünge. Das so bestimmte Übertragungsver-

halten kann dann im Rahmen von Netzwerkmodellen verwendet werden. Die Berechnung der Stabilität eines gesamten Verbrennungssystems mittels CFD wird jedoch, wie oben beschrieben, auch in näherer Zukunft noch enorm aufwändig bleiben. Daher scheinen solche Ansätze bis heute für praktische Anwendungsfälle hinsichtlich komplexer Vorgänge in realen Turbinenkonfigurationen, insbesondere in Ringbrennkammern, kaum praktikabel bzw. im Rahmen von flexiblen Designsystemen auch nicht zielführend.

Zwischen den beiden oben beschriebenen Extrema existieren diverse weitere Ansätze zur Bestimmung der thermoakustischen Stabilität von Verbrennungssystemen (Abbildung 1.3). Allen diesen Ansätzen gemeinsam ist, dass sie auf den linearisierten Erhaltungsgleichungen beruhen und dass das Übertragungsverhalten der Flamme explizit modelliert werden muss [3,6]. In vielen Fällen ist die Vorgabe der Modenform und/oder der Ausbreitung der Wellen von Nöten.

1.3 Berechnungsverfahren nach Pankiewitz

Ein damals neuartiges Berechnungsverfahren zur Bestimmung der thermoakustischen Instabilität von Verbrennungssystemen wurde von Pankiewitz entwickelt [3, 16, 30]. Ziel dabei war, langfristig ein hybrides, numerisches Auslegungswerkzeug zu erstellen, mit dem die Ausbildung thermoakustischer Instabilitäten in komplexen Mehrbrennersystemen unter möglichst geringem numerischen Aufwand realitätsnah erfasst werden kann. Nach entsprechenden Weiterentwicklungen sollte das Berechnungsverfahren den Entwicklungsprozess von Brennkammern zeitnah unterstützen und damit das Entwicklungsrisiko moderner Verbrennungssysteme deutlich vermindern.

Der dreidimensionale Ansatz von Pankiewitz basiert auf einer erweiterten Form der Wellengleichung. Er grenzt sich damit einerseits von den reinen CFD-Modellen ab, welche in der Regel äußerst aufwändig hinsichtlich des numerischen und damit auch des zeitlichen Bedarfs sind (vgl. Abschnitt 1.2). Andererseits unterscheidet er sich aber auch von den Netzwerkmodellen, die üblicherweise auf ein- oder auch zweidimensionale Ansätze im Frequenzbereich

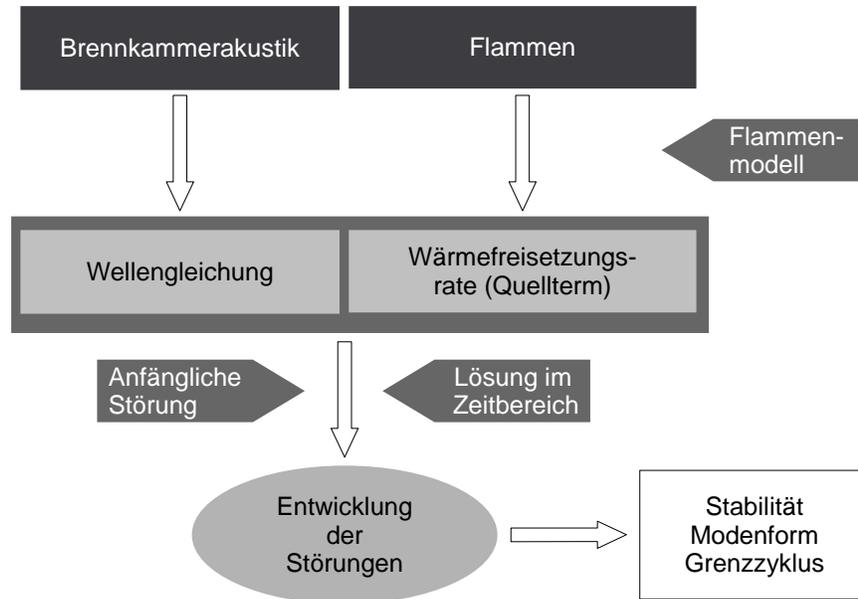


Abbildung 1.4: Schematischer Aufbau des Berechnungsverfahrens nach Pankiewitz [3]

beschränkt sind. Die generelle Funktionalität seines Ansatzes belegt Pankiewitz anhand einer Modellringbrennkammer, die zu experimentellen Zwecken am Lehrstuhl für Thermodynamik der Technischen Universität München genutzt wird. Validierungen gegen modale Ansätze belegten deutlich das Potential des neuartigen Verfahrens [16]. Die vorliegende Arbeit kann als direkte Weiterentwicklung des Modellpakets von Pankiewitz verstanden werden. Daher erfolgt hier zunächst eine kurze Zusammenfassung der Vorgehensweise und Ergebnisse von Pankiewitz [3, 16, 30].

Der prinzipielle Aufbau des transienten Berechnungsmodells ist in Abbildung 1.4 dargestellt. Die Akustik der Brennkammer wird durch die Wellengleichung der folgenden Form bestimmt [30]:

$$\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + 2\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \left(\frac{\partial p'}{\partial t} \right) + \bar{\mathbf{u}} \cdot (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) (\nabla p') \right) - \bar{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' \right) = \frac{\kappa - 1}{c^2} \frac{Dq'}{Dt}. \quad (1.3)$$

Da in Gasturbinenbrennkammern die Machzahlen in der Regel sehr gering sind, verwendet Pankiewitz jedoch, gemäß der in der Literatur üblichen Vorgehensweise, anstelle von Gleichung 1.3 zumeist die vereinfachte Variante für $\bar{\mathbf{u}} = 0$. Der Einfluss von Verbrennung wird mittels einer externen Wärmezufuhr modelliert (rechte Seite in Gleichung 1.3). Der entsprechende Quellterm kann prinzipiell auf analytischen, numerischen oder auch experimentellen Ergebnissen beruhen. Pankiewitz verwendet ein generisches Modell - das sogenannte $n - \tau$ -Modell - in Anlehnung an Bloxsidge et al. [31] bzw. Dowling [32]:

$$\frac{1}{\omega_0} \frac{d\dot{q}'_j}{dt} + \dot{q}'_j = n f(u'_{B,j}(t - \tau)), \quad j = 1, \dots, m. \quad (1.4)$$

Diesem legt er folgende Annahmen zugrunde:

- Die Wärmefreisetzungszone ist ein fester, vordefinierter Bereich konstanten Volumens hinter dem Austritt eines jeden Brenners. Es findet keine Flammenbewegung statt.
- Die momentane volumetrische Wärmefreisetzungsrates ist ausschließlich von der Brenneraustrittsgeschwindigkeit u_B des zugehörigen Brenners (und keines anderen Brenners) abhängig. Es ist eine einzelne, feste Verzugszeit (Totzeit) τ wirksam.
- Die Intensität der Antwort der Flamme auf Geschwindigkeitsfluktuationen nimmt mit wachsender Frequenz zunehmend ab.
- Die Stärke der Wärmefreisetzungsschwankungen ist limitiert, respektive bedingen Sättigungseffekte eine Nichtlinearität.

Gleichung 1.4 beschreibt das nichtlineare Verhalten der Wärmefreisetzung an einem Brenner j . \dot{q}'_j ist die Schwankung der volumetrischen Wärmefreisetzungsrates. Der Verstärkungsfaktor bzw. Interaktionsindex n folgt der Gleichung $n = \bar{\dot{q}} / \bar{u}_B$. Die Funktion f bestimmt die nichtlineare Abhängigkeit der fluktuierenden Wärmefreisetzungsrates von der Schnelle und somit die Sättigung gemäß:

$$f(u'_{B,j}(t-\tau)) = \begin{cases} u'_{B,j}(t-\tau) & , \text{ falls } |u'_{B,j}(t-\tau)| \leq \mu \bar{u}_B \\ \text{sign}(u'_{B,j}(t-\tau)) \mu \bar{u}_B & , \text{ falls } |u'_{B,j}(t-\tau)| > \mu \bar{u}_B \end{cases} \quad (1.5)$$

Im Gegensatz zum Ansatz von Dowling [32] ist in Gleichung 1.5 zusätzlich der Parameter μ enthalten. Er erlaubt, den Einfluss der Sättigung bereits dann zu realisieren, wenn die akustischen Schwankungen noch kleiner als die mittlere Geschwindigkeit sind. Der Wert von μ wurde von Pankiewitz willkürlich auf $\mu = 0.75$ festgesetzt⁴. Das dynamische Verhalten der Flamme(n) wird mittels der Zeitableitung in Gleichung 1.4 abgebildet. Bei langsamen Vorgängen übt dieser Term kaum einen Einfluss aus. Das Modell verhält sich dann nahezu analog zum analytischen Zeitverzugsmodell von Crocco und Cheng (1956) [33]. Bei schnelleren Änderungen hingegen nimmt dadurch die Amplitude der fluktuierenden Wärmefreisetzungsschwankung mit der Frequenz stetig ab. In Abhängigkeit von der Eckfrequenz ω_0 macht sich dieses Tiefpassverhalten bereits bei niedrigeren oder erst bei höheren Frequenzen deutlich bemerkbar. u'_B repräsentiert die Geschwindigkeitsfluktuation im Brenner sowie τ eine konvektive Verzugszeit. Von τ hängt gemäß des Rayleighkriteriums, über die Bestimmung des Phasenverzugs, wesentlich die thermoakustische Stabilität des Systems ab. Trotz der Einfachheit des Modells erwies es sich für Pankiewitz [30] als ausreichend zur generellen Verifizierung seines Ansatzes und zur Untersuchung der Grundmechanismen von Verbrennungsinstabilitäten.

Die einzelnen Flammen im Ringbrennkammermodell von Pankiewitz werden als kompakt betrachtet und als örtlich feste, konische Geometrien modelliert. Eine schematische Skizze des Aufbaus der von Pankiewitz untersuchten Ringbrennkammer sowie eine dreidimensionale Ansicht der implementierten Geometrie sind im verwendeten FEM-Code, FEMLAB, in Abbildung 1.5 gegeben. Aufgrund der großen Wellenlängen der untersuchten Frequenzen kann dabei generell, im Gegensatz zu den in Abschnitt 1.2 beschriebenen CFD-Ansätzen, auf eine exakte Darstellung von geometrischen Details weitgehend verzichtet werden.

⁴Pankiewitz bemerkt hierzu, dass im Bezug auf die Literatur ein geringerer Wert von ca. $\mu = 0.3$ oder $\mu = 0.4$ wahrscheinlich realistischer gewesen wäre [3].

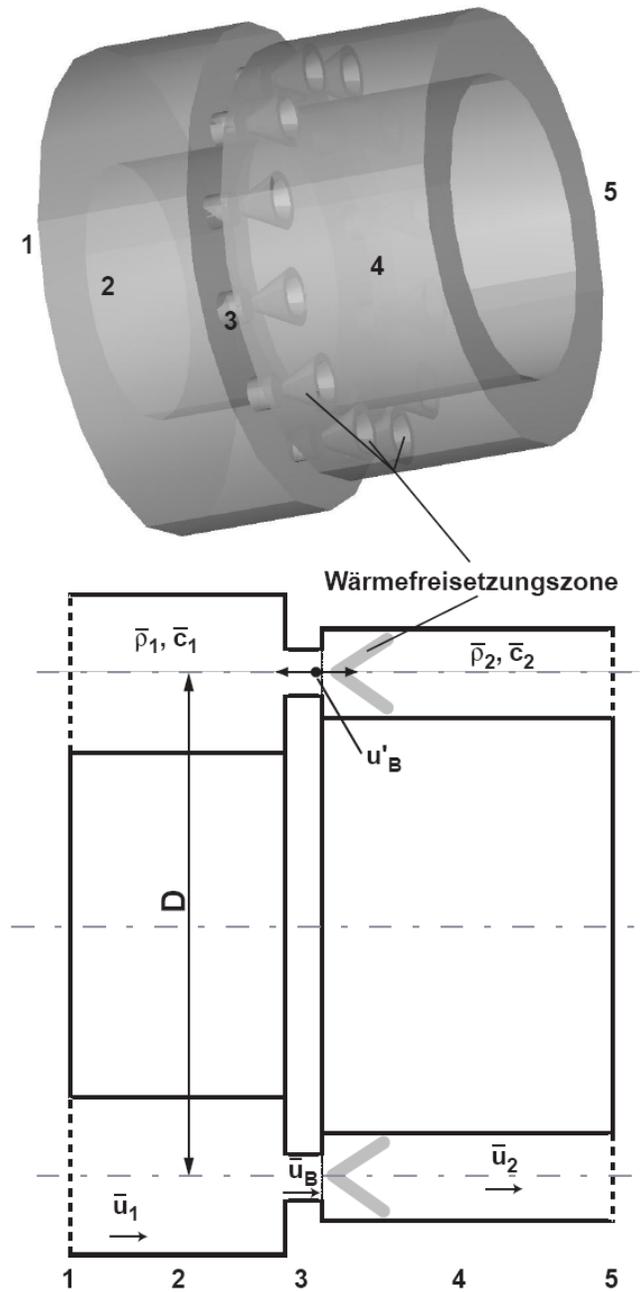


Abbildung 1.5: Geometrie der von Pankiewitz betrachteten Modellringbrennkammer aus [3]. 1: Eintrittsebene, 2: Vorkammer, 3: Bereich der Brenner (Drallerzeuger), 4: Brennkammer, 5: Austrittsebene der Brennkammer

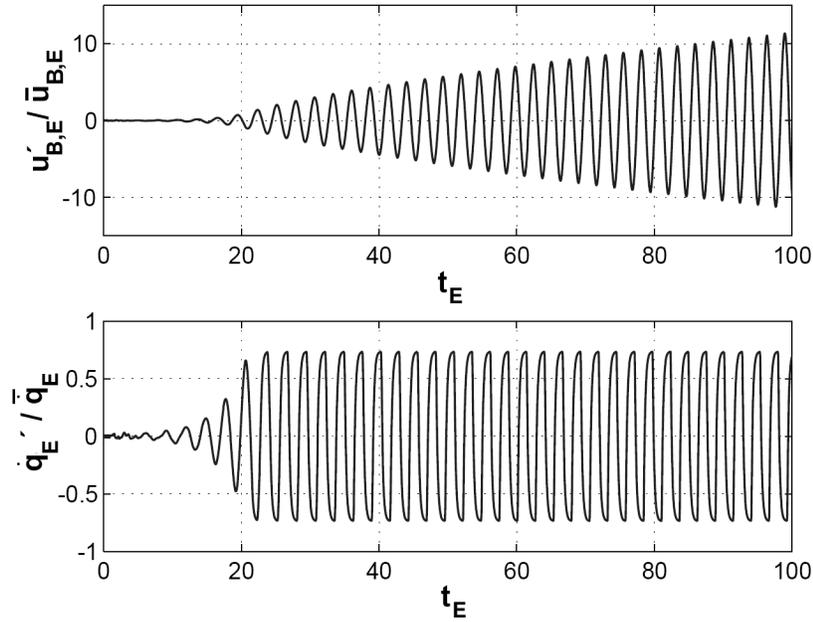


Abbildung 1.6: Entwicklung einer selbsterregten Instabilität in einem System mit Sättigung, aber ohne Verluste (entdimensioniert) [3]

Als Randbedingungen wurden von Pankiewitz überwiegend akustisch harte Wände angenommen. An den stirnseitigen Ein- bzw. Auslässen wurden jedoch auf der gesamten Fläche homogene Verlustrandbedingungen implementiert, gemäß:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p' = -\frac{K}{K\bar{u}_n + 1/\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial t}. \quad (1.6)$$

\mathbf{n} ist dabei der Normalenvektor und \bar{u}_n der entsprechende Anteil der mittleren Geschwindigkeit. K entspricht einer Proportionalitätskonstanten, welche sich aus dem mittleren Druckverlust über dem Ein- bzw. Auslass bestimmen lässt [30]. Für $M = 0$ entspricht $K = 0$ einem geschlossenen und $K \rightarrow \infty$ einem offenen Ende. Die Modellierungen und Berechnungen von Pankiewitz erfolgten in entdimensionierter Form (Index E). Die mittleren Größen wurden als abschnittsweise konstant über den einzelnen Bereichen des Verbrennungssystems angenommen (vgl. Abbildung 1.5).

Die örtliche Diskretisierung erfolgte mit Hilfe eines unstrukturierten Gitters. Für die zeitliche Diskretisierung wurde ein impliziter Löser mit automatischer Schrittweitenkontrolle verwendet, welcher auf einer *Backward Differential Formula (BDF)* zweiter Ordnung beruht. Die Anfangsbedingung entsprach einer zufälligen Verteilung der Druckschwankungen, aus der sich im Laufe der Zeit eine Instabilität entwickeln konnte. Die Berechnung der Flammenantwort erfolgte extern in MATLAB für jeden Zeitschritt. In Abbildung 1.6 ist beispielhaft die Entwicklung der Schallschnelle und der Wärmefreisetzungsschwankung über der Zeit für eine ausgeprägte Instabilität gezeigt ($K = 0$). Deutlich ist der Einfluss der Sättigung auf die Wärmefreisetzungsschwankung zu erkennen. Da in diesem Fall mit $K = 0$ keinerlei Verluste im System enthalten sind, steigt die Schnelle trotz Sättigung über alle Grenzen an.

Im Rahmen einer parametrischen Studie zum Einfluss der Verzugszeit τ konnte Pankiewitz mit Hilfe dieses Berechnungsverfahrens, neben der Bestimmung der Modenform, qualitative Aussagen bezüglich der Stabilität des Systems, der Wachstumsraten und der maximalen Amplituden in der Sättigung ableiten.

1.4 Zielsetzung der Arbeit

Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, das Modellpaket von Pankiewitz weiter zu entwickeln, um damit künftig den Entwicklungsprozess von Brennkammern zeitnah, bei vergleichsweise geringem Aufwand, durch quantitative Aussagen bezüglich der thermoakustischen Stabilität unterstützen zu können. Damit soll schließlich das Entwicklungsrisiko moderner Verbrennungssysteme deutlich gemindert werden. Dazu ist es essentiell, den Energiehaushalt der akustischen Schwingungen realistisch zu erfassen. Wesentlich sind dabei die Wärmefreisetzung und die akustischen Verluste (sowohl im System als auch an den Rändern). In dieser Arbeit liegt der Fokus auf den letztgenannten Mechanismen. In Abhängigkeit vom jeweils betrachteten Validierungsfall erfolgt die Modellierung im Zeit- oder auch im Frequenzbereich.

In Kapitel 2 und 3 wird zunächst ein Einblick in die Grundlagen der Akustik und der FEM-Methode gegeben, inklusive einer Bestimmung der numerischen Verluste im vorliegenden Anwendungsfall. Im Rahmen von Kapitel 4 findet eine ausführliche Analyse der Wellen- bzw. der Helmholtzgleichung statt. Verglichen wird der Einfluss verschiedener Terme unterschiedlicher Varianten der beiden Gleichungen. Der Fokus liegt dabei auf der Modellierung von Dichtegradienten sowie dem Einfluss der mittleren Geschwindigkeit. Die Untersuchungen haben zum Ziel, die gesamte Methode einerseits so „schlank“ wie möglich zu gestalten, aber andererseits so geringe Abweichungen wie möglich zu generieren, um so eine optimale Funktionalität des Auslegungswerkzeugs zu gewährleisten. Zusätzlich finden allgemeine Studien zur Einbindung von Verlusten in die Helmholtzgleichung statt.

In Kapitel 5 wird schließlich ein neuartiger Ansatz vorgestellt, mit dem akustische Verluste in Brennkammern, trotz der Verwendung der isentropen Wellen- bzw. Helmholtzgleichung, realitätsnah erfasst werden können. Die Validierung erfolgt im Frequenzbereich, anhand verschiedener Testfälle unterschiedlicher Komplexität. Neben den akustischen Verlusten im System sind Verluste an den Rändern von großer Bedeutung für die Stabilität und somit die korrekte Modellierung des thermoakustischen Systems. Daher wird im Rahmen von Kapitel 6 die Berechnungsmethode durch einen Ansatz zum Transfer komplexer frequenzabhängiger Randbedingungen vom Frequenz- in den Zeitbereich erweitert. Konkret erfolgt dies anhand der Modellierung eines Liners, welcher in modernen Turbomaschinen u. a. zu Kühlzwecken verwendet wird. Die erfolgreiche Implementierung der einzelnen Teilmodelle sowie die generelle Funktionalität der verschiedenen getätigten Erweiterungen und Verbesserungen des gesamten Stabilitätsmodells werden schließlich in Kapitel 7 belegt, anhand eines Einzelbrennerprüfstands des Lehrstuhls für Thermodynamik. Die Validierung der Ergebnisse erfolgt gegen experimentelle Daten. Eine Resümee wird im Rahmen von Kapitel 8 gegeben.

2 Akustische Grundlagen

Im Folgenden findet eine kurze Zusammenfassung der akustischen Grundlagen statt. Zunächst werden die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Grundgleichungen hergeleitet. Da die Validierung der verschiedenen Modellierungsansätze überwiegend im Frequenzbereich erfolgt, werden anschließend die Grundlagen harmonischer und ebener Wellenausbreitung beschrieben, ebenso wie die grundlegenden Zusammenhänge bezüglich akustischer Netzwerke und Transfermatrizen. Ein wesentlicher Anteil dieser Arbeit befasst sich mit der korrekten Beschreibung des Energiehaushalts eines (thermo-) akustischen Systems. Daher werden zudem die Begriffe der akustischen Energie und der akustischen Intensität erläutert, ebenso wie die Grundlagen von Fluid-Schall-Interaktionen. Für detailliertere Erläuterungen zu diesen Themen sei jedoch auf die entsprechende Fachliteratur verwiesen.

2.1 Linearisierte Eulergleichungen

Grundlage für die Beschreibung strömungsmechanischer und akustischer Vorgänge sind die fluidmechanischen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie. In sehr allgemeingültiger Form entsprechen sie den Navier-Stokes-Gleichungen. Diesen wird im Wesentlichen nur die Existenz eines newtonschen Fluids vorausgesetzt [34]. Die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen erfolgt in der Regel numerisch, häufig unter einem beträchtlichen Berechnungsaufwand (vgl. Abschnitt 1.2).

Oft können für die Betrachtung der akustischen Wellenausbreitung Dissipationseffekte vernachlässigt werden [3, 34, 35]. Die Navier-Stokes-Gleichungen vereinfachen sich dann zu den Eulergleichungen¹. Sie lauten in kartesischer

¹Im physikalisch vollkommen korrekten Sinn sind die Bezeichnungen *Navier-Stokes-Gleichung* sowie *Euler-*

Tensorschreibweise [6]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0, \quad (2.2)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{c^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) p + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\kappa - 1}{c^2} \dot{q}. \quad (2.3)$$

Die Eulergleichungen gelten allgemein für ein reibungsfreies Fluid ohne Volumenkräfte [35]. Einflüsse aufgrund von Gravitation und Wärmeleitung sowie viskoser Dissipation werden vernachlässigt [3]. Die Entropie der Fluidteilchen ändert sich hier somit nicht aufgrund von Zähigkeitseffekten bzw. Irreversibilitäten [3]. Änderungen der Entropie können aber aufgrund externer, volumetrischer Wärmezufuhr \dot{q}' erfolgen. Dies ermöglicht unter anderem die Modellierung von Verbrennungseffekten [3,6]. In der oben dargestellten Form ist die Energiegleichung (Gleichung 2.3) auf die Betrachtung idealer Gase beschränkt². Wird keine Wärmefreisetzung berücksichtigt, ist die Strömung bei Verwendung der Eulergleichungen isentrop.

Zur Beschreibung akustischer Phänomene mittels der Eulergleichungen wird eine Linearisierung der strömungsmechanischen Größen vorgenommen. Für den Druck lautet diese [3, 6, 35]:

$$p = \bar{p} + p'. \quad (2.4)$$

Die Feldgrößen werden demnach als Superposition ihres Mittelwertes ($\bar{}$) und der zugehörigen Schwankungsgröße (\prime) beschrieben. Terme höherer Ordnung

gleichung lediglich auf die Impulserhaltung beschränkt. In der Regel werden diese Begriffe jedoch im Plural verwendet. Sie bezeichnen dann den gesamten Gleichungssatz, bestehend aus Massen-, Energie- und Impulserhaltung, in ihrer jeweils verwendeten Variante. Diese Konvention wird auch hier verwendet.

²Für eine detaillierte Herleitung des Gleichungssystems (insbesondere von Gleichung 2.3) sei auf Pankiewitz [3] verwiesen.

werden vernachlässigt. Dies setzt primär voraus, dass die Schwankungsgrößen klein im Vergleich zu den jeweiligen Mittelwerten sind: z. B. $p' \ll \bar{p}$; $u', v', w' \ll c$; $\rho' \ll \bar{\rho}$. Damit resultiert aus Gleichungen 2.1 bis 2.3 [3, 6]:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\rho} + \bar{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u}' + \rho' \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \frac{\nabla p'}{\bar{\rho}} - \frac{(\nabla \bar{p}) \rho'}{\bar{\rho}^2} = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla p' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{p} + \kappa \bar{p} \nabla \cdot \mathbf{u}' + \kappa p' \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = (\kappa - 1) \dot{q}'. \quad (2.7)$$

Die so genannten *linearisierten Eulergleichungen* beschreiben die Ausbreitungen von Störungen in einer gegebenen, mittleren, nicht gleichförmigen Strömung [6].

2.2 Wellengleichung

Bei vielen technischen Anwendungen findet die Ausbreitung akustischer Wellen in einem weitgehend homogenen Medium statt bzw. in einem Medium, das entweder in Ruhe ist oder sich nur geringfügig bewegt. Somit ist es oft zulässig, Gradienten der mittleren Geschwindigkeit und des mittleren Drucks bei den Berechnungen des akustischen Feldes zu vernachlässigen. Ist zudem die mittlere Geschwindigkeit, respektive die Machzahl, gering ($M < 0.2$), kann der Einfluss des mittleren Geschwindigkeitsfeldes (oft) vollkommen vernachlässigt werden. Damit reduzieren sich die Gleichungen 2.5 und 2.6, respektive die Kontinuitäts- und die Impulsgleichung, auf:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\rho} + \bar{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u}' = 0, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' = 0. \quad (2.9)$$

Leitet man Gleichung 2.8 nach der Zeit ab und subtrahiert davon die Divergenz von Gleichung 2.9, so folgt:

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \bar{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' \right) = 0. \quad (2.10)$$

Um daraus einen Ausdruck herzuleiten, der ausschließlich von der akustischen Druckschwankung p' abhängt, muss eine entsprechende Beziehung zwischen Druck und Dichte gefunden werden [35]. Linearisiert man dazu das totale Differential der Zustandsgleichung $p = p(\rho, s)$ unter der Annahme eines isentropen Mediums und unter Verwendung der Definition der Schallgeschwindigkeit

$$c^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s, \quad (2.11)$$

so folgt [18, 34]

$$p' = c^2 \rho' \quad (2.12)$$

bzw.

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \bar{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' \right) = 0. \quad (2.13)$$

Dies ist die Wellengleichung für inhomogene Medien. Sie gilt für kleine Schwankungen in einem ansonsten ruhenden, isentropen Medium [35]. Beschränkt man die Betrachtung weiter auf homogene Temperaturfelder, so folgt:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \Delta p' = 0. \quad (2.14)$$

Dies entspricht der am häufigsten verwendeten Form der Wellengleichung. Daneben existieren diverse weitere Varianten zur Einbindung verschiedener

physikalischer Mechanismen. Für die Ausbreitung von akustischen Wellen in einem homogenen Geschwindigkeitsfeld kann Gleichung 2.14 beispielsweise um konvektive Terme erweitert werden (vgl. Kapitel 4.2). Zudem kann direkt aus den Gleichungen 2.5 bis 2.7 eine Variante der Wellengleichung zur Berücksichtigung externer Wärmezufuhr hergeleitet werden [3]:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \bar{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' \right) = \frac{\kappa - 1}{c^2} \frac{\partial \dot{q}'}{\partial t}. \quad (2.15)$$

Diese Variante ist grundsätzlich geeignet zur Bestimmung des akustischen Felds in einem Verbrennungssystem bei niedrigen Machzahlen [3]. Sie kann demnach zur Untersuchung von thermoakustischen Instabilitäten in Gasturbinenbrennkammern, Kleinbrennern, u. Ä. eingesetzt werden. Dies zeigt, dass die Wellengleichung trotz ihrer Einfachheit durchaus zur generellen Beschreibung von akustischen Zusammenhängen in komplexen, technischen Systemen verwendet werden kann.

2.3 Harmonische Wellen und Helmholtzgleichung

In vielen Fällen ist es möglich, die akustischen Größen als harmonische Wellen darzustellen. Sie besitzen dann einen sinusförmigen Verlauf in Zeit und/oder Raum. Ein Vorteil des harmonischen Ansatzes ist, dass damit zeitliche und örtliche Schwankungen voneinander entkoppelt betrachtet werden können [36]. Ein allgemeiner Ansatz bezüglich des Schalldrucks lautet z. B.:

$$p'(t, \varphi) = P \cos(\omega t + \varphi). \quad (2.16)$$

P entspricht der reellen Amplitude, $\omega = 2\pi f$ der Kreisfrequenz. φ repräsentiert die Phasenverschiebung des Schalldrucks im Vergleich zur Ausgangslage (vgl. Abbildung 2.1). Zur Analyse akustischer Felder ist es oft vorteilhaft, die akustischen Schwankungsgrößen in mathematisch komplexer Schreibweise mittels Exponentialfunktionen darzustellen [3, 6, 35]:

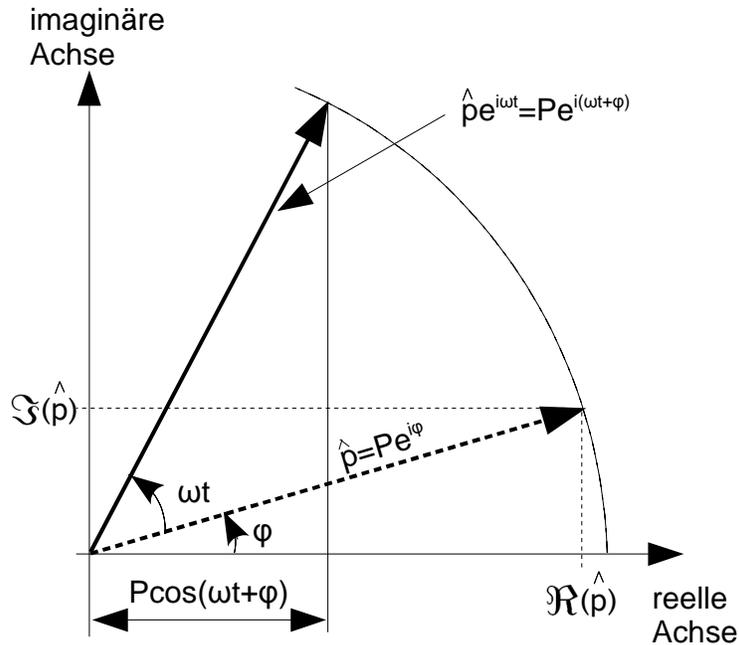


Abbildung 2.1: Darstellung der Zusammenhänge anhand der komplexen Zahlenebene [37]

$$p'(t) = \Re(\hat{p}e^{i\omega t}). \quad (2.17)$$

\hat{p} entspricht der komplexen Amplitude: $\hat{p} = \hat{p}(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x})e^{i\varphi(\mathbf{x})}$ [3]. $P(\mathbf{x})$ repräsentiert die räumliche Verteilung der Amplitude von $\hat{p}(\mathbf{x})$ sowie $e^{i\varphi(\mathbf{x})}$ die Verteilung der Phasenlage $\varphi(\mathbf{x})$. In Abbildung 2.1 sind diese Zusammenhänge schematisch anhand der komplexen Zahlenebene dargestellt [37]. Die Projektion des Zeigers $\hat{p}e^{i\omega t}$ auf die reelle Achse entspricht der trigonometrischen Darstellung in Gleichung 2.16 (vgl. Gleichung 2.17).

Neben dem zeitlich harmonischen Ansatz können viele Schwingungen demnach zusätzlich als örtlich harmonisch betrachtet werden. Aus Gleichung 2.16 resultiert dann z. B. [35]:

$$p'(\mathbf{x}, t) = P \cos(\omega t - \mathbf{k}\mathbf{x}) \quad (2.18)$$

bzw. in exponentieller Form [35]:

$$p'(\mathbf{x}, t) = \Re(P e^{i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{x}}). \quad (2.19)$$

\mathbf{k} ist der Wellenvektor. Bei eindimensionaler Betrachtung entspricht er der Wellenzahl k . Diese beschreibt das Verhältnis der Kreisfrequenz ω zur Schallgeschwindigkeit c und ist umgekehrt proportional zur Wellenlänge $\lambda = c/f$ [35]:

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (2.20)$$

Gleichung 2.20 ist gültig, wenn der Einfluss einer mittleren Strömungsgeschwindigkeit $\bar{\mathbf{u}}$ vernachlässigbar ist. Die Welle bewegt sich dann ausschließlich mit der Schallgeschwindigkeit c fort. Existiert hingegen ein nennenswerter Einfluss der mittleren Strömungsgeschwindigkeit, so sind bezüglich der Ausbreitungsgeschwindigkeit der akustischen Größen zusätzlich entsprechende Geschwindigkeitsanteile zu berücksichtigen (vgl. Abschnitt 4.2).

Zum Transfer der Gleichungen vom Zeit- in den Frequenzraum wird die Fourier-Transformation verwendet, gemäß [3]: $\partial/\partial t \rightarrow i\omega$ bzw.

$\partial^2/\partial t^2 \rightarrow i^2\omega^2 = -\omega^2$. Überträgt man dies auf die Wellengleichung, so folgt:

$$\mathbf{k}^2 \hat{p} + \Delta \hat{p} = 0. \quad (2.21)$$

Gleichung 2.21 ist bekannt als Helmholtzgleichung. \mathbf{k}^2 entspricht $\mathbf{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ [36].

Auch wenn akustische Fluktuationen aus einer Überlagerung mehrerer Frequenzanteile bestehen, ist es möglich, sie mittels eines harmonischen Ansatzes darzustellen, da jedes (akustische) Signal durch eine Fourier-Transformation in harmonische Komponenten konstanter Frequenz zerlegt werden kann [3]. Diese Komponenten folgen jeweils der Darstellung in Gleichung 2.17. Im hier betrachteten Bereich der linearen Akustik verhalten sie sich unabhängig voneinander [3]. Jede einzelne Komponente erfüllt folglich isoliert von den anderen die Grundgleichungen [3].

Besteht keine externe Anregung, stellt Gleichung 2.21 ein Eigenwertproblem dar [3]. Eine Lösung ist nur für bestimmte Werte des Wellenvektors \mathbf{k} bzw. der Wellenzahl k möglich, die sogenannten Eigenwerte [3]. Die Lösungen für die komplexe Druckamplitude \hat{p} repräsentieren die zugehörigen Eigenmoden [3]. Eine Lösung von Gleichung 2.21 liefert die rein akustischen Eigenmoden des betrachteten Systems [3]. Wird hingegen ein System mit akustischen Quellen (Senken)- ebenfalls ohne externe Anregung - betrachtet, sind die Eigenwerte, respektive die jeweiligen Wellenzahlen, komplex [3]. Verwendet man einen solchen Ansatz zur Bestimmung der (thermo-)akustischen Stabilität eines Systems, kann z. B. aus dem Realteil des Eigenwerts die Frequenz der Schwingung abgeleitet werden [3, 6]. Der Imaginärteil bestimmt dann die Wachstumsrate und legt durch sein Vorzeichen fest, ob die Amplitude über der Zeit exponentiell zu- oder abnimmt [3, 6].

2.4 Ebene Wellen

Ein technisch wichtiges und zugleich anschauliches Modell zur Untersuchung verschiedener physikalischer Zusammenhänge ist die eindimensionale Wellenausbreitung. Sie dient u. a. der Beschreibung akustischer Felder in Rohren. Ohne weitere Vereinfachung wird im Folgenden angenommen, dass sich die Wellen ausschließlich entlang der x -Koordinate ausbreiten. Ein möglicher Ansatz zur Lösung der Wellengleichung (Gleichung 2.14) lautet dann:

$$p'(x, t) = \bar{\rho}c(f(x - ct) + g(x + ct)). \quad (2.22)$$

Dies entspricht der Überlagerung einfacher, eindimensionaler Wellen in f und gegen g die Achsrichtung [35]. Beide Wellen breiten sich mit der Schallgeschwindigkeit c aus, solange der Einfluss einer mittleren Geschwindigkeit vernachlässigt werden kann. f und g werden häufig als *Riemann Invarianten* bezeichnet. Sie symbolisieren nahezu beliebige Funktionen, die jedoch unter anderem zweimal differenzierbar sein sollen [35]. Entsprechen Wellen prinzipiell der Form von Gleichung 2.22, werden sie eben genannt, da ihre Wellenfronten ebene Flächen sind [35].

Unter Verwendung der linearisierten Impulserhaltung (Gleichung 2.6 mit $\nabla \bar{p} = 0$) kann aus Gleichung 2.22 die zugehörige Schnelleschwankung u' abgeleitet werden [3]. Damit folgt für p' und u' [10, 38]:

$$p' = \bar{\rho}c(f + g), \quad (2.23)$$

$$u' = f - g. \quad (2.24)$$

Die pu - bzw. die fg -Notation sind äquivalente Darstellungsformen. Für ebene Wellen können sie problemlos ineinander überführt werden. Für $g = 0$ existiert nur eine stromab laufende Welle. Mit $\bar{\mathbf{u}} = 0$ gilt dann: $p' = \bar{\rho}cu'$; für eine ausschließlich stromauf laufende Welle ($f = 0$) ändert sich lediglich das Vorzeichen ($p' = -\bar{\rho}cu'$) [3]. Beide Fälle entsprechen der sogenannten Freifeldannahme³. p' und u' besitzen dann die gleiche Phasenlage. Die Konstante $Z_0 = \bar{\rho}c$ ist die charakteristische Impedanz des betrachteten Fluids [3].

Diese Zusammenhänge sind auch auf harmonische Wellen, respektive auf eine Darstellung im Frequenzbereich, übertragbar. Das akustische Feld an einem Ort ist dabei eindeutig bestimmt, wenn seine komplexe Druckamplitude \hat{p} und die komplexe Schnelleamplitude \hat{u} bekannt sind [3]. Als charakteristische Größe dient dabei die Impedanz:

$$Z(\mathbf{x}) = \frac{\hat{p}(\mathbf{x})}{\mathbf{n} \cdot \hat{u}(\mathbf{x})}. \quad (2.25)$$

Z ist folglich richtungsabhängig. Die Orientierung wird vom Normalenvektor \mathbf{n} bestimmt. Vorteilhaft ist die Verwendung der Impedanz insbesondere für die Definition von Randbedingungen [3]. Eng damit ist der Reflexionsfaktor r verbunden. Er setzt die am Rand auslaufende Welle ins Verhältnis zur einlaufenden. Folglich gilt für ein akustisch passives System stets $|r| \leq 1$.

³Diese existiert prinzipiell auch für $\bar{\mathbf{u}} \neq 0$.

Art der Randbedingung	Impedanz [kg/(s m ²)]	Reflexionsfaktor [-]
schallhart ($\hat{p} = 0$)	$Z = 0$	$r = -1$
schallweich ($\hat{u} = 0$)	$Z \rightarrow \infty$	$r = 1$
nicht reflektierend	$Z = \bar{\rho}c$	$r = 0$

Tabelle 2.1: Einfache Randbedingungen ($\bar{\mathbf{u}} = 0$)

Die Umrechnung zwischen Impedanz und Reflexionsfaktor erfolgt unter Verwendung der Gleichungen 2.23 und 2.24. Dabei ist auf die jeweilige Definition von f und g sowie auf die Richtung des Normalenvektors zu achten. Für einige einfache Randbedingungen ($\bar{\mathbf{u}} = 0$) kann der Reflexionsfaktor und die zugehörige Impedanz direkt angegeben werden (Tabelle 2.1) [3, 36].

2.5 Akustische Netzwerke und Transfermatrizen

Das Übertragungsverhalten akustischer Systeme kann in recht einfacher Weise mittels eines Netzwerks bestehend aus einzelnen, akustischen Elementen bestimmt werden [8]. Prinzipiell sind die Voraussetzungen dafür, dass sich die Elemente unabhängig voneinander verhalten und dass die Wellen an den Referenzebenen zwischen den Elementen eben sind [8]. Jedes Netzwerkelement beschreibt dann eine Komponente des akustischen Gesamtsystems, wie zum Beispiel ein Rohr, eine Blende, einen Flächensprung oder auch eine Flamme [10]. Unter Annahme harmonischer Wellenausbreitung sowie linearer Akustik kann dann ein gesamtes Netzwerk systematisch als eine Linearkombination einzelner akustischer Elemente aufgebaut werden (*low-order-system*) [10]. Mathematisch gesehen entspricht es einem linearen Gleichungssystem [10]. Die Unbekannten sind die (fouriertransformierten) Schwankungsgrößen \hat{p} und \hat{u} an den Ein- und Ausgängen der einzelnen Elemente [10]. Anstelle von \hat{p} und \hat{u} können alternativ auch die Riemann Invarianten f und g verwendet werden [8, 10].

Die Koppelbeziehungen zwischen den akustischen Größen am Ein- und Auslass eines jeden Elements werden in der Regel mittels sogenannter Transfermatrizen in pu - (Gleichung 2.26) oder auch fg -Notation bzw. alternativ mittels Streumatrizen (Gleichung 2.27) beschrieben [8, 10]:

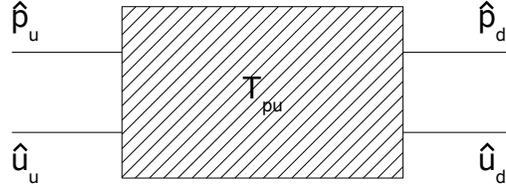


Abbildung 2.2: Schematische Darstellung eines Transfermatrizelements in pu -Notation [8]

$$\begin{pmatrix} \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}c} \\ \hat{u} \end{pmatrix}_d = \mathbf{T}_{pu} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}c} \\ \hat{u} \end{pmatrix}_u = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}c} \\ \hat{u} \end{pmatrix}_u, \quad (2.26)$$

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{f}_d \\ \mathfrak{g}_u \end{pmatrix} = \mathbf{S}_{fg} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{f}_u \\ \mathfrak{g}_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{ud} & r_{du} \\ r_{ud} & t_{du} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{f}_u \\ \mathfrak{g}_d \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

Wie in Abschnitt 2.4 erläutert, sind die drei Darstellungsarten äquivalent. Die Parameter t und r in Gleichung 2.27 entsprechen den Transmissions- bzw. den Reflexionskoeffizienten des betrachteten Elements [8]. Ihre Orientierung kann den zugehörigen Indizes (u für stromauf (*upstream*); d für stromab (*downstream*)) entnommen werden. Weitere Details hierzu sind Fischer [8] zu entnehmen. Die allgemeinen Zusammenhänge an einem Transfermatrizelement in pu -Notation sind beispielhaft in Abbildung 2.2 veranschaulicht.

Klassischerweise werden Netzwerkmodelle im Rahmen der eindimensionalen Akustik verwendet. Trotz der Einfachheit des generellen Ansatzes können damit nahezu beliebig komplexe Systeme modelliert werden. Die Transfermatrizen der einzelnen akustischen Elemente können für einfache Komponenten, wie Rohre oder teils auch Flächensprünge, analytisch hergeleitet werden. Für komplexere Konfigurationen sind sie experimentell (z. B. [8, 18]) oder auch numerisch (z. B. [9, 12]) zu bestimmen. Die Transfermatrix eines reibungsfreien Rohrs konstanten Querschnitts lautet beispielsweise [8]:

$$\begin{pmatrix} \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}c} \\ \hat{u} \end{pmatrix}_d = \begin{pmatrix} \cos(kl) & i \sin(kl) \\ i \sin(kl) & \cos(kl) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}c} \\ \hat{u} \end{pmatrix}_u. \quad (2.28)$$

l ist die Länge des Rohrstücks. Aus der zugehörigen Streumatrix [8]

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{f}_d \\ \mathfrak{g}_u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-ikl} & 0 \\ 0 & e^{-ikl} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathfrak{f}_u \\ \mathfrak{g}_d \end{pmatrix} \quad (2.29)$$

erkennt man unmittelbar, dass die Amplitude der akustischen Schwankungen über dem Element unverändert bleibt. Bewegt sich eine harmonische Welle durch ein verlustfreies Rohr, so ändert sich folglich lediglich ihre Phase in Abhängigkeit von der Länge des betrachteten Elements.

Ein weiteres, häufig verwendetes Netzwerkelement ist das sogenannte $l - \zeta$ -Modell⁴. Es beschreibt ein kompaktes akustisches Element mit Verlust, basierend auf der instationären Bernoulligleichung, respektive dem zugehörigen hydrodynamischen Druckverlustbeiwert ζ . Im Rahmen des $l - \zeta$ -Modells erfolgt eine Beschränkung auf Strömungen mit niedriger Machzahl sowie eine Vernachlässigung von akustischen Moden höherer Ordnung. In einer oft verwendeten Form lautet es [8, 9]:

$$\begin{pmatrix} \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}c} \\ \hat{u} \end{pmatrix}_d = \begin{pmatrix} 1 & [1 - \zeta - \alpha^2] M_u - i \frac{\omega}{c} l_{eff} \\ -i \frac{\omega}{c} l_{red} - M_d & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}c} \\ \hat{u} \end{pmatrix}_u. \quad (2.30)$$

α entspricht dem Flächenverhältnis $\alpha = A_u / A_d$. Der Verlustkoeffizient ζ beschreibt näherungsweise akustische Verluste, die zum Beispiel durch eine Kopplung von Strömung und Akustik an scharfen Kanten aufgrund von Wirbelablösung auftreten. Für Details bezüglich der Herleitung des Modells sowie für Varianten sei auf Fischer [8], Gentemann et al. [9], Polifke [10] oder auch Schuermans [18] verwiesen. Wie vielen akustischen Netzwerkelementen liegt auch dem $l - \zeta$ -Modell eine sogenannte Kompaktheitsannahme zugrunde (*lumped parameter*). Dies bedeutet, dass die Abmessungen des akustischen Elements l als vernachlässigbar klein gegenüber den Wellenlängen λ der betrachteten Frequenzen angesehen werden ($l \ll \lambda$). Das Element wird folglich zunächst für eine fiktive Länge von $l = 0$ modelliert. Die entsprechenden Phasenverzögerungen zum Ausgleich dieser Annahme werden hier durch die Pa-

⁴Die Beschreibungen folgen weitgehend den Darstellungen von Polifke [10] und Fischer [8].

parameter l_{eff} und l_{red} , der effektiven und der reduzierten Länge, berücksichtigt.

In diversen Untersuchungen konnte bereits erfolgreich gezeigt werden, dass mittels des $l - \zeta$ -Modells das Übertragungsverhalten generischer Fälle, wie z. B. verlustbehafteter Flächensprünge (z.B. [8, 9]), aber auch komplexer akustischer Elemente, wie z. B. Düsen [8], bis hin zu Einzelbrennerkonfigurationen (z. B. [8, 13, 18]) in zufrieden stellender Weise nachgebildet werden kann.

2.6 Akustische Energie und akustische Intensität

Die akustische Energie kann prinzipiell mit Hilfe einer Linearisierung der Energiegleichung hergeleitet werden [39]. In einem isentropen, eindimensionalen System ohne oder auch mit konstanter mittlerer Geschwindigkeit setzt sie sich aus einem potentiellen und einem kinetischen Anteil der folgenden Form zusammen [6, 35, 36]:

$$e = \frac{1}{2} \bar{\rho} u'^2 + \frac{1}{2} \frac{p'^2}{\bar{\rho} c^2}. \quad (2.31)$$

Existieren weder Quellen noch Verluste im Feld, so bleibt die Summe aus den beiden Anteilen über der Zeit konstant.

William [40] bzw. Ibrahim et al. [41] leiten eine ausführliche, dreidimensionale Form der akustischen Energieerhaltung her⁵. Sie dient der energetischen Betrachtung thermoakustischer Systeme und umfasst Effekte wie Wärmefreisetzung, Dissipation und Konvektion. Sie lautet:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (p' \mathbf{u}') + \nabla \cdot (e \bar{\mathbf{u}}) - \Gamma = 0. \quad (2.32)$$

⁵Gemäß Pieringer [6] gilt diese für die Erfassung der akustischen Energie in einem System mit konstanter mittlerer Strömung. Die folgenden Erläuterungen entsprechen im Wesentlichen den Ausführungen in Ibrahim et al. [41] und Williams [40]. Für eine detailliertere Beschreibung sei auf diese Arbeiten verwiesen.

e ist eine skalare Größe. Für $\bar{\mathbf{u}} = 0$ bzw. $\bar{\mathbf{u}} = \textit{konst.}$ folgt sie Gleichung 2.31 [6]⁶. Γ entspricht einem Quellterm, der die Anfachung, aber auch die Dämpfung akustischer Energie beschreibt:

$$\Gamma = \frac{\kappa - 1}{\bar{\rho}c^2} p' \dot{q}' - f(\tau). \quad (2.33)$$

Der erste Term auf der rechten Seite in Gleichung 2.33 wird durch Wärme-freisetzung bestimmt, zum Beispiel durch Verbrennung. Der zweite Term repräsentiert die viskose Dämpfung der akustischen Energie als Funktion des Schubspannungstensors τ . Integriert über das Brennkammervolumen lautet Gleichung 2.32 unter Verwendung des Divergenztheorems (Satz von Gauss):

$$\frac{d}{dt} \int_V \langle e \rangle dV = - \int_A \langle p' \mathbf{u}' \rangle \cdot \mathbf{n} dA - \int_A \langle e \bar{\mathbf{u}} \rangle \cdot \mathbf{n} dA + \int_V \langle \Gamma \rangle dV. \quad (2.34)$$

Die eckigen Klammern stellen den Mittelwert über einen Schwingungszyklus dar. Williams [40] bemerkt hierzu, dass die Integration über einen Zyklus nur im Fall monochromer Wellenausbreitung zulässig und zielführend ist. Im Fall eines nicht monochromen Wellenfeldes, d. h. wenn sich mehrere Wellen überlagern, muss für die Integration eine Zeit verwendet werden, die groß gegenüber der größten enthaltenen Schwingungsdauer ist.

In Gleichung 2.34 auf der rechten Seite repräsentiert

- der erste Term den Arbeitsstrom (Leistung), der akustisch über die Ränder fließt,
- der zweite Term die akustische Energie, die mittels der mittleren konvektiven Geschwindigkeit über die Kontrollfläche transportiert wird,
- der dritte Term, wie oben beschrieben, die Differenz zwischen einem Anfachungsmechanismus und viskoser Dämpfung.

⁶Für die Analyse der Zusammenhänge in einer isentropen Potentialströmung müssten zusätzliche Terme berücksichtigt werden. Ein Überblick hierzu ist in der Arbeit von Pieringer gegeben [6].

\mathbf{n} entspricht in Gleichung 2.34 dem nach außen gerichteten Normalenvektor an der betrachteten Fläche.

Aus obigen Zusammenhängen lässt sich darüber hinaus die akustische Intensität I ableiten. Sie ist generell ein Maß für den Fluss akustischer Energie über eine Kontrollfläche [38]. In einer homogenen, ruhenden Strömung lautet sie⁷:

$$I = p' u' \quad (2.35)$$

bzw. unter Verwendung der Riemann-Invarianten (Gleichung 2.23 und Gleichung 2.24) [38]

$$I = \bar{\rho} c (f^2 - g^2). \quad (2.36)$$

2.7 Fluid-Schall-Wechselwirkungen

Die Quantifizierung der Wechselwirkungen zwischen Strömung und Akustik, insbesondere unter Berücksichtigung des Einflusses turbulenter Strömung und Wärmefreisetzung, ist äußerst komplex. Für praktische Anwendungen werden solche Wechselwirkungen bei kleinen Machzahlen zumeist vernachlässigt. In Bereichen, die jedoch stark von Turbulenz geprägt sind, wie zum Beispiel Grenzschichten oder Gebiete des Ablösens und Wiederanlegens von Strömungen oder auch beim turbulenten Strahlzerfall, können aber auch bereits bei relativ kleinen Machzahlen die Interaktionen zwischen Akustik und Turbulenz bedeutend werden [42–44]. Bei höheren Strömungsgeschwindigkeiten sind sie generell zu berücksichtigen.

⁷Für einen Überblick über den Einfluss einer mittleren Geschwindigkeit auf die akustische Intensität sei wiederum auf die Arbeit von Pieringer [6] verwiesen.

2.7.1 Aeroakustische Analogie

Durch die Veröffentlichungen des englischen Mathematikers Sir Michael James Lighthill zum Strahlärm [45] wurde die Strömungs- bzw. Aeroakustik Mitte des 20. Jahrhunderts hinsichtlich der Beschreibung von Fluid-Schall-Wechselwirkungen revolutioniert⁸. Lighthill legte mit seinen Arbeiten die Grundlage zur Lösung des Problems der Schallerzeugung durch Strömung und begründete damit das Verfahren der sogenannten *Aeroakustischen Analogie* (bzw. *Lighthill-Analogie*). Mit Hilfe dieser Analogie können die realen Strömungszustände innerhalb eines abgegrenzten Gebiets, die durch eine komplexe Interaktion der Strömung mit der Akustik zustande kommen, durch eine fiktive Anordnung von akustischen Elementarstrahlern (Monopole, Dipole, Quadrupole) nachgebildet werden. Dafür leitet Lighthill aus den strömungsmechanischen Grundgleichungen (Navier-Stokes-Gleichungen) die sogenannte *inhomogene Wellengleichung der Strömungsakustik* her:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} = \underbrace{\frac{\partial \dot{m}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho f_i + \dot{m} u_i) + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (\rho u_i u_j + p_{ij} - c_0^2 \rho \delta_{ij})}_{Q}. \quad (2.37)$$

Die drei Terme des Quellterms Q weisen unterschiedliche Anregungscharaktere auf (Monopol-, Dipol-, Quadrupolstrahler). Der Ausdruck in der Klammer im dritten Term wird häufig als Lighthill-Tensor T_{ij} bezeichnet. Prinzipiell beinhaltet der Quellterm Q sämtliche instationären Strömungseffekte. Durch Anwendung des integralen Ansatzes nach Kirchhoff kann mit Hilfe von Gleichung 2.37 der Schalldruck am Aufpunkt im Fernfeld bestimmt werden (Abbildung 2.3).

Aufbauend auf diesen Erkenntnissen von Lighthill veröffentlichte unter anderem Howe, neben zahlreichen Arbeiten zum Strömungslärm, einige Grundlagenstudien bezüglich der Absorption akustischer Energie aufgrund der Strömung. Wie später auch Boij [48] beschreibt er die akustische Dämpfung als

⁸Die Ausführungen hierzu folgen den Darstellungen von Költzsch in [46, 47].

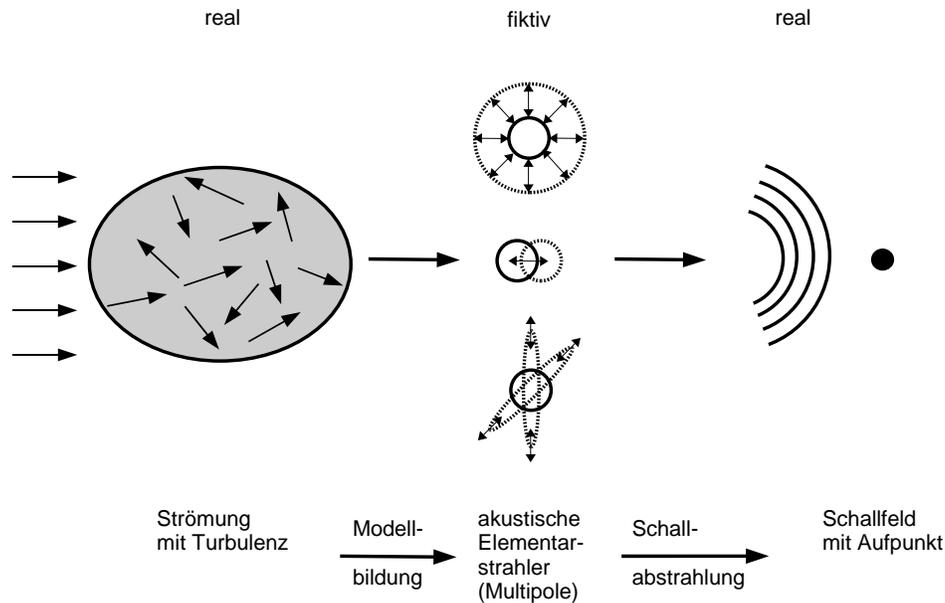


Abbildung 2.3: Grundidee der Lighthill-Analogie [46]

ursprünglich nichtlinearen Vorgang, der durch die Existenz einer mittleren Geschwindigkeit jedoch linear und gleichzeitig signifikant stärker wird (vgl. Abschnitt 2.7.3). Gemäß Howe [44] lassen sich dabei im Wesentlichen drei verschiedene Dämpfungsmechanismen unterscheiden⁹:

- Schalldämpfung durch Wirbelbildung an scharfen Kanten,
- Absorption durch Turbulenz sowie
- Schalldämpfung durch turbulente Wandgrenzschichten.

2.7.2 Akustische Mode, Vorticity-Mode und Entropie-Mode

Die Stärke und die Art der Fluid-Schall-Wechselwirkungen kann alternativ auch unmittelbar aus den linearisierten Eulergleichungen (vgl. Abschnitt 2.1)

⁹Für eine detailliertere Darstellung sei auf Howes Arbeiten verwiesen (insbesondere [44]).

abgeleitet werden. Gemäß Chu und Kovászney [49] bzw. Pierce [50] kann jede Störung, deren Ausbreitung durch diese Gleichungen beschrieben wird, als Überlagerung dreier verschiedener Moden interpretiert werden [3]: der akustischen Mode (a), der Vorticity-Mode (v) und der Entropie-Mode (e)¹⁰. Dazu werden zunächst die Dichteschwankungen in einen isentropen und einen Restanteil aufgeteilt:

$$\rho' = \rho^a + \rho^r. \quad (2.38)$$

Der isentrope Anteil entspricht dem rein akustischen Beitrag. Der Restanteil ist der Entropie-Mode zugeordnet. Die Vorticity-Mode trägt nicht zur Änderung der Dichte bei. Da nur die akustische Mode mit Druckschwankungen verbunden ist, gilt $p' = c^2 \rho^a$. Analog erfolgt eine Zerlegung der Geschwindigkeitsschwankungen in einen wirbelfreien Anteil und einen Restanteil:

$$\mathbf{u}' = \nabla\phi + \mathbf{u}^r. \quad (2.39)$$

Der wirbelfreie Anteil kann allgemein mittels des Gradienten eines Potentials ϕ ausgedrückt werden. Da der Restanteil \mathbf{u}^r nicht zwingend als quellenfrei angenommen werden muss, ist die Zerlegung hier nicht eindeutig. Folglich können die Druckschwankungen zunächst ganz allgemein und ohne weitere Einschränkungen aus dem akustischen Potential abgeleitet werden [52]:

$$p' = -\bar{\rho} \frac{\bar{D}\phi}{Dt}. \quad (2.40)$$

Damit folgt schließlich [3]:

$$\left[\frac{\bar{D}}{Dt} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\bar{D}}{Dt} \right) - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \nabla) \right] \phi = f_a(\mathbf{u}^r, \rho^r), \quad (2.41)$$

¹⁰Der entsprechende Ansatz basiert auf einer Separation der Variablen. Angedacht wurde er gemäß Pieringer [6] von Ewert et al. (u. a. [51]), konkret durchgeführt von Pankiewicz [3] und später von Pieringer [6]. Die folgenden Darstellungen bauen auf den Arbeiten der beiden letztgenannten Autoren auf. Für eine detaillierte Beschreibung sei auf diese Quellen verwiesen.

$$\frac{\partial \mathbf{u}^r}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^r + (\mathbf{u}^r \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = f_v(\phi, \rho^r), \quad (2.42)$$

$$\frac{\partial \rho^r}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho^r + \rho^r \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = f_e(\phi, \mathbf{u}^r, \dot{q}). \quad (2.43)$$

Die jeweiligen Ausbreitungsterme stehen auf der linken Seite der Gleichungen. Die Quellterme auf der rechten Seite lauten in detaillierter Form [3]:

$$f_a(\mathbf{u}^r, \rho^r) = \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \rho^r}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho^r + \rho^r \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot (\mathbf{u}^r \bar{\rho}) \right), \quad (2.44)$$

$$f_v(\phi, \rho^r) = -\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \nabla \phi + \frac{\nabla \bar{p}}{\bar{\rho}^2} \rho^r, \quad (2.45)$$

$$f_e(\phi, \mathbf{u}^r, \dot{q}) = (\nabla \bar{p} - c^2 \nabla \bar{\rho}) \cdot (\nabla \phi + \mathbf{u}^r) - \bar{\rho} \left((\kappa - 1) \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} + \frac{2}{c} \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla c \right) \frac{\bar{D}\phi}{Dt} - \frac{\kappa - 1}{c^2} \dot{q}'. \quad (2.46)$$

In einem homogenen mittleren Feld ohne Wärmequellen findet keine Kopplung zwischen diesen drei Modenformen statt, mit Ausnahme von Vorgängen an den Rändern des Strömungsgebiets [3]. Durch Gradienten der mittleren Größen, z. B. durch inhomogene Strömungsfelder und durch Wärmequellen, kommt es jedoch zu einem Austausch von Energie zwischen den einzelnen Moden [3].

Im Rahmen der Betrachtung von Gasturbinenbrennkammern können Entropieschwankungen außerhalb der Wärmefreisetzungszone häufig vernachlässigt werden. Obiges Gleichungssystem reduziert sich damit auf ($\dot{q} = 0$):

$$\left[\frac{\bar{D}}{Dt} \left(\frac{1}{c^2} \frac{\bar{D}}{Dt} \right) - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \nabla) \right] \phi = \frac{1}{\bar{\rho}} (\nabla \cdot (\mathbf{u}^r \bar{\rho})), \quad (2.47)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^r}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^r + (\mathbf{u}^r \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = -\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \nabla \phi. \quad (2.48)$$

Unter Annahme von Isentropie und einem gleichförmigen mittleren Geschwindigkeitsfeld ($\bar{\boldsymbol{\omega}} = 0$) resultiert für die akustische Mode, wie erwartet,

eine Vorstufe der konvektiven Wellengleichung in einem inhomogenen Medium [3]. Eine externe Wärmezufuhr führt unter der Voraussetzung gleichförmiger mittlerer Felder lediglich zu einer Erweiterung des Quellterms der akustischen Mode um den letzten Term in Gleichung 2.46 [3]. Betrachtet man hingegen ein rotationsbehaftetes mittleres Geschwindigkeitsfeld ($\dot{q} = 0$), so zeigt sich, dass eine Kopplung zwischen der akustischen Mode und der Vorticity-Mode einerseits durch rotationsbehaftete Geschwindigkeitsschwankungen zustande kommt, andererseits durch eine rotationsbehaftete mittlere Strömung ($\omega \neq 0$). Ein Austausch von Energie kann dabei folglich durch Turbulenzeffekte, sowohl im Strömungsfeld, als auch an den Rändern erfolgen. Indikator ist dabei die Wirbelstärke (engl. *vorticity*)¹¹.

2.7.3 Akustische Verluste am Freistrah

In der Praxis treten Fluid-Schall-Interaktion unter anderem bei der Ausbildung eines Freistrahls auf, wie zum Beispiel an einer abrupten Querschnittserweiterung (z. B. am abrupten Übergang zur Brennkammer), einer Blende (z. B. an perforierten Platten) oder einer Düse. Unter Vernachlässigung von Rückkopplungseffekten, wie z. B. dem *Trailing Edge Noise*, führt dies im Allgemeinen zu einer Dämpfung der akustischen Schwankungen, insbesondere aufgrund von periodischer Wirbelablösung an der Kante [53]. Die abgelösten Wirbel werden mit der mittleren Geschwindigkeit stromab getragen, wo sie z. B. in Innere Energie umgewandelt und/oder aus dem System heraus getragen werden [43].

Genauere theoretische Untersuchungen hierzu stammen unter anderem von Howe, der z. B. die Durchströmung kreisförmiger Blenden in dünnen, starren Platten analysierte [43]. Er beschränkt sich dabei auf Strömungen hoher Reynolds-, geringer Machzahl und geringer viskoser Dissipation. Mit Bezug auf die experimentellen Arbeiten Becherts [53] sagt er, dass bei einer solchen Art von Durchströmung der Einfluss der Viskosität auf die Ermöglichung der Wirbelablösung an der Kante beschränkt werden kann; stromab davon sind

¹¹Der statische Druckverlust in Gasturbinenbrennern kann allgemein als klein betrachtet und hier somit in erster Näherung vernachlässigt werden.

viskose Effekte vernachlässigbar [43]. Diese Aussage ist insofern bedeutend, als dass sie besagt, dass akustische Verluste prinzipiell auch mittels der linearisierten Eulergleichungen und nicht ausschließlich mit Hilfe der Navier-Stokes-Gleichungen bestimmt werden können (mit Ausnahme der Zustände am Ablösepunkt (s.o.)). Im Rahmen einer integralen Betrachtung leitet Howe [43] daraus die sogenannte *Rayleigh-Konduktivität* her (vgl. Kapitel 6). Dabei ist die akustische Wellenlänge weit größer als der Radius der Öffnung. Unter der Annahme kleiner Machzahlen können die physikalischen Zusammenhänge an der akustisch kompakten Öffnung dann auch durch die Gleichungen für inkompressible Medien dargestellt werden. Wie oben beschrieben, führt eine entsprechende Modellierung jedoch zur Ausbildung von Singularitäten der Schwankungsgrößen an der Kante, da dort die Strömung stark von der Viskosität geprägt ist. Dem wird, gemäß der Tragflügeltheorie, durch die Implementierung einer Kutta-Bedingung Rechnung getragen.

Gemäß Howe [43] entspricht das Ablösen von Wirbeln an sich einem nichtlinearen Prozess, da es auf den Reynoldschen Schubspannungen $\rho u_i u_j$ beruht, welche quadratisch mit der Geschwindigkeit \mathbf{u} skalieren. Existiert jedoch eine mittlere Geschwindigkeit im Feld, so gehen die fluktuierenden Reynoldschen Schubspannungen linear in die Impulsgleichung ein. Es resultiert eine erhöhte akustische Dämpfung aufgrund der Mechanismen der Wirbelablösung [43]. Demnach ist es auch bezüglich dieses Kriteriums möglich, akustische Verluste in durchströmten oder auch umströmten Bauteilen im Wesentlichen mit Hilfe der linearisierten Eulergleichungen abzubilden (mit Ausnahme der Zustände am Ablösepunkt (s.o.)) [43]: Die Divergenz der Impulsgleichung für inkompressible reibungsfreie Strömungen kann prinzipiell in folgender Form dargestellt werden [43]:

$$\nabla^2 B = -\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}). \quad (2.49)$$

Dies basiert auf der Bernoulligleichung. B repräsentiert die Totalenthalpie (pro Masse) an einem Ort [43]:

$$B = \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2. \quad (2.50)$$

Eine Linearisierung ergibt näherungsweise für die rechte Seite von Gleichung 2.49 (ausschließlich für den Term in Klammern) [43]:

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{u}' + \boldsymbol{\omega}' \times \bar{\mathbf{u}} + \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{\mathbf{u}}. \quad (2.51)$$

Vereinfachend wird angenommen, dass die Hauptmechanismen der Strömungsablösung im Hinblick auf die akustischen Verluste durch den zweiten Term in Gleichung 2.51 beschrieben werden [43]. Damit gilt näherungsweise:

$$\nabla^2 B' = -\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega}' \times \bar{\mathbf{u}}). \quad (2.52)$$

Ausgangspunkt für die Herleitung der entsprechenden Form der Wellengleichung ist demzufolge die Eulergleichung für ein homoentropes, nicht (wärme-)leitendes, reibungsfreies Fluid in der Formulierung von Crocco [34]:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla B = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}. \quad (2.53)$$

Zusammen mit der Kontinuitätsgleichung ergibt sich unter Berücksichtigung von Gleichung 2.52:

$$\frac{1}{c^2} \frac{D^2 B'}{Dt^2} - \nabla^2 B' = \nabla \cdot (\boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{u}). \quad (2.54)$$

Die Totalenthalpie B kann alternativ auch durch eine entsprechende Formulierung des Totaldrucks ersetzt werden. Die Eulergleichung sowie die Wellengleichung können folglich auch als eine Funktion des Totaldrucks dargestellt werden. Diese Erkenntnisse werden später im Rahmen von Kapitel 5 genutzt, um einen neuartigen Ansatz zur Modellierung entsprechender akustischer Verlustmechanismen herzuleiten.

3 Berechnungsverfahren

Nach der Zusammenfassung der wesentlichen akustischen Grundlagen erfolgt nun ein Einblick in das verwendete numerische Verfahren.

3.1 Entwicklungsumgebung und Finite Elemente Methode

Zur Realisierung seines Berechnungsverfahrens wählte Pankiewitz [3] den Finite-Elemente-Code FEMLAB (vgl. Abschnitt 1.3), heute COMSOL MULTI-PHYSICS. Das Programm ermöglicht die Modellierung mehrdimensionaler Aufgabenstellungen und die Lösung weitgehend beliebiger Systeme partieller Differentialgleichungen [3, 54]. Die zusätzlich enthaltenen Umgebungen zur Definition und Vernetzung komplexer Geometrien sowie zum Postprocessing unterstützten die Verwirklichung des langfristigen Ziels, ein numerisches Designsystem zur Auslegung moderner Brennkammern zu entwickeln. Für die Einbindung selbst verfasster Routinen existiert u. a. eine enge Verbindung zur numerischen Programmierumgebung MATLAB [3, 54].

Die *Methode der Finiten Elemente* (FEM) zeichnet sich hierfür durch ihre Flexibilität in der Lösung allgemeiner partieller Differentialgleichungssysteme aus sowie in der leichteren Anpassung der Rechenfälle an komplexe Geometrien [3]. Gegenüber alternativen Ansätzen (insbesondere Finite-Volumen- oder auch Finite-Differenzen-Verfahren) weist sie zudem eine deutlich höhere numerische Stabilität bei unstetigen Änderungen der Zustandsgrößen im Berechnungsgebiet auf [3]. Im Folgenden wird - in Anlehnung an Pankiewitz [3] - ein kurzer Überblick über die FEM sowie den verwendeten Berechnungscode gegeben. Für einen detaillierteren Einblick sei auf seine Arbeit verwiesen und auf den *User's Guide* der verwendeten Simulationssoftware [54].

Ausgangspunkt einer FEM-Rechnung ist die Vernetzung des Berechnungsge-

biets. Bei eindimensionaler Betrachtung wird dazu die Geometrie in kleinere Intervallstücke unterteilt. Bei der Erzeugung eines unstrukturierten Gitters werden für eine zweidimensionale Untersuchung Dreiecke und für eine dreidimensionale Betrachtung Tetraeder verwendet [3, 54]. Im Rahmen der FEM wird auf diesen Elementen die eigentliche Lösung durch sogenannte Ansatzfunktionen Φ_i approximiert. Je nach Typ der verwendeten Ansatzfunktion können neben den Eckpunkten der Gitterelemente diverse weitere Punkte im Element oder am Rand definiert werden. Im Rahmen dieser Arbeit werden als Ansatzfunktionen ausschließlich *Lagrange-Elemente* verwendet. Sie weisen allgemein folgende Eigenschaften auf [3]:

1. auf dem i -ten Knoten des Netzes gilt $\Phi_i = 1$;
2. auf allen anderen Knoten des Berechnungsnetzes gilt $\Phi_i = 0$;
3. innerhalb der Elemente, denen der i -te Knoten des Netzes zugeordnet ist, ist Φ_i ein Polynom bestimmter Ordnung.

Die Ordnung des verwendeten Polynoms ergibt sich aus der Anzahl der Knoten innerhalb eines Elements. Dienen beispielsweise nur die Eckpunkte der finiten Elemente als Stützstellen, sind die verwendeten Lagrange-Elemente linear bzw. erster Ordnung. Die Wahl der örtlichen Diskretisierung nimmt direkt Einfluss auf die Qualität und die Geschwindigkeit des numerischen Berechnungsverfahrens. Die approximierte Lösung g des eigentlichen Problems ergibt sich schließlich aus einer Linearkombination der Form [3]:

$$g = \sum_{i=1}^N G_i \Phi_i. \quad (3.1)$$

Die Summation erfolgt über die Anzahl der Freiheitsgrade N . Die Koeffizienten G_i entsprechen den Unbekannten des Systems. Zur Lösung partieller Differenzialgleichungen stehen im verwendeten FEM-Code diverse vorimplementierte Gleichungssätze sowie unterschiedliche explizite und implizite Verfahren zur Verfügung.

3.2 Numerische Verluste

Bevor das Ziel weiter verfolgt werden kann, die Methode von einem qualitativen zu einem quantitativen Werkzeug zu erweitern, muss zunächst die durch die Diskretisierung generierte, numerische Dämpfung erfasst werden. Verschiedene Ergebnisse hierzu existieren bereits von Pankiewitz [3]. Im Folgenden werden mittels eines alternativen Ansatzes zusätzliche Untersuchungen unter Verwendung aktueller Versionen des Softwarepakets durchgeführt, um daraus allgemeine Modellierungsregeln abzuleiten.

3.2.1 Modellierungsansatz

Die Quantifizierung der numerischen Verluste erfolgt hier mit Hilfe der zeitlich gemittelten akustischen Intensität. Die akustische Intensität ist allgemein ein Maß für den Fluss akustischer Energie über eine Kontrollfläche [38] (vgl. Abschnitt 2.6). Ihr lokaler Momentanwert berechnet sich für $\bar{\mathbf{u}} = 0$ gemäß Gleichung 2.35; ihr entsprechendes lokales zeitliches Mittel gemäß:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{t_{max}} \int_0^{t_{max}} p' u' dt. \quad (3.2)$$

Für $\bar{\mathbf{u}} = 0$ ist $\langle I \rangle$ in einem verlustfreien, passiven System mit perfekt reflektierenden Rändern im idealen Fall an jedem Ort gleich Null [38]. Abweichungen davon weisen hier auf numerische Verluste hin, respektive auf Verluste, die durch die Numerik aufgrund der Diskretisierung generiert wurden. Für $|r| < 1$ geht an den Rändern des Systems Energie verloren. Die Intensität ist dann ungleich Null [38]. Ohne numerische Verluste ist für $\bar{\mathbf{u}} = 0$ die im zeitlichen Mittel transportierte Energie längs eines verlustfreien Rohres (passives System) stets konstant.

Hier erfolgt die Untersuchung der numerischen Dämpfung unter der Annahme eines Freifelds ($r_d = 0$) für $\bar{\mathbf{u}} = 0$. Die Betrachtung wird auf eine örtliche Dimension reduziert. Im Sinne eines möglichst aussagekräftigen Ergebnisses erfolgt die Analyse über eine Strecke, die sehr lang ist im Vergleich zu den hier

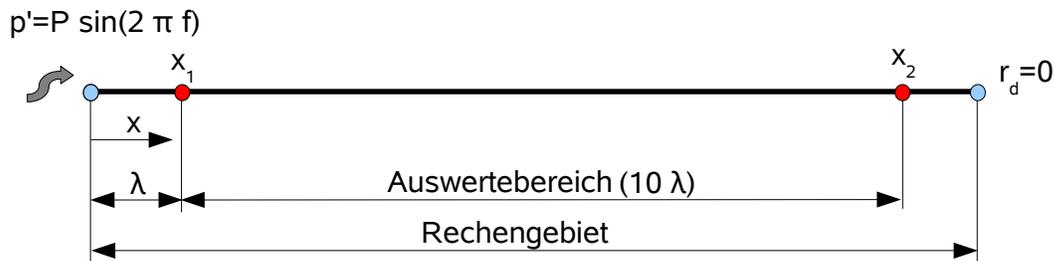


Abbildung 3.1: Modell zur Bestimmung der numerischen Dämpfung

ansonsten üblichen geometrischen Zusammenhängen. Sie umfasst zehn Wellenlängen der betrachteten Anregungsfrequenz (Abbildung 3.1). Aufgrund der numerischen Dämpfung fallen die Amplituden der akustischen Größen auf den n Teilstrecken der Länge λ jeweils exponentiell um den Wert des relativen Verlusts N_ν [55]:

$$\langle I_1 \rangle \cdot (1 + N_\nu)^n = \langle I_{n+1} \rangle. \quad (3.3)$$

Die Quantifizierung der numerischen Dämpfung pro Wellenlänge erfolgt somit in Form des relativen Verlustes N_ν :

$$N_\nu = \sqrt[10]{\frac{\langle I_{x_2} \rangle}{\langle I_{x_1} \rangle}} - 1. \quad (3.4)$$

x_1 entspricht dem Anfangspunkt des Auswertebereichs, x_2 dem Endpunkt. Die transienten Berechnungen finden mit Hilfe der Wellengleichung für ein kaltes, homogenes Medium statt (Luft, $T = 20^\circ \text{C}$). Um Randeffekte auf das Ergebnis auszuschließen, ist das betrachtete Rechengebiet größer als der Auswertebereich (Abbildung 3.1). Die Anregung erfolgt in Richtung der positiven x-Achse. Stromab befindet sich eine nicht reflektierende Randbedingung.

Die Mittelung der Intensität an den beiden Referenzpunkten x_1 und x_2 beginnt ab dem Zeitpunkt, an dem die Welle x_1 erreicht. Dies führt zunächst zu einem raschen Anstieg der gemittelten Intensitäten über der Zeit, bis schließlich ein Grenzwert erreicht wird. Bei der Existenz numerischer Dämpfung im

System hängt dieser Grenzwert von der verwendeten Diskretisierung ab. Die Berechnungsdauer t_{max} umfasst 500 Schwingungsperioden.

Im Gegensatz zu Finite-Differenzen- und Finite-Volumen-Verfahren existiert bei der FEM kein unmittelbarer Zusammenhang zwischen zeitlicher und örtlicher Diskretisierung [3] hinsichtlich der numerischen Stabilität, wie er in der Regel durch die *Courandzahl* ausgedrückt wird. Dies erfordert hier eine getrennte Analyse des Einflusses der zeitlichen und der örtlichen Diskretisierung¹.

3.2.2 Zeitliche Diskretisierung

Zunächst erfolgt eine Betrachtung des Einflusses des gewählten Zeitschritts auf die Höhe der numerischen Dämpfung. Er wird parametrisch von $\Delta t \cdot f = 1.0 \cdot 10^{-1}$ bis $\Delta t \cdot f = 2.5 \cdot 10^{-3}$ variiert. Zur Lösung des Problems wird ein implizites Zeitintegrationsverfahren verwendet, basierend auf einer *Backward Differential Formula* zweiter Ordnung (BDF2). Die örtliche Diskretisierung (lineare Langrange-Elemente) umfasst stets zwanzig Stützstellen pro Wellenlänge.

Die Ergebnisse weisen eine deutliche Abhängigkeit vom gewählten Zeitschritt auf (Abbildung 3.2). Eine starke Beeinflussung der Wellenausbreitung aufgrund numerischer Dämpfung existiert demnach bei Verwendung großer Berechnungszeitschritte. Für $\Delta t \cdot f = 1.0 \cdot 10^{-1}$ werden ca. 50 % numerische Verluste pro Wellenlänge generiert. Ab einem Zeitschritt von $\Delta t \cdot f = 1.0 \cdot 10^{-2}$ belaufen sich die numerischen Verluste pro Wellenlänge jedoch auf weniger als ca. drei Promille. In diesem Bereich können sie in erster Näherung vernachlässigt werden.

3.2.3 Örtliche Diskretisierung

Für die Untersuchung des Einflusses der örtlichen Diskretisierung auf die numerische Dämpfung wird als zeitliche Diskretisierung $\Delta t \cdot f = 1.0 \cdot 10^{-2}$ ge-

¹Diese Analyse findet unter Verwendung von COMSOL MULTIPHYSICS (Version 3.4)/ MATLAB (2007b) statt.

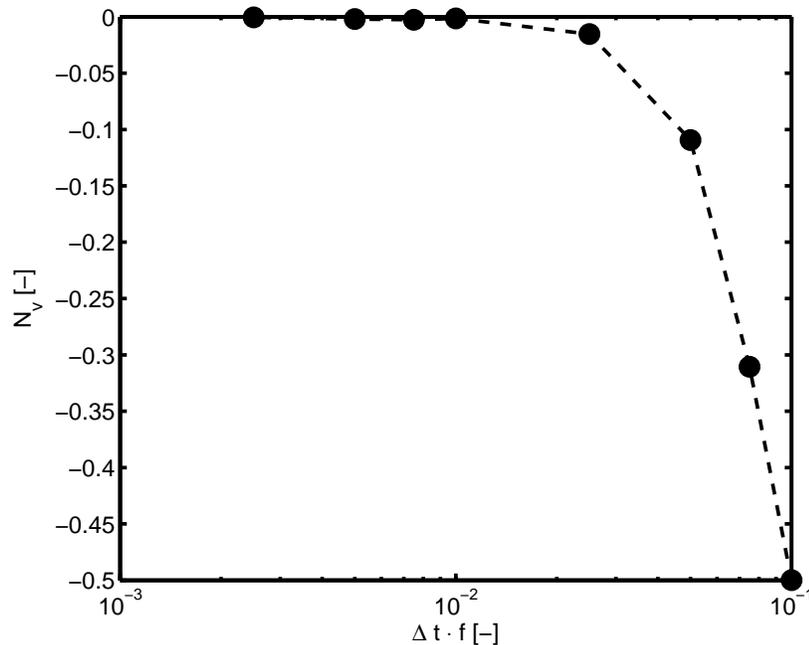


Abbildung 3.2: Numerische Verluste pro Wellenlänge in Abhängigkeit von der zeitlichen Diskretisierung

wählt. Zur örtlichen Diskretisierung werden wiederum lineare Langrange-Elemente verwendet (örtliche Diskretisierung erster Ordnung).

In Abbildung 3.3 sind die daraus resultierenden numerischen Verluste pro Wellenlänge in Abhängigkeit von der Anzahl der Stützstellen pro Wellenlänge gegeben. Daraus wird ersichtlich, dass der Einfluss der örtlichen Diskretisierung auf die Wellenausbreitung bei der gewählten zeitlichen Diskretisierung äußerst klein ist. Er ist für alle betrachteten Fälle geringer als zwei Promille und kann somit über dem gesamten untersuchten Diskretisierungsbereich als vernachlässigbar betrachtet werden. Dies trifft auch für eine sehr grobe örtliche Auflösung der Welle mit fünf Punkten pro Wellenlänge zu.

Eine in diesem Zusammenhang nicht dargestellte identische Untersuchung unter Verwendung des Zeitschrittes $\Delta t \cdot f = 5.0 \cdot 10^{-2}$ zeigt, dass dort die örtliche Diskretisierung etwas mehr Einfluss auf das Ergebnis hat. Eine entscheidende Verbesserung der starken Abweichungen, die dabei durch die mangelhafte zeitliche Auflösung generiert werden, kann dort aber auch mit einer sehr

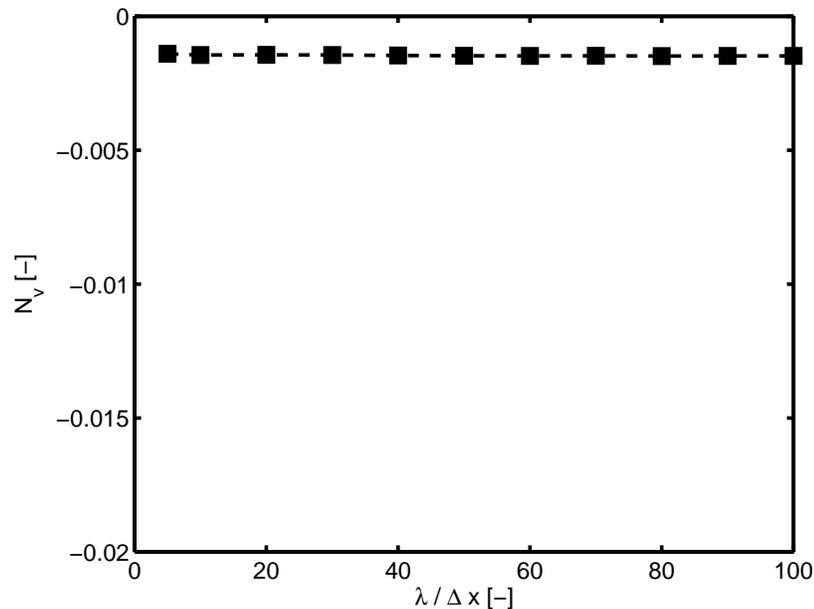


Abbildung 3.3: Numerische Verluste pro Wellenlänge in Abhängigkeit von der örtlichen Diskretisierung

feinen örtlichen Diskretisierung nicht erzielt werden.

Bei Verwendung einer sehr groben örtlichen Auflösung erwiesen sich jedoch insbesondere nicht reflektierende Randbedingungen, auch bei anderen Anwendungsfällen, als fehleranfällig hinsichtlich der korrekten Darstellung des generellen Verlaufs der Amplituden. Erfahrungen zeigten, dass eine Diskretisierung mit 20 Stützstellen pro Wellenlänge unter Verwendung linearer Lagrange-Elemente auch für diese Fälle ausreichend ist [56].

3.2.4 Zusammenfassung

Zusammenfassend kann somit ausgesagt werden, dass die zeitliche Diskretisierung deutlich mehr Einfluss auf die Höhe der numerischen Dämpfung ausübt als die örtliche Diskretisierung. Dies stimmt auch mit den Ergebnissen von Pankiewitz [3] überein. Bei hinreichend feiner Diskretisierung kann die numerische Dämpfung für die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Untersuchungen generell als vernachlässigbar eingestuft werden. Aufgrund der

vorliegenden Ergebnisse ist es nicht zu erwarten, dass eine dreidimensionale Berechnung nennenswerte Abweichungen von den hier vorgestellten Ergebnissen liefert [56]. Auch in diesem Fall bleibt der Einfluss der zeitlichen Diskretisierung zunächst unverändert. Abweichend ist lediglich der Einfluss der örtlichen Diskretisierung, welche sich dann über drei Raumdimensionen erstreckt. Der Einfluss der örtlichen Diskretisierung ist hier jedoch in der Regel äußerst gering.

Hinsichtlich allgemeiner Modellierungsregeln sollte für die im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Fälle bezüglich der zeitlichen Diskretisierung ein Grenzwert von $\Delta t \cdot f = 1.0 \cdot 10^{-2}$ nicht überschritten werden. Die örtliche Diskretisierung sollte erfahrungsgemäß ca. zwanzig Stützstellen pro Wellenlänge unter Verwendung linearer Lagrange-Elemente aufweisen, um eine ausreichende Darstellung der Welle und ihrer Amplitude in allen Bereichen sicherzustellen [56] (vgl. hierzu auch Pankiewitz [3]).

4 Validierung der Wellengleichung und der Helmholtzgleichung

Im Rahmen dieses Kapitels wird zunächst der Einfluss verschiedener Terme der Wellen- bzw. der Helmholtzgleichung auf die Vorhersage der akustischen Wellenausbreitung analysiert. Ziel dieser Untersuchungen ist, die Anzahl der Terme in der jeweiligen Gleichung soweit wie möglich zu reduzieren, um so den Aufwand für die durchzuführenden Berechnungen zu minimieren, ohne dadurch die Qualität der Ergebnisse zu beeinträchtigen. Die betrachteten Terme beinhalten entweder Gradienten der mittleren Dichte und somit der Temperatur oder beschreiben den Einfluss einer homogenen mittleren Geschwindigkeit.

Anschließend erfolgt, als Vorbereitung für die darauf folgenden Kapitel, ein prinzipieller Einblick in die Modellierung von akustischen Verlusten mit Hilfe der Wellen- bzw. der Helmholtzgleichung.

4.1 Dichtegradienten

4.1.1 Historische Entwicklung

Trotz langjähriger Forschungsaktivitäten hinsichtlich des Einflusses von Dichte- bzw. Temperaturgradienten und ihrer Modellierung auf die konkrete Beschreibung der Wellenausbreitung bleiben viele Untersuchungen hierzu nach wie vor auf generische, eindimensionale Anwendungsfälle beschränkt. Gründe dafür sind insbesondere die Anzahl und das komplexe Zusammenspiel verschiedener physikalischer Wirkmechanismen in diesem Bereich.

Bereits 1953 erfasste Chu [57] analytisch den Einfluss verschiedener Parame-

ter einer Flamme auf das akustische Feld. Er untersuchte eine eindimensionale Wärmefreisetzungszone vernachlässigbarer Dicke, bzw. eine sprunghafte Änderung der Zustandsgrößen über der Flamme. Er wies jedoch auch auf die damit zusammenhängenden Vereinfachungen hin, wie zum Beispiel eine Vernachlässigung der Betrachtung detaillierter Prozesse und Interaktionen, die insbesondere mit dem zeitlichen Verhalten einer Flamme einhergehen [57]. Wie später in deutlich vereinfachter Form auch Rienstra und Hirschberg [34] stellte Chu, mit Bezug auf die Arbeiten von Rayleigh, zudem Überlegungen zum Transmissions- und Reflexionsverhalten akustischer Wellen an einer Flamme an. Er zeigte, dass unter obigen Annahmen der Einfluss der Flamme auf das akustische Feld im Wesentlichen gleich dem einer sprunghaften Temperaturänderung ist [57].

Von unterschiedlichen Forschergruppen wurde in den darauf folgenden Jahrzehnten der Einfluss axialer Temperaturgradienten auf die Akustik intensiv analysiert. Anfangs wurden dabei häufig Effekte der mittleren Geschwindigkeit noch vernachlässigt. Für die Untersuchungen wurde oft die Wellen- bzw. die Helmholtzgleichung verwendet. Deren Lösung erfolgte entweder analytisch oder auch numerisch, z. B. mittels einer Runge-Kutta-Methode [58, 59] oder einer Abwandlung der sogenannten WKB-Methode¹ [60] (vgl. [58, 61]). Umurhan [61] entwickelte letztgenannten Ansatz weiter, um damit die akustischen Eigenfunktionen eindimensionaler Brennkammern bei einer nahezu beliebigen Wärmefreisetzungsverteilung zu untersuchen. Im Gegensatz zu vielen früheren Autoren setzte er, mit Ausnahme von stationärem Systemverhalten und $M < 1$, keine weiteren wesentlichen Einschränkungen hinsichtlich der Gradienten der thermodynamischen Zustandsgrößen und des Geschwindigkeitsfeldes voraus [61].

Umfangreiche Forschungsaktivitäten hinsichtlich der analytischen und experimentellen Erfassung des Einflusses von Dichtegradienten auf die Wellenausbreitung fanden darüber hinaus von der Forschergruppe um Zinn statt [58]. Sie entwickelten die sogenannte *Impedance Tube Technique* für Hochtemperatursysteme und betrachten damit große Temperaturgradienten und auch

¹Die WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin)-Methode findet insbesondere in der Quantenmechanik Anwendung. Mit ihr können näherungsweise Lösungen mit variablen Koeffizienten erzielt werden [58].

hohe Machzahlen, insbesondere vor dem Hintergrund der Raketentechnik [58]. Des Weiteren entwickelten zum Beispiel Peat [62] sowie Munjal und Prasad [63] unter anderem [64] analytisch hergeleitete Transfermatrizen weiter, zur Beschreibung des Einflusses linearer Temperaturgradienten in Rohren, inklusive einer Berücksichtigung der mittleren Geschwindigkeit [58].

Seit ca. 1995 fanden von der Forschergruppe um Sujith umfangreiche analytische, aber auch numerische Studien im Frequenz- und im Zeitbereich zum Einfluss und zur exakten Modellierung von Dichtegradienten statt. Diverse Arbeiten wurden in diesem Rahmen bezüglich der exakten Lösung eindimensionaler Wellenfelder in Rohren veröffentlicht, u. a. unter dem Einfluss linearer [58, 65–67], quadratischer [68], exponentieller [65–67] oder auch polynomialer Temperaturprofile [69]. Weitere Untersuchungen fanden unter expliziter Betrachtung von Dämpfung [65], Querschnittsveränderungen [70] und mittlerer Geschwindigkeit [58] statt. 2001 zeigte Sujith, dass sich diese Ansätze dazu eignen, die Wechselwirkungen zwischen Akustik und Wärmefreisetzung, unter gleichzeitiger Berücksichtigung von Wärmefreisetzungsschwankungen, deutlich besser als bisher zumeist üblich zu modellieren [66]. Später erfolgte eine Erweiterung der Arbeiten auf einfache mehrdimensionale Betrachtungen sowie auf die Untersuchung des Einflusses von Nichtlinearitäten [69, 71, 72] und nicht normalem Verhalten [72].

Matveev und Culick [73] veröffentlichten zudem experimentelle Daten sowie ein analytisches Modell bezüglich des Einflusses von Dichtegradienten auf die thermoakustische Stabilität eines Rijke-Rohres. Sie zeigen, dass die korrekte Modellierung des Dichtefeldes essentiell für die korrekte Vorhersage des thermoakustischen Verhaltens eines Systems ist. Dies steht im Einklang mit den Aussagen verschiedener weiterer Autoren [66, 70, 74].

Trotz dieser und diverser weiterer Untersuchungen bezüglich des Einflusses von Temperaturgradienten auf die Wellenausbreitung erfolgt nach wie vor die Implementierung von Temperaturfeldern, in Zusammenhang mit der Bestimmung der thermoakustischen Stabilität von Systemen, bei vielen Modellen lediglich mittels einer Diskontinuität der Zustandsvariablen über der Wärmefreisetzungszone [74]. Dies gilt besonders für die in der Praxis hierfür üblichen Netzwerkmethoden [74]. Im Rahmen von CFD-Ansätzen sind solche Ef-

fekte hingegen in der Regel implizit enthalten. Darüber hinaus wird in der Literatur bei Netzwerkmodellen für solche Aufgabenstellungen nahezu ausschließlich die Wellen- bzw. Helmholtzgleichung für homogene Medien verwendet, obwohl verschiedene Autoren empfehlen, hierfür die erweiterten Formen der Gleichungen für inhomogene Medien (z. B. Gleichung 2.13) anzuwenden [36, 74].

4.1.2 Dichtegradien ohne Wärmefreisetzung

Im Folgenden wird untersucht, inwiefern die Verwendung unterschiedlicher Formen der Helmholtzgleichung einen Einfluss auf die Vorhersage der akustischen Wellenausbreitung hat. Gleichung 2.21 ($\mathbf{k}^2 \hat{p} + \Delta \hat{p} = 0$), die eigentliche Helmholtzgleichung, wird dabei als *Helmholtzgleichung für homogene Medien* bezeichnet. Die fouriertransformierte Form von Gleichung 2.13,

$$\mathbf{k}^2 \hat{p} + \bar{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \hat{p} \right) = 0, \quad (4.1)$$

wird entsprechend *Helmholtzgleichung für inhomogene Medien* genannt. Wärmefreisetzungseffekte werden zunächst nicht berücksichtigt. Die Untersuchungen finden anhand eines zylindrischen Rohres statt².

Die Anregung findet von der stromauf gelegenen Stirnfläche aus statt (vgl. Tabelle 4.1), gemäß: $\mathbf{n} \cdot (1/\bar{\rho} \nabla \hat{p}) = i\omega \hat{u}$. Am gegenüberliegenden Rand wird mittels einer Impedanz-Randbedingung der Form $\mathbf{n} \cdot (-1/\bar{\rho} \nabla \hat{p}) - i\omega \hat{p}/Z = 0$; $Z = \bar{\rho}c(1+r)/(1-r)$ ein Reflexionsfaktor von $r = 0.95$ implementiert. Alle übrigen Ränder werden als schallhart modelliert ($\mathbf{n} \cdot \nabla \hat{p} = 0$). Verglichen werden stets die Spektren am Referenzpunkt $x = 0.75 \text{ m}$ auf der Mittelachse des Zylinders. Betrachtet wird der relative Schalldruckpegel

$$\Delta L_p = L_p - L_{p,min} \quad (4.2)$$

²Verschiedene Parameter des numerischen Modells sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

Geometrie	
Form	zylindrisches Rohrstück (3D, $l = 1\text{ m}$, $D = 0.1\text{ m}$)
Gitter	
Anzahl und Art der Elemente	18631 Tetraeder
Diskretisierungsschema	lineare Lagrange-Elemente
Solver	
Software	COMSOL MULTIPHYSICS (FEM, V 3.4., Acoustic Mode)
Art	direkt, parametrisch, Frequenzbereich
Frequenzbereich	$f = 10 : 1 : 1000\text{ Hz}$
Stoffwerte	
Medium	Luft (ideales Gas)
Randbedingungen	
stromab ($x = 1\text{ m}$)	Impedanz $r = 0.95$
stromauf ($x = 0\text{ m}$)	Schnelleanregung \hat{u}

Tabelle 4.1: Parameter des FEM-Modells zur Untersuchung des Einflusses von axialen Temperaturgradienten

über der Helmholtzzahl $He = f \cdot l / c$ ($p_0 = 20 \cdot 10^{-6}\text{ Pa}$). Die Helmholtzzahl ist hier auf den Durchmesser des Rohres und die Schallgeschwindigkeit für $T = 20^\circ\text{ C}$ bezogen. $L_{p,min}$ entspricht in allen Auswertungen dem minimalen Schalldruckpegel aus den Ergebnissen in Abschnitt 4.1.2.1 (vgl. Abbildung 4.1).

4.1.2.1 Homogenes Temperaturfeld

Als Referenz wird zunächst der Fall ohne Dichtegradienten betrachtet, respektive die Wellenausbreitung in einem homogenen ruhenden Medium ($T = 20^\circ\text{ C}$). Wie erwartet sind die Graphen in Abbildung 4.1 deckungsgleich. Beide Gleichungen liefern hierfür folglich ein identisches Ergebnis. Für beide Fälle ist eine regelmäßige Abfolge von Druckspitzen und somit Resonanzfrequenzen zu erkennen. Aufgrund der Verluste am Rand weisen die Spitzen eine endliche Höhe auf.

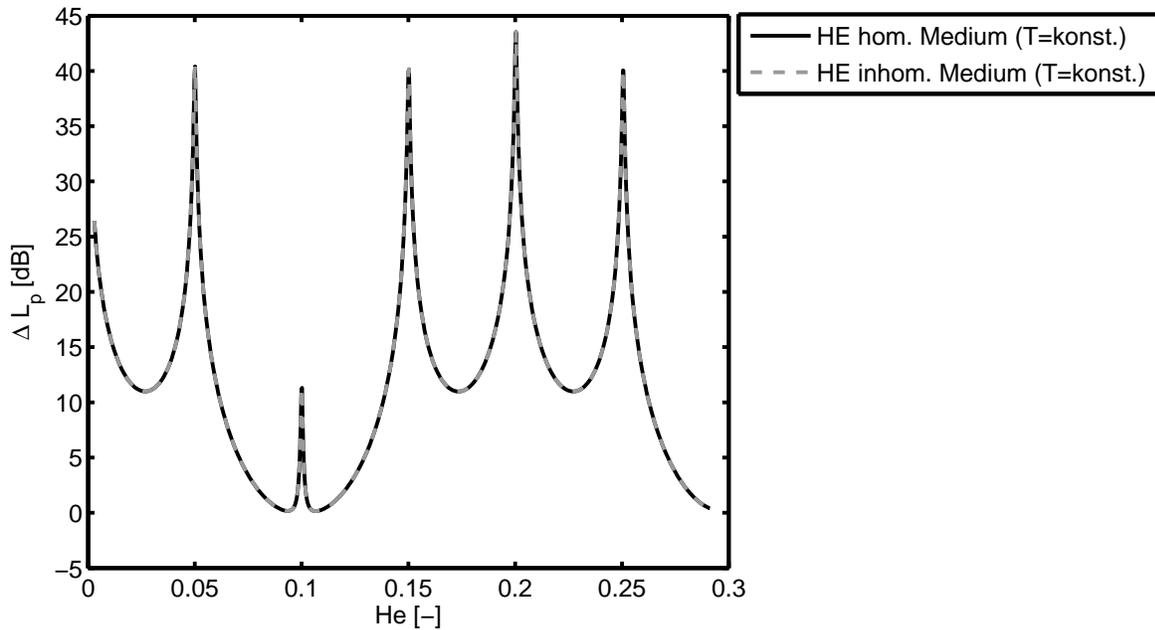


Abbildung 4.1: Spektren: homogenes Temperaturfeld

4.1.2.2 Axiale Dichtegradienten

In Anlehnung an, und auch zur Validierung der üblichen Ansätze aus der Literatur wird hinsichtlich der Betrachtung axialer Dichtegradienten nun zunächst eine sprunghafte Änderung der Zustandsvariablen untersucht, respektive ein Dichtesprung bei $x = 0.4 \text{ m}$. Stromab und stromauf dieses Ortes sind $\bar{\rho}$ und c konstant. Die Temperatur ändert sich an der Sprungstelle schlagartig von $T_1 = 20^\circ \text{ C}$ auf $T_2 = 1500^\circ \text{ C}$. Wärmeverluste an den Wänden werden nicht berücksichtigt.

Aus Abbildung 4.2 ist zu erkennen, dass die Verwendung der unterschiedlichen Formen der Helmholtzgleichung hier zu deutlich unterschiedlichen Ergebnissen in der Vorhersage des akustischen Feldes führt. Als Referenz ist in Abbildung 4.2 zusätzlich nochmals das Spektrum für den Fall eines homogenen, kalten Mediums gegeben. Auffällig sind zunächst die unterschiedlichen Eigenfrequenzen der drei betrachteten Fälle. Im Vergleich zum homogenen, kalten Medium liegen in den beiden anderen Fällen weniger Eigenfrequenzen vor. Dies ist unter anderem auf den Temperaturunterschied und die damit

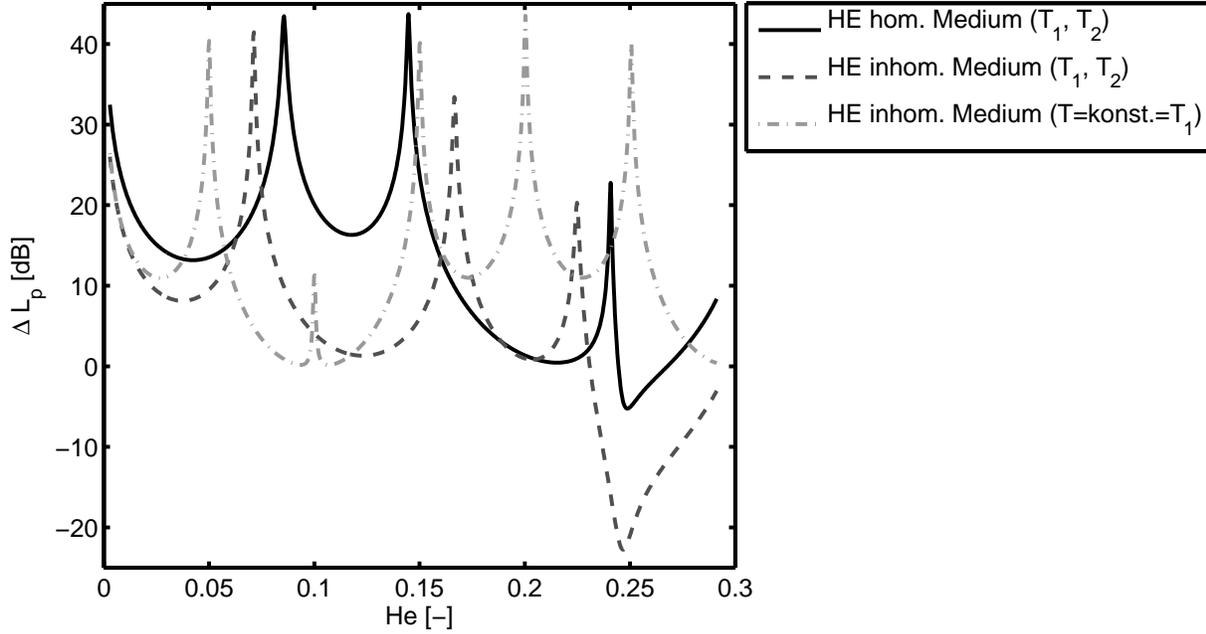


Abbildung 4.2: Spektren: inhomogenes Temperaturfeld, axialer Dichtesprung

verbundenen unterschiedlichen Wellenlängen zurückzuführen. Zudem findet am Dichtegradienten eine teilweise Reflexion und Transmission der akustischen Wellen statt. Diese wird durch die beiden unterschiedlichen Formen der Helmholtzgleichung unterschiedlich quantifiziert. Bestätigt wird dies durch entsprechende Aussagen in der Literatur (vgl. Abschnitt 4.1.1) sowie durch numerische Berechnungen von Wanke und Sattelmayer [74] (vgl. Abschnitt 4.1.3). Demnach führt die Verwendung der Helmholtzgleichung für inhomogene Medien im Vergleich zur Helmholtzgleichung für homogene Medien zu einem zusätzlichen Term, der das Ergebnis wesentlich beeinflusst [74]:

$$\mathbf{k}^2 \hat{p} + \bar{\rho} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \hat{p} \right) = \mathbf{k}^2 \hat{p} + \bar{\rho} \nabla \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \hat{p} + \Delta \hat{p} = 0. \quad (4.3)$$

Dies resultiert u. U. in der Vorhersage eines unterschiedlichen Energieaushalts im betrachteten System bei Verwendung der beiden unterschiedlichen Gleichungen. Ein ursächlicher Einfluss der Numerik auf das Ergebnis kann dabei ausgeschlossen werden (vgl. hierzu auch Wanke und Sattelmayer [74])

bzw. die dazu ergänzenden Analysen in Abschnitt 4.1.3).

Somit lässt sich aussagen, dass bereits ohne Wärmequellen deutliche Abweichungen in den Ergebnissen bei Verwendung der beiden unterschiedlichen Arten der Helmholtzgleichung zu erkennen sind. Diese beziehen sich insbesondere auf die Eigenfrequenzen, aber u.U. auch auf die im System enthaltene, akustische Energie.

4.1.2.3 Radiale Dichtegradienten

Ergänzend werden im Folgenden radiale Dichtegradienten untersucht. Sie bilden sich zum Beispiel an gekühlten oder auch nicht isolierten (nicht adiabaten) Wänden aus. Man spricht dann von Wandgrenzschichten. Diese sind in der Regel klein im Vergleich zu den Abmessungen der betrachteten Geometrie. In der Akustik werden sie deshalb zumeist vernachlässigt. Die zugehörigen Gradienten verlaufen üblicherweise exponentiell.

Um den Einfluss radialer Dichtegradienten auf die Akustik zu untersuchen, wird im Folgenden die Approximation eines turbulenten Geschwindigkeitsprofils zur Modellierung eines entsprechenden Temperaturprofils verwendet [75], gemäß [76]:

$$T = (1 - R/R_{max})^{1/7}(T_b - T_w) + T_w. \quad (4.4)$$

R ist der Radius des Rohres, $T_b = 100^\circ C$ die Kerntemperatur im Medium und $T_w = 20^\circ C$ die Wandtemperatur. Die Umrechnung der Temperatur in die Dichte erfolgt mittels der Idealgasgleichung; die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit mit Hilfe deren Definition $c = \sqrt{\kappa \bar{p} / \bar{\rho}}$. Um das Berechnungsgitter am Rand, zur Auflösung des Gradienten, entsprechend stark verfeinern zu können, wird die Untersuchung auf eine zweidimensionale, achsensymmetrische Betrachtung reduziert. Das Berechnungsgitter umfasst 100069 dreieckige Elemente. Zur örtlichen Diskretisierung werden lineare Lagrange-Elemente verwendet.

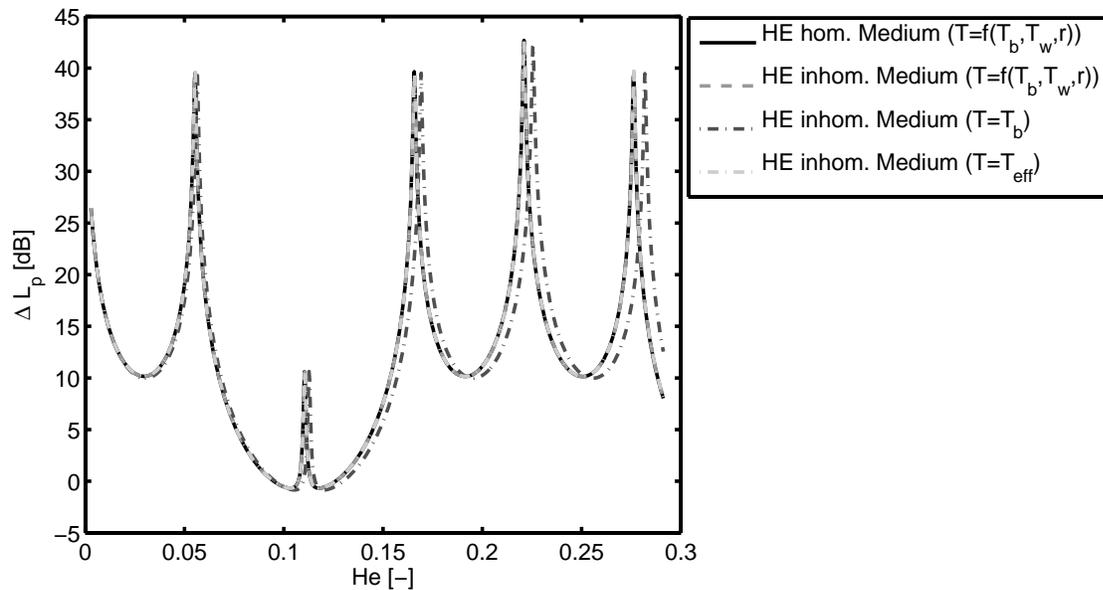


Abbildung 4.3: Spektrum: inhomogenes Temperaturfeld, radialer Dichtegradient

Aus Abbildung 4.3 erkennt man, dass die Wandgrenzschicht einen dämpfenden Einfluss auf das akustische System ausübt. Folglich sind auch die Resonanzfrequenzen leicht verschoben im Vergleich zum ebenfalls dargestellten Fall eines homogenen, heißen Mediums. Beide Varianten der Helmholtzgleichung führen hier aber zu nahezu identischen Ergebnissen.

In Abbildung 4.3 ist zudem das Resultat einer alternativen Berechnung des Einflusses einer Wandgrenzschicht dargestellt. Dieser Ansatz ermöglicht, durch die Verwendung einer effektiven Temperatur, den enormen Berechnungsaufwand aufgrund des Auflöserns der Wandgrenzschicht zu umgehen. Gleichzeitig kann er einen entscheidenden Beitrag zur Verbesserung von Netzwerkmodellen liefern, bei ebenfalls nahezu vernachlässigbarem, zusätzlichem Modellierungsaufwand. Die Bestimmung von T_{eff} erfolgt hier mittels einer Integration des Temperaturprofils über eine Querschnittsebene und einer anschließenden Division durch die Fläche. $T_{eff} \approx 85^\circ C$ wird nun als Ersatztemperatur eines homogenen Mediums verwendet. Für den betrachteten Fall resultiert daraus ein identisches Spektrum wie im Rahmen der expliziten Modellierung des Gradienten.

4.1.3 Einfluss der Modellierung axialer Dichtegradienten auf thermoakustische Systeme

Ziel der folgenden Untersuchungen ist es herauszuarbeiten, welche Unterschiede sich in der Vorhersage der thermoakustischen Stabilität von Verbrennungssystemen durch die Verwendung der beiden unterschiedlichen Arten der Wellengleichung (Gleichung 2.13 und Gleichung 2.14) ergeben. Die Analyse erfolgt mit Hilfe der in Abschnitt 1.3 vorgestellten Berechnungsmethode nach Pankiewitz [3] anhand eines einfachen, zylindrischen Rohres. Die darin enthaltene Wärmefreisetzungszone kann hinsichtlich ihrer axialen Ausdehnung als kompakt bezeichnet werden. Einflüsse einer mittleren Geschwindigkeit werden nicht betrachtet.

Wanke und Sattelmayer [74] zeigten für den in der Literatur üblichen Fall einer sprunghaften Dichteänderung, dass durch die Verwendung der Wellengleichung für homogene Medien anstelle der Wellengleichung für inhomogene Medien deutliche Unterschiede in der Vorhersage der thermoakustischen Stabilität des betrachteten Systems resultieren. Die Neigung zu einem thermoakustisch instabilen Verhalten ist demnach bei der Verwendung der Wellengleichung für inhomogene Medien deutlich stärker ausgeprägt. Um die Allgemeingültigkeit dieser Aussagen zu prüfen und um zu belegen, dass sie auch für ausgedehnte akustisch kompakte Flammen gelten, werden entsprechende Untersuchungen nun nochmals für einen kontinuierlichen sowie insgesamt deutlich flacheren Dichtegradienten durchgeführt.

Zunächst erfolgt eine Entdimensionierung des Modells (Index E) [3, 74]. Die Referenzgrößen (charakteristische Länge l_0 , charakteristische Geschwindigkeit u_0 und charakteristische Impedanz Z_0) beziehen sich auf die Eingangsgrößen bzw. im Fall der charakteristischen Länge auf den Durchmesser des betrachteten Rohres. Mit Ausnahme des Interaktionsindex n entsprechen die verwendeten Werte den jeweiligen Angaben in [74]. Die mittlere Dichte $\bar{\rho}_E$ und die mittlere Schallgeschwindigkeit c_E sind nun nicht mehr abschnittsweise konstant, sondern folgen den Gleichungen:

$$\bar{\rho}_E = -0.335 \tanh(30(x_E - 1)) + 0.665, \quad (4.5)$$

$$c_E = 2.015 - (-0.35 \tanh(30(x_E - 1)) + 0.665). \quad (4.6)$$

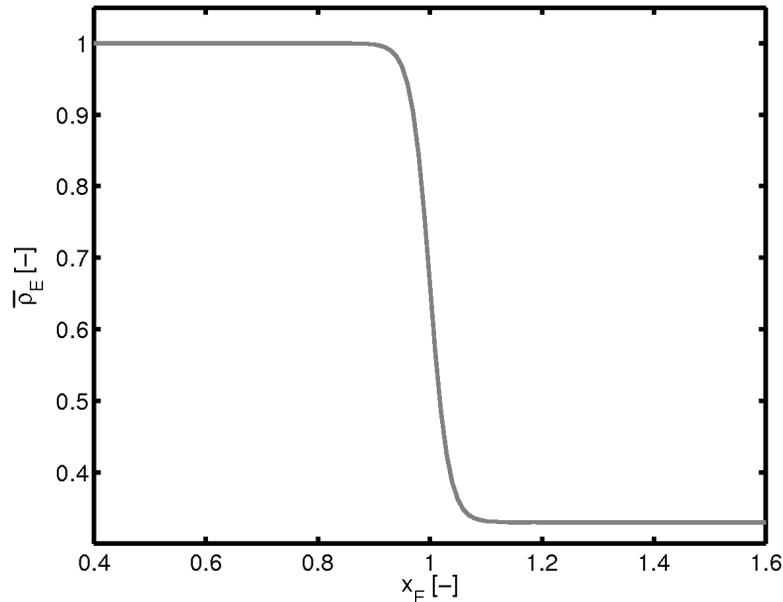


Abbildung 4.4: Axialer Dichtegradient in der zylindrischen Rohrgeometrie

In Abbildung 4.4 ist der entsprechende Verlauf des mittleren Dichtegradienten über dem Ort dargestellt. Die Wärmefreisetzungszone erstreckt sich in der an sich zylindrischen Geometrie ($l_E = 3$, $D_E = 1$) scheibenförmig von $x_E = 1$ bis $x_E = 1.1$. Zur Modellierung der Wärmefreisetzung wird das in Kapitel 1 beschriebene $n - \tau$ -Modell verwendet. Als Referenzpunkt dient ein Punkt auf der Mittelachse ($x_E = 0.85$). Bezüglich des verwendeten Wärmefreisetzungmodells wird $\mu = 0.75$ (Sättigungsparameter) und $n = 30$ (Interaktionsindex) gewählt³. Weitere Parameter sind Tabelle 4.2 zu entnehmen. An den stirnseitigen Rändern des Berechnungsgebiets sind Verlustrandbedingungen implementiert gemäß Gleichung 1.6 (stromauf: $K = 0.1$, stromab: $K = 0.3$). Die Anregung des Systems erfolgt mittels einer zufälligen Anfangsverteilung des Schalldrucks. Mit Hilfe dieses Modells werden transiente Simulationen des thermoakustischen Stabilitätsverhaltens durchgeführt. Variiert wird neben der verwendeten Gleichungsart (Gleichung 2.13 bzw. Gleichung 2.14, je-

³ n ist hier deutlich kleiner als in Wanke und Sattelmayer [74] ($n = 100$), um so die durch die Flamme ins System eingebrachte Energie zu reduzieren. Diese ist aber nach wie vor, auch aufgrund der recht willkürlichen Wahl von $\omega_{0,E} = 5$, recht hoch, wie insbesondere anhand der maximalen Amplituden der Schnelleschwankungen in der Sättigung zu erkennen. Die generellen Aussagen im Rahmen dieses Kapitels ändern sich dadurch jedoch nicht.

4.1 Dichtegradien

Geometrie	
Form	zylindrisches Rohrstück (3D, $l_E = 3$, $D_E = 1$)
Gitter	
Anzahl und Art der Elemente	56060 Tetraeder
Diskretisierungsschema	lineare Lagrange-Elemente
Solver	
Software	COMSOL MULTIPHYSICS (FEM)
Art	direkt, Zeitbereich
Maximale Ordnung des BDF	2
Stoffwerte	
Medium	Luft (ideales Gas)

Tabelle 4.2: Parameter des FEM-Modells zur Untersuchung des Einflusses von axialen Temperaturgradienten auf eine Stabilitätsvorhersage

weils mit Wärmefreisetzung gemäß Gleichung 2.15) lediglich der Zeitverzug τ_E .

In der Stabilitätskarte (Abbildung 4.5) sind für verschiedene Zeitverzögerungen τ_E die jeweils dominierenden Frequenzen dargestellt. Sie werden aus den Zeitreihen mittels einer *Fast-Fourier-Transformation* [77] ermittelt. Zusätzlich sind die zugehörigen Modenformen gezeigt. Die horizontalen Linien repräsentieren die Lage der Eigenfrequenzen der betrachteten Geometrie ohne Wärmefreisetzung, jedoch mit inhomogener Temperaturverteilung. Sie wurden mittels eines Eigenwertmodells berechnet unter Verwendung der entsprechenden Gleichung für inhomogene Medien auf Basis der Konfiguration aus [74]. Die Bereiche zwischen den vertikalen Linien markieren näherungsweise die unterschiedlichen Moden, die sich aus den Zeitbereichsrechnungen ergeben⁴.

Aus Abbildung 4.5 ist zu erkennen, dass die daraus resultierenden Frequenzen und Modenformen bei Verwendung der beiden unterschiedlichen Arten der Wellengleichung weitgehend sehr ähnlich sind. Die dominierenden Frequenzen sind aber bei Verwendung der Wellengleichung für homogene Medien stets etwas höher. Im Bereich $\tau_E = 1.6$ bis $\tau_E = 2.0$ existieren jedoch zusätzlich entscheidende Unterschiede hinsichtlich des prognostizierten Stabilitäts-

⁴Die Form der Moden wird mittels der Notation (k, l, m) beschrieben. k bezeichnet die Ordnung der longitudinalen, l die Ordnung der transversalen und m die Ordnung der radialen Moden.

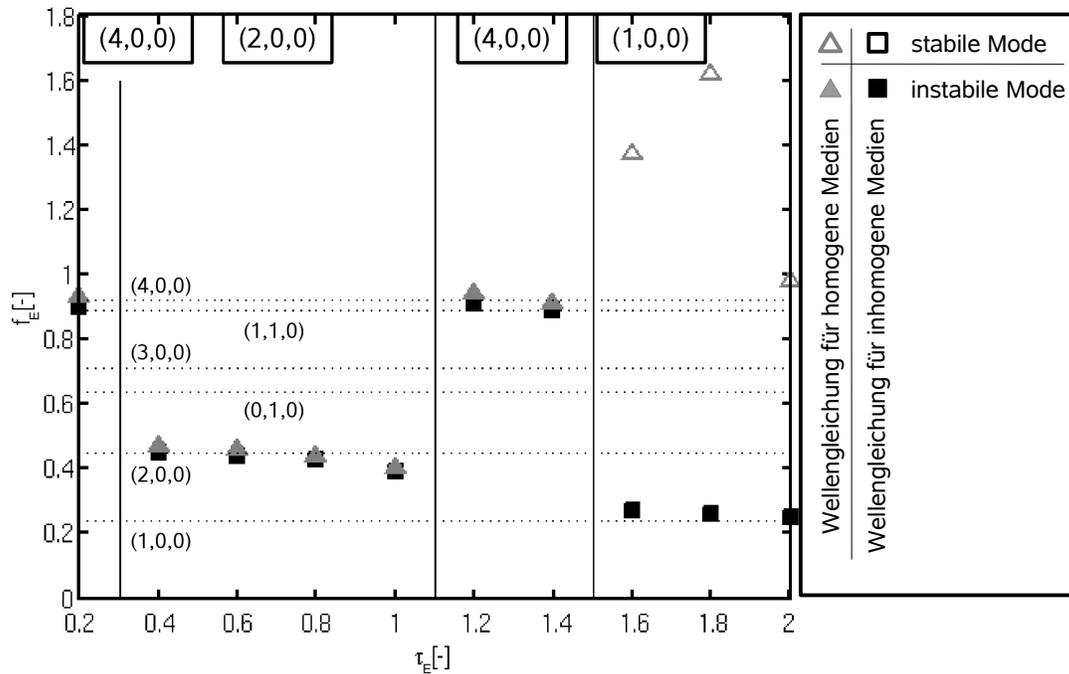


Abbildung 4.5: Stabilitätskarte

verhaltens des betrachteten Systems. Bei Verwendung der Wellengleichung für homogene Medien wird in diesem Intervall ein stabiles Systemverhalten vorhergesagt. Die Anfangsstörungen klingen folglich mit der Zeit ab. Zudem weichen in diesem Bereich die vorhergesagten Modenformen deutlich voneinander ab, wie anhand der hier im System dominierenden Frequenzen ersichtlich. Die (1,0,0)-Mode dominiert folglich nur bei Verwendung der Wellengleichung für inhomogene Medien. Dies begründet sich jedoch darin, dass im Fall der Wellengleichung für homogene Medien, aufgrund des stabilen Verhaltens des Gesamtsystems, die einzelnen Modenanteile im verwendeten Spektrum kaum mehr explizit detektiert werden können. Die Abweichungen hinsichtlich der Modenformen im Bereich $\tau_E = 1,6$ bis $\tau_E = 2,0$ sind folglich als unbedenklich einzustufen.

Obige Aussagen bezüglich des Stabilitätsverhaltens werden durch eine Betrachtung der maximalen Amplituden im Grenzyklus bestätigt (Abbildung 4.6). Zudem ist aus Abbildung 4.6 zu erkennen, dass die maximalen Amplituden der Schnelleschwankungen bei Verwendung der Wellengleichung für inhomogene Medien stets deutlich höher sind. Eigentlich sind diese jedoch

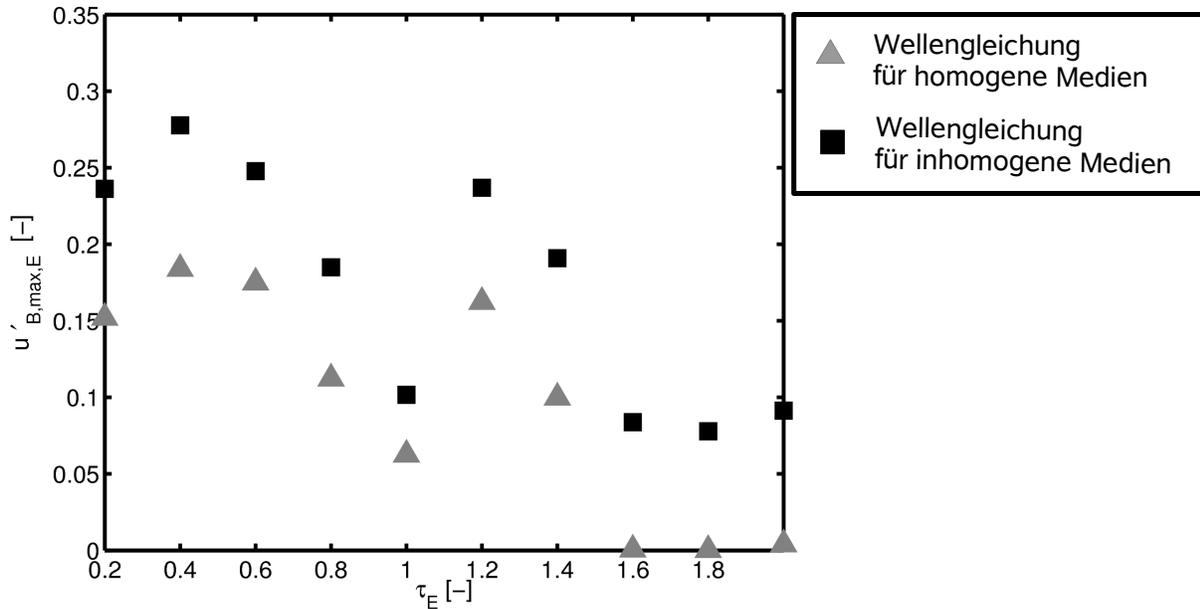


Abbildung 4.6: Maximale Amplituden von $u'_{B,E}$ ($\tau_E = 0.8$)

durch die Verwendung von Gleichung 1.5 auf einen fixen Wert limitiert. Der Unterschied ist mit Hilfe der akustischen Energie im System zu erklären [3,74]: Solange keine Sättigung vorliegt, wachsen sowohl der akustische Energiestrom aufgrund der Wärmefreisetzung \dot{E}_{in} als auch die Verluste \dot{E}_{out} ⁵, die im vorliegenden Fall aus Transmission und Dissipation an der Ein- und der Auslassrandbedingung resultieren, quadratisch mit dem akustischen Druck an. Sobald Sättigungseffekte auftreten, wächst \dot{E}_{in} nur noch linear, während die Verluste nach wie vor quadratisch steigen. Ein Grenzyklus wird hier folglich erreicht, sobald die akustische Energie aus der Wärmefreisetzung die an den Rändern des Systems abgegebene akustische Energie ausbalanciert. Wie weit die Amplituden nach dem Einsetzen von Sättigungseffekten noch anwachsen, hängt von der Differenz zwischen \dot{E}_{in} und \dot{E}_{out} zu diesem Zeitpunkt ab. Diese Differenz wird durch die Wachstumsraten bestimmt (vgl. Abbildung 4.7).

Die Wachstumsraten können aus den einzelnen Zeitreihen mittels einer Hilbert-Transformation bestimmt werden (vgl. Abbildung 4.7). Negative Wachstumsraten weisen auf stabile Moden hin, respektive ein stabiles Verhal-

⁵Sie sind jeweils über eine oder mehrere Perioden gemittelt.

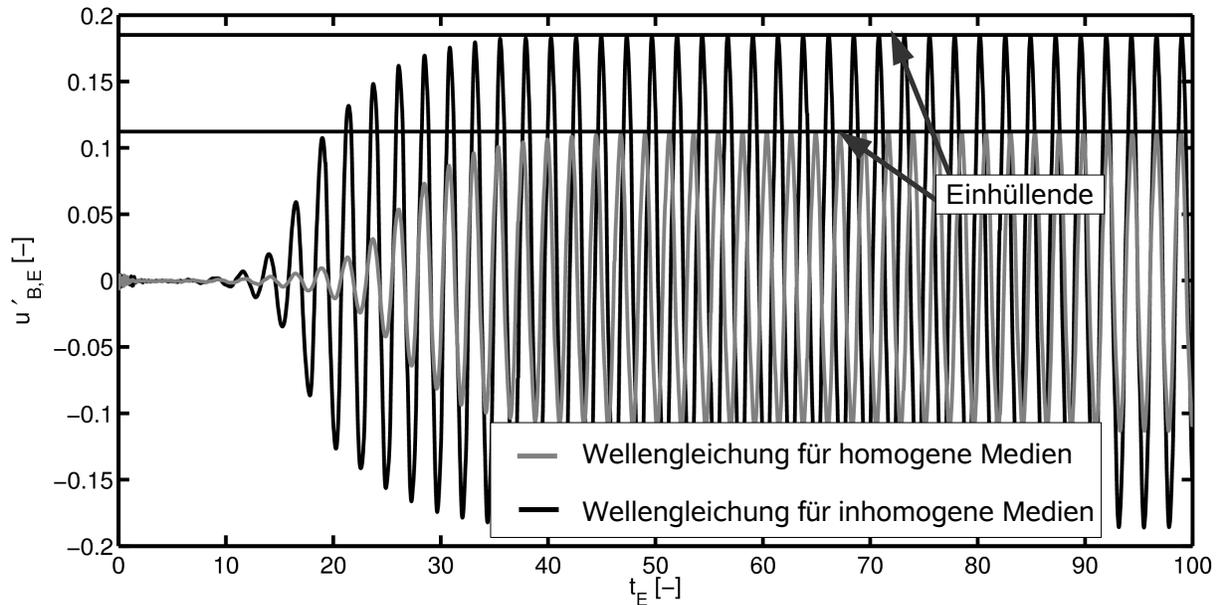


Abbildung 4.7: Verlauf der Schnelleschwankungen über der Zeit

ten des an sich linearen Gesamtsystems. In Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus Abbildung 4.5 werden im Bereich $\tau_E = 1.6$ bis $\tau_E = 2.0$ (im Wesentlichen) negative Wachstumsraten und somit ein unterschiedliches Systemverhalten bei Verwendung der beiden unterschiedlichen Gleichungen vorhergesagt. Abweichungen davon sind auf die oben beschriebenen Auswerteprobleme im Fall eines stabilen Gesamtverhaltens zurückzuführen. Außerhalb dieses Bereichs liegen ausschließlich positive Wachstumsraten vor und somit ein thermoakustisch instabiles Verhalten des betrachteten Gesamtsystems.

Zusammenfassend kann durch die vorliegenden Ergebnisse auf Basis explizit modellierter Dichtegradienten bestätigt werden, dass das Verhalten von akustischen Systemen mit Verbrennung als zu stabil vorhergesagt wird, wenn die Wellengleichung für homogene Medien verwendet wird [74]. Gemäß [74] sind die Unterschiede in den Ergebnissen im Wesentlichen auf einen zusätzlichen Term zurückzuführen, der im Rahmen der Wellengleichung für inhomogene Medien im Vergleich zur Wellengleichung für homogene Medien berücksichtigt wird. Dieser Term hat die Größenordnung der Wärmefreisetzung und übt somit einen entsprechend starken Einfluss aus.

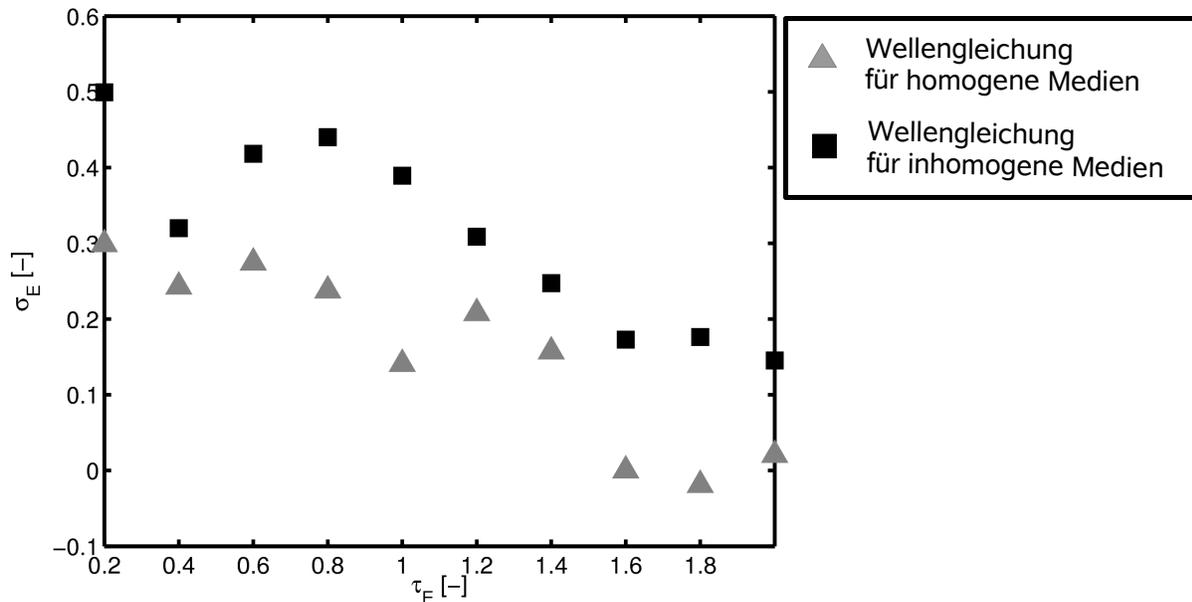


Abbildung 4.8: Wachstumsraten

4.2 Mittlere Geschwindigkeit

Mit Hilfe der Wellen- bzw. der Helmholtzgleichung ist eine Betrachtung des Einflusses von Geschwindigkeitsgradienten nicht möglich. Dies unterscheidet sie von den linearisierten Eulergleichungen, aus denen sie unter Annahme eines homogenen mittleren Geschwindigkeits- und Druckfelds abgeleitet werden (vgl. Kapitel 2). Unter Verwendung der konvektiven Wellen- bzw. Helmholtzgleichung kann jedoch der Einfluss eines homogenen Geschwindigkeitsfelds auf die Akustik beschrieben werden. Ein solches existiert in der Regel jedoch nur im Rahmen stark idealisierter Systeme, in denen insbesondere keine Wärmefreisetzung stattfindet. Gemäß Abschnitt 2.7.2 resultiert aus der Verwendung der konvektiven Helmholtzgleichung anstelle der linearisierten Eulergleichungen im Wesentlichen zunächst eine Vernachlässigung von Dämpfungseffekten (vgl. hierzu auch Pieringer [78]).

Bei vielen industriellen Feuerungssystemen, wie z. B. auch bei Gasturbinen, findet die Verbrennung bei äußerst niedrigen Machzahlen statt. Deshalb wird in diesen Fällen der Einfluss einer mittleren Geschwindigkeit auf die Akustik

in der Literatur häufig komplett vernachlässigt. Die damit verbundenen Vereinfachungen und ihre Auswirkungen werden im Folgenden analysiert.

Ausgangspunkt dafür ist die konvektive Helmholtzgleichung. Sie lässt sich unter Annahme konstanter mittlerer Geschwindigkeit für eindimensionale Fälle beispielsweise aus der üblichen Form der Helmholtzgleichung (Gleichung 2.21) mittels einer Koordinatentransformation zwischen einem ortsfesten und einem bewegten Koordinatensystem herleiten [8, 18]. Dargestellt in der üblichen Form der Helmholtzgleichung beinhaltet sie eine modifizierte Wellenzahl, hier k^* genannt, die von der mittleren Geschwindigkeit \bar{u} abhängt, gemäß:

$$k_{\pm}^* = \pm \frac{\omega}{c \pm \bar{u}} = \pm \frac{\omega/c}{1 \pm M} = \pm \frac{k}{1 \pm M}. \quad (4.7)$$

k^* unterscheidet sich für die stromauf (+) und die stromab (–) laufende Welle. Die Abweichungen zum nicht durchströmten Fall skalieren direkt mit der Machzahl. Die entsprechende Transfermatrix in fg-Notation für ein verlustfreies Rohr lautet [18]:

$$\begin{pmatrix} f_d \\ g_d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-i\omega \frac{\Delta x}{c+\bar{u}}} & 0 \\ 0 & e^{i\omega \frac{\Delta x}{c-\bar{u}}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_u \\ g_u \end{pmatrix}. \quad (4.8)$$

Eine Vernachlässigung der mittleren Strömung in der Helmholtz- oder auch der Wellengleichung wirkt sich demnach nicht auf die Schwingungsamplituden aus. Sie beeinflusst jedoch die Ausbreitungsgeschwindigkeit, so dass sich die Wellen, je nach Ausbreitungsrichtung, im Vergleich zum ruhenden Medium verzögert bzw. beschleunigt fortbewegen. Wählt man beliebige Reflexionsfaktoren r_u und r_d an den Rändern stromauf bzw. stromab, löst die entsprechenden Gleichungen jeweils nach f auf und setzt sie dann zueinander ins Verhältnis, so folgt:

$$\frac{f_d}{f_u} = \frac{1}{r_u r_d} \cdot \frac{g_d}{g_u}. \quad (4.9)$$

Zusammen mit Gleichung 4.8 kann daraus folgender Zusammenhang für die Kreisfrequenz ω abgeleitet werden:

$$\omega = -(\ln(r_u) + \ln(r_d)) \frac{c^2 - \bar{u}^2}{2\Delta x c}. \quad (4.10)$$

Daraus wird ersichtlich, dass sich die Frequenz aufgrund der Existenz des homogenen Geschwindigkeitsfelds nur geringfügig verringert. Für kleine Machzahlen, wie sie in Gasturbinenbrennkammern vorherrschen, ist dieser Einfluss von \bar{u} im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit c meist vernachlässigbar.

Durch die Existenz der mittleren Geschwindigkeit ist, wie oben beschrieben, jedoch die Form der Wellen verschoben, was zu einer Verschiebung der Schwankungsknoten und -bäuche führt. Über die Phasenlage der Schwankungen kann dies wiederum Einfluss auf die thermoakustische Instabilität des Systems haben.

Trotzdem scheint die Verwendung der Helmholtzgleichung ohne konvektive Terme, in Übereinstimmung mit der allgemeinen Praxis in der Literatur, für die hier betrachteten Anwendungsfälle bei sehr niedrigen Machzahlen zulässig. Wie oben bereits erwähnt, beschränkt sich hier der Unterschied in der Verwendung der konvektiven Helmholtzgleichung anstelle der linearisierten Eulergleichungen lediglich auf eine Vernachlässigung von Dämpfungseffekten. Eine Möglichkeit, auch diese näherungsweise mittels der Helmholtz- bzw. Wellengleichung zu erfassen, wird in Abschnitt 4.3 und insbesondere in Kapitel 5 vorgestellt werden.

4.3 Möglichkeiten der Implementierung akustischer Verluste

Akustische Verluste können unter Verwendung der an sich verlustfreien Wellen- bzw. Helmholtzgleichung generell auf zwei verschiedene Arten erfasst werden [37]: durch direkte Implementierung eines Verlustterms in die jeweilige Gleichung oder alternativ mittels einer komplexen Wellenzahl. Letzgenannte Methode ist jedoch auf den Frequenzbereich, respektive die Verwendung der Helmholtzgleichung, beschränkt.

4.3.1 Direkte Implementierung eines Verlustterms

Prinzipiell lässt sich akustische Dämpfung durch verschiedene Varianten eines Verlustterms mittels der an sich isentropen Wellen- bzw. Helmholtzgleichung erfassen [34, 43, 79, 80] (vgl. hierzu auch Abschnitt 2.7). Entscheidend für die Form des Verlustterms ist dabei der jeweils zugrunde liegende physikalische Wirkmechanismus. Für die im Rahmen dieser Arbeit betrachteten Aufgabenstellungen wird in der Literatur üblicherweise ein Ansatz verwendet, bei welchem eine lineare Abhängigkeit der Dämpfung von der Frequenz besteht [80]. Realisiert wird dies in der Regel mittels einer zeitlichen Ableitung erster Ordnung der Druckschwankung, gemäß:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} + d \frac{\partial p'}{\partial t} - \Delta p' = 0, \quad (4.11)$$

$$\frac{\omega^2}{c^2} \hat{p} - di\omega \hat{p} + \Delta \hat{p} = 0, \quad (4.12)$$

mit $d > 0$. Die daraus resultierende akustische Dämpfung ist über weite Bereiche unabhängig von der Frequenz (vgl. Abbildung 4.9). Für $f = 0$ liegt jedoch keine Dämpfung vor, da für $\omega = 0$ der Dämpfungsterm gegen Null strebt und damit Gleichung 4.12 in die Form der ungedämpften Gleichungsvariante übergeht (vgl. Abschnitt 4.3.2). Eine Umkehr der Vorzeichen der Dämpfungsterme in den Gleichungen 4.11 und 4.12 resultiert in einer Anfachung der akustischen Schwankungsgrößen anstelle einer Dämpfung.

4.3.2 Komplexe Wellenzahl

Gemäß Kinsler et al. [37] kann die Realisierung einer gedämpften Form der Helmholtzgleichung auch unter Verwendung einer komplexen Wellenzahl erfolgen. Im ungedämpften Fall ist die Wellenzahl real und berechnet sich bei Vernachlässigung einer mittleren Geschwindigkeit gemäß $k = \omega/c$. Die Betrachtung einer komplexen Wellenzahl ist äquivalent zu der eines Dämpfungsterms in der Helmholtzgleichung (vgl. Abschnitt 4.3.1). Dazu wird zunächst, neben der zeitharmonischen Annahme in Gleichung 4.12, zusätzlich die Annahme ortsharmonischer Schwingungen getroffen, gemäß:

$$\hat{p} = P e^{-ikx}. \quad (4.13)$$

Damit folgt aus Gleichung 4.12

$$\frac{\omega^2}{c^2} - i\omega d - k^2 = 0. \quad (4.14)$$

Löst man Gleichung 4.14 nach der Wellenzahl k , so resultiert ein komplexwertiger Term (Gleichung 4.15). Die Dämpfung ist nach der hier verwendeten Konvention im Imaginärteil der Wellenzahl enthalten. Zur exakten Bestimmung des Imaginär- und des Realteils der Wellenzahl wird k gemäß folgendem Ansatz zerlegt:

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - i\omega d} = \Re(k) + i\Im(k), \quad (4.15)$$

$$\Re(k)^2 + 2i\Re(k)\Im(k) - \Im(k)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - i\omega d. \quad (4.16)$$

Nach einer Separation der realen und der imaginären Anteile resultiert:

$$\Re(k)^2 - \Im(k)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad (4.17)$$

sowie

$$2i\Re(k)\Im(k) = -\omega d i. \quad (4.18)$$

Für den Imaginärteil $\Im(k)$ folgt:

$$\Im(k) = -\frac{\omega d}{2\Re(k)} \quad (4.19)$$

sowie für den zugehörigen Realteil $\Re(k)$ nach Einsetzen von Gleichung 4.19 in Gleichung 4.17:

$$\Re(k) = \pm \sqrt{\frac{\omega}{2} \left(\frac{\omega}{c^2} \pm \sqrt{d^2 + \frac{\omega^2}{c^4}} \right)} \quad (4.20)$$

Der Realteil der Wellenzahl $\Re(k)$ hängt folglich auf komplexe Art und Weise von der Frequenz ab. Für den Fall sehr kleiner Dämpfung ($d \rightarrow 0$) reduziert sich $\Re(k)$, aufgrund der unterschiedlichen Vorzeichen, auf $\Re(k) = \pm 0$ bzw. auf $\Re(k) = \pm \omega/c$. $\Im(k)$ strebt dann gegen Null, was schließlich zum ungedämpften Fall führt.

Ein Vergleich zwischen Ergebnissen dieser analytischen Betrachtung und den entsprechenden numerischen Ergebnissen (vgl. Abschnitt 4.3.1) ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Die numerische Untersuchung des Dämpfungsverhaltens erfolgt anhand eines eindimensionalen Modells im Frequenzbereich ($T = 20^\circ \text{C}$). Die Anregung findet von der linken Randbedingung aus statt (stromauf), parametrisch für das Frequenzintervall $f = 1 : 1 : 2000 \text{ Hz}$. Stromab ist eine nicht reflektierende Randbedingung implementiert. Die örtliche Diskretisierung umfasst für alle Frequenzen 50 Stützstellen der kleinsten betrachteten Wellenlänge $\lambda_{f_{max}} = \lambda_{2000 \text{ Hz}}$, basierend auf linearen Lagrange-Elementen. Der Vergleich der beiden Ansätze findet anhand des Referenzpunktes $x = 4\lambda_{f_{max}}$ statt. In Abbildung 4.9 ist der Verlauf der Druckschwankungsamplituden, normiert auf die Anregungsamplitude, über der Helmholtzzahl gezeigt. Ein Wert von Eins auf der Ordinate entspricht folglich

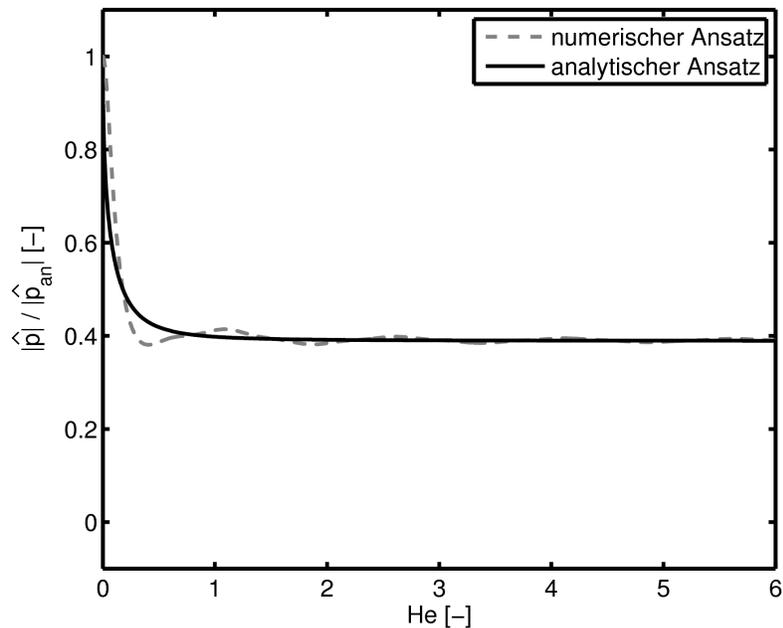


Abbildung 4.9: Frequenzverhalten der Dämpfung

dem Ergebnis eines ungedämpften Systems. Je kleiner $|\hat{p}|/|\hat{p}_{an}|$, desto größer ist der Einfluss der Dämpfung. Die charakteristische Länge zur Berechnung der Helmholtzzahl entspricht der Länge des Berechnungsgebiets, respektive sechs Wellenlängen der Frequenz $f = 2000 \text{ Hz}$.

Die resultierenden Graphen verhalten sich sehr ähnlich. Beide weisen für eine Frequenz größer $f = 200 \text{ Hz}$ ($\text{He} > 1$) ein frequenzunabhängiges Dämpfungsverhalten auf. Unterhalb dieser Grenzfrequenz streben sie rasch gegen Null (verlustfreie Varianten). Der Bereich konstanter Dämpfung wird etwas schneller durch den analytischen Ansatz erreicht. Die Ergebnisse des numerischen Verfahrens weisen im sehr niederfrequenten Bereich leichte Schwankungen auf. Dies ist auf die Verwendung eines endlich langen Berechnungsgebiets zurückzuführen. Für große Frequenzen kann die Wellenlänge darin nicht mehr ausreichend abgebildet werden. Es resultieren Abschneideeffekte, welche sich in entsprechenden Schwankungen der Graphen ausdrücken.

Zusammenfassend können zwei wichtige Schlüsse aus Abbildung 4.9 gezogen werden:

- Der klassische Dämpfungsansatz führt für große Helmholtzzahlen ($He > 1$) zu einer von der Helmholtzzahl unabhängigen Dämpfung der Wellenausbreitung.
- Für $He < 1$ bricht die Dämpfung zusammen. Dieser Frequenzbereich ist aber für die Analyse von Brennkammerschwingungen nicht relevant.

4.4 Zusammenfassung

Zusammenfassend ergibt sich für die Untersuchungen im Rahmen dieses Kapitels, dass die Gradienten der mittleren Dichte durchaus in der Wellen- bzw. der Helmholtzgleichung betrachtet und auch explizit modelliert werden müssen, um die thermoakustische Stabilität von Brennkammern möglichst genau vorhersagen zu können.

Konvektive Terme können hier aufgrund der geringen Machzahlen in erster Näherung vernachlässigt werden. Der Einfluss der mittleren Geschwindigkeit auf die akustische Energie im System wird im Rahmen von Kapitel 5 noch genauer betrachtet werden.

Akustische Verluste können generell auf verschiedenen Wegen mittels der an sich verlustfreien Wellen- bzw. Helmholtzgleichung erfasst werden. Im hier betrachteten Fall ist das Frequenzverhalten des zusätzlichen Dämpfungsterms oberhalb einer kritischen Helmholtzzahl frequenzunabhängig. Die numerischen Rechnungen geben die analytische Lösung für einen Testfall gut wieder.

5 Akustische Verluste in der Helmholtz- und der Wellengleichung

Aus Abschnitt 2.7 wird ersichtlich, dass bereits bei vermeindlich einfachen geometrischen Konfigurationen komplexe Interaktionen zwischen Schall- und Strömungsfeld auftreten können¹. Detailliert können solche Wechselwirkungen nur mittels CFD-Rechnungen aufgelöst werden. Bei Verwendung der Wellen- bzw. der Helmholtzgleichung muss zunächst ein entsprechender Verlustterm hergeleitet werden, der diese Effekte beschreibt. Eine exakte (dreidimensionale) Lösung von Gleichung 2.54 beispielsweise ist aber enorm aufwendig wegen der Vielzahl der zu berücksichtigenden Einzelterme. Aufgrund des hohen Speicher-, Leistungs- und Rechenzeitbedarfs würde eine solche Vorgehensweise zudem generell der Idee eines Auslegungswerkzeuges widersprechen. Bestehende Ansätze zur Lösung des Problems beschränken sich daher vornehmlich auf den Frequenzbereich, zumeist auf eine integrale Darstellung des Transferverhaltens eines akustischen Elements (vgl. [42, 82–84]). Für praktische Anwendungsfälle erwies sich hierfür häufig das $l-\zeta$ -Modell als besonders geeignet (Gleichung 2.30) [8–10, 18].

Im Folgenden wird ein alternatives Modell hergeleitet, das erlaubt, akustische Verluste, die bei der Durchströmung von Brennkammerkomponenten entstehen, näherungsweise mittels der Helmholtz-, aber auch der Wellengleichung lokal zu erfassen. Die Validierung des neuartigen Ansatzes erfolgt im Frequenzbereich gegen analytische bzw. experimentelle Daten. Zunächst wird ein eindimensionaler, später komplexe dreidimensionale Testfälle betrachtet.

¹Interessante Einblicke hierzu sind auch dem 2D-Ansatz von Kierkegaard [81] basierend auf den linearisierten Navier-Stokes-Gleichungen (unter Verwendung von COMSOL MULTIPHYSICS) zu entnehmen.

5.1 Eindimensionale Verlustbetrachtung

5.1.1 Herleitung des eindimensionalen Verlustterms

Ausgangspunkt ist wie beim $l-\zeta$ -Modell die Definition des strömungsmechanischen Totaldruckverlusts in einer inkompressiblen Strömung:

$$\Delta \bar{p}_t = -\frac{\bar{\rho}}{2} \bar{u}_1^2 \zeta. \quad (5.1)$$

Diese Beziehung erlaubt die näherungsweise Quantifizierung von Stoßverlusten im Strömungsfeld, die zum Beispiel an Querschnittssprüngen und damit auch bei der Durchströmung von Brennkammerkomponenten auftreten. Nach einer Linearisierung resultiert daraus, unter Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung und der Annahme kleiner Machzahlen, ein Ausdruck zur Bestimmung des entsprechenden integralen akustischen Verlusts $\Delta p'_V$ [85]:

$$\Delta p'_V = -\bar{\rho} \bar{u}_1 u'_1 \zeta. \quad (5.2)$$

Zur näherungsweisen Quantifizierung des Energieanteils, der von der akustischen Mode an die Vorticity-Mode übergeht, werden die beiden Verlustterme (Gleichung 5.2 und Gleichung 5.1) zueinander ins Verhältnis gesetzt [85]:

$$\Delta p'_V = 2 \frac{\Delta \bar{p}_t}{\bar{u}_1} u'_1. \quad (5.3)$$

Der integrale akustische Totaldruckverlust $\Delta p'_V$ zwischen den zwei Referenzpunkten 1 und 2 hängt folglich auch hier sowohl von mittleren, strömungsmechanischen ($\Delta \bar{p}_t$, \bar{u}_1) als auch von akustischen Größen (u'_1) ab. Um die akustischen Verluste lokal bestimmen zu können, wird Gleichung 5.3 auf ein infinitesimal kleines Element bezogen.

Man erhält für den eindimensionalen Fall:

$$\frac{\partial p'_V}{\partial x} = 2 \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial x} \frac{1}{\bar{u}} u'. \quad (5.4)$$

Analog zur generellen Vorgehensweise von Rienstra und Hirschberg [34] oder auch Ehrenfried [35] erfolgt damit ein Übergang von der Betrachtung entlang eines Stromfadens in eine kartesische Betrachtungsweise.

Die Form des akustischen Verlustterms in Gleichung 5.4 entspricht prinzipiell jener, die ein entsprechender Term in der linearisierten Impulsgleichung bzw. ihrer vereinfachten Form, der linearisierten Eulergleichung² annehmen würde:

$$\bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \bar{\rho} \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \mathbf{u}') + \nabla p' = \bar{\rho} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \nabla p'_t = 0. \quad (5.5)$$

Anwendung findet dabei der linearisierte Totaldruck: $p'_t = p' + \bar{\rho} \bar{u} u'$. Der Term $\bar{\rho} \nabla \cdot (\bar{\mathbf{u}} \mathbf{u}')$ beschreibt die Reynoldschen Schubspannungen³. Im Rahmen eines mathematisch exakten Ansatzes resultiert daraus z. B. die in Kapitel 2.7 vorgestellte Form der verlustbehafteten Wellengleichung nach Howe [34, 43], basierend auf der Wirbelstärke ω . Vor dem Hintergrund der Entwicklung eines Auslegungswerkzeugs wird hier jedoch ein neuartiger, ingenieurmäßiger Weg beschritten [85]. Der neu hergeleitete Term entspricht jedoch auch hier einem zusätzlichen, „akustischen“ Druckgradienten in der Impulsgleichung, basierend auf dem dynamischen Druckanteil.

Zunächst wird der eindimensionale Fall betrachtet. Um die korrekte Notation und Einheit der Wellen- bzw. der Helmholtzgleichung zu erhalten, wird die Divergenz von Gleichung 5.4 gebildet [34]:

$$\frac{\partial^2 p'_V}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(2 \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial x} \frac{1}{\bar{u}} u' \right). \quad (5.6)$$

²Gradienten des mittleren Drucks werden dabei vernachlässigt.

³Für diese Studie wird ein homogenes Medium vorausgesetzt.

Differenziert man Gleichung 5.6 unter Anwendung der Produktregel aus, so erhält man streng formal:

$$\frac{\partial^2 p'_V}{\partial x^2} = 2 \left(\frac{\partial^2 \bar{p}_t}{\partial x^2} \frac{1}{\bar{u}} u' + \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\bar{u}} \right) u' + \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial x} \frac{1}{\bar{u}} \frac{\partial u'}{\partial x} \right). \quad (5.7)$$

Dabei sind jedoch diverse Vereinfachungen möglich: Der erste Term beschreibt den Einfluss der Krümmung des strömungsmechanischen Totaldruckgradienten auf die akustische Dämpfung. Er kann in erster Näherung vernachlässigt werden [85]. Der zweite Term wird ebenfalls vernachlässigt [85]. Somit folgt für den akustischen Verlustterm bei eindimensionaler Betrachtung:

$$\frac{\partial^2 p'_V}{\partial x^2} \approx 2 \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial x} \frac{1}{\bar{u}} \frac{\partial u'}{\partial x} \quad (5.8)$$

bzw. für die verlustbehaftete Helmholtzgleichung:

$$-\frac{\omega^2}{c^2} \hat{p} - \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right) = -2 \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial x} \frac{1}{\bar{u}} \frac{\partial u'}{\partial x}. \quad (5.9)$$

Solange keine Quellen im Strömungsfeld vorliegen, kann aus physikalischer Sicht ein hydrodynamischer Totaldruckverlust ausschließlich in Richtung der mittleren Strömung stattfinden. Folglich existieren akustische Verluste nur bei der Existenz eines negativen Totaldruckgradienten in positiver Strömungsrichtung oder umgekehrt.

Ersetzt man den Gradienten der Schnelleschwankung $\partial u' / \partial x$ im Verlustterm unter Verwendung der eindimensionalen Kontinuitätsgleichung ohne mittlere Geschwindigkeit in einem homogenen, isentropen Medium,

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho} c^2} \frac{\partial p'}{\partial t}, \quad (5.10)$$

so resultiert daraus die gesuchte Form des Verlustterms in Bezug auf die Größe $\partial p' / \partial t$ im Zeitbereich bzw. $i\omega \hat{p}$ im Frequenzbereich. Die eindimensionale

Helmholtzgleichung mit Verlustterm lautet folglich unter obigen Annahmen:

$$-\frac{\omega^2}{c^2} \hat{p} - \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \right) = \frac{2}{\bar{\rho} c^2} \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial x} \frac{1}{\bar{u}} i \omega \hat{p}. \quad (5.11)$$

Für die entsprechende Form der Wellengleichung gilt:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \bar{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} \right) = \frac{2}{\bar{\rho} c^2} \frac{\partial \bar{p}_t}{\partial x} \frac{1}{\bar{u}} \frac{\partial p'}{\partial t}. \quad (5.12)$$

Eine Dimensionsanalyse der allgemeinen Form der Helmholtz- bzw. der Wellengleichung zeigt, dass die rechte Seite in Gleichung 5.11 bzw. Gleichung 5.12 die Einheit $[s/m^2]$ aufweisen muss [86]. Diese Voraussetzung wird vom hergeleiteten Verlustterm erfüllt.

5.1.2 Validierung des eindimensionalen Verlustterms

Die Validierung des Ansatzes erfolgt zunächst anhand eines einfachen, eindimensionalen Testfalls: einem verlustbehafteten Rohrstück konstanten Querschnitts. Die Untersuchung findet im Frequenzbereich statt. Das betrachtete Medium ist Luft ($T = 20^\circ C$).

Zusätzlich zum FEM-Modell wird das analytische $l - \zeta$ -Modell (vgl. Abschnitt 2.5, $\alpha = 1$) betrachtet. Es entstammt der Netzwerkmethod und repräsentiert ein kompaktes, verlustbehaftetes Element unter dem Einfluss einer Strömung geringer Machzahl. Für den vorliegenden Anwendungsfall entfällt in erster Näherung der Einfluss der beiden Parameter l_{eff} und l_{red} , wenn das Rohr klein im Vergleich zur Wellenlänge ist.

Das FEM-Modell hingegen setzt eine definierte Länge voraus. Um diese Abweichung zwischen den beiden Modellen so gering wie möglich zu halten, wird im FEM-Modell zunächst eine möglichst kleine örtliche Ausdehnung gewählt ($l_V = 0.05 m$). Der Einfluss dieser Annahme auf das Ergebnis wird später noch genauer untersucht werden. Die örtliche Diskretisierung beträgt im Rahmen der FEM-Berechnung für alle Testfälle $\Delta x = 1.0 \cdot 10^{-5} m$. Dies entspricht

mehr als 11000 linearen Lagrange-Elementen pro Wellenlänge für die höchste untersuchte Frequenz ($f_{max} = 3000 \text{ Hz}$). Ein Einfluss einer unzureichenden örtlichen Diskretisierung auf das Ergebnis ist somit auszuschließen. Die Umrechnung des Druckverlustbeiwerts ζ des analytischen Modells in einen entsprechenden Verlustterm für den neuartigen Ansatz in der Helmholtzgleichung erfolgt gemäß:

$$\frac{\partial \bar{p}_t}{\partial x} = -\frac{\bar{\rho}}{2} \bar{u}_u^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (5.13)$$

Vereinfachend wird dabei ein linearer Abfall des Totaldrucks über der gesamten Rohrlänge angenommen. Dies entspricht in erster Näherung der Realität in einem reibungsbehafteten Rohr.

Unter den obigen Annahmen folgt für das $l - \zeta$ -Modell (Gleichung 2.30):

$$\begin{pmatrix} \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}c} \\ \hat{u} \end{pmatrix}_d = \begin{pmatrix} 1 & -\zeta M \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}c} \\ \hat{u} \end{pmatrix}_u. \quad (5.14)$$

Ersetzt man \hat{p} und \hat{u} durch die Riemann Invarianten f und g , so folgt:

$$f_d + g_d = f_u(1 - \zeta M) + g_u(1 + \zeta M), \quad (5.15)$$

$$f_d - g_d = f_u - g_u. \quad (5.16)$$

Am stromab gelegenen Rand gilt $r = 0$ bzw. $g_d = 0$:

$$f_d = f_u(1 - \zeta M) + g_u(1 + \zeta M), \quad (5.17)$$

$$f_d = f_u - g_u. \quad (5.18)$$

An der Randbedingung stromauf erfolgt eine Schnelleanregung: $f_u - g_u = \hat{u}$. Daraus lässt sich das Wellenfeld an den Referenzpunkten u und d wie folgt berechnen:

$$f_u = \hat{u} \left(1 + \frac{1}{2} \zeta M \right), \quad (5.19)$$

$$g_u = \frac{1}{2} \hat{u} \zeta M, \quad (5.20)$$

$$f_d = \hat{u}, \quad (5.21)$$

$$g_d = 0. \quad (5.22)$$

Somit resultiert unter Verwendung von Gleichung 2.36:

$$I_u = \bar{\rho} c \hat{u}^2 (1 + \zeta M), \quad (5.23)$$

$$I_d = \bar{\rho} c \hat{u}^2. \quad (5.24)$$

Berechnet man daraus den Quotienten

$$\frac{I_u}{I_d} = 1 + \zeta M, \quad (5.25)$$

so erhält man ein Maß für den akustischen Verlust über dem Element. Unter den obigen Annahmen ist dieser im $l - \zeta$ -Modell ausschließlich vom Druckverlustbeiwert ζ und von der Machzahl M abhängig. Er ist konstant für alle Frequenzen.

Zur Bestimmung der akustischen Intensität aus der FEM-Rechnung⁴ wird zunächst Gleichung 2.35 unter Verwendung von Gleichung 2.9 (Impulsgleichung für $M = 0$ und $\nabla \bar{p} = 0$) und der Annahme harmonischer Wellenausbreitung wie folgt umgeformt:

$$I = \hat{p} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} \frac{i}{\omega \bar{\rho}}. \quad (5.26)$$

Zur Quantifizierung des integralen Verlustes aus der FEM-Rechnung wird die akustische Intensität an zwei Referenzpunkten bestimmt. Der stromauf gelegene Referenzpunkt befindet sich bei $x = 0$. Dort findet auch die Anregung

⁴Lösungsvariable der Wellengleichung ist hier ausschließlich die Druckschwankung \hat{p} .

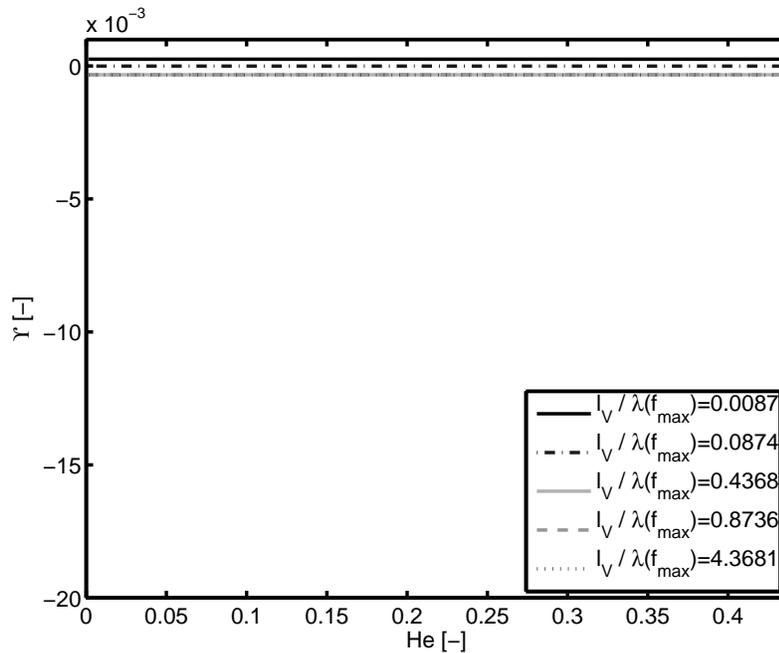


Abbildung 5.1: Variation der Länge der Verluststrecke ($\zeta = 0.9, M = 0.029$)

statt. Der stromab gelegene Referenzpunkt liegt stets am Ende des betrachteten Rechengebiets bei $x_d = x_{max}$. Verglichen wird jeweils der relative Verlust akustischer Intensität Υ über dem betrachteten Verlustbereich gemäß:

$$\Upsilon = \frac{(I_u/I_d)_{l-\zeta} - (I_u/I_d)_{FEM}}{(I_u/I_d)_{l-\zeta}}. \quad (5.27)$$

Zunächst wird die Länge des Verluststücks l_V bei konstantem Druckverlustbeiwert ($\zeta = 0.9$) und konstanter Machzahl ($M = 0.029$) variiert (Abbildung 5.1). Dies gibt Aufschluss über die Gültigkeit und den Einfluss der Kompaktheitsannahme ($l_V/\lambda \ll 1$). Wie auch bei den folgenden Abbildungen ist Υ für die verschiedenen betrachteten Varianten stets über der Helmholtzzahl aufgetragen. Die Referenzlänge zur Bestimmung der Helmholtzzahl ist $l_V = 0.05 \text{ m}$.

Aus Abbildung 5.1 wird ersichtlich, dass unter obigen Annahmen die Länge des betrachteten Verluststücks keinen nennenswerten Einfluss auf die Abweichungen zwischen den beiden Modellen ausübt. Dies gilt auch dann, wenn

das betrachtete Element im eigentlichen Sinn nicht mehr als akustisch kompakt bezeichnet werden kann. Die Länge der betrachteten Verluststrecke skaliert für den betrachteten Fall zudem direkt mit dem Verlauf des strömungsmechanischen Totaldruckgradienten: je kürzer die Strecke, desto steiler ist der Abfall des Totaldrucks. Bei einem Druckverlustbeiwert von $\zeta = 0.9$ erstreckt sich der zugehörige Totaldruckgradient von $\frac{\partial \bar{p}_t}{\partial x} = -108 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$ bis $\frac{\partial \bar{p}_t}{\partial x} = -54180 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$. Auch hinsichtlich dieses Kriteriums gibt es im untersuchten Bereich für den betrachteten Anwendungsfall demnach keine nennenswerten Abweichungen zwischen dem analytischen Modell und dem zu validierenden Verlustmodell.

Als Nächstes erfolgt eine Betrachtung des Einflusses der mittleren Geschwindigkeit bzw. der Machzahl ($\zeta = 0.9$, $l_V = 0.05 \text{ m}$). Diese geht in quadratischer Form in die Verlustbetrachtung mit ein. Untersucht wird ein relativ großer Machzahlbereich, ohne jedoch die generelle Beschränkung auf niedrige Machzahlen im Zusammenhang mit der Helmholtzgleichung aus den Augen zu verlieren. Auch hier zeigt sich, dass lediglich vernachlässigbare Abweichungen zwischen den beiden Modellen im gesamten betrachteten Bereich auftreten (Abbildung 5.2). Schließlich wird der Einfluss der Höhe des Druckverlustbeiwertes untersucht ($M = 0.029$, $l_V = 0.05 \text{ m}$). In Analogie zu den beiden vorausgehenden Testfällen sind auch in Abbildung 5.3 keine nennenswerten Abweichungen zwischen den Ergebnissen aus den beiden Modellansätzen zu erkennen.

Somit kann zusammenfassend ausgesagt werden, dass der neu entwickelte, eindimensionale Verlustterm sehr gut die analytischen Ergebnisse des integralen $l - \zeta$ -Modells widerspiegelt. Die Dämpfung verhält sich, wie erwartet, konstant über die betrachteten Frequenzen. Zudem zeigt die Validierung, dass die drei wesentlichen Vereinfachungen zur Herleitung des Verlustterms in Abschnitt 5.1.1, explizit die Vernachlässigung der beiden zusätzlichen Terme in Gleichung 5.7, die Nutzung der isentropen Kontinuitätsgleichung zur Elimination der Schnellegradienten und auch die Nutzung der Impulsgleichung für homogene Medien zur Berechnung der Schnelle aus den Druckschwankungsgradienten, zulässig sind.

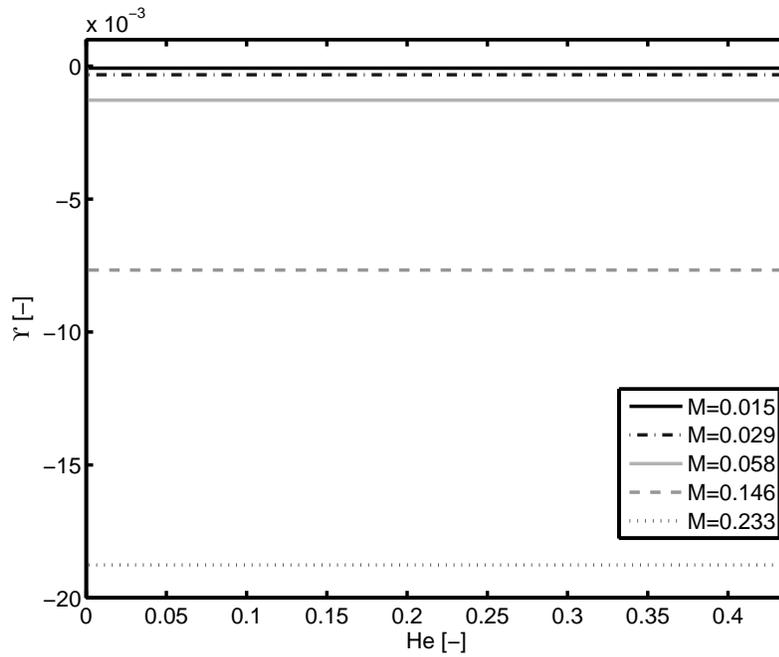


Abbildung 5.2: Variation der mittleren Geschwindigkeit ($\zeta = 0.9$, $l_V = 0.05 \text{ m}$)

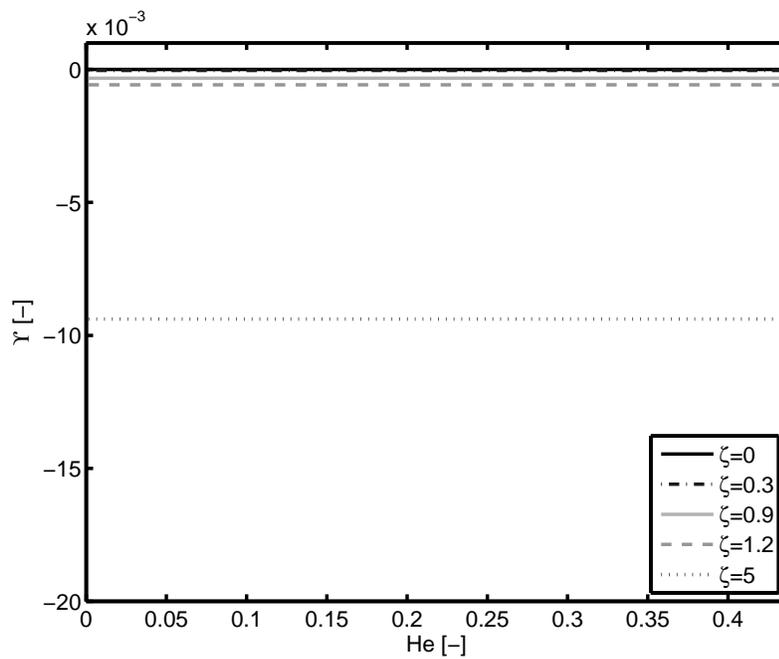


Abbildung 5.3: Variation des Druckverlustbeiwerts ($M = 0.029$, $l_V = 0.05 \text{ m}$)

5.2 Dreidimensionale Verlustbetrachtung

Die Verlustbetrachtung wird nun auf drei Raumdimensionen erweitert, um so mit Hilfe von stationären Strömungsfeldern aus CFD-Rechnungen Rückschlüsse auf die Größe der lokalen akustischen Verluste in durchströmten oder umströmten Bauteilen zu ziehen.

5.2.1 Herleitung des dreidimensionalen Verlustterms

Der unmittelbare Transfer von Gleichung 5.4 von einer eindimensionalen in eine dreidimensionale Betrachtungsweise führt zu Unstimmigkeiten hinsichtlich der mathematischen Korrektheit des Terms. Es resultieren Vektoren der Strömungsgrößen im Nenner. Dies erfordert eine entsprechende Korrektur in der Formulierung des dreidimensionalen Verlustterms. Aus Gleichung 5.4 folgt damit:

$$\nabla p'_V = 2 \frac{\nabla \bar{p}_t \cdot \bar{\mathbf{u}}}{|\bar{\mathbf{u}}| |\bar{\mathbf{u}}_1|} \mathbf{u}'. \quad (5.28)$$

Das Skalarprodukt im Zähler von Gleichung 5.28 gewährleistet die prinzipielle physikalische Korrektheit des Ansatzes sowie seine Unabhängigkeit von der Orientierung des Koordinatensystems. Für den Fall $\nabla \bar{p}_t \perp \bar{\mathbf{u}}$ sind die Verluste gleich Null. Ein zusätzlicher akustischer Druckverlust entsteht folglich nur, wenn ein mittlerer Totaldruckgradient in Richtung der mittleren Strömungsgeschwindigkeit vorliegt. Weitere Einflüsse bezüglich der Orientierung dieser beiden Vektoren werden in Abschnitt 5.2.2 diskutiert.

Der Nenner von Gleichung 5.28 beinhaltet die lokale Absolutgeschwindigkeit, multipliziert mit der Absolutgeschwindigkeit am stromauf gelegenen Referenzpunkt (1). Ausgehend von der allgemeinen Formulierung des Totaldrucks am Referenzpunkt,

$$\bar{p}_{t,1} = \bar{p}_1 + \frac{\bar{\rho}}{2} |\bar{\mathbf{u}}_1|^2, \quad (5.29)$$

lässt sich diese wie folgt ermitteln:

$$|\bar{\mathbf{u}}_1| = \sqrt{2(\bar{p}_{t,1} - \bar{p}_1)/\bar{\rho}}. \quad (5.30)$$

$\bar{\rho}/2 \cdot |\bar{\mathbf{u}}_1|^2$ entspricht dem mittleren dynamischen Druck am Referenzpunkt 1. Dieser skaliert direkt mit der Energie, die im betrachteten, rein strömungsmechanischen System maximal dissipiert werden kann (*Dynamic Head*). Die Implementierung des Faktors $|\bar{\mathbf{u}}||\bar{\mathbf{u}}_1|$ im Nenner von Gleichung 5.28 stellt sicher, dass der Verlustterm für $\bar{\mathbf{u}} \rightarrow \mathbf{0}$ gegen Null strebt. Für eindimensionale Betrachtungen lässt sich Gleichung 5.28 problemlos auf Gleichung 5.4 zurückführen. Nach Bildung der Divergenz von Gleichung 5.28 folgt mit den Annahmen aus Abschnitt 5.1.1:

$$\Delta p'_V \approx 2 \frac{\nabla \bar{\mathbf{p}}_t \cdot \bar{\mathbf{u}}}{|\bar{\mathbf{u}}||\bar{\mathbf{u}}_1|} \nabla \mathbf{u}'. \quad (5.31)$$

Daraus resultiert unter Verwendung von Gleichung 2.5 (linearisierte Massenerhaltung) für homogene, isentrope Medien ($M = 0$):

$$\Delta p'_V \approx -\frac{2}{\bar{\rho}c^2} \frac{\nabla \bar{\mathbf{p}}_t \cdot \bar{\mathbf{u}}}{|\bar{\mathbf{u}}||\bar{\mathbf{u}}_1|} \frac{\partial p'}{\partial t}. \quad (5.32)$$

Für die verlustbehaftete, dreidimensionale Wellengleichung für homogene Medien ergibt sich damit:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \frac{2}{\bar{\rho}c^2} \frac{\nabla \bar{\mathbf{p}}_t \cdot \bar{\mathbf{u}}}{|\bar{\mathbf{u}}||\bar{\mathbf{u}}_1|} \frac{\partial p'}{\partial t} - \Delta p' = 0 \quad (5.33)$$

bzw. im Frequenzbereich, für die entsprechende Form der Helmholtzgleichung, unter Annahme harmonischer Wellenausbreitung:

$$-\frac{\omega^2}{c^2} \hat{p} - \frac{2i\omega}{\bar{\rho}c^2} \frac{\nabla \bar{\mathbf{p}}_t \cdot \bar{\mathbf{u}}}{|\bar{\mathbf{u}}||\bar{\mathbf{u}}_1|} \hat{p} - \Delta \hat{p} = 0. \quad (5.34)$$

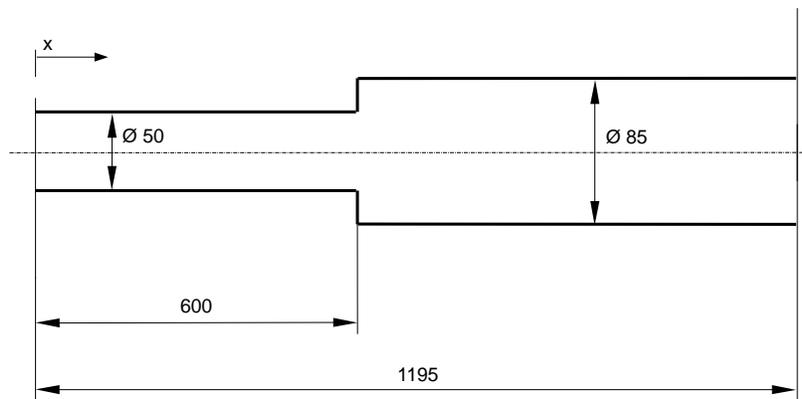


Abbildung 5.4: Schematische Darstellung der abrupten Querschnittserweiterung

Der Term

$$V_{hyd} = \frac{\nabla \bar{p}_t \cdot \bar{\mathbf{u}}}{|\bar{\mathbf{u}}| |\bar{\mathbf{u}}_1|} \quad (5.35)$$

wird im Folgenden hydrodynamischer Anteil des Verlustterms genannt.

5.2.2 Validierung anhand einer abrupten Querschnittserweiterung

Zunächst wird mittels dieses Ansatzes das akustische Übertragungsverhalten einer abrupten dreidimensionalen Querschnittserweiterung betrachtet (Abbildung 5.4, vgl. hierzu auch [12, 84, 87, 88]). Das Flächenverhältnis ist $A_u / A_d \approx 0.346$.

5.2.2.1 CFD-Interface

Grundlage zur lokalen Bestimmung der akustischen Verluste ist ein CFD-Interface. Es basiert hier auf einer zweidimensionalen, achsensymmetrischen Berechnung des Strömungsfeldes (RANS) in FLUENT. Das zugehörige Gitter umfasst 40585 quadratische Zellen mit einer Kantenlänge von je einem Millimeter. Die Modellierung der Turbulenz erfolgt mit Hilfe eines Reynolds-

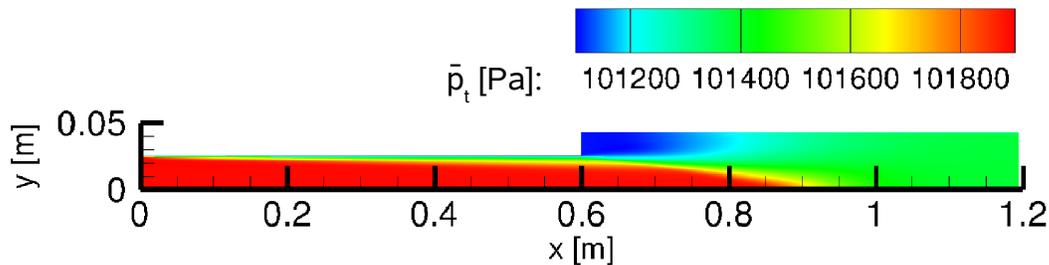


Abbildung 5.5: Querschnittserweiterung: CFD-Ergebnisse - Totaldruck

Stress-Modells unter der Annahme eines inkompressiblen, idealen Gases (Luft, $T = 25^\circ \text{C}$). Am Einlass ist die Strömungsgeschwindigkeit $\bar{u} = 34.6 \text{ m/s}$ in Achsrichtung aufgeprägt ($M = 0.1$). Zur Lösung des Gleichungssystems wird ein impliziter Löser (*Segregated - Second Order Upwind*) verwendet.

Gemäß Abbildung 5.5 bildet sich stromauf der Sprungstelle ein turbulentes Strömungsprofil aus [89]. Nach der Sprungstelle expandiert der Strahl und zerfällt dabei turbulent, bis er stromab wieder an der Wand anliegt. Unmittelbar nach der Sprungstelle entsteht dadurch eine Rezirkulationszone. Zwischen den beiden Zonen bildet sich eine Scherschicht aus. Darin werden die an der Kante abgelösten Wirbel stromab getragen und, z. B. aus rein strömungsmechanischer Sicht, entsprechend der Energiekaskade der Turbulenz nach Kolmogorov schließlich in Innere Energie umgewandelt (vgl. Kapitel 2.7). Neben den strömungsmechanischen Verlusten werden in diesem Bereich auch die akustischen Verluste erwartet, aufgrund der dort existierenden, großen Gradienten der mittleren und der fluktuierenden Größen (Interaktion zwischen akustischer Mode und Vorticity-Mode; vgl. Abschnitt 2.7). Einen Hinweis auf den Ort der Scherschicht gibt die Wirbelstärke (Abbildung 5.6⁵).

Gemäß Gleichung 5.31 werden die akustischen Verluste aus strömungsmechanischer Sicht insbesondere durch das Skalarprodukt des mittleren Totaldruckgradienten und der mittleren Geschwindigkeit bestimmt. In Abbildung 5.7 ist das Zusammenspiel einzelner Komponenten dieser Vektoren schematisch für den betrachteten Anwendungsfall dargestellt⁶.

⁵Diese wie auch die folgenden Abbildungen umfassen jeweils nur einen Ausschnitt des gesamten Berechnungsgebietes.

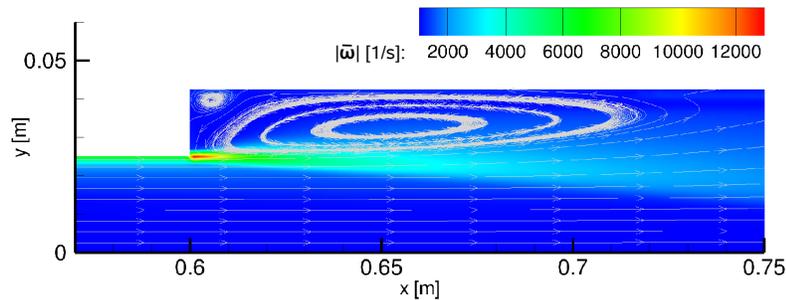


Abbildung 5.6: Querschnittserweiterung: CFD-Ergebnisse - absolute Wirbelstärke mit Stromlinien

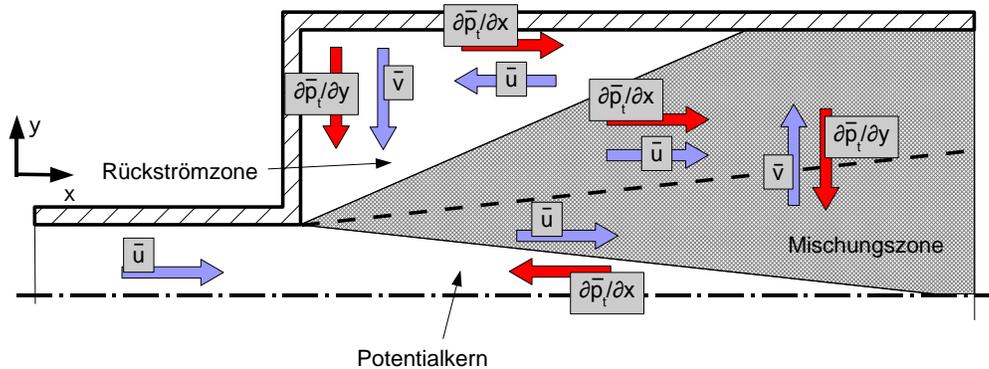


Abbildung 5.7: Querschnittserweiterung: Schematische Darstellung einzelner Komponenten der mittleren Geschwindigkeit und des Gradienten des mittleren Totaldrucks

Man erkennt, dass hier sowohl positive als auch negative Bereiche bezüglich des Produkts aus den beiden Komponenten existieren. Positive Bereiche würden jedoch zum Beispiel in Gleichung 5.33 zu Anfachungen des akustischen Feldes anstelle einer Dämpfung führen. Für eine detaillierte Klärung der Zusammenhänge werden im Folgenden die einzelnen hydrodynamischen Komponenten des Verlustterms genauer betrachtet⁷:

nungsgebiets.

⁶Da das CFD-Interface im vorliegenden Fall auf einer zweidimensionalen achsensymmetrischen CFD-Berechnung basiert, entsprechen die kartesischen Koordinaten x und y hier gleichzeitig den axialen bzw. radialen Koordinaten. Zum besseren Vergleich mit den folgenden Darstellungen bezüglich des berechneten Strömungsfeldes werden daher auch in Abbildung 5.7 kartesische Koordinaten anstelle von Zylinderkoordinaten

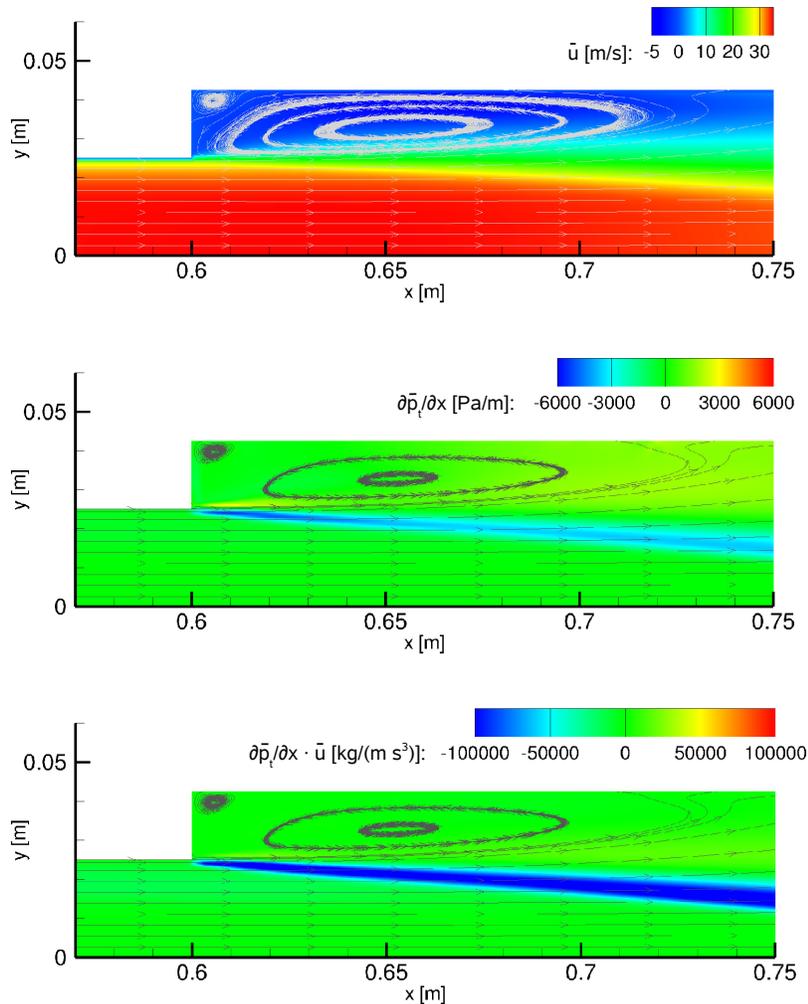


Abbildung 5.8: Querschnittserweiterung: CFD-Ergebnisse - axiale Komponenten des Zählers des hydrodynamischen Anteils des Verlustterms

Aus Abbildung 5.8 wird ersichtlich, dass die Absolutgeschwindigkeit im vorliegenden Fall stark von der Axialgeschwindigkeit bestimmt ist. Im unteren Grenzbereich der Scherschicht ist die Axialgeschwindigkeit groß, unmittelbar an der oberen Grenze der Scherschicht ist sie gleich Null. Die größten

verwendet.

⁷Die betreffenden Strömungsgrößen wurden unter Verwendung einer hierfür verfassten *User-Defined-Function (UDF)* [90] direkt aus der Simulation in FLUENT ausgelesen. Dieses verhindert eine starke Abhängigkeit der berechneten Gradienten von der örtlichen Diskretisierung, wie es bei der Verwendung eines externen Postprocessing-Programms der Fall gewesen wäre.

axialen Totaldruckgradienten befinden sich in den Grenzbereichen der Scherschicht. Die Extrema des Produkts aus diesen beiden axialen Komponenten liegen folglich im unteren Bereich der Scherschicht. Sie sind stark negativ. Generell existieren hier jedoch sowohl positive als auch negative Bereiche bezüglich des Produkts aus Totaldruckgradient und Geschwindigkeitsanteil in jeweils axialer Richtung (vgl. auch Abbildung 5.7).

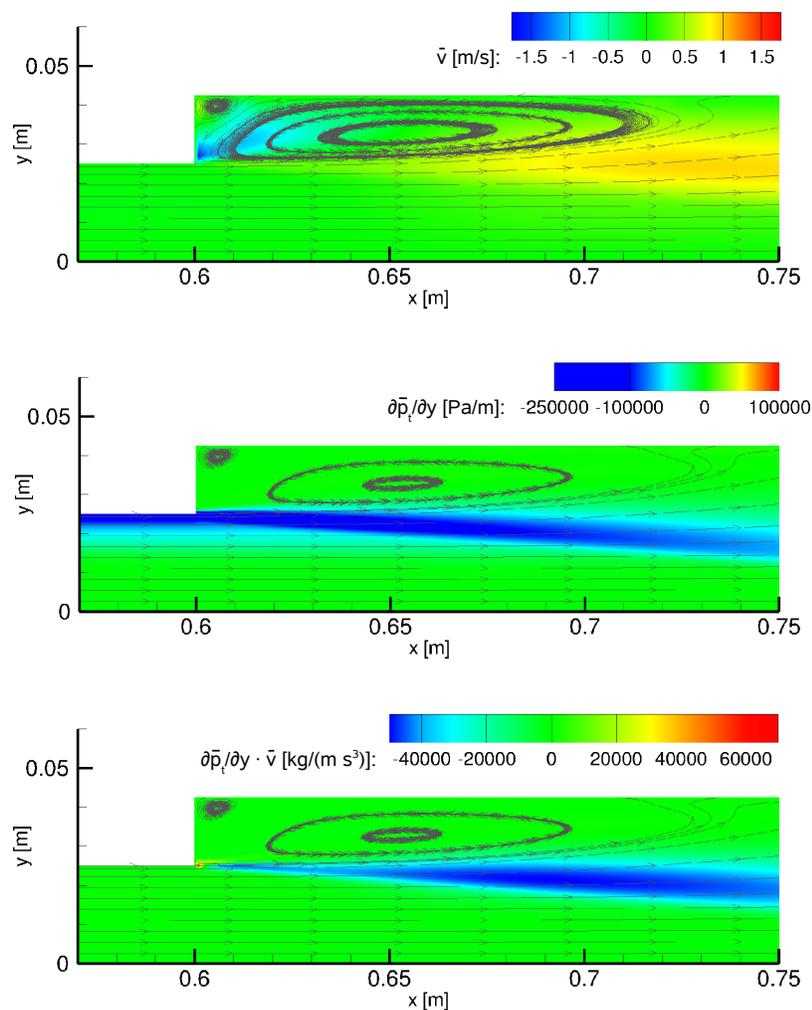


Abbildung 5.9: Querschnittserweiterung: CFD-Ergebnisse - radiale Komponenten des Zählers des hydrodynamischen Anteils des Verlustterms

Die Werte der Radialgeschwindigkeit sind im vorliegenden Fall generell deutlich kleiner als jene der Axialgeschwindigkeit (Abbildung 5.9). Sie sind nahezu

innerhalb der gesamten Scherschicht positiv. Die Fluidteilchen werden folglich vom Zentrum nach außen transportiert (Expansion des Strahls / Strahlzerfall). Negative Bereiche der Radialgeschwindigkeit existieren im Wesentlichen nur im stromauf gelegenen Stirnbereich der Rückströmzone. Der radiale Anteil des Totaldruckgradienten ist hier in erster Näherung durch Bereiche dominiert, in denen er negativ ist. Minima befinden sich direkt an der Ablösekante sowie in etwas abgeschwächter Form im unteren Grenzbereich der Scherschicht. Das Produkt aus dem Totaldruckgradienten und dem zugehörigen Geschwindigkeitsanteil weist auch in radialer Richtung positive und negative Bereiche auf. Das Maximum befindet sich unmittelbar an der Ablösekante, beschränkt auf einen sehr kleinen Bereich - die stärksten negativen Werte befinden sich wiederum, wie erwartet, im unteren Bereich innerhalb der Scherschicht (Abbildung 5.9). In Abbildung 5.10 ist die Summe aus den axialen und radialen Anteilen des Zählers von V_{hyd} dargestellt.

Generell wird in Abbildungen 5.8 bis 5.10 der erwartete Verlauf der einzelnen Komponenten des hydrodynamischen Anteils des Verlustterms wiedergegeben. Folglich existieren die stärksten akustischen Verluste, sowohl für den radialen als auch für den axialen Anteil, im Bereich der unteren Scherschicht (vgl. Abbildung 5.11). Um sich zunächst ausschließlich auf dämpfende Effekte zu konzentrieren, werden die positiven Bereiche von V_{hyd} im Folgenden durch eine Limitierung auf Werte kleiner Null vernachlässigt.

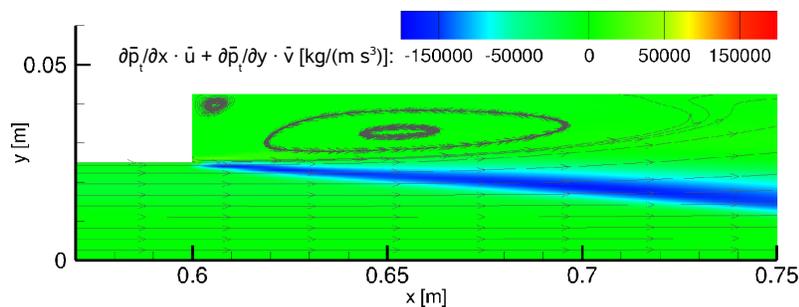


Abbildung 5.10: Querschnittserweiterung: CFD-Ergebnisse - Zähler des hydrodynamischen Anteils des Verlustterms

Zur Implementierung des stationären hydrodynamischen Feldes in den akustischen Simulationscode werden die bisher zweidimensional-

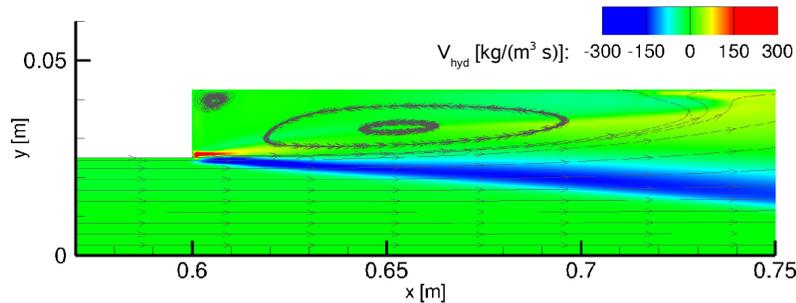


Abbildung 5.11: Querschnittserweiterung: CFD-Ergebnisse - hydrodynamischer Anteil des Verlustterms

achsensymmetrischen Daten auf drei Raumdimensionen erweitert. Zur Vermeidung von Abbildungsfehlern erfolgt dies durch eine schrittweise Interpolation der Werte von V_{hyd} auf ein weiteres strukturiertes Gitter und eine anschließende Rotation des zweidimensionalen Datenfeldes um die Symmetrieachse. Es resultiert schließlich ein dreidimensionales, strukturiertes Array. Dies erlaubt das Einlesen der Strömungsdaten in den FEM-Code. Abschließend erfolgt im FEM-Code eine Interpolation der Daten auf das unstrukturierte Berechnungsgitter der akustischen Simulation (vgl. Abbildung 5.12).

Um abschätzen zu können, inwieweit durch die verschiedenen Interpolationsschritte Fehler generiert wurden, wird der volumenintegrierte Wert des hydrodynamischen Anteils des Verlustterms im FEM-Code mit dem entsprechenden Wert der ursprünglichen CFD-Daten verglichen. Sie unterscheiden sich nur geringfügig. Trotzdem wird ein globaler Ausgleichsfaktor eingeführt. Er resultiert aus dem Verhältnis der beiden integralen Werte.

5.2.2.2 Validierungsfälle

Die Validierung des Ansatzes erfolgt zunächst gegen das analytische $l - \zeta$ -Modell. Dafür sind im Vorfeld die beiden Parameter l_{eff} und l_{red} zu bestimmen. Dies erfolgt näherungsweise graphisch unter Verwendung eines numerischen Ansatzes zur Bestimmung von Transfermatrizen, basierend auf den Arbeiten von Pankiewitz [3, 11] und Evesque in Gentemann et al. [9].

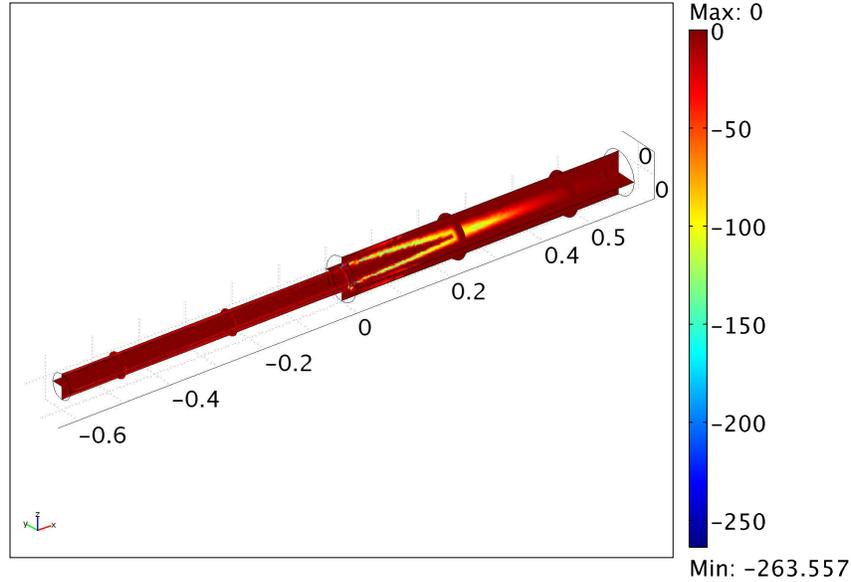


Abbildung 5.12: Querschnittserweiterung: CFD-Interface - hydrodynamischer Anteil des Verlustterms ($V_{hyd} [kg/(m^3s)]$) im FEM-Code

Entsprechende dreidimensionale Berechnungen werden im verwendeten FEM-Code vorgenommen (vgl. Tabelle 5.1). In Übereinstimmung mit Pankiewitz [3, 11] und Evesque [9] werden an den beiden stirnseitigen Rändern Impedanzrandbedingungen gesetzt. Zusätzlich erfolgt an jeweils einem dieser Ränder die Anregung des akustischen Feldes mittels einer sinusförmigen Geschwindigkeitsschwankung. Diese Art der Anregung findet nacheinander von stromauf bzw. stromab statt, um so zwei voneinander unabhängige Datensätze zu generieren [3, 11]. In Anlehnung an Pankiewitz [3, 11] und Evesque [9] findet die Auswertung der numerischen Rohdaten in MATLAB statt.

Für den verlustfreien Referenzfall entfallen aus dem $l - \zeta$ -Modell alle Terme mit Machzahleinfluss. Es resultiert somit aus Gleichung 2.30 unter Berücksichtigung der Lauflängen l_{eff} und l_{red} :

$$\begin{pmatrix} \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}c} \\ \hat{u} \end{pmatrix}_d = \begin{pmatrix} 1 & -i\frac{\omega}{c}l_{eff} \\ -i\frac{\omega}{c}l_{red} & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\hat{p}}{\hat{\rho}c} \\ \hat{u} \end{pmatrix}_u. \quad (5.36)$$

5.2 Dreidimensionale Verlustbetrachtung

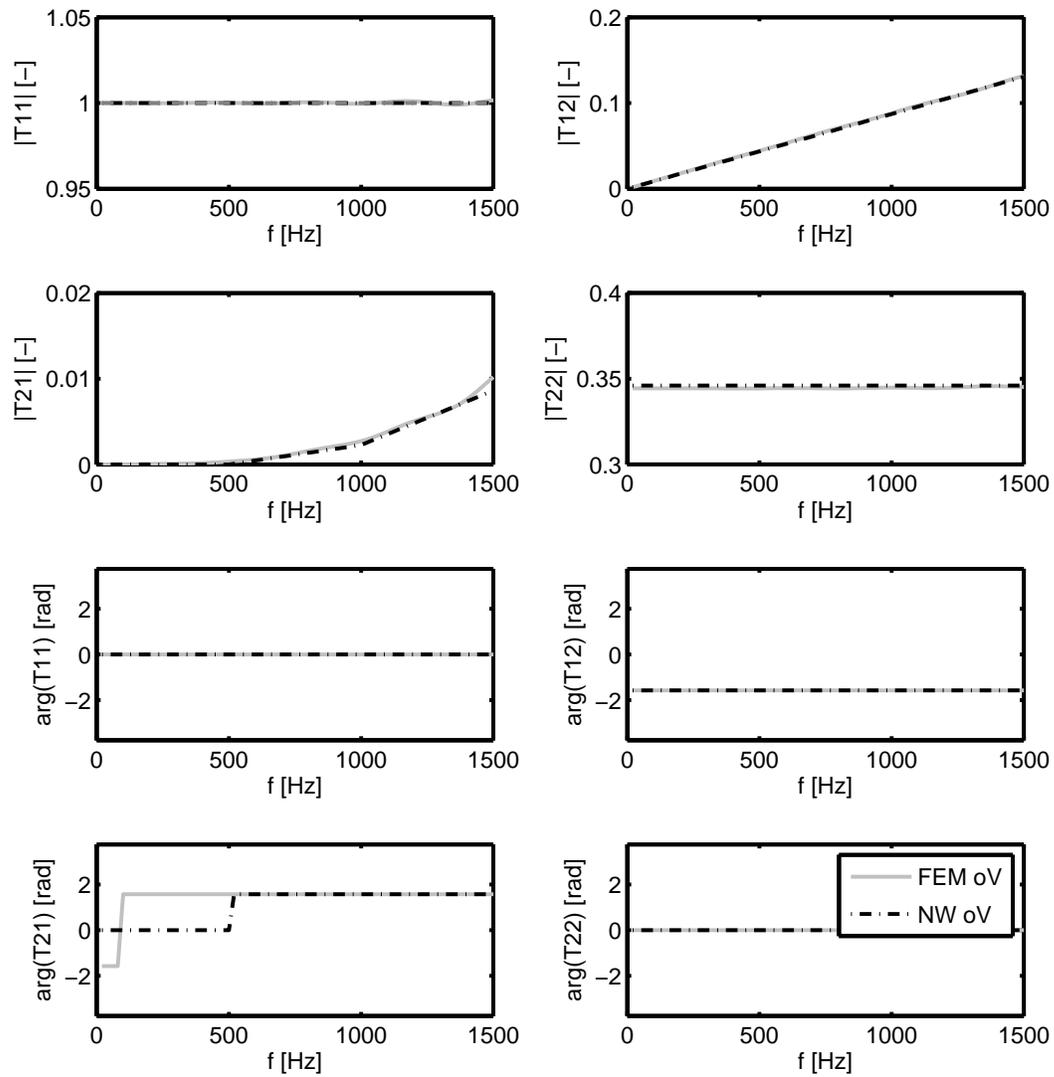


Abbildung 5.13: Numerisch (FEM) und analytisch (NW) bestimmte Transfermatrizen der abrupten Querschnittserweiterung - ohne Verluste

Software	
Bezeichnung	COMSOL MULTIPHYSICS
Art	FEM
Version	3.5
Modus	Acoustic-Mode, 3D
Gitter	
Anzahl der Elemente	365110
Art der Elemente	Tetraeder (unstrukturiertes Gitter)
Diskretisierungsschema	lineare Lagrange-Elemente
Stoffwerte	
Medium	Luft
Temperatur	$T = 25^\circ C$
Randbedingungen	
Impedanz	$Z = 1000 \text{ kg}/(\text{sm}^2)$
Schallharte Wand	$\nabla \hat{p} = 0$
Solver	
Art	direkt, parametrisch, Frequenzbereich

Tabelle 5.1: Parameter des FEM-Modells bezüglich der abrupten Querschnittserweiterung

Die Steigung des Absolutwerts des T12-Elements in Abbildung 5.13 verläuft über dem betrachteten Frequenzbereich nahezu perfekt linear. l_{eff} ist folglich eine Konstante. Die Steigung des Absolutwerts des T21-Elements verläuft hingegen nicht strikt linear. Dies wird durch eine abschnittsweise Näherung von l_{red} im verwendeten $l-\zeta$ -Modell berücksichtigt und beeinflusst entsprechend den Verlauf der Phasen des T21-Elements. Bei einer Frequenz von $f = 500 \text{ Hz}$ ist eine sprunghafte Änderung der Phase im Netzwerkmodell zu erkennen. Unterhalb dieser Frequenz existieren deutliche Abweichungen im Phasenverlauf zwischen den beiden Ansätzen, bedingt durch die Annahme $l_{red} = 0$ für $f < 500 \text{ Hz}$. Da jedoch die zugehörigen Absolutwerte für Frequenzen kleiner $f = 500 \text{ Hz}$ äußerst gering sind, ist hier diese Abweichung unbedeutend. Aus Abbildung 5.13 wird ersichtlich, dass eine entsprechende Modellierung von l_{eff} und l_{red} die Erstellung eines Netzwerkmodells ermöglicht, das ein nahezu identisches Transferverhalten für die verlustfreie abrupte Querschnittserweiterung aufweist wie das dreidimensionale FEM-Modell⁸.

⁸Dass die verlustfreie Betrachtung generell für solche Aufgaben geeignet ist, wurde bereits von Pankiewitz

Der integrale Druckverlustbeiwert ζ des Netzwerkelements wird unter Verwendung von Gleichung 5.1 wie folgt berechnet:

$$\zeta = \frac{2\Delta\bar{p}_t}{\bar{\rho}\bar{u}_u^2} \quad (5.37)$$

bzw. alternativ mittels

$$\zeta = \frac{2\Delta\bar{p}_t}{\bar{\rho}\bar{u}_d^2} \left(\frac{A_u}{A_d} \right)^2. \quad (5.38)$$

Der Totaldruckverlust $\Delta\bar{p}_t$ wird hier aus der CFD-Rechnung durch eine Mittelung der Daten über dem Ein- bzw. dem Auslass bestimmt. Die Werte der Dichte $\bar{\rho}$ und der mittleren Strömungsgeschwindigkeit \bar{u} sind ebenfalls der CFD-Rechnung entnommen.

Zusätzlich wird der neue Ansatz gegen Ergebnisse der sogenannten LES-SI-Methode validiert [12, 91, 92]. Bei dieser wird das akustische Übertragungsverhalten eines Elements mit Hilfe einer kompressiblen LES-Rechnung und einer anschließenden akustischen Systemidentifikation (Wiener-Hopf-Inversion (WHI)) bestimmt [12]⁹. Bei der LES-SI-Methode wird die Interaktion zwischen Strömungsfeld und Akustik explizit aufgelöst. Der Modellierungsbedarf ist somit minimal. Der numerische Aufwand ist jedoch äußerst hoch im Vergleich zu Ansätzen, die auf der Wellen- bzw. der Helmholtzgleichung basieren. Föller et al. [12, 91, 92] konnten zeigen, dass ihre Ergebnisse gemäß der LES-SI-Methode sowohl die experimentellen Daten von Ronneberger [88] als auch die numerischen Ergebnisse von Kooijmann [84] sowie Boij und Nilsson [87] wiedergeben können.

[3, 11] sowie Evesque in Gentemann et al. [9] gezeigt.

⁹Details hierzu sind z. B. Föller et al. [12] zu entnehmen.

5.2.2.3 Validierung des Verlustmodells

Zunächst erfolgt eine Validierung gegen das $l - \zeta$ -Modell. Als Referenz sind in Abbildung 5.14 zusätzlich die Ergebnisse aus den verlustfreien Betrachtungen (oV) gegeben. Anhand der Transfermatrizen in pu -Notation ist zu erkennen, dass sich durch die Implementierung von akustischen Verlusten (mV) in die verwendeten Modelle erwartungsgemäß keine nennenswerten Veränderungen bezüglich der Elemente T11 und T22 gegenüber den verlustfreien Varianten ergeben.

Die Absolutwerte des T21-Elements sind jedoch aufgrund der Existenz der Verluste erhöht. Ein entsprechend verändertes Verhalten ist dem Phasenverlauf des T21-Elementes zu entnehmen. Dieser ist für die beiden verlustbehafteten Fälle nahezu identisch. Die Absolutwerte des T21-Elements werden vom verwendeten $l - \zeta$ -Modell jedoch deutlich höher vorhergesagt.

Gemäß dem $l - \zeta$ -Modell wirken sich akustische Verluste insbesondere auch auf das T12-Elements aus. Im vorliegenden Fall ist dieser Einfluss jedoch recht gering. Dies resultiert aus den Ergebnissen der CFD-Rechnung, aus denen der Totaldruckverlust für beide Ansätze bestimmt wurde. Demzufolge resultiert ein erhöhter Wert von ζ im Vergleich zu einem einfachen analytischen Ansatz, wie z. B. $\zeta = (1 - \alpha)^2$ [93]. Eingesetzt ins $l - \zeta$ Modell ergeben sich entsprechend geringe Unterschiede zwischen verlustfreien und verlustbehafteten Varianten. Der Einfluss der beiden Lauflängen l_{eff} und l_{red} scheint hier folglich deutlich dominanter gegenüber demjenigen des Druckverlustbeiwerts ζ zu sein.

Aus Abbildung 5.15 wird ersichtlich, dass ab einer gewissen Grenzfrequenz (vgl. Abschnitt 4.3) aber prinzipiell gute Übereinstimmungen zwischen den beiden verlustbehafteten Varianten bezüglich des T12-Elements resultieren. Auch die zugehörigen Phasen verhalten sich oberhalb dieser Grenzfrequenz sehr ähnlich (Abbildung 5.14)¹⁰.

¹⁰Das Phasenverhalten des T12-Elements in Abbildung 5.14 steht im Einklang mit den Messergebnissen von Alemela [94], Neunert [95] und Schuermans [18] an vergleichbaren Konfigurationen. Die zugehörigen Messungen basieren auf (Abwandlungen) der Multimikrofonmethode. Der hier gewählte numerische (FEM-) Ansatz folgt im Wesentlichen dieser Vorgehensweise [11]. Auch Alemela [94], Neunert [95] und Schuermans [18] verwenden für ihre Arbeiten das $l - \zeta$ -Modell und erzielen damit generell sehr gute Übereinstimmungen mit ihren

5.2 Dreidimensionale Verlustbetrachtung

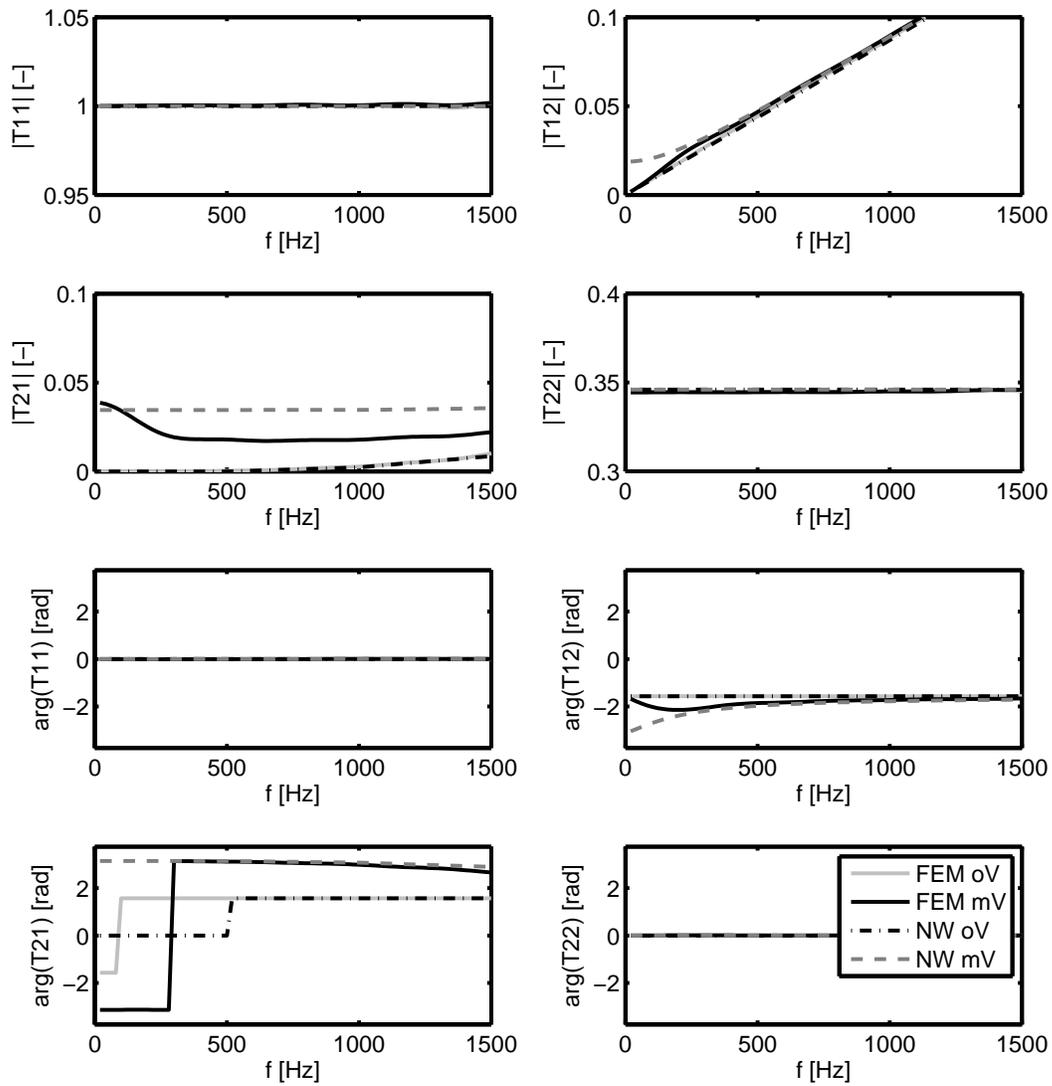


Abbildung 5.14: Transfermatrizen der abrupten Querschnittserweiterung in pu -Notation

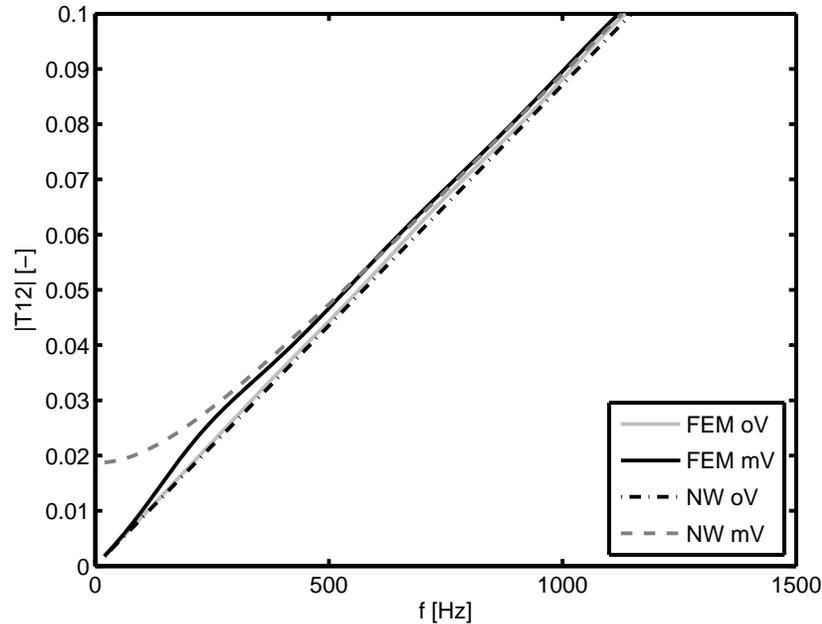


Abbildung 5.15: Absolutwert des T12-Elements der Transfermatrizen

Einen detaillierten Einblick in das Übertragungsverhalten gibt die zugehörige Streumatrix (Abbildung 5.16). Sie veranschaulicht, dass die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten von stromauf nach stromab (ud) gut mittels des neuen Ansatzes wiedergegeben werden können. Das Übertragungsverhalten von stromab nach stromauf (du) weicht jedoch für die beiden Ansätze voneinander ab. Sowohl die Transmission als auch die Reflexion ist diesbezüglich beim FEM-Modell höher. Der akustische Verlust im FEM-Modell ist folglich zu gering im Vergleich zum $l - \zeta$ -Modell.

Zusätzlich erfolgt eine Validierung gegen Ergebnisse aus der LES-SI-Methode nach Föller et al. [91]. Als Referenz sind in Abbildung 5.19 zudem die Ergebnisse eines verlustfreien analytischen Modells gemäß den Angaben in Fischer [8] gegeben. Um die oben beschriebenen Abweichungen aufgrund der Ergebnisse der CFD-Rechnung auszugleichen, wird der auf Basis der RANS-Daten

Messergebnissen. l_{eff} , l_{red} und ζ entsprechen dabei in der Regel Fittungsparametern. Daher erscheint es auch hier zulässig, den Phasenverlauf des Netzwerkmodells im T12-Element an den aufgrund der vorliegenden Mess- und Rechenergebnisse erwarteten Verlauf anzupassen (vgl. Abbildung 5.14). Dies wird erreicht, indem der Realteil des T12-Elements mit einem zusätzlichen Minuszeichen versehen wird. Vom FEM-Modell wird der erwartete Phasenverlauf ohne entsprechende Korrekturen wiedergegeben.

5.2 Dreidimensionale Verlustbetrachtung

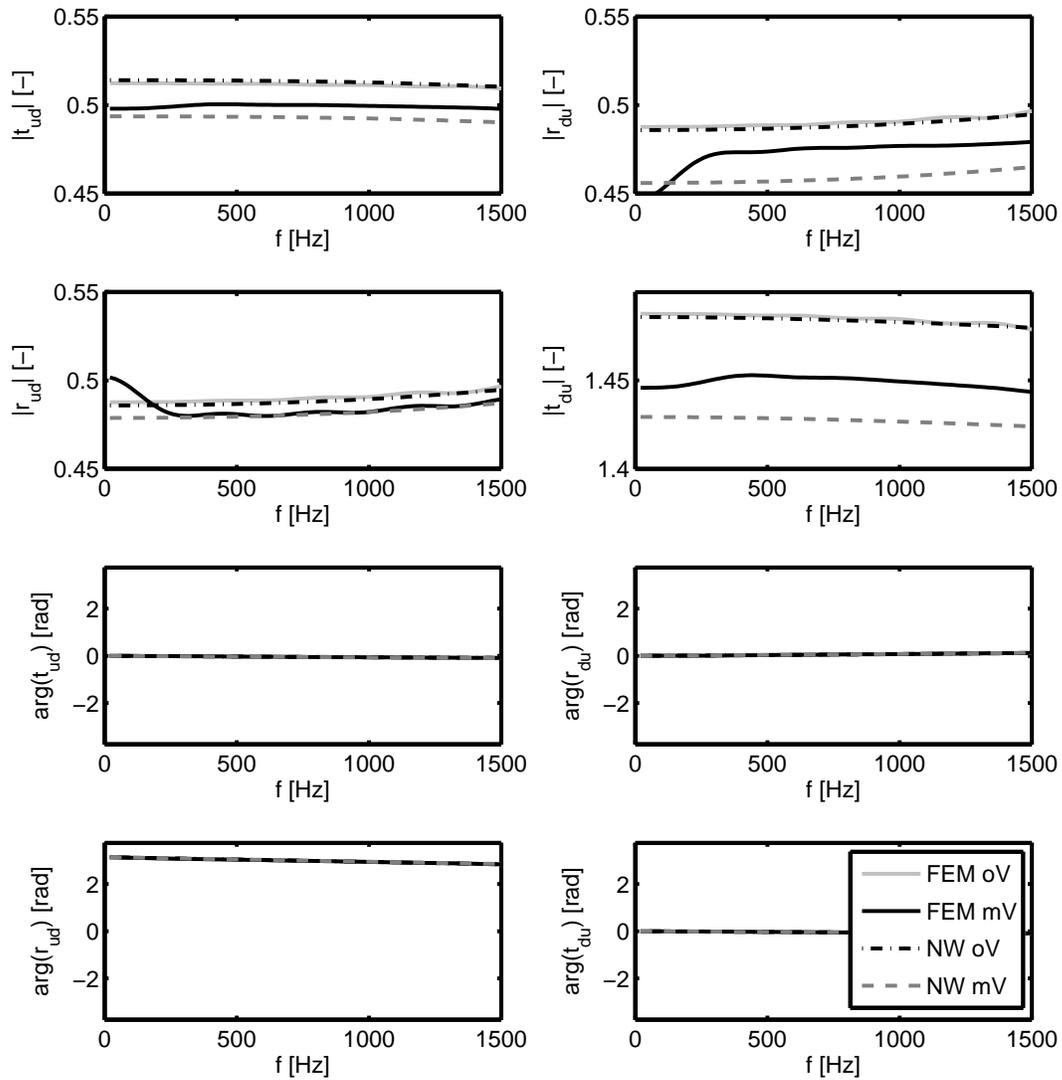


Abbildung 5.16: Streumatrizen der abrupten Querschnittserweiterung

berechnete Wert von ζ im Netzwerkmodell durch den analytisch ermittelten Wert $\zeta = (1 - \alpha)^2$ [93] ersetzt. Im FEM-Modell werden diese beiden Varianten von ζ zueinander ins Verhältnis gesetzt, da sich zeigte, dass der analytisch berechnete Druckverlustbeiwert hier nahezu dem ζ aus der LES-SI-Methode entspricht [89]. Der resultierende Faktor dient als globaler Ausgleichsfaktor im FEM-Modell. Wird er dort zusätzlich mit einem weiteren Faktor der Größe 1.8 multipliziert, so ergeben sich, nach unten beschriebenen Umformungen, die in den Abbildungen 5.17 bis 5.19 dargestellten Ergebnisse¹¹.

Demnach resultieren ab einer Grenzfrequenz von ca. $f = 250 \text{ Hz}$ (vgl. hierzu Abschnitt 4.3) sowohl bezüglich der Transfermatrix als auch der Streumatrix sehr gute Übereinstimmungen zwischen dem $l-\zeta$ - und dem FEM-Modell. Auch die Größenordnung der Ergebnisse des LES-SI-Ansatzes konnte gut getroffen werden. Lediglich die Frequenzabhängigkeit des Verlustterms konnte durch das FEM- und das Netzwerk-Modell erwartungsgemäß nicht wiedergegeben werden (vgl. Abschnitt 4.3).

Im direkten Vergleich zum $l-\zeta$ -Modell ist das neue Modell folglich in der Lage, akustische Verluste ab einer gewissen Grenzfrequenz qualitativ wiederzugeben. Die Einführung eines globalen Tuningfaktors der Größe 1.8 führte auch zu quantitativ guten Übereinstimmungen. Fraglich bleiben die Gründe für die Phasenverschiebungen zwischen den verschiedenen Validierungsfällen.

¹¹Die Ergebnisse von Föller et al. [91], die im Einklang stehen mit den Ergebnissen von Ronneberger [88], Kooijmann [84], Boij und Nilsson [87], weisen prinzipiell gegenüber den Messwerten von Alemela [94], Neunert [95] und Schuermans [18] sowie den vorliegenden Ergebnissen aus dem FEM-Modell eine Phasenverschiebung um $-\pi/2$ im T12-Element und $+\pi/2$ im T21-Element auf. Berechnet man daraus die Streumatrizen gemäß Fischer [8], so ergeben sich für die beiden Varianten stark voneinander abweichende Reflexions- und Transmissionskoeffizienten. Sie liegen spiegelbildlich zum verlustfreien Fall. Um das Transferverhalten der verschiedenen Validierungsfälle dennoch vergleichen zu können, wird sich deshalb hier dafür entschieden, die Phasendreher in den Ergebnissen des verlustbehafteten FEM-Ansatzes in den entsprechenden Abbildungen manuell auszugleichen. Gleichzeitig muss im $l-\zeta$ Modell das vorher eingeführte Minuszeichen im Realteil des T12-Elements wieder entfernt und auch der Imaginärteil des T22-Elements entsprechend angepasst werden.

5.2 Dreidimensionale Verlustbetrachtung

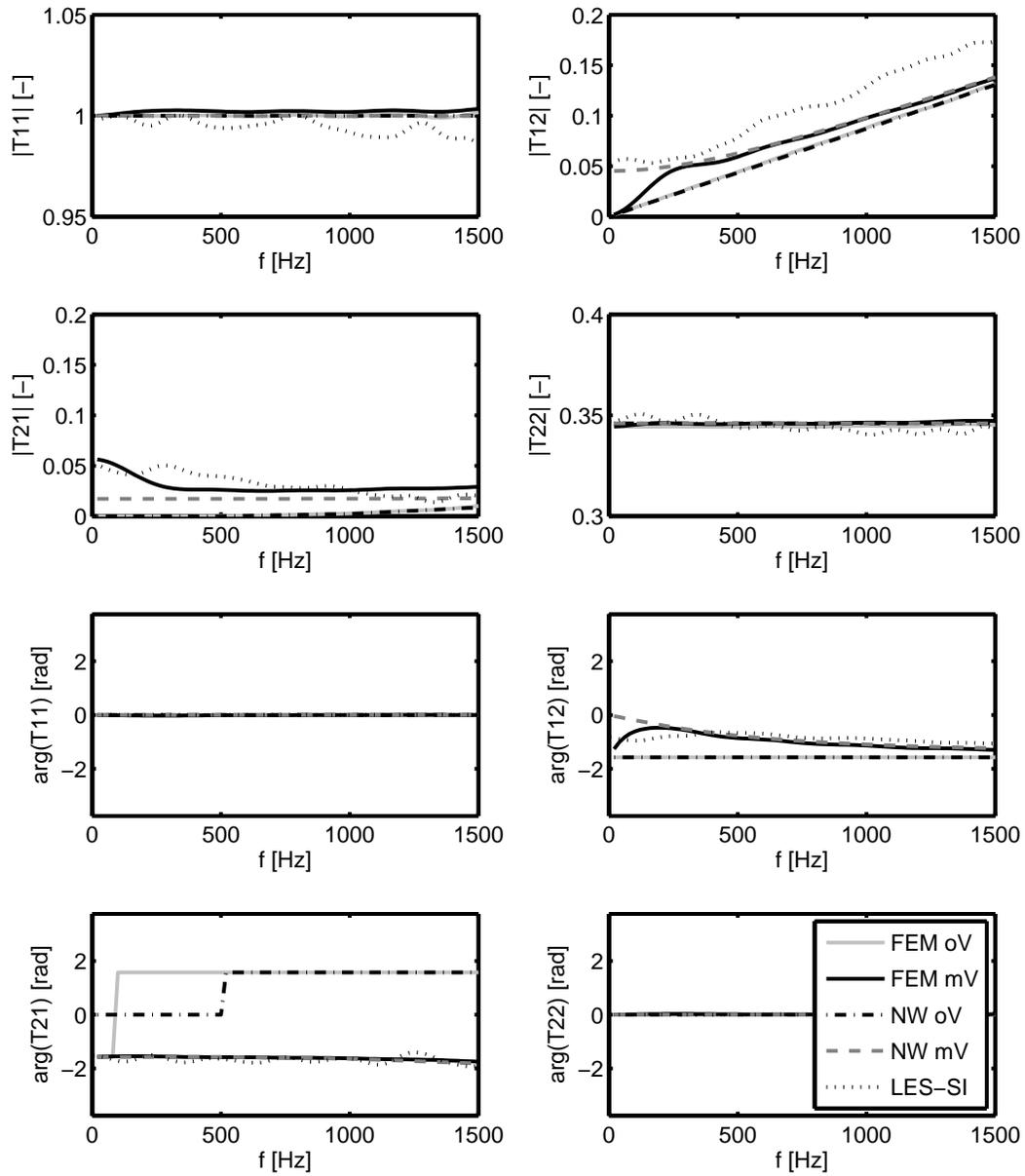


Abbildung 5.17: Varianten der Transfermatrizen des Querschnittsprungs in pu -Notation

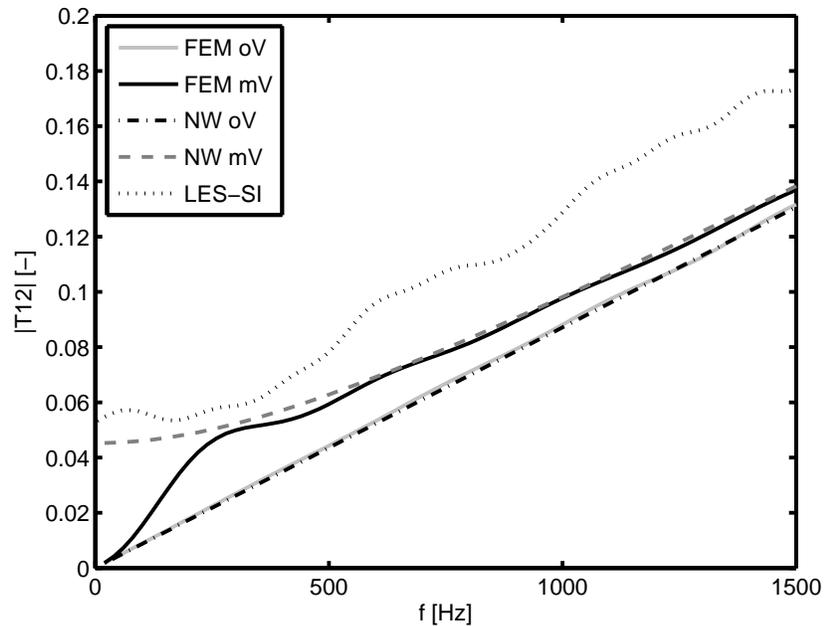


Abbildung 5.18: Varianten des Absolutwerts des T12-Elements der Transfermatrizen

5.2.3 Validierung anhand eines Einzelbrennerprüfstands

Zusätzlich findet eine Validierung des neu entwickelten Verlustterms anhand eines komplexen Einzelbrennerprüfstands statt. Dieser wird zu Forschungszwecken am Lehrstuhl für Thermodynamik der Technischen Universität München verwendet. Die Validierung erfolgt im Frequenzbereich gegen experimentelle Daten [96].

5.2.3.1 Konfiguration des Einzelbrennerprüfstands

Eine schematische Skizze der wesentlichen Elemente des Prüfstands ist in Abbildung 5.20 gegeben. Zudem ist darin der Bereich des späteren CFD-Interfaces markiert (Schraffur). Die Durchströmung des Prüfstands erfolgt in Richtung der positiven x-Achse. Das Fluid strömt zunächst in ein zylindrisches Rohrsegment, die sogenannte Vormischkammer. An ihrem stromab gelegenen Ende ist der zu untersuchende Brenner montiert. Er bildet das einzige

5.2 Dreidimensionale Verlustbetrachtung

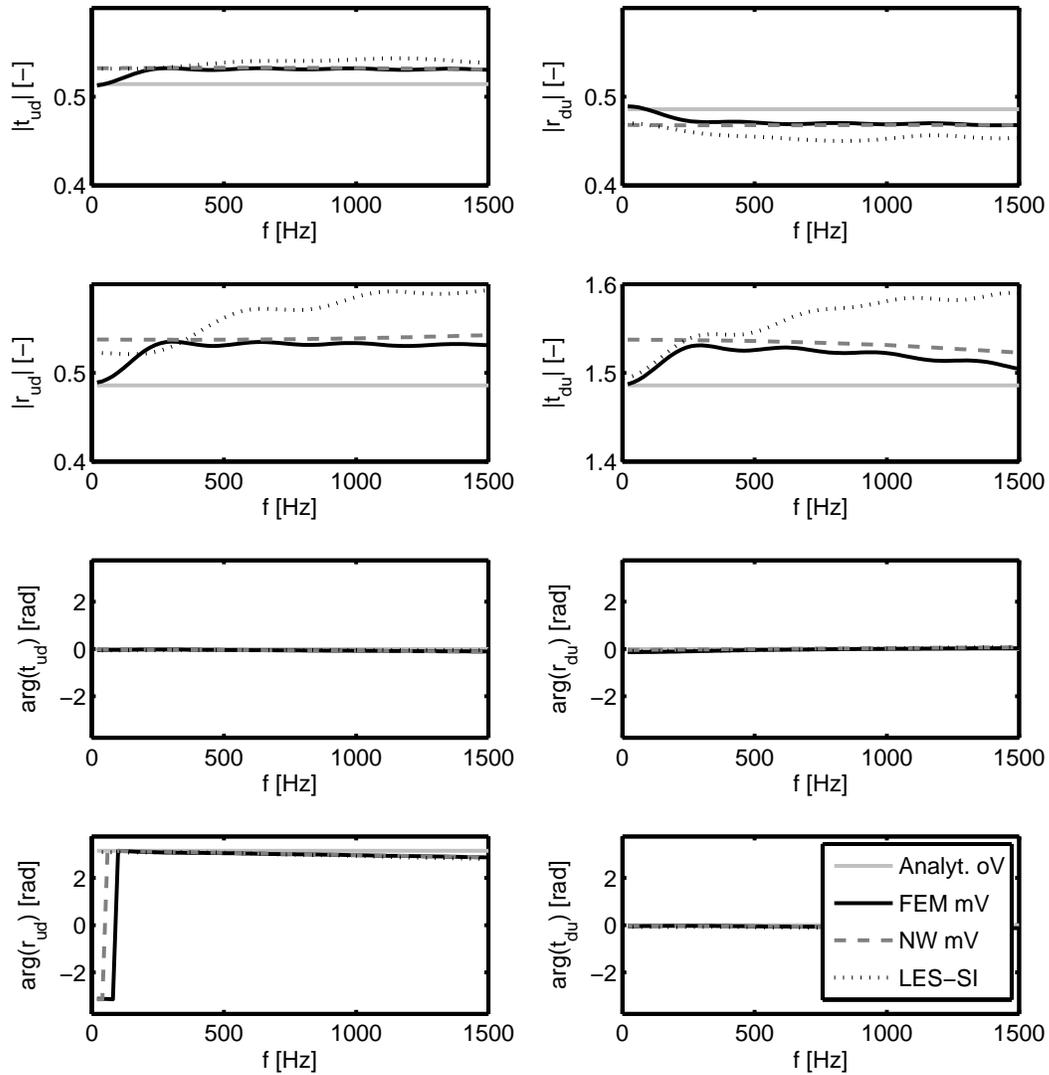


Abbildung 5.19: Varianten der Streumatrizen des Querschnittsprungs

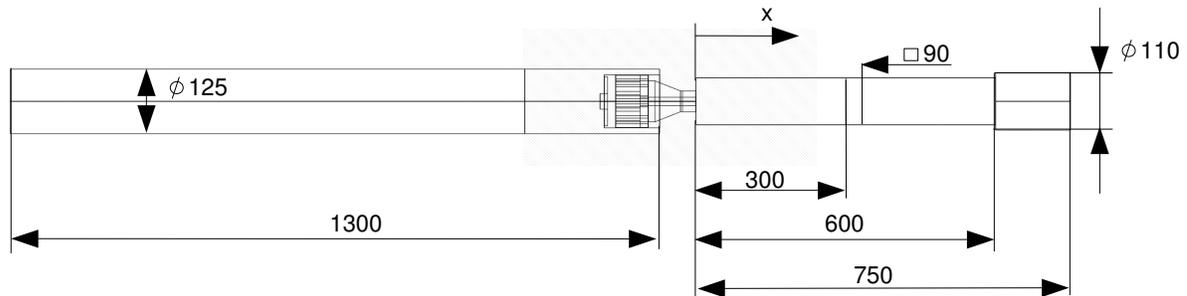


Abbildung 5.20: Geometrie des Einzelbrennerprüfstands mit TD1-Brenner

Verbindungsglied zur eigentlichen Brennkammer, welche aus drei Einzelsegmenten besteht. An die Brennkammer schließt der Kamin (nicht dargestellt) an.

Die akustische Anregung erfolgt mittels Sirenen. Durch die Rotation einer gelochten Scheibe vor einem mit Durchlässen versehenen Stator werden dabei nahezu sinusförmige Schnelleschwankungen erzeugt. Die Frequenz der Anregung kann über die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe bestimmt werden [97]. Zur Realisierung der akustischen Anregung von stromauf wird eine Sirene stromauf der Vormischkammer montiert. Stromab kann eine Sirene im Bereich des zylindrischen Brennkammersegments senkrecht zur Strömungsrichtung montiert werden. Zur gleichmäßigen Verteilung der Anregung über dem Umfang wurden diverse bauliche Veränderungen vorgenommen [13, 97]. Unter Anwendung der Multimikrofonmethode wurde mittels dieser Konfiguration unter anderem die hier betrachtete Brennertransfermatrix und somit das akustische Übertragungsverhalten des TD1-Brenners (Variante TD1 4016/16 mm Schlitzlänge) im unbefeuerten Zustand ($T \approx 18^\circ \text{C}$) für einen Luftmassenstrom $\dot{m} = 30 \text{ g/s}$ bestimmt [96]. Details zum Prüfaufbau und zur Messmethode sind den Arbeiten von Alemela et al. [13], Eckstein [97] und Fischer [8] zu entnehmen.

Der TD1-Brenner wurde am Lehrstuhl für Thermodynamik der Technischen Universität München zu Forschungszwecken entwickelt. Sein prinzipieller

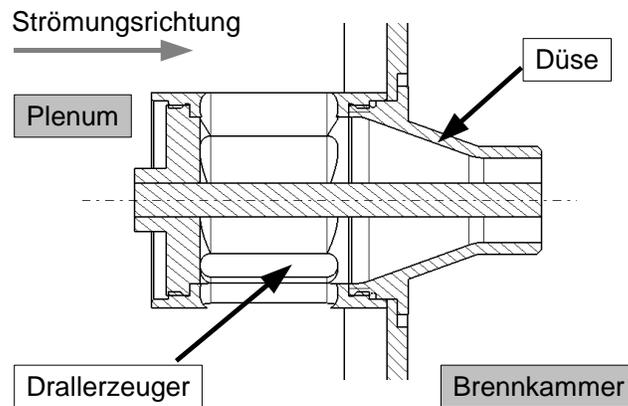


Abbildung 5.21: Schematischer Aufbau des TD1-Brenners, montiert in einem Einzelbrennerprüfstand

Aufbau ist in Abbildung 5.21 dargestellt. Die Durchströmung erfolgt von links nach rechts. Das Fluid strömt von der Vormischkammer (Plenum) durch den Drallerzeuger in die Düse und nach einer abrupten Querschnittserweiterung schließlich in die Brennkammer. Zur Stabilisierung des Strömungsfeldes bzw. der Flamme ist zentral eine Lanze angebracht. Durch teilweises Versperren der tangentialen Drallschlitze kann beim TD1-Brenner unter anderem die Drallzahl variiert werden [8].

5.2.3.2 CFD-Interface

Zunächst wird wiederum ein stationäres CFD-Interface erstellt. Es basiert in diesem Fall auf einer dreidimensionalen URANS-Rechnung in FLUENT (vgl. Tabelle 5.2), durch welche das kalte Strömungsfeld im Nahbereich des TD1-Brenners im oben beschriebenen Einzelbrennerprüfstand ermittelt wird [98]. Mit Hilfe einer entsprechend programmierten *User-Defined-Function* [98] können daraus zeitlich gemittelte Werte für diverse strömungsmechanische Parameter extrahiert werden. Gleichzeitig ermöglicht diese *User-Defined-Function*, die entsprechenden Gradienten des Totaldrucks unter weitgehender Vermeidung mathematisch-numerischer Ungenauigkeiten auszulesen.

Gitter	
Anzahl der Elemente	619076
Art der Elemente	hexahedrale Zellen (3D)
Solver	
Art	URANS-3D
Zeitschritt	$\Delta t = 5 \cdot 10^{-5} s$
Diskretisierungsschema	Second Order Implizit, Second Order Upwind
Turbulenz/ Randbedingungen	
Turbulenzmodell	Reynold-Stress Model
Einlassrandbedingung	Mass-Flow-Rate ($\dot{m} = 0.03 kg/s, T = 18^\circ C$)
Auslassrandbedingung	Pressure Outlet
Stoffwerte	
Medium, Temperatur	Luft, $T = 18^\circ C$
Dichte	inkompressibles, ideales Gas
Betriebsdruck	$\bar{p} = 101325 Pa$

Tabelle 5.2: Parameter des URANS-Modells des TD1-Brenners nach [98]

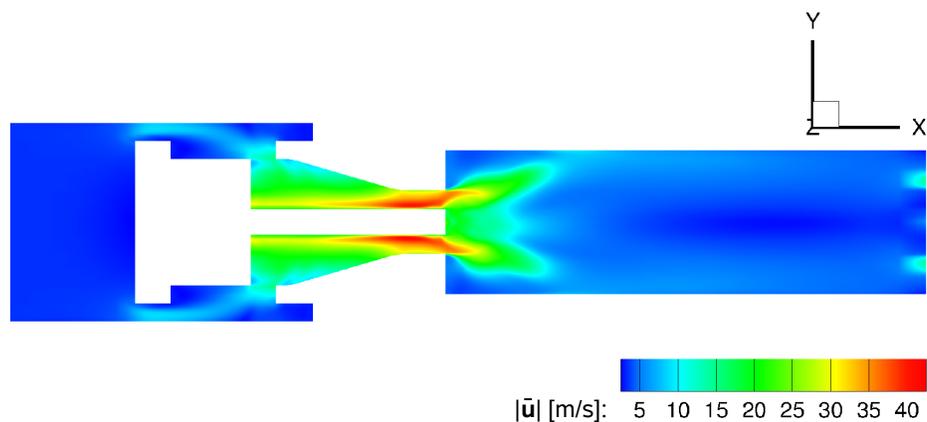


Abbildung 5.22: Einzelbrennerprüfstand (TD1): CFD-Ergebnisse - mittlere Absolutgeschwindigkeit

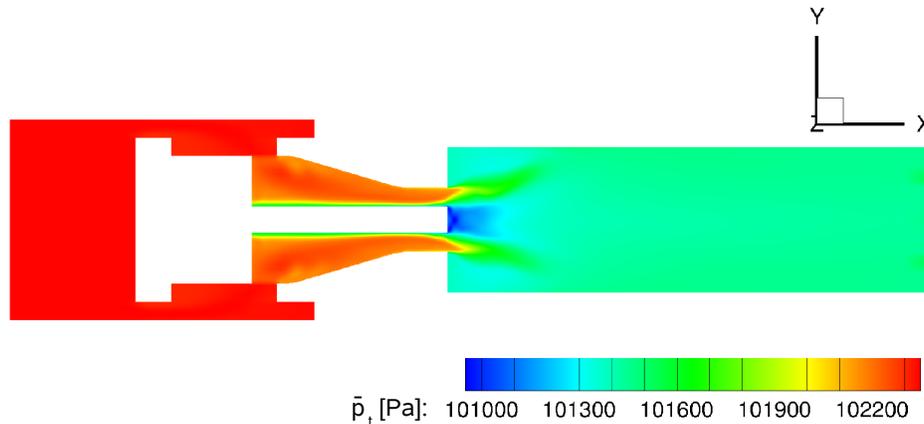


Abbildung 5.23: Einzelbrennerprüfstand (TD1): CFD-Ergebnisse - mittlerer Totaldruck

In den Abbildungen 5.22 und 5.23 sind die resultierende mittlere Absolutgeschwindigkeit und der mittlere Totaldruck dargestellt. In beiden Fällen ist ein gewisser Einfluss der Austrittsrandbedingung zu erkennen. Dort erfolgt zur Erhöhung der numerischen Stabilität der Rechnung die Blockierung eines Teils der Austrittsfläche mittels einer mittig platzierten Scheibe¹². Um einen Einfluss dieser Maßnahme auf die spätere Bestimmung der akustischen Verluste auszuschließen, wird der entsprechende Bereich bei der Erstellung des CFD-Interfaces ausgespart.

In Abbildung 5.24 ist analog zur abrupten Querschnittserweiterung das Zusammenspiel ausgewählter Komponenten des mittleren Totaldruckgradienten und der zugehörigen Anteile der mittleren Geschwindigkeit schematisch dargestellt. Wie bereits in Abbildung 5.7 wird dies anhand kartesischer Koordinaten veranschaulicht, da sich der hydrodynamische Anteil des Verlustterms auch hier später wiederum aus diesen Komponenten zusammensetzen wird. Im Sinne einer besseren Übersichtlichkeit wird in Abbildung 5.24 auf eine Darstellung der z -Komponente verzichtet. Für eine vollkommen rotationssymmetrische Konfiguration ist im betrachteten Mittelschnitt der entsprechende mittlere Totaldruckgradient in z -Richtung $\partial \bar{p}_t / \partial z$ ohnehin gleich Null. Prinzipiell existieren im Vergleich zum Freistrahls nun zwei Scherschichten. Die Interaktionen im Strömungsfeld sind daher deutlich komplexer.

¹²Dies entspricht der üblichen Vorgehensweise im Rahmen derartiger Berechnungen.

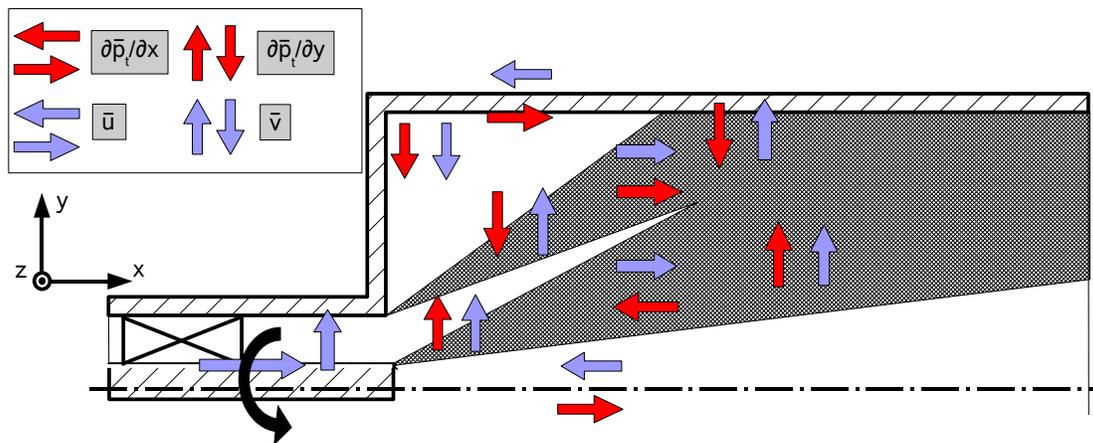


Abbildung 5.24: Einzelbrennerprüfstand (TD1): Schematische Darstellung ausgewählter Komponenten der mittleren Geschwindigkeit und des Gradienten des mittleren Totaldrucks

In Abbildung 5.25 sind die axialen Komponenten des Zählers des hydrodynamischen Anteils des Verlustterms gezeigt. Demnach sind die Werte aus dem Produkt des mittleren axialen Totaldruckgradienten und dem Anteil der mittleren Geschwindigkeit in x -Richtung an der inneren Scherschicht tendenziell negativ und an der äußeren Scherschicht positiv. Die Summe aus radialen und tangentialen Komponenten verhält sich diesbezüglich spiegelverkehrt. Sie ist hier gleichzusetzen mit der Summe aus den entsprechenden Komponenten in x - und y -Richtung (Abbildung 5.26). Im gewählten Mittelschnitt ist jedoch der Gradient des mittleren Totaldrucks in z -Richtung $\partial \bar{p}_t / \partial z$ für eine perfekt rotationssymmetrische Konfiguration gleich Null. Es verbleiben im Skalarprodukt in Abbildung 5.27 somit neben den axialen Komponenten des hydrodynamischen Anteils des Verlustterms hier im Wesentlichen nur die Komponenten in y -Richtung.

Das Gesamtergebnis des Skalarprodukts im Zähler von V_{hyd} ist in Abbildung 5.27 dargestellt, der resultierende hydrodynamische Verlustterm, inklusive der Terme im Nenner, in Abbildung 5.28. Auch hier ergeben sich sowohl positive als auch negative Bereiche. Flächenmäßig dominieren jedoch die negativen Bereiche.

Als Referenzebene zur Bestimmung der Geschwindigkeit $|\bar{\mathbf{u}}_1|$ wurde dabei der Brennerausgang gewählt. Wegen der inhomogenen Verteilung der axialen Ge-

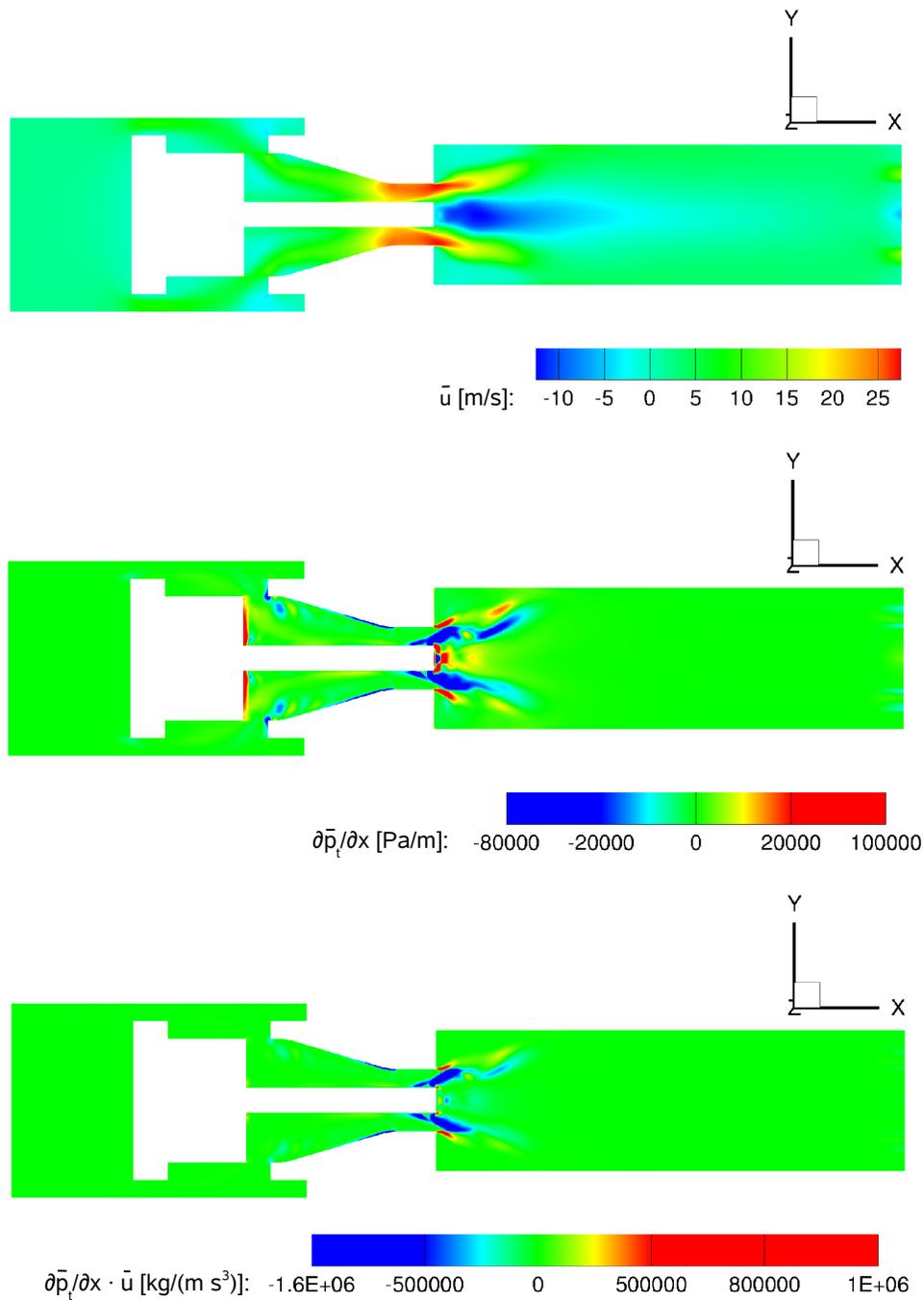


Abbildung 5.25: Einzelbrennerprüfstand (TD1): CFD-Ergebnisse - axiale Komponenten des Zählers des hydrodynamischen Anteils des Verlustterms

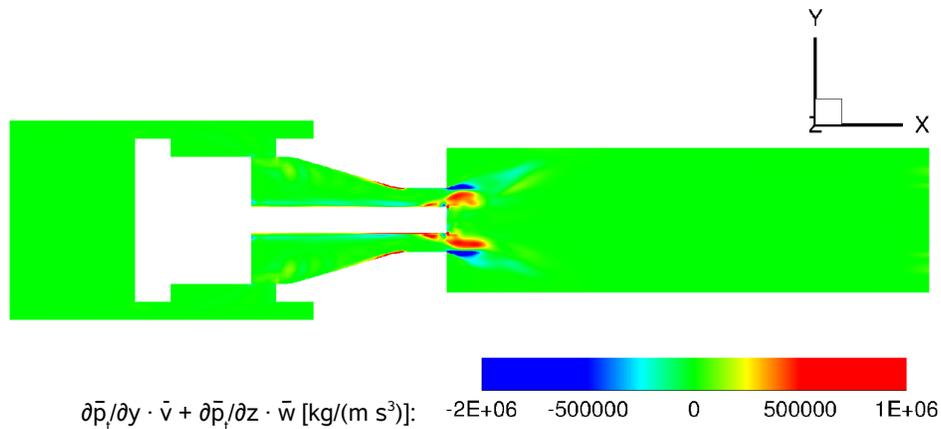


Abbildung 5.26: Einzelbrennerprüfstand (TD1): CFD-Ergebnisse - Summe aus radialen und tangentialen Komponenten des Zählers des hydrodynamischen Anteils des Verlustterms

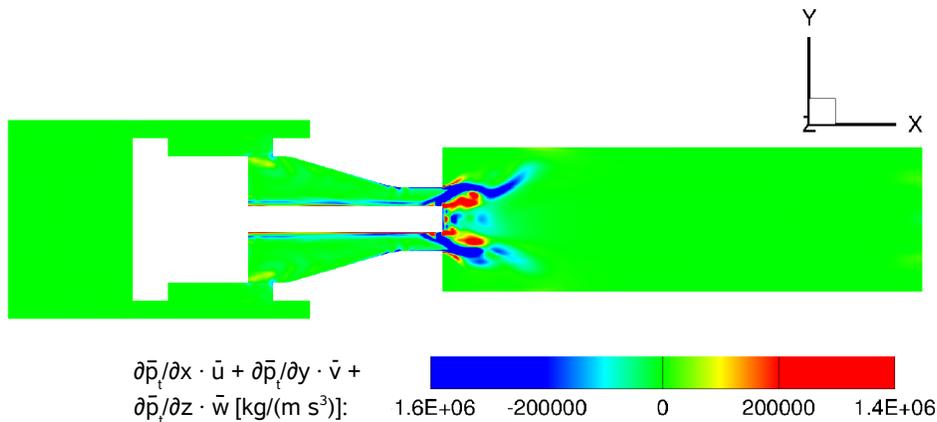


Abbildung 5.27: Einzelbrennerprüfstand (TD1): CFD-Ergebnisse - Zähler des hydrodynamischen Anteils des Verlustterms

schwindigkeit über dem Querschnitt bei $x = 0$ aufgrund eines prezidierenden Wirbelkerns, dessen Einfluss auch durch die zeitliche Mittelung nicht vollständig behoben werden konnte, wird hier für den betrachteten Anwendungsfall jedoch die Ebene bei $x = -0.02 \text{ m}$ als Referenz verwendet.

Analog zu den vorausgehenden Betrachtungen anhand der abrupten Querschnittserweiterung resultieren auch hier für die beiden Validierungsfälle - nun aber aus Numerik und Experiment - unterschiedliche Werte des

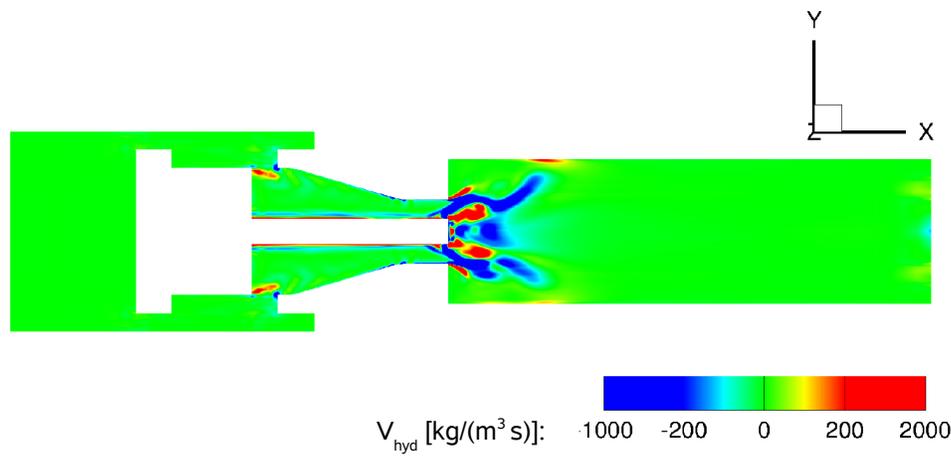


Abbildung 5.28: Einzelbrennerprüfstand (TD1): CFD-Ergebnisse - gesamter hydrodynamischer Anteil des Verlustterms

(Total-) Druckverlusts über dem Brenner. Um dies zu korrigieren, wird auch im vorliegenden Fall ein entsprechender Korrekturfaktor implementiert. Dazu wird das aus der Strömungsberechnung bestimmte ζ (Gleichung 5.38) ins Verhältnis gesetzt zum entsprechenden, experimentell bestimmten Druckverlustbeiwert ζ . Wie von Alemela [94] beschrieben, wird im experimentellen Fall dazu die Differenz des statischen Druckverlusts anstelle des Totaldruckverlusts verwendet. Der zusätzliche Tuningfaktor mit dem Wert 1.8 (vgl. Abschnitt 5.2.2.3) wird auch hier beibehalten.

Die eigentliche Berechnung des hydrodynamischen Anteils des Verlustterms erfolgt in MATLAB. Die resultierenden Ergebnisse werden wiederum, wie in Abschnitt 5.2.2 beschrieben, auf Werte kleiner oder gleich Null limitiert. Anschließend wird hier der hydrodynamische Anteil des lokalen akustischen Verlustterms bei gleichzeitig möglichst exakter Beibehaltung seines integralen Wertes vom feinen CFD-Gitter unmittelbar auf das deutlich gröbere, unstrukturierte FEM-Gitter abgebildet [99]. Durch diese Vorgehensweise können etwaige Interpolationsfehler ausgeschlossen werden [100]. Anschließend werden die Ergebnisse auf die Mittelpunkte der Tetraeder interpoliert und dann in Form einer MATLAB-Struktur abgespeichert, um sie so in den verwendeten FEM-Code einlesen zu können [99]. Im FEM-Code erfolgt die endgültige Interpolation der Daten auf das unstrukturierte FEM-Gitter (Abbildung 5.29).

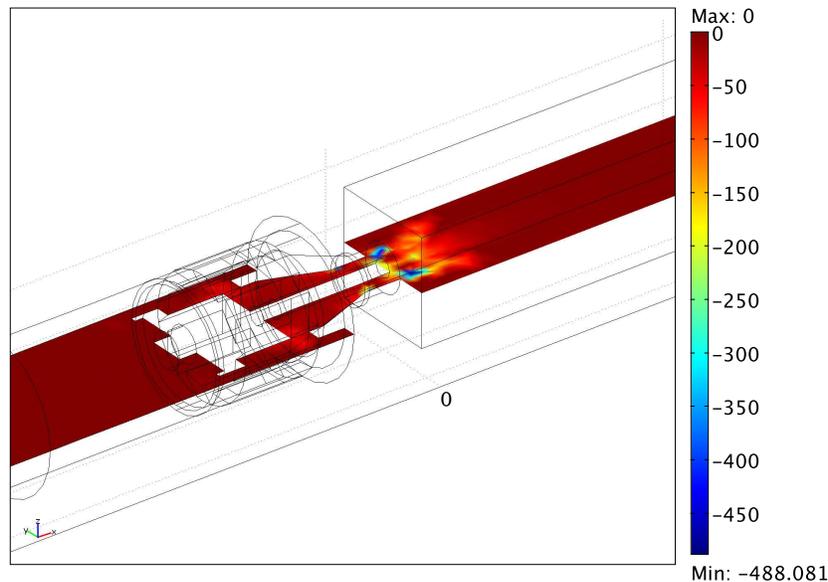


Abbildung 5.29: Einzelbrennerprüfstand (TD1): CFD-Interface - V_{hyd} [$kg/(m^3s)$] im FEM-Code (Schnitt)

5.2.3.3 Validierung des Verlustmodells

Die Validierung erfolgt anhand eines Vergleichs der Transfer- und der Streumatrizen aus Experiment und Berechnung. Den Berechnungsfällen liegt das geometrische Modell aus Abbildung 5.20 zugrunde. Das zugehörige Berechnungsgitter ist in Abbildung 5.30 dargestellt.

An den beiden stirnseitigen Rändern werden analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 5.2.2 Impedanzrandbedingungen gesetzt. Zusätzlich erfolgt wiederum an jeweils einem dieser Ränder die Anregung des akustischen Feldes mittels einer sinusförmigen Geschwindigkeitsschwankung, um so zwei voneinander unabhängige Datensätze zu generieren (vgl. Abschnitt 5.2.2). Alle übrigen Ränder werden als schallhart modelliert (Neumann-Randbedingung). Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt mittels eines parametrischen, direkten Solvers im Frequenzbereich (vgl. Tabelle 5.3). Verwendet wird dazu eine Variante von Gleichung 5.34. In Übereinstimmung mit dem Experiment umfasst der betrachtete Frequenzbereich $f = 20 \text{ Hz}$ bis $f = 600 \text{ Hz}$.

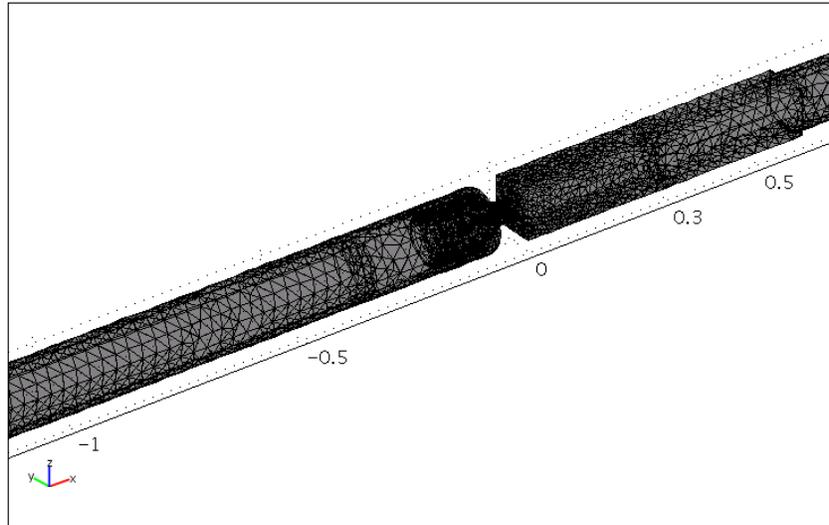


Abbildung 5.30: Örtliche Diskretisierung des TD1-Brenners im Einzelbrennerprüfstand

Software	
Bezeichnung	COMSOL MULTIPHYSICS
Art	FEM
Version	3.5
Modus	Acoustic-Mode
Gitter	
Anzahl der Elemente	29654
Art der Elemente	Tetraeder (unstrukturiertes Gitter)
Diskretisierungsschema	lineare Lagrange-Elemente
Maximale Kantenlänge	$l = 0.0285 \text{ m}$
Stoffwerte	
Medium	Luft
Temperatur	$T = 18^\circ \text{ C}$
Randbedingungen	
Impedanz	$Z = 1000 \text{ kg/(sm}^2\text{)}$
Schallharte Wand	$\nabla \hat{p} = 0$
Solver	
Art	direkt, parametrisch, Frequenzbereich

Tabelle 5.3: Parameter des FEM-Modells (TD1 im Einzelbrennerprüfstand)

In Abbildung 5.31 sind die experimentell und numerisch ermittelten Brennertransfermatrizen in pu -Notation einander gegenübergestellt. Wie im Rahmen der experimentellen Vorgehensweise üblich, werden die Ergebnisse dabei auf den Brennerausgang bei $x = 0$ bezogen.

Vergleicht man zunächst die verlustfreien FEM-Ergebnisse mit den experimentellen Daten, so sind bezüglich aller Elemente weitgehend gute Übereinstimmungen zu erkennen. Die Implementierung von akustischen Verlusten führt im vorliegenden Fall lediglich im Phasenverlauf des T21-Elements zu deutlichen Unterschieden im Vergleich zur verlustfreien Berechnung. Der Trend des Phasengangs der experimentellen Ergebnisse kann dort aber sehr gut wiedergegeben werden. Die generellen Unterschiede zwischen verlustfreier und verlustbehafteter Variante sind deutlicher mit Hilfe der Streumatrix zu erkennen (Abbildung 5.32). Ab einer Grenzfrequenz von ca. $f = 100 \text{ Hz}$ sind zunächst generell gute Übereinstimmungen zwischen den experimentellen und den numerischen Ergebnissen zu beobachten. Jedoch zeigt sich auch hier, dass der Einfluss der modellierten Verluste recht gering ist. Dies stimmt aber mit den Aussagen von Fischer [8] überein, die auf seinen experimentellen Ergebnissen bezüglich des TD1-Brenners in einem anderen Prüfstand basieren.

Weitere, hier nicht gezeigte Studien zeigen, dass sich eine deutliche globale Erhöhung des Verlustterms mittels eines weiteren Ausgleichsfaktors der Größe 5 oder auch 10 tendenziell negativ auf die Übereinstimmungen bezüglich der Streumatrizen aus verlustbehafteter FEM-Rechnung und Experiment auswirkt. Ein Faktor von 5 führt bereits zu einem deutlich veränderten Übertragungsverhalten. Dies wirkt sich insbesondere auf die Absolutwerte der Streumatrix aus, während die Phasenverläufe davon deutlich weniger betroffen sind. Die stärksten Auswirkungen sind bezüglich des Absolutwerts des Reflexionsfaktors von stromab nach stromauf r_{du} zu erkennen. Die Implementierung eines Faktors der Größe 5 führt dort jedoch zu deutlich stärkeren Abweichungen im Vergleich zu den experimentellen Daten. Die Abweichungen verstärken sich weiter drastisch bei Verwendung eines Faktors der Größe 10. Nennenswerte Verbesserungen bezüglich der Übereinstimmungen mit den experimentellen Daten konnten im Rahmen dieser Untersuchungen nur bezüglich

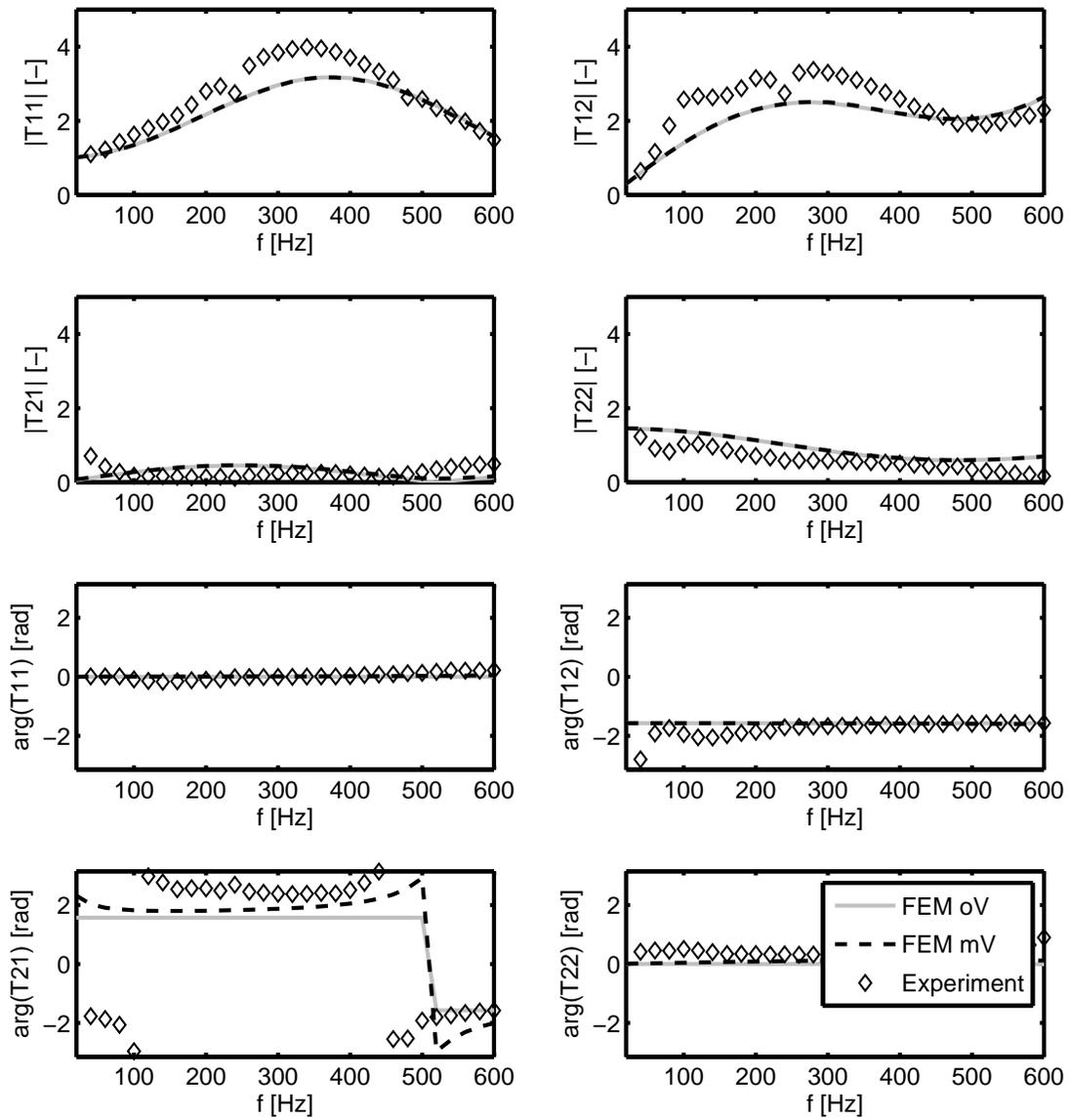


Abbildung 5.31: Transfermatrizen des TD1-Brenners im Einzelbrennerprüfstand

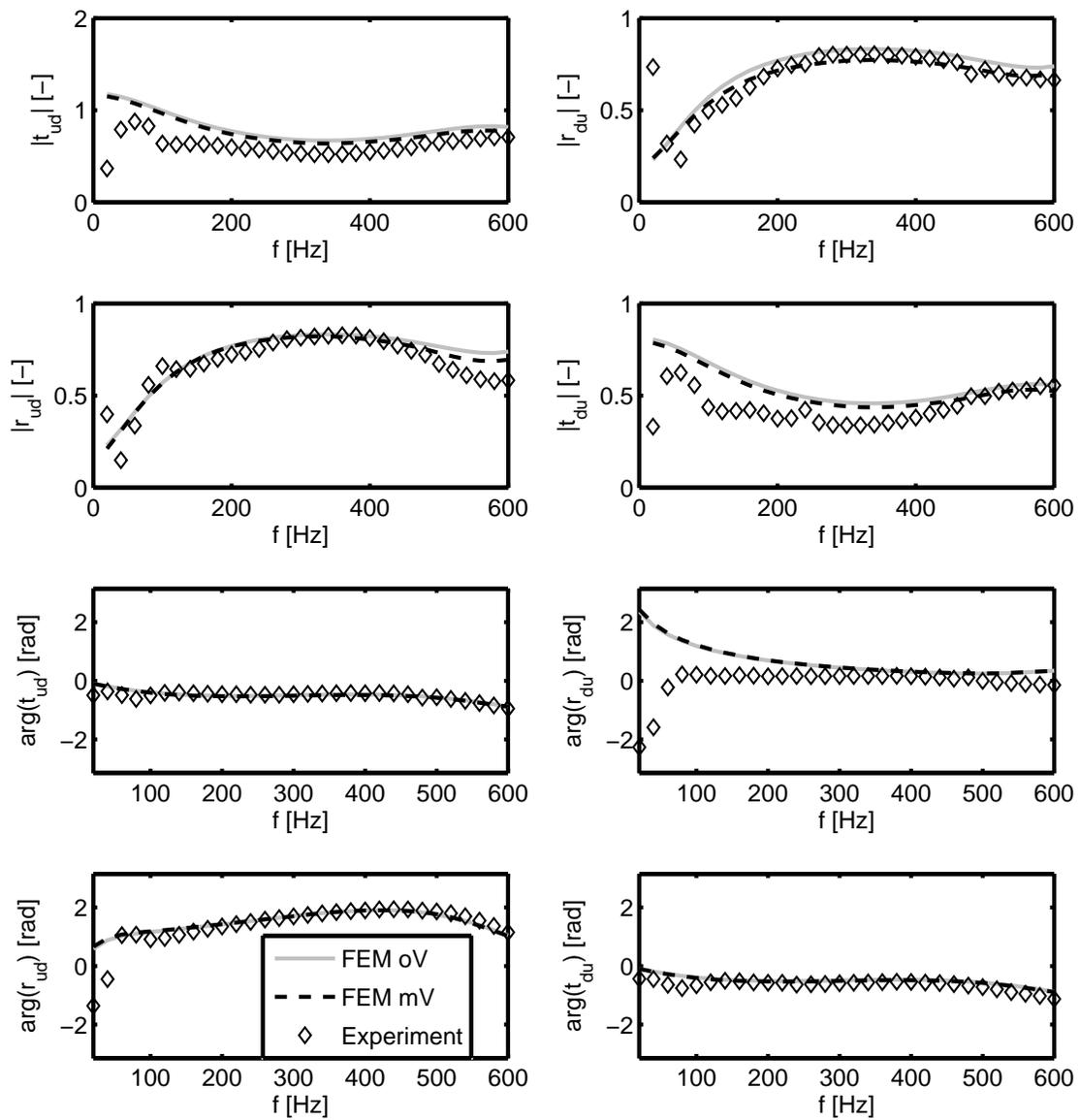


Abbildung 5.32: Streumatrizen des TD1-Brenners im Einzelbrennerprüfstand

der Absolutwerte des Transmissionsfaktors von stromauf nach stromab t_{ud} bei Verwendung eines Faktors der Größe 5 erzielt werden. Die Verwendung eines Faktors der Größe 10 führte hingegen bei allen Elementen zu deutlich schlechteren Übereinstimmungen. Die Größenordnung der Verluste in der ursprünglichen Form scheint daher passabel, auch wenn sie eventuell etwas zu gering sein könnte (evtl. ca. Faktor 2 oder kleiner).

Die betrachteten akustischen Verluste haben in den vorliegenden Validierungsfällen demnach allgemein nur einen verhältnismäßig geringen Einfluss auf das Übertragungsverhalten des akustischen Elements / Systems, da der Durchsatz hier generell sehr gering und der mittlere Totaldruckverlust damit entsprechend klein ist. Bei der Bestimmung des thermoakustischen Verhaltens könnte diese geringfügige Verstimmung jedoch einen entscheidenden Beitrag für ein stabileres Systemverhalten liefern. Dies wird im folgenden Kapitel untersucht.

5.3 Zusammenfassung

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass das entwickelte Modell zur näherungsweise Erfassung akustischer Verluste in der Helmholtzgleichung bzw. der Wellengleichung insgesamt zu durchaus zufrieden stellenden Ergebnissen geführt hat, sowohl bezüglich der abrupten Querschnittserweiterung als auch der hier untersuchten Einzelbrennerkonfiguration. Die bisher erzielten Ergebnisse weisen jedoch noch quantitative Abweichungen zu den erwarteten Werten auf. Dies konnte durch die Einführung eines Tuningfaktors der Höhe 1.8 zumindest teilweise behoben werden. Das generelle Verhalten von dämpfenden Einflüssen konnte gut abgebildet werden.

Folglich ist es gelungen, den Energiehaushalt der akustischen Schwingungen durch die Berücksichtigung von akustischen Verlusten infolge der Durchströmung von Brennkammerkomponenten, trotz der Verwendung der (an sich isentropen) Helmholtz- / Wellengleichung, prinzipiell zu erfassen.

6 Randbedingungen

Neben den akustischen Verlusten, die aufgrund der Durchströmung von Brennkammerkomponenten entstehen, ist es im Rahmen einer realitätsnahen Betrachtung der (thermo-) akustischen Stabilität von Verbrennungssystemen von zentraler Bedeutung, den Anteil akustischer Energie zu quantifizieren, der an den Rändern aus dem System herausgetragen wird. Solche Ränder sind der Ein- und Austritt der Brennkammer sowie perforierte Wände. An starren, nicht filmgekühlten Wänden findet in erster Näherung keine akustische Dämpfung statt.

Im Folgenden werden zunächst verschiedene Randbedingungen diskutiert. Anschließend wird anhand eines sogenannten *Liners* ein Ansatz zum Transfer komplexer frequenzabhängiger Randbedingungen vom Frequenz- in den Zeitbereich vorgestellt. Dieser ermöglicht, entsprechende akustische Verluste auch in transienten Berechnungen realitätsnah zu erfassen.

6.1 Akustische Verluste an den Rändern eines Berechnungsgebiets

Das Kompressorende von Gasturbinen entspricht aus akustischer Sicht üblicherweise einer geschokten Düse ($M = 1$ im engsten Querschnitt). Dort findet folglich, bei Vernachlässigung konvektiver Effekte, eine Vollreflexion des akustischen Feldes statt. Brennkammer und Verdichter können demnach als akustisch entkoppelt betrachtet werden. Unter diesen Annahmen lautet dort die akustische Randbedingung $\mathbf{n} \cdot \nabla p' = 0$ (Neumann-Randbedingung).

Der Brennkammerauslass wird in erster Näherung häufig als gewöhnliche Düse modelliert. Im Frequenzbereich wird dazu oft ein analytischer Ausdruck

von Marble und Candel [101] verwendet. Der Reflexionsfaktor ist dabei rein reell und konstant über alle Frequenzen. Er hängt lediglich von der Machzahl ab. Ein derartiger Ausdruck kann problemlos vom Frequenz- in den Zeitbereich transformiert werden. Ansätze hierzu sind unter anderem bei Pankiewicz [3] zu finden. Neue Messungen zeigen jedoch, dass das akustische Verhalten eines solchen Elements in komplexer Weise von der Frequenz abhängt [100]. Für dynamische Untersuchungen ist unter Umständen zudem der Einfluss der rotierenden Turbinenschaufeln zu beachten.

Brennkammerwände moderner Gasturbinen bestehen zu Kühlzwecken ganz oder teilweise aus perforierten Bauteilen, den sogenannten Linern. Neben ihrer primären Aufgabe, das Material der Brennkammerwand durch einen Kühlluftfilm vor Beschädigung aufgrund des starken Wärmeeinflusses zu schützen, können Liner auch die Akustik eines Brennkammersystems stark beeinflussen. Sie üben in der Regel einen dämpfenden Einfluss aus. Aus numerischer Sicht resultiert auch hier zumeist eine komplexe, frequenzabhängige Randbedingung.

6.2 Liner

Ein Liner besteht in der Regel aus einer dünnwandigen Metallplatte, die zahlreiche kleinste Bohrungen ($D \approx 0.0005m$ [102]) in regelmäßigen Abständen aufweist (Abbildung 6.1). Zur besseren Ausbildung des Kühlluftfilms werden heute häufig schräge Bohrungen verwendet [103, 104]. Die Porosität eines Liners ist gering. Die Öffnungen sind somit äußerst klein im Vergleich zur Gesamtoberfläche der perforierten Platte. Um den dämpfenden Einfluss zu verstärken, wird in einem Abstand l zur perforierten Platte eine schallharte Wand (*backing plate*) angebracht. In den Zwischenraum wird Kühlluft eingebracht. Diese strömt aufgrund des Druckgradienten durch die Bohrungen in die Brennkammer und führt an der Brennkammerinnenwand zur Ausbildung eines Kühlluftfilms. Existiert in der Brennkammer ein akustisches Feld, so kommt es an den scharfen Kanten der einzelnen Öffnungen des Liners zu einer Kopplung von akustischer Mode und Vorticitymode aufgrund von Wirbelablösung. Dabei wird akustische in strömungsmechanische Energie umge-

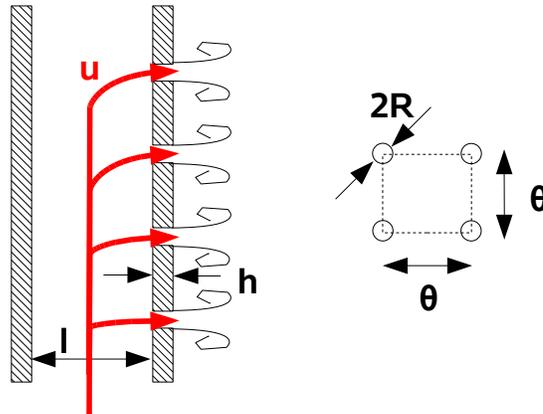


Abbildung 6.1: Schematische Darstellung des Aufbaus und der Funktionsweise eines Liners [105]

wandelt, die als Wirbel mit der mittleren Geschwindigkeit stromab getragen wird. Die akustische Mode wird somit gedämpft. Ein linearer Zusammenhang zwischen den verschiedenen Mechanismen besteht jedoch nur bei der Existenz einer mittleren Strömung durch den Liner (*bias flow*). Ist keine solche mittlere Strömung vorhanden, so ist der Dämpfungsmechanismus u. a. nicht-linear und zudem deutlich schwächer ausgeprägt (vgl. hierzu [102, 105–109]).

Erste Untersuchungen bezüglich des Dämpfungsverhaltens durchströmter Liner fanden Ende der 70er Jahre statt. 1990 veröffentlichten Hughes und Dowling [108] einen Überblick über den damaligen Kenntnisstand und zeigten Perspektiven auf. Sie entwickelten ein analytisches Modell, das auf den Arbeiten von Howe [43] zur Rayleigh-Konduktivität einer Lochblende beruht. Der Einfluss des Liners wird dabei mittels einer homogenen Randbedingung beschrieben. Dieser Ansatz setzt voraus, dass die einzelnen durchströmten Öffnungen (sowie auch der Abstand l) klein im Vergleich zur Wellenlänge sind. Das akustische Verhalten der einzelnen Öffnungen kann somit unabhängig voneinander betrachtet werden. Zudem formulierten Hughes und Dowling [108] Designrichtlinien für Liner. Sie zeigten, dass die in der Praxis vorherrschende Krümmung der perforierten Platten im Vergleich zu einer äquivalenten ebenen, perforierten Platte keinen nennenswerten Einfluss auf das Dämpfungsverhalten hat, solange azimuthale Änderungen des Schallfeldes in einem ansonsten zylindrischen Liner vernachlässigt werden können.

Dies bedeutet, dass Impedanzen, welche auf oben beschriebenem analytischen Weg oder auch experimentell unter Verwendung so genannter *impedance tubes* ermittelt wurden, unter obigen Voraussetzungen ohne nennenswerte Abweichungen auch für die akustische Beschreibung gekrümmter perforierter Oberflächen verwendet werden können [108]. Hughes und Dowling gaben zudem erste Einblicke in die Auswirkungen einer heißen Kernströmung auf das Verhalten eines Liners [108]. Ihre Arbeit diente der Betrachtung radialer Moden in Nachbrennern, sogenannten *Screech-Instabilitäten*. Eldredge und Dowling [106] sowie später Eldredge [107] entwickelten den Ansatz weiter hinsichtlich einer Betrachtung axialer Moden, respektive Moden höherer Ordnung in zylindrischen und ringförmigen Rohren bzw. Kanälen.

Diverse Untersuchungen experimenteller, theoretischer und numerischer Art bezüglich des Einflusses verschiedener Parameter auf die Dämpfungseigenschaften eines Liners wurden von der Forschergruppe um Sun und Jing veröffentlicht [110,111]. Bellucci et al. [105] führten Messungen des Dämpfungsverhaltens verschiedener unterschiedlich stark durchströmter perforierter Platten durch. Wie Sun et al. [110] verwendeten auch sie dazu eine *impedance tube*. Bellucci et al. [105] entwickelten zudem ein analytisches Modell. Es erlaubt, den Einfluss verschiedener physikalischer Parameter auf das Dämpfungsverhalten perforierter Platten detailliert zu berücksichtigen. Weitere experimentelle Untersuchungen wurden von der Gruppe um Röhle bzw. Heuwinkel et al. durchgeführt [112].

Tam et al. [109] veröffentlichten darüber hinaus u. a. Untersuchungen der detaillierten Strömungsverhältnisse und Absorptionskoeffizienten von Linern unter Anwendung der DNS-Methode. Aufbauend auf den Arbeiten von Mendez et al. [103, 113, 114], die zumeist auf dem kompressiblen LES-Solver AVBP beruhen, verfolgten Eldredge et al. [104] einen ähnlichen Ansatz zur Bestimmung des detaillierten Strömungsfeldes unter Verwendung eines inkompressiblen LES-Solvers. Dassé et al. [102] entwickelten die Arbeit von Mendez et al. weiter und kombinierten die strömungsmechanische mit einer akustischen Betrachtungsweise, unter Verwendung von AVBP (LES). Ihre Ergebnisse weisen gute Übereinstimmungen mit verschiedenen alternativen Ansätzen auf, wie zum Beispiel den numerischen Daten von Jing und Sun [111], dem ana-

lytischen Modell nach Howe [43] oder auch den experimentellen Ergebnissen von Bellucci et al. [105], insbesondere im Bereich niedriger Frequenzen [102].

Neben diesen sehr detaillierten Ansätzen existieren auch globale Modelle zur Beschreibung des Einflusses von Linern auf ein akustisches Gesamtsystem. Repräsentativ seien hier die Untersuchungen von Rehmann und Eldredge [115] erwähnt. Dabei wird der Linner als Teil eines Netzwerkmodells zur Bestimmung der thermoakustischen Stabilität von Verbrennungssystemen modelliert, in diesem Fall konkret von Gasturbinen. Rehmann und Eldredge [115] beziehen sich ebenfalls auf den Ansatz von Eldredge und Dowling [106] bzw. von Howe [43].

6.3 Frequenzabhängige Randbedingungen im Zeitbereich

Im Folgenden wird ein Weg aufgezeigt, um frequenzabhängige Randbedingungen, wie zum Beispiel die experimentellen Daten von Bellucci et al. [105], in die hier durchzuführenden Stabilitätsberechnungen im Zeitbereich zu integrieren. Dies ist essentiell für eine korrekte, quantitative Vorhersage der thermoakustischen Instabilität eines Verbrennungssystems, da diese in der Regel stark von den akustischen Eigenschaften an den Rändern bestimmt wird. Die Transformation erfolgt gemäß einer von Pieringer [6, 116] entwickelten Methode¹, basierend auf einem halb-analytischen Ansatz nach einer Idee von Richter et al. [117].

¹Demnach ist der Transfer einer frequenzabhängigen Randbedingung, wie z.B.

$$\hat{p}(\omega) = \bar{\rho}cZ(\omega)\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{u}}(\omega), \quad (6.1)$$

vom Frequenz- in den Zeitbereich in der Regel komplex. Er umfasst die inverse Fourier-Transformation des Terms und erfordert dabei die Lösung des Faltungsintegrals

$$p'(t) = \bar{\rho}c \int_0^t Z(t-\tau)\mathbf{n}\cdot\mathbf{u}'(\tau)d\tau. \quad (6.2)$$

Aufgrund der Retardierung, $t - \tau$, bringt die exakte, numerische Lösung dieses Integrals aber einen enormen, häufig nicht zu bewältigenden Aufwand mit sich. Zur Umgehung dieser Problematik wurde von Pieringer [6, 116] eine alternative Methode entwickelt, um die Modellierung des dämpfenden Einflusses von Absorbern in einem Raketentriebwerk mittels des Aeroakustik-Codes PIANO zu realisieren. Die generelle Vorgehensweise hierzu wird im Folgenden in Anlehnung an ihre Arbeiten [6, 116] dargestellt.

Ausgangspunkt ist folgende Näherung zur Beschreibung der Impedanz eines verlustbehafteten Rohrstücks der Länge l , erweitert um einen Vorfaktor a [6, 116]:

$$Z(\omega) = a \coth(kl). \quad (6.3)$$

Die Wellenzahl k ist hier eine komplexwertige Größe, gemäß:

$$k = \beta + i \frac{\omega}{c}. \quad (6.4)$$

β entspricht einer frequenzabhängigen Dämpfungskonstanten. Für Berechnungen im Frequenzbereich wäre es problemlos möglich, eine komplexwertige, frequenzabhängige Impedanzrandbedingung gemäß Gleichung 6.3 direkt zu implementieren. Zur Einbindung einer solchen Randbedingung in ein Simulationsmodell im Zeitbereich sind jedoch zusätzliche Transformationsschritte erforderlich [6, 116].

Gemäß Pieringer [6, 116] kann eine \coth -Funktion (mit komplexwertigem Argument) prinzipiell, unter Verwendung von Exponentialfunktionen, wie folgt dargestellt werden [118]:

$$\coth(x + iy) = \frac{e^{(x+iy)} + e^{-(x+iy)}}{e^{(x+iy)} - e^{-(x+iy)}}. \quad (6.5)$$

Terme der Form e^{x+iy} können mittels einer Taylorreihe entwickelt werden [116]. Wird diese Reihe nach dem ersten Glied abgebrochen, ergibt sich näherungsweise [6]:

$$\coth(x + iy) \approx \frac{1 + e^{-(x+iy)}}{1 - e^{-(x+iy)}} = \frac{1 + e^{-x} e^{-iy}}{1 - e^{-x} e^{-iy}}. \quad (6.6)$$

Bezieht man dies auf Gleichung 6.3, so folgt:

$$\frac{1}{\bar{\rho}c} \frac{\hat{p}}{\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}} = a \frac{1 + b e^{-i\omega\tau}}{1 - b e^{-i\omega\tau}}. \quad (6.7)$$

$n \cdot \hat{\mathbf{u}}$ ist der Anteil der Schnelleschwankung normal zum Rand. b beschreibt nun die Dämpfung gemäß:

$$b = e^{-\nu l}. \quad (6.8)$$

Im Gegensatz zu Gleichung 6.4 ist die Dämpfung in dieser weiteren Näherung über der Frequenz konstant. ν repräsentiert eine Konstante, $\tau = 2l/c$ einen Zeitverzug.

Im Absorbermodell von Pieringer ergeben sich diese Parameter teils aus den geometrischen Zusammenhängen, teils dienen sie zum Anpassen des Modells an das Verhalten komplexerer Modelle. Hier erfolgt zunächst eine Loslösung von den geometrischen Zusammenhängen. Die Größen a , l und ν dienen somit primär als Optimierungsparameter zum Nachbilden des Verlaufs komplexer Randbedingungen im Frequenzbereich. $\bar{\rho}$ und c behalten jedoch ihre physikalische Bedeutung. Multipliziert man Gleichung 6.7 aus, so folgt:

$$\hat{p}(1 - be^{-i\omega\tau}) = \bar{\rho}ca \cdot \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}(1 + be^{-i\omega\tau}). \quad (6.9)$$

Terme der Form $e^{-i\omega\tau}$ im Frequenzraum entsprechen einer zeitlichen Verschiebung um die Zeit τ im Zeitraum [6, 116]. Somit folgt für die Druckschwankungen:

$$p' = \bar{\rho}ca \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' + \bar{\rho}cba \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}'(t - \tau) + b \cdot p'(t - \tau), \quad (6.10)$$

respektive für die Schnelleschwankungen [6, 116]:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' = \frac{1}{\bar{\rho}ca} (p' - b \cdot p'(t - \tau)) - b \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}'(t - \tau). \quad (6.11)$$

Dies ermöglicht, frequenzabhängige Impedanzrandbedingungen in den Zeitbereich zu transformieren. Voraussetzung dafür ist, dass sich ihr Verlauf im Frequenzbereich mittels des von Pieringer vorgegebenen Parametersatzes (Gleichung 6.7) approximieren lässt.

6.4 Implementierung der Randbedingungen

Aufgrund der Verwendung der Wellengleichung wird hier eine Formulierung bezüglich der akustischen Druckschwankungen oder ihrer Ableitungen an der jeweiligen Randbedingung benötigt. Eine direkte Verwendung von Gleichung 6.10 ist jedoch nicht zielführend, da sich damit für den betrachteten Anwendungsfall nach Bellucci et al. [105] eine mathematisch instabile Formulierung der Randbedingung ergibt (instabiler Filter). Daher wird Gleichung 6.11 zunächst partiell nach der Zeit abgeleitet:

$$\mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} = \frac{1}{\bar{\rho} c a} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} - b \cdot \frac{\partial p'}{\partial t} (t - \tau) \right) - b \cdot \mathbf{n} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} (t - \tau). \quad (6.12)$$

Unter Verwendung der linearisierten Eulergleichung in Normalenrichtung ($\mathbf{n} \cdot \partial \mathbf{u}' / \partial t = -1 / \bar{\rho} \mathbf{n} \cdot \nabla p'$, $M = 0$) kann die zeitliche Ableitung der Schnelle durch die örtliche Ableitung der Druckschwankung ersetzt werden. Konvektive Terme werden wiederum vernachlässigt. Damit folgt für Gleichung 6.12:

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p' = -\frac{1}{c a} \left(\frac{\partial p'}{\partial t} - b \cdot \frac{\partial p'}{\partial t} (t - \tau) \right) - b \cdot \mathbf{n} \cdot \nabla p' (t - \tau). \quad (6.13)$$

In den FEM-Code kann dieser Ausdruck mittels einer Neumann-Randbedingung eingebunden werden. Die eigentliche Berechnung von Gleichung 6.13 findet zu jedem Zeitschritt in MATLAB statt. Aus numerischen Gründen ist es nicht möglich, alle benötigten Größen direkt am Rand auszuwerten. Deshalb wird im eindimensionalen Fall ein Referenzpunkt unmittelbar vor der Randbedingung definiert, an dem die Werte der Druckschwankung und ihrer örtlichen Ableitung ausgelesen werden. Im dreidimensionalen Fall ist die Definition einer entsprechenden Referenzfläche erforderlich.

Dabei ist zu beachten: Hinsichtlich der Minimierung von Abbildungsfehlern ist ein möglichst geringer Abstand zwischen Rand- und Referenzpunkten anzustreben. Andererseits führt dies zu einer starken Verfeinerung des Berechnungsgitters in den Randbereichen und damit zu einer enormen Erhöhung des Rechenaufwandes. Die durch die Abbildung generierten Fehler können

numerische Instabilitäten bedingen. Durch die Reduzierung der maximalen Ordnung des zeitlichen Lösers (*Backward Differential Formula (BDF)*) von BDF2 auf BDF1 kann dies jedoch umgangen werden. Dadurch wird die künstliche Dämpfung im System erhöht. Generelle Fehler sind dadurch nicht zu erwarten, insbesondere wenn die Zeitschritte, wie im vorliegenden Fall, sehr klein gewählt werden [54]. Die einzelnen Schritte zur Implementierung einer entsprechenden Randbedingung in das verwendete Softwarepaket sind im Anhang A beschrieben.

6.5 Validierung der Randbedingungen

Die Validierung erfolgt zunächst anhand einfacher, analytischer, eindimensionaler Testfälle. Diese werden später auf drei Raumdimensionen erweitert. Abschließend findet ein Vergleich gegen experimentelle Daten von Bellucci et al. [105] statt.

6.5.1 Beschreibung der Testfälle

Die Berechnungen finden im Zeitbereich, unter Verwendung eines direkten, iterativen Solvers statt. Gelöst wird die Wellengleichung ohne Verluste in einem homogenen Medium (Luft) der Temperatur $T = 20^\circ \text{C}$. Die örtliche Auflösung des Rechengebiets erfolgt mittels linearer Lagrange-Elemente, die zeitliche Auflösung mittels einer BDF1 (beide erster Ordnung). Der verwendete Zeitschritt ist konstant. Er umfasst $\Delta t = 1.0 \cdot 10^{-6} \text{ s}$. Die örtliche Diskretisierung ist an den jeweiligen Validierungsfall angepasst (vgl. Abschnitt 6.5.2 bzw. 6.5.3). Die Anregung entspricht einer Überlagerung sinusförmiger Druckschwankungen konstanter Amplitude, jedoch verschiedener Frequenz und Phase (Abbildung 6.2). Analog zu den Validierungsdaten aus Bellucci et al. [105] umfasst das betrachtete Frequenzintervall $50 \text{ Hz} \leq f \leq 600 \text{ Hz}$. Die Intervallschritte sind dabei $\Delta f = 10 \text{ Hz}$. Die Berechnungsdauer entspricht stets $t = 0.2 \text{ s}$. Dadurch kann der betrachtete Frequenzraum in Intervallen von 5 Hz aufgelöst werden. Aus Speichergründen erfolgt die Auswertung jedoch

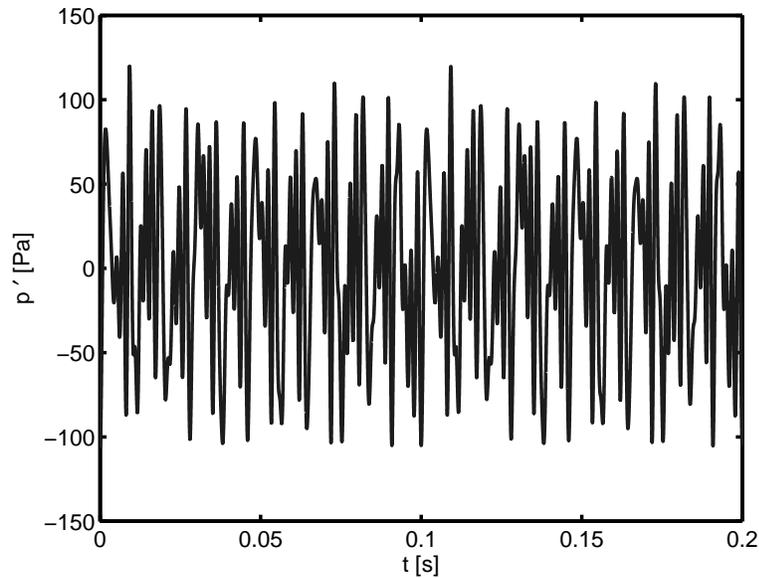


Abbildung 6.2: Zeitliches Anregungssignal zur Validierung der Randbedingung

in Schritten von 10 Hz. Verglichen werden die Reflexionsfaktoren. Im Fall der transienten Berechnung werden sie mittels einer *Fast-Fourier-Transformation* ermittelt.

6.5.2 Eindimensionale Betrachtung

Die Länge des betrachteten Rechengebiets umfasst zwei Meter. Die örtliche Diskretisierung erfolgt mittels eines äquidistanten Gitters der Kantenlänge $\Delta x = 0.001 \text{ m}$. Der Referenzpunkt zum Auslesen der Schwankungsgrößen befindet sich $\Delta x = 0.001 \text{ m}$ vom dem Randpunkt entfernt, an dem die Impedanzrandbedingung implementiert ist. Angeregt wird von der gegenüberliegenden Randbedingung, entgegen der positiven x-Achse. Zunächst wird eine nicht reflektierende Randbedingung ($r = 0$) unter Verwendung folgender Formeln in der Routine in MATLAB realisiert [3]:

$$Z = \bar{\rho}c \frac{1+r}{1-r}, \quad (6.14)$$

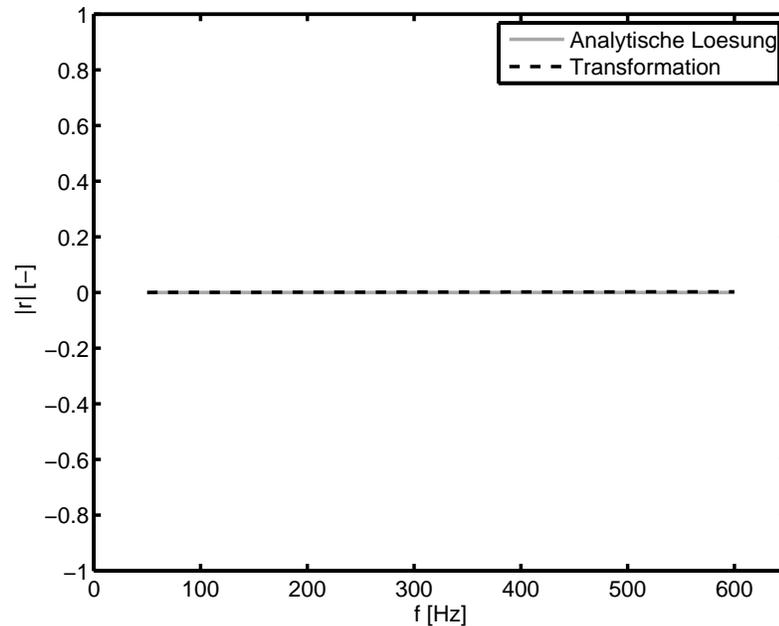


Abbildung 6.3: Vergleich der Amplituden von r am Referenzpunkt für $r = 0$ (1D)

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p' = -\frac{\bar{\rho}}{Z} \frac{\partial p'}{\partial t}. \quad (6.15)$$

Aus Abbildung 6.3 wird ersichtlich, dass die analytischen Ergebnisse sehr gut mittels des numerischen Verfahrens nachgebildet werden können. Da die Amplituden äußerst klein bzw. gleich Null sind, ist die Information bezüglich der Phase des Reflexionsfaktors physikalisch irrelevant. Daher wird hier auf deren explizite Darstellung verzichtet.

Auch für $r = 0.5$ stimmen numerische und analytische Ergebnisse, sowohl bezüglich der Amplitude als auch der Phase, über dem gesamten betrachteten Frequenzbereich sehr gut überein (Abbildung 6.4). Um die korrekte Implementierung des Modells zu belegen, sind in Abbildung 6.5 zwei Druckschwankungsverläufe über dem Ort für verschiedene Zeitschritte gegeben. Die Anregung erfolgt in diesem Fall ausschließlich mit einer einzelnen sinusförmigen Welle ($P = 2 \text{ Pa}$, $f = 500 \text{ Hz}$). Deutlich ist das dämpfende Verhalten der Randbedingung zu erkennen. Wie erwartet ist die Amplitude der Druckschwankung

6.5 Validierung der Randbedingungen

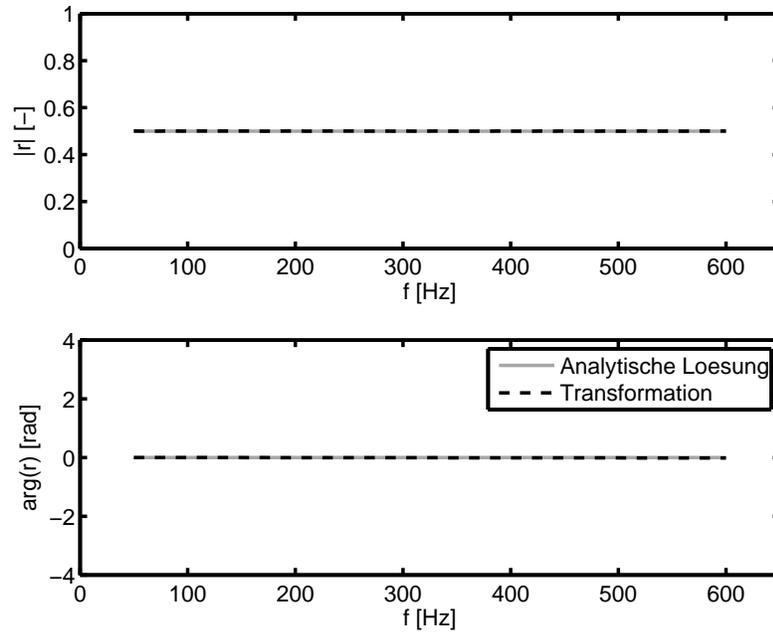


Abbildung 6.4: Vergleich der Amplituden und Phasen von r am Referenzpunkt für $r = 0.5$ (1D)

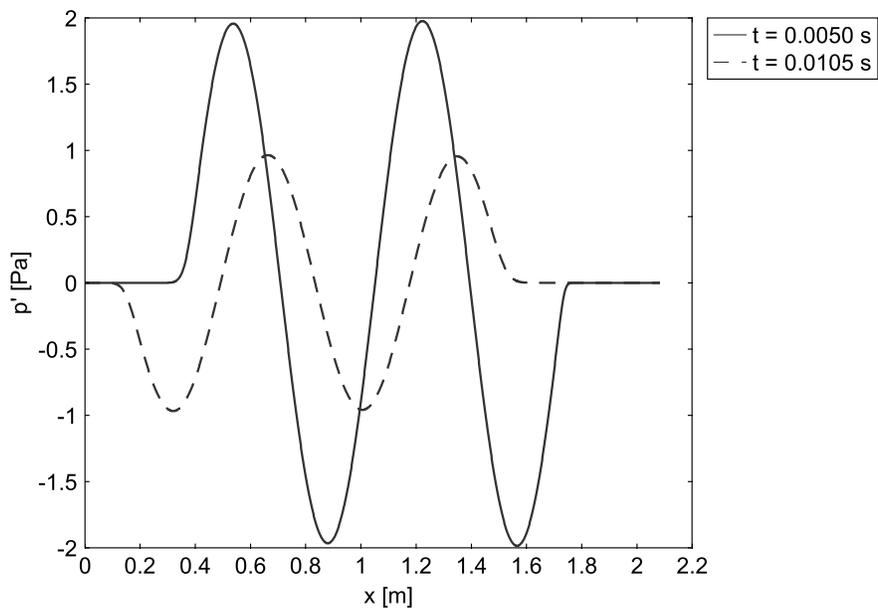


Abbildung 6.5: Druckschwankungsverläufe über dem Ort für $r = 0.5$ (1D)

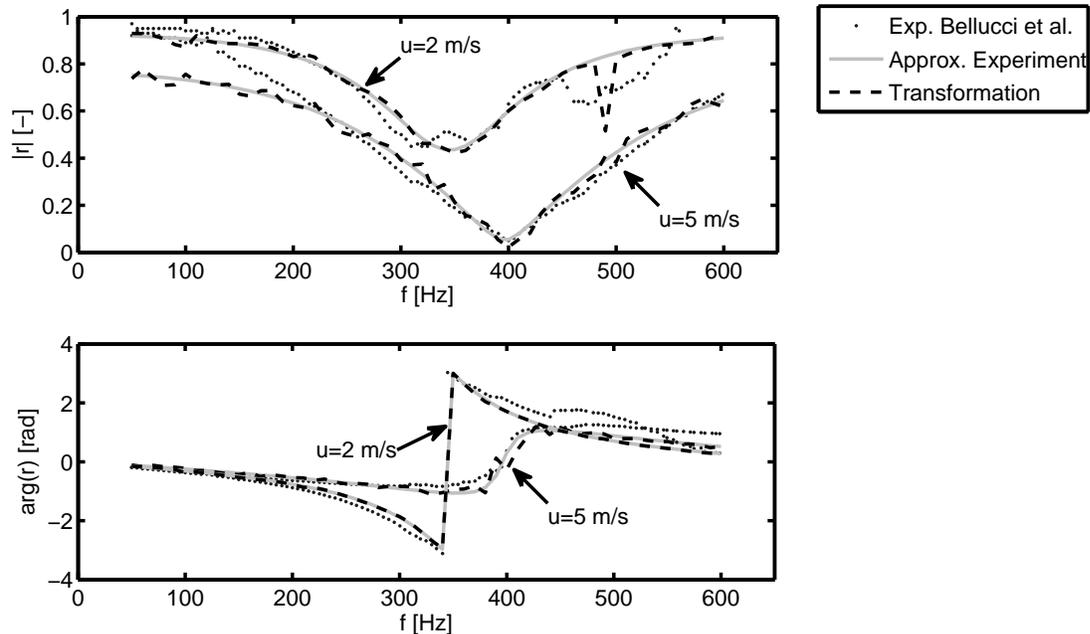


Abbildung 6.6: Amplitude u. Phase von r aus Experiment [105] (Platte K, $u = 2$ m/s u. $u = 5$ m/s), Approximation und Transformation (1D)

kung nach dem Auftreffen auf die linksseitige Begrenzung des Rechengebiets um die Hälfte reduziert. Eine Verschiebung der Phase findet nicht statt.

Ergebnisse bezüglich der eigentlichen Linerrandbedingung nach Bellucci et al. [105] sind in Abbildung 6.6 gezeigt. Betrachtet werden zwei verschiedene Konfigurationen einer perforierten Platte (Platte K). Die unterschiedlichen Verläufe der beiden Reflexionsfaktoren über der Frequenz resultieren aus einer unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeit ($u = 2$ m/s und $u = 5$ m/s). Je geringer diese ist, desto weniger dämpfend verhält sich der Liner. Die experimentellen Daten werden zunächst im Frequenzbereich mittels der Methode der kleinsten Fehlerquadrate approximiert [119]. Aus Abbildung 6.6 wird ersichtlich, dass die transformierten numerischen Ergebnisse aus den Zeitbereichsrechnungen auch hier sehr gut die approximierten Daten, sowohl bezüglich der Amplitude als auch der Phase, wiedergeben können.

6.5.3 Dreidimensionale Betrachtung

Die Betrachtung wird nun auf drei Raumdimensionen erweitert. Zunächst wird nochmals das ebene Auftreffen axialer Wellen auf die Impedanzrandbedingung untersucht. Diese räumliche Anordnung entspricht prinzipiell dem Aufbau einer *impedance tube*, die zur experimentellen Bestimmung der Dämpfungseigenschaften perforierter Platten dient. Der Radius ist hier $R = 0.05 \text{ m}$. Die Länge beträgt $l = 0.6 \text{ m}$. Die örtliche Diskretisierung des zylindrischen Rechengebiets erfolgt mittels 4243 tetraedischer Elemente. Die Diskretisierung ist so gewählt, dass eine Welle der Frequenz $f = 600 \text{ Hz}$ im gesamten Berechnungsgebiet mit mindestens 20 Punkten örtlich aufgelöst werden kann. Die Referenzebene befindet sich $\Delta x = 0.005 \text{ m}$ von der Impedanzrandbedingung entfernt. In Abbildung 6.7 sind die Ergebnisse für einen Reflexionsfaktor von $r = 0.5$ dargestellt. Auch hier wird die sehr gute Funktionsfähigkeit des Modells ersichtlich. Die geringfügigen Abweichungen bezüglich der Phase, die hier über dem betrachteten Frequenzbereich marginal fällt, sind auf den Zeitverzug zwischen Referenz- und Randpunkten zurückzuführen. Wird der Abstand ausreichend klein gewählt, ist dieser Effekt vernachlässigbar. Alternativ könnte ein entsprechender Korrekturterm eingeführt werden.

Abschließend wird ein Liner zylindrischer Form untersucht (vgl. Abbildung 6.8). Dies repräsentiert die geometrische Konfiguration, welche dem realen Einsatz eines Liners am meisten entspricht. An der stromauf gelegenen Stirnfläche wird eine nicht reflektierende Randbedingung implementiert. Die Länge des Teilbereichs des zylindrischen Liners umfasst $l = 0.1 \text{ m}$. Die ebenfalls zylindrische Referenzebene befindet sich in einem radialen Abstand von $\Delta R = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ von der Linerrandbedingung entfernt. Art und Ort der Anregung bleiben zum vorher betrachteten Fall unverändert. Die Anzahl der Gitterelemente erhöht sich nun auf 23139 tetraedische Elemente. Aus Abbildung 6.9 sind auch für diesen Fall sehr gute Übereinstimmungen zwischen den approximierten Daten im Frequenzbereich und den Ergebnissen aus der transienten FEM-Berechnung zu erkennen.

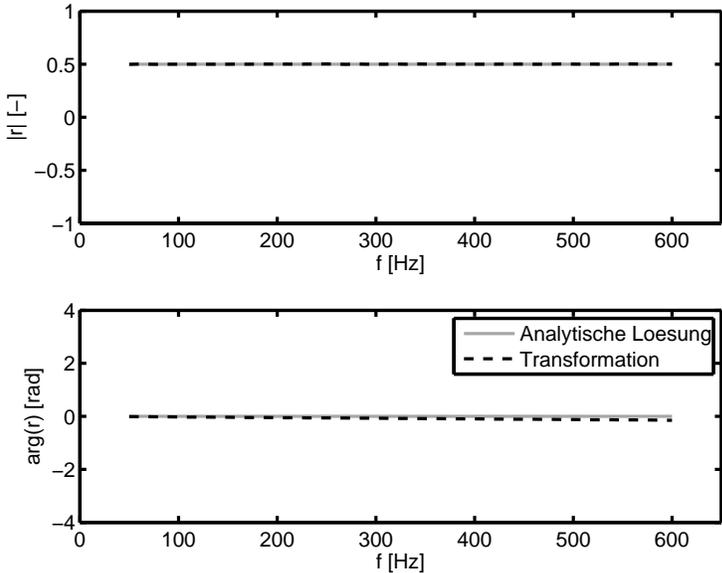


Abbildung 6.7: Amplitude und Phase aus Analytik und Numerik für $r = 0.5$ (3D)

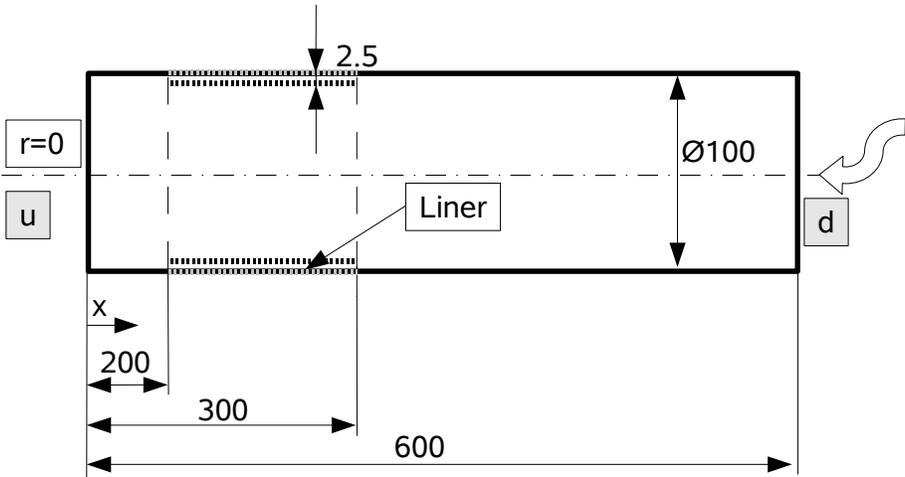


Abbildung 6.8: Schematische Darstellung des betrachteten zylindrischen Liners (3D)

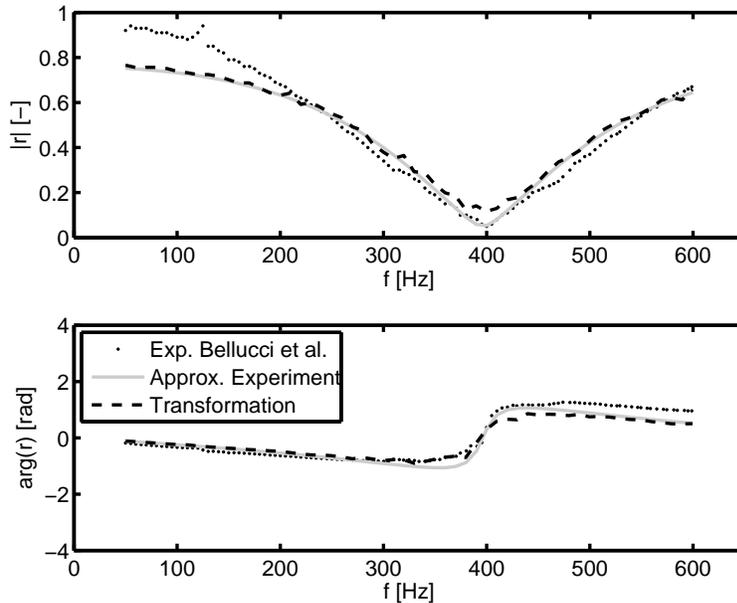


Abbildung 6.9: Amplitude u. Phase von r aus Experiment [105] (Platte K, $u = 5 \text{ m/s}$), Approximation und Transformation (3D-radial)

6.6 Zusammenfassung

Zusammenfassend kann die Implementierung des Ansatzes zum Transfer frequenzabhängiger Randbedingungen in den Zeitbereich im verwendeten Simulationscode als sehr erfolgreich betrachtet werden. Das Modell kann nicht nur für die Implementierung von Linerrandbedingungen verwendet werden, sondern für jede Art von frequenzabhängiger Randbedingung, die mittels des Ansatzes von Pieringer [6, 116] nachgebildet werden kann (vgl. Kapitel 7).

7 Stabilitätsbetrachtungen anhand eines Einzelbrennerprüfstands

Abschließend erfolgt eine Untersuchung der thermoakustischen Stabilität einer Prüfstandskonfiguration für Einzelbrennersysteme, unter Verwendung der in den vorausgehenden Kapiteln beschriebenen Modelle.

7.1 Geometrie und Prüfstandskonfiguration

In Abbildung 7.1 ist schematisch der Aufbau des Prüfstands inklusive des hier verwendeten BRS-Brenners dargestellt. Dieser Brenner wurde ebenfalls zu Forschungszwecken am Lehrstuhl für Thermodynamik der Technischen Universität München entwickelt. Er wird vorgemischt betrieben. Die in Abbildung 7.1 repräsentativ dargestellte Form und Position der Flamme basiert auf experimentell ermittelten Chemilumineszenzdaten von Komarek [120]. Details zum Prüfstandsaufbau sind der Arbeit von Komarek et al. [120] zu entnehmen.

Experimentelle Untersuchungen der thermoakustischen Stabilität der Prüfstandskonfiguration fanden für verschiedene Leistungen ($P = [30 \text{ kW}, 50 \text{ kW}, 70 \text{ kW}]$) bei unterschiedlicher Luftzahl ($\lambda_{BL} = [1.1, 1.3]$) statt [121]. Zur Anwendung kamen dabei zwei unterschiedliche Brennkammerlängen ($l = 0.3 \text{ m}, l = 0.7 \text{ m}$). Die Variante mit kurzer Brennkammer erwies sich in allen betrachteten Fällen als thermoakustisch instabil. Mit der langen Brennkammer konnten sowohl stabile als auch instabile Betriebsbereiche erzielt werden [121].

Nachfolgend erfolgt eine Beschränkung auf den Fall $P = 70 \text{ kW} - \lambda_{BL} = 1.1$ bei langer Brennkammer. Er weist ein thermoakustisch instabiles Verhalten auf.

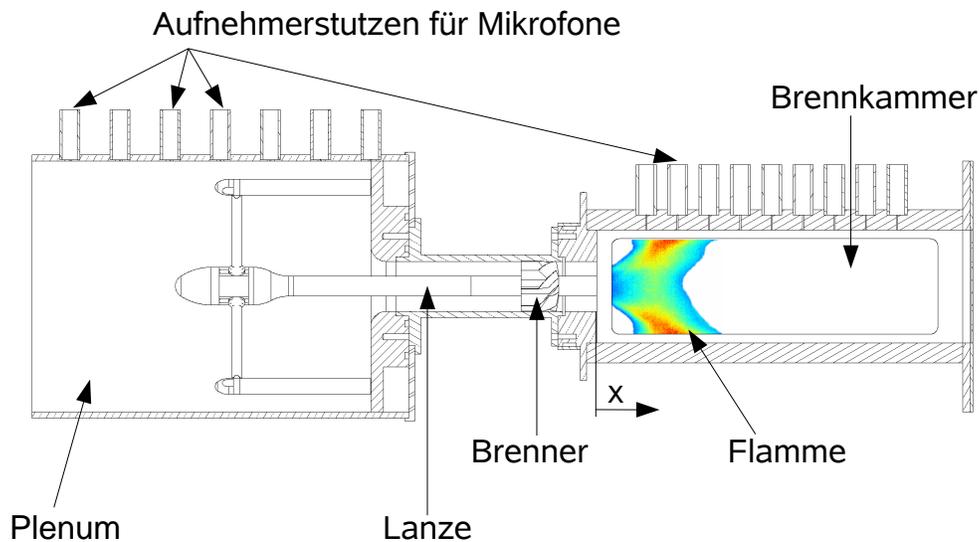


Abbildung 7.1: Schematische Darstellung des betrachteten Einzelbrennerprüfstands mit BRS-Brenner [120]

7.2 Geometrische Modellierung

Zur Reduzierung des Berechnungsaufwands wird lediglich ein Viertel des Prüfstands modelliert. Das verwendete, unstrukturierte Gitter umfasst 52219 tetraedische Elemente (Abbildung 7.2). Die örtliche Diskretisierung erfolgt mittels linearer Lagrange-Elemente. Um die physikalisch korrekte Ausbreitung der akustischen Wellen weitestmöglich gewährleisten zu können, werden im Bereich des Brenners periodische Randbedingungen gesetzt (vgl. Abschnitt 7.4).

Um zu belegen, dass die Verwendung eines Viertels des Prüfstands identische Ergebnisse ergibt wie eine 360°-Betrachtung, sind in Abbildung 7.3 zwei entsprechende Spektren einander gegenübergestellt ($p_0 = 2 \cdot 10^{-5} Pa$). Sie wurden für kalte Luft ($c = 343 m/s$; $\bar{\rho} = 1.25 kg/m^3$) mit Hilfe eines parametrischen, direkten Löser¹ ermittelt. Die Anregung des Systems erfolgt dabei am Einlass (Stirnseite des Plenums), gemäß: $\mathbf{n} \cdot \left(\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \hat{p} \right) = -\hat{u}_{an} i\omega$ mit $\hat{u}_{an} = 0.1 m/s$. Am

¹in COMSOL MULTIPHYSICS (Version 3.5; ACOUSTIC MODE - TIME-HARMONIC ANALYSIS)

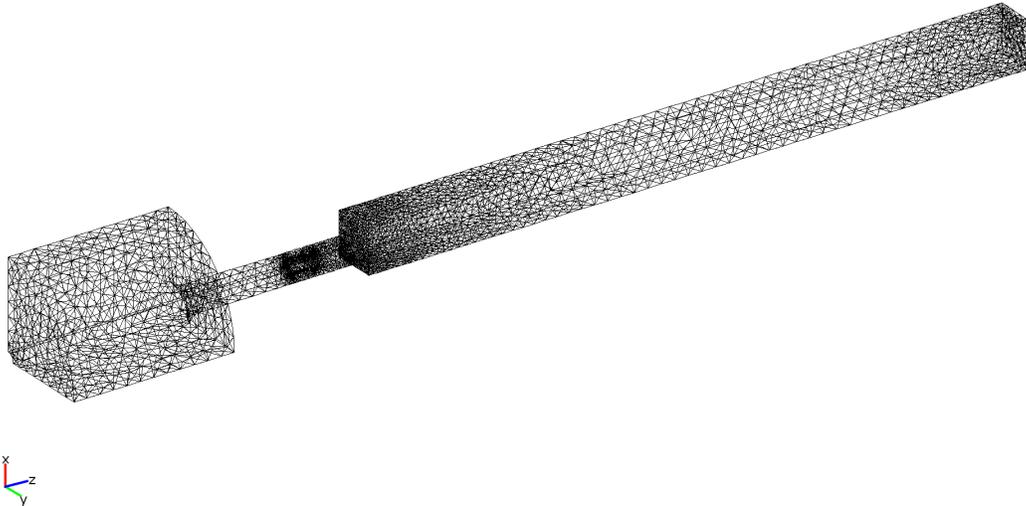


Abbildung 7.2: Unstrukturiertes Berechnungsgitter und Geometrie des BRS-Brenners mit zugehörigem Einzelbrennerprüfstand im FEM-Code

Auslass wird eine Impedanzrandbedingung gewählt. Deren Wert wird weitgehend beliebig auf $Z = 100 \text{ kg}/(\text{sm}^2)$ festgelegt. Mit Ausnahme der periodischen Ränder im Bereich des Brenners sind alle übrigen Wände als schallhart modelliert (Neumann-Randbedingung, $\mathbf{n} \cdot \nabla \hat{p} = 0$). Der Referenzpunkt zur Ermittlung der Spektren befindet sich in der Brennkammer. Die beiden Ergebnisse in Abbildung 7.3 sind deckungsgleich. Die Betrachtung eines Viertels des Prüfstands ist somit für die folgenden Untersuchungen zulässig.

Interessant ist zudem, dass die in den experimentellen Untersuchungen beobachteten, äußerst niedrigen Druckschwankungsamplituden in der Brennkammer im Bereich von etwa $f = 400 \text{ Hz}$ bis $f = 600 \text{ Hz}$ bei einer Anregung von stromauf hiermit auch auf numerischem Weg nachgewiesen werden konnten. Sie scheinen im Wesentlichen auf der Geometrie des Prüfstandes zu beruhen.

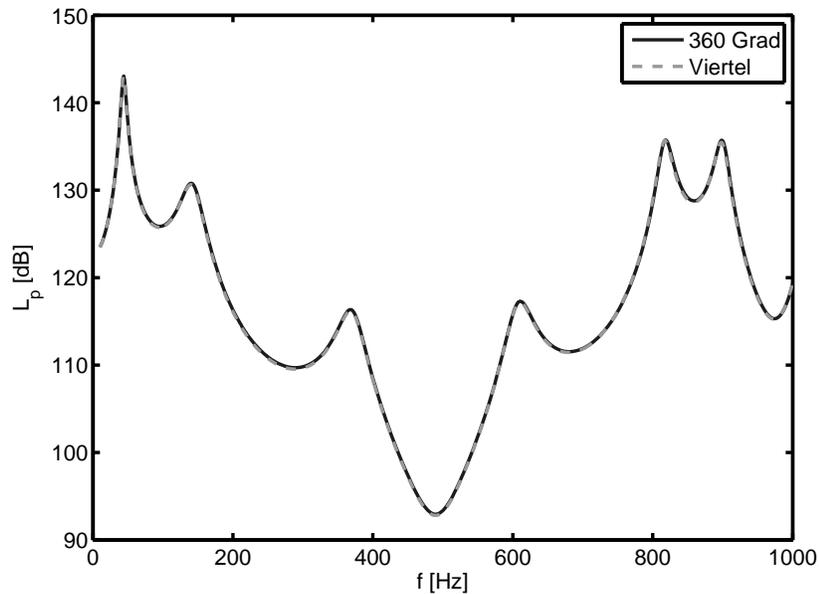


Abbildung 7.3: Spektrum eines Viertels der Prüfstandskonfiguration im Vergleich zur 360°-Variante

7.3 CFD-Interfaces

Ausgangspunkt für die CFD-Interfaces ist wiederum eine numerische Simulation des mittleren, stationären Strömungsfelds. Hier wird auf eine bestehende URANS-Rechnung mit Wärmefreisetzung ($P = 70 \text{ kW}$, $\lambda_{BL} = 1.3$) auf einem Viertel der Prüfstandsgeometrie zurückgegriffen [120]. Diese ist auf den strömungsmechanisch relevanten Bereich um den Brenner beschränkt. Da die zeitlichen Änderungen im Strömungsfeld vernachlässigbar gering sind [122], wird auf eine zeitliche Mittelung des instationären Datensatzes verzichtet. Stattdessen erfolgt die Auswertung anhand eines repräsentativen Zeitpunktes. Beispielhaft ist in Abbildung 7.4 die Absolutgeschwindigkeit der mittleren Strömung in der untersuchten Konfiguration dargestellt.

Aus den strömungsmechanischen Rohdaten werden zunächst die Gradienten des mittleren Totaldrucks direkt, unter Verwendung des Postprocessing-Programms CFX5POST, mittels folgendem Ansatz bestimmt:

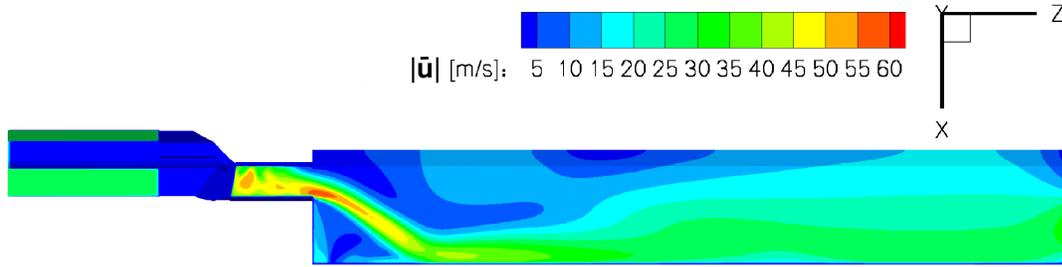


Abbildung 7.4: Absolutgeschwindigkeit der mittleren Strömung im eingeschlossenen BRS-Brenner ($P = 70 \text{ kW}$, $\lambda_{BL} = 1.3$, Seitenansicht)

$$\frac{\partial \bar{p}_t}{\partial x} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \bar{u} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \bar{v} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \bar{w} \right) + 0.5 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2), \quad (7.1)$$

$$\frac{\partial \bar{p}_t}{\partial y} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \bar{u} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \bar{v} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \bar{w} \right) + 0.5 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial y} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2), \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial \bar{p}_t}{\partial z} = \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \bar{u} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \bar{v} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \bar{w} \right) + 0.5 \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{w}^2). \quad (7.3)$$

Die Erstellung des CFD-Interfaces für die akustischen Verluste erfolgt im Wesentlichen analog zur Vorgehensweise in Abschnitt 5.2.3.2². Es resultiert das in Abbildung 7.5 dargestellte Feld des hydrodynamischen Anteils des Verlustterms.

Bei der Erstellung des CFD-Interfaces für die mittlere Dichte wird auf eine integral korrekte Abbildung der Daten auf das FEM-Gitter verzichtet. Hier sind etwaige durch eine Interpolation generierte Fehler kaum ausschlaggebend, da mittels dieses Interfaces lediglich die Flammenform sowie der Übergang zwischen kaltem und heißem Medium bestimmt werden³. Ansonsten erfolgen die einzelnen Transferschritte zur Realisierung dieses Interfaces analog zur Vorgehensweise im Rahmen der Verluste (vgl. Abschnitt 5.2.3.2). Nachdem

²Auch hier erfolgt eine Beschränkung des hydrodynamischen Anteils des Verlustterms auf Werte kleiner oder gleich Null.

³Im restlichen Feld ist die mittlere Dichte, unter Vernachlässigung von Kühleffekten an der Wand, näherungsweise konstant.

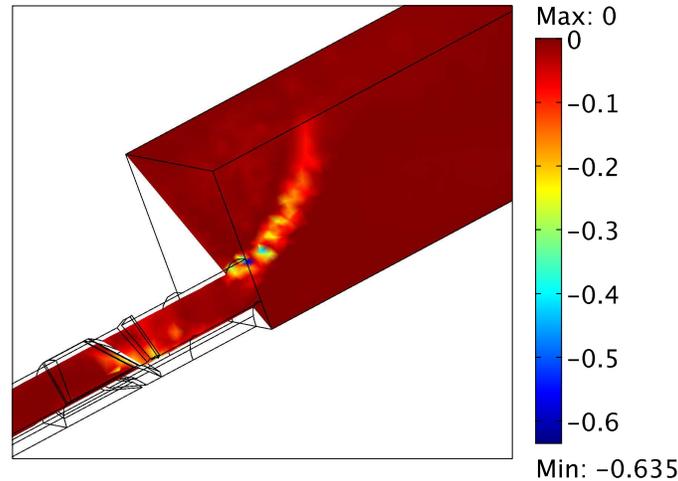


Abbildung 7.5: Hydrodynamischer Anteil des akustischen Verlustterms (BRS)
 V_{hyd} in $[kg/(m^3 s)]$

der Bereich der CFD-Interfaces generell kleiner ist als die Länge der betrachteten Prüfstandskonfiguration, kommt hier zusätzlich folgende Gleichung zum Einsatz:

$$\bar{\rho} = \begin{cases} 1.18 \text{ kg/m}^3 & , \text{ falls } z < -0.06 \text{ m} \\ \bar{\rho}_{CFD} & , \text{ falls } z \geq 0.06 \text{ m} \end{cases} \quad (7.4)$$

Die resultierende Dichteverteilung im FEM-Code ist in Abbildung 7.6 dargestellt.

7.4 Randbedingungen

Mit Ausnahme der stirnseitigen Randbedingungen werden alle Ränder zunächst als akustisch hart modelliert (Neumann-Randbedingung, $\mathbf{n} \cdot \nabla p' = 0$). Wärmeverluste an den Rändern werden nicht explizit modelliert. Da sie jedoch in der CFD-Rechnung enthalten sind, werden sie trotzdem indirekt über das CFD-Interface der mittleren Dichte in gewisser Weise berücksichtigt.

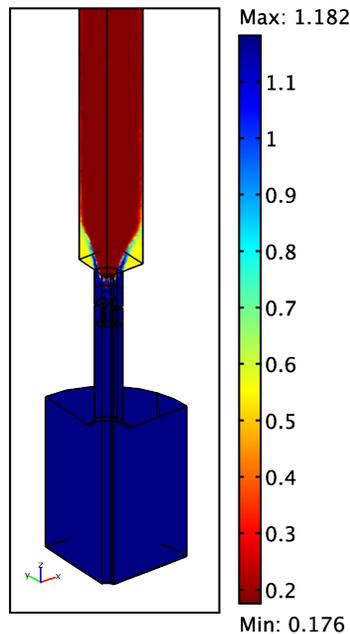


Abbildung 7.6: Ausschnitt des mittleren Dichtefeldes (BRS) in $[kg/m^3]$

Am Einlass ist im Experiment eine Sintermetallplatte montiert. Akustische Untersuchungen an einer ähnlichen Platte zeigen, dass sich ein solcher Abschluss nahezu schallhart verhält [123]. Deshalb wird dort $r = 0.95$ angenommen.

Im Bereich des Drallerzeugers sind periodische Randbedingungen implementiert (vgl. Abschnitt 7.2). In den übrigen Bereichen des Prüfstands wird darauf verzichtet, da, mit Ausnahme des Bereichs um den Brenner, die Schallausbreitung als eben betrachtet wird. Dort findet folglich kein Energieaustausch über die Ränder statt. Die Plausibilität dieser Annahme wurde bereits in Abschnitt 7.2 bestätigt.

Die Modellierung der Randbedingung am Auslass ist deutlich umfangreicher. Experimentelle Untersuchungen zeigten, dass die Verwendung einer mit Durchlässen versehenen Abschlussplatte generell zu einer komplexen, frequenzabhängigen Randbedingung führt, ähnlich der des Liners in Kapitel 6. Aufgrund von inkonsistenten Messergebnissen bezüglich der Reflexionskoeffizienten in der verwendeten Prüfstandskonfiguration, wird hierfür auf alternative Messungen [124] zurückgegriffen. Diese fanden mit der gleichen Ab-

schlussplatte, jedoch an einem anderen Prüfstand statt. Die Reflexionskoeffizienten sind davon unabhängig. Sie sind jedoch nicht unabhängig von Änderungen der Leistung und der Luftzahl für den betrachteten Anwendungsfall. In Abgleich mit den Messergebnissen von Bellucci et al. [105] und Alemela [124] erfolgt daher für den hier betrachteten Fall eine manuelle Erhöhung des Absolutwerts des von Alemela gemessenen Reflexionsfaktors um ca. $\Delta|r| = 0.1^4$.

Der Verlauf des Reflexionskoeffizienten kann nach einer entsprechenden Anpassung des Transferalgorithmus aus Kapitel 6 schließlich mittels des Parametersatzes von Pieringer ([116], [6]) approximiert werden. Bei der Darstellung in Abbildung 7.7 wurde bereits das Offset des Absolutwertes von ca. $\Delta|r| = 0.1$ im Vergleich zu den experimentellen Daten berücksichtigt. Die verwendete mittlere Schallgeschwindigkeit für die Approximation entstammt den numerischen Daten von Komarek [120] (Mittelung der Daten über dem Auslass: $c = 824.149 \text{ m/s}$, $\bar{\rho} = 0.195 \text{ kg/m}^3$).

Zur Überprüfung des korrekten Transfers der Randbedingung in den Zeitbereich wird die Prüfstandsgeometrie auf ausschließlich die Brennkammer reduziert. Die Referenzebene wird in einem Abstand von zwei Millimetern vom Auslass entfernt implementiert (vgl. Kapitel 6). Die Anregung ist identisch zu jener in Kapitel 6. Sie erfolgt von der gegenüberliegenden Seite aus, nun jedoch für ein Frequenzintervall von $20 \text{ Hz} < f < 420 \text{ Hz}$, mit einer Schrittweite von $\Delta f = 20 \text{ Hz}$.

Das verwendete, unstrukturierte Gitter umfasst 11102 tetraedische Elemente. Die gesamte Berechnungszeit beträgt $t = 0.2 \text{ s}$. Sie beinhaltet somit zwei Perioden der niedrigsten betrachteten Frequenz. Gemäß Abbildung 7.7 stimmen die fouriertransformierten Ergebnisse sehr gut mit den approximierten Werten überein⁵.

⁴Die Messungen von Alemela [124] fanden entweder in einem kalten bzw. vorgewärmten Medium statt, oder bei einer Wärmefreisetzung von $P = 50 \text{ kW}$, anstelle der hier benötigten $P = 70 \text{ kW}$. Unter Berücksichtigung der Messdaten von Bellucci et al. [105] sowie weiterer Messreihen [124] wurde angenommen, dass eine Leistungssteigerung um $\Delta P = 20 \text{ kW}$ hier in erster Näherung zu einem Anwachsen des Absolutwerts des Reflexionsfaktors um ca. $\Delta|r| = 0.1$ führt. Generell kann jedoch ausgesagt werden, dass jede Änderung der Leistung und der Luftzahl und somit der Temperatur zu (leichten) Veränderungen bezüglich des Amplituden- und Phasengangs des zugehörigen Reflexionskoeffizienten führt.

⁵Diese, sowie sämtliche weitere transiente Berechnungen im Rahmen dieses Kapitels finden unter Verwen-

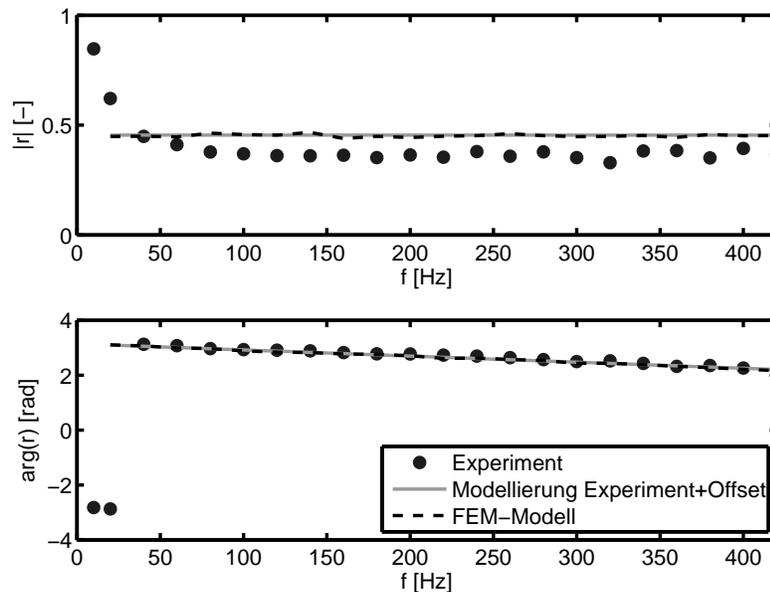


Abbildung 7.7: Frequenzabhängiger Reflexionsfaktor der verwendeten Abschlussplatte (BRS)

7.5 Wärmefreisetzung

Zur Modellierung der Wärmefreisetzung wird im Wesentlichen das modifizierte $n - \tau$ -Modell nach Pankiewitz [3] verwendet. Im Gegensatz zur Vorgehensweise von Pankiewitz wird die Flamme dabei aber nicht mehr als konische Geometrie modelliert. Ihre Form orientiert sich nun an den Ergebnissen der CFD-Rechnung und wird bestimmt durch den Verlauf der mittleren Dichte. Die Ausdehnung der Flamme wird über ein entsprechendes Intervall der mittleren Dichte festgelegt. Die resultierende, ortsfeste Flammenform ist in Abbildung 7.8 dargestellt, zusammen mit der entsprechenden Verteilung der mittleren Schallgeschwindigkeit. Diese wird ebenfalls mit Hilfe der mittleren Dichte bestimmt, gemäß:

dung von COMSOL MULTIPHYSICS, Version 3.5, statt. Dabei kann der bisherige zeitliche Lösungsalgorithmus BDF durch die hierfür robustere, neue Variante *Generalised α* ersetzt werden. Für die Berechnungen im Rahmen dieses Kapitels wurde die Defaulteinstellung $\alpha^* = 0.75$ verwendet.

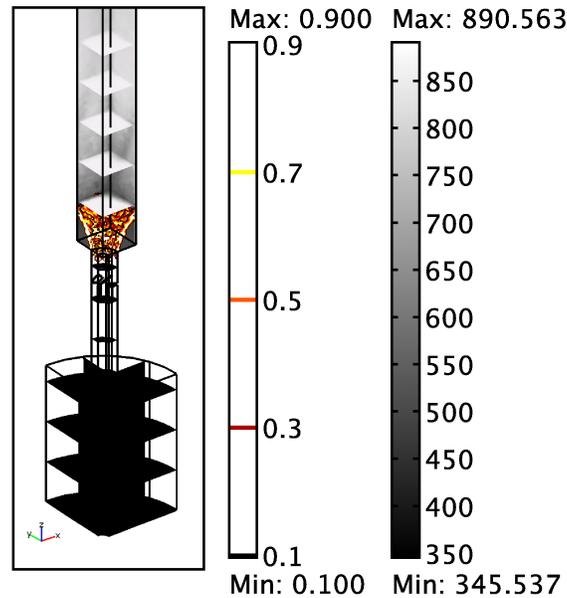


Abbildung 7.8: Flammenform und Verteilung der mittleren Schallgeschwindigkeit (Legende: links: $\bar{\rho}$ [kg/m^3], rechts: c [m/s])

$$c^2 = \kappa \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}. \quad (7.5)$$

Die mittlere Geschwindigkeit am Brenneraustritt \bar{u}_B entstammt der CFD-Simulation von Komarek [120], durch eine Mittelung der axialen Geschwindigkeit (z -Komponente) auf der Brenneraustrittsfläche ($z = 0$). Sie umfasst für $P = 70 \text{ kW}$ bei $\lambda_{BL} = 1.3$ $\bar{u}_{B,1.3} \approx 25 \text{ m/s}$. Unter Verwendung des Luftzahlverhältnisses wird sie an den hier betrachteten Anwendungsfall angepasst: $\bar{u}_B = 1.1/1.3 \bar{u}_{B,1.3}$ [122].

Als Referenzpunkt zur Bestimmung des Zeitverzugs τ dient im FEM-Modell ein zusätzlich implementierter Punkt in der Brenneraustrittsebene. Der Schwerpunkt der Flamme wird auf Basis des experimentell ermittelten Abstands zwischen der Brenneraustrittsebene und dem Intensitätsmaximum der Wärmefreisetzung festgelegt ($\Delta z = 0.0456 \text{ m}$) [122]. Der Zeitverzugswert lautet demnach $\tau = \Delta z / \bar{u}_B \approx 2.14 \cdot 10^{-3} \text{ s}$. Entsprechend der Empfehlungen von Pankiewitz [3] wird für den Sättigungsparameter der Wärmefreisetzung μ , der zur Beschreibung der Nichtlinearität der Flamme dient, $\mu = 0.4$ gewählt.

Charakteristische Größe	Formel	Wert
Zeit	$t_0 = l_0 / u_0$	$2.58 \cdot 10^{-4} \text{ s}$
Frequenz	$f_0 = u_0 / l_0$	3872.8 Hz
Druck	$p_0 = Z_0 u_0$	143350 Pa
Dichte	$\rho_0 = Z_0 / u_0$	1.18 kg/m^3
Volum. Wärmefreisetzungsrate	$\dot{q}_0 = Z_0 u_0^2 / l_0$	5.5518^8 W/m^3

Tabelle 7.1: Entdimensionierte Größen des Stabilitätsmodells (BRS)

7.6 Entdimensionierung

Zur Realisierung der Stabilitätsberechnungen erweist es sich hinsichtlich der numerischen Stabilität als essentiell, eine Entdimensionierung des Berechnungsfalls vorzunehmen, gemäß der Vorgehensweise von Pankiewitz [3] bzw. Wanke und Sattelmayer [74]⁶. Für eine entsprechende Entdimensionierung werden hier folgende charakteristische Größen verwendet:

- Geschwindigkeit: $u_0 = 348.55 \text{ m/s}$ - mittlere Schallgeschwindigkeit am Einlass.
- Länge: $l_0 = 0.09 \text{ m}$ - Kantenlänge des Brennkammerquerschnitts.
- Impedanz: $Z_0 = 411.29 \text{ Pa} \cdot \text{s/m}$ - Impedanz am Einlass.

Daraus ergeben sich, gemäß der Vorgehensweise von Pankiewitz [3], die in Tabelle 7.1 aufgelisteten entdimensionierten Größen. Die mittlere Geschwindigkeit an der Brenneraustrittsebene ist demnach $\bar{u}_B = 0.061$, der Zeitverzug $\tau = 8.3$ sowie der Interaktionsindex $n = 175.45$.

⁶Im verwendeten Simulationscode existiert zwar eine automatische interne Skalierung. Externe Funktionen, wie zum Beispiel die Berechnung der Wärmefreisetzungschwankungen in MATLAB, sind davon jedoch vermutlich unbeeinflusst. Dies bedingt teils starke numerische Instabilitäten. Eine gewisse Abhilfe kann durch eine Minimierung des Berechnungszeitschritts erzielt werden, jedoch ist dies zumeist nicht ausreichend und häufig auch nicht zielführend. Eine bessere Alternative ist daher eine entsprechende manuelle Skalierung bzw. Entdimensionierung des gesamten Modells.

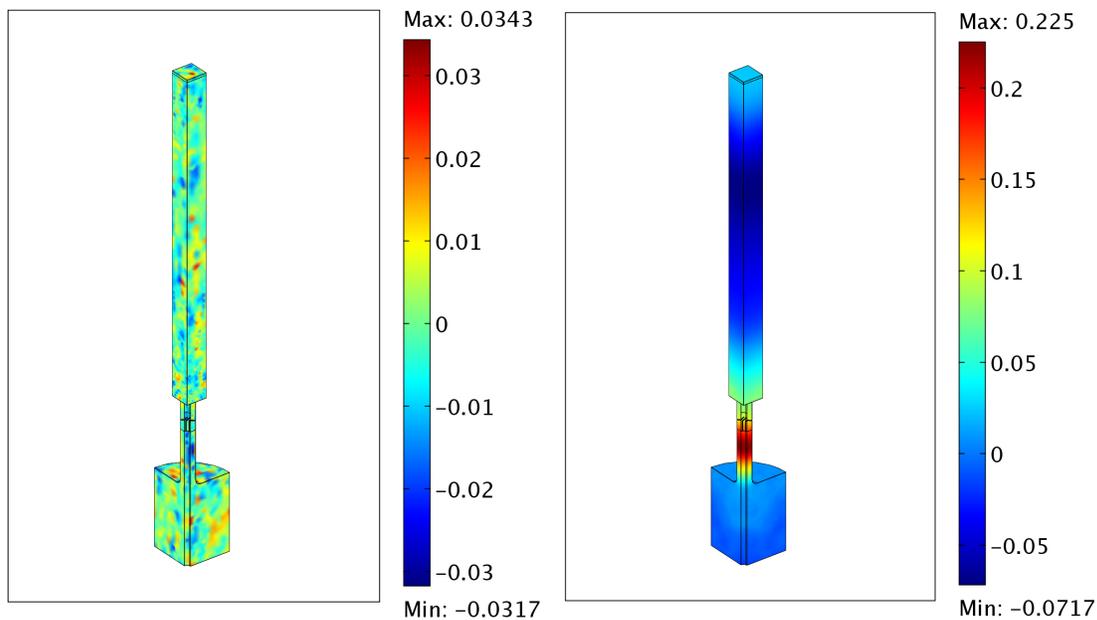


Abbildung 7.9: p'_E für $t_E = 0$ (links) und p'_E für $t_E = 308$ (rechts, ohne Verluste)

7.7 Modellaufbau

Im Rahmen der vorliegenden Berechnung wird die Wellengleichung für inhomogene Medien gelöst (vgl. Gleichung 2.13). Sie ist erweitert um einen Verlustterm gemäß Gleichung 5.12 sowie einen Quellterm zur Berücksichtigung der Wärmefreisetzung (vgl. Gleichung 2.15). Da die gewählte Impedanzrandbedingung nahezu perfekt mittels eines gewöhnlichen frequenzunabhängigen Reflexionsfaktors ($r = -0.455$) nachgebildet werden kann, wird aus Effizienzgründen auf eine entsprechende Implementierung der Abschlussrandbedingung gemäß der Darstellungen in Abschnitt 7.4 verzichtet. Als Anfangsbedingung wird, analog zu Pankiewitz [3] oder auch Wanke und Sattelmayer [74], eine zufällige Druckschwankungsverteilung gewählt (maximale Amplitude $P = 0.05$, Abbildung 7.9 links). Der Berechnungszeitschritt umfasst $\Delta t = 5.0 \cdot 10^{-3}$.

Verglichen werden die Ergebnisse für die Rechnung mit und ohne akustische Verluste ($\omega_0 = 5$). Quantitative Aussagen sind nicht möglich. Aus dem Experiment ist lediglich bekannt, dass sich der betrachtete Fall im Experiment thermoakustisch instabil verhält und mit einer Frequenz von ca. $f = 150 \text{ Hz}$ schwingt⁷.

7.8 Ergebnisse der transienten Stabilitätsbetrachtung

Beide Varianten erweisen sich als thermoakustisch instabil. Repräsentativ ist in Abbildung 7.9 rechts eine ausgeprägte Schwingungsmode für den verlustfreien Fall gezeigt.

In Abbildung 7.10 ist zudem der Verlauf der Schnelle- und der Wärmefreisetzungsschwankung am Referenzpunkt in der Brenneraustrittsebene ($z = 0$) für den Fall ohne Verluste gegeben. Deutlich ist zu erkennen, dass sich aus der anfänglichen, zufälligen Druckschwankungsverteilung mit der Zeit eine ausgeprägte Instabilität entwickelt, welche in einen Grenzyklus mündet. Die Schnelleschwankung beinhaltet hier nicht nur eine einzelne sinusförmige akustische Schwingung, sondern mehrere Frequenzanteile (vgl. hierzu auch Abbildung 7.12).

In Abbildung 7.11 sind die Schnelleschwankungen am Brenneraustritt aus verlustfreier und verlustbehafteter Simulation einander gegenübergestellt, normiert mit der mittleren Geschwindigkeit \bar{u}_B . Beide Berechnungen wurden nach Erreichen des Sättigungszustands abgebrochen. Die Schwankungen der verlustfreien Variante klingen deutlich schneller auf. Für die verlustbehaftete Rechnung sind sowohl die resultierenden maximalen Amplituden und als auch die Wachstumsrate deutlich geringer. Auch die Zeit bis zum Erreichen der Sättigung ist damit länger. Dies belegt, dass der Energiehaushalt der Schwingungen durch die Existenz der Verluste stark verändert wurde. Es ist nun deutlich weniger Energie im System enthalten.

⁷Mit Hilfe von Eigenwertanalysen konnte keine Eigenfrequenz des betrachteten Systems in diesem Frequenzbereich ermittelt werden. Es wird vermutet, dass diese Resonanzfrequenz nicht auf rein akustischen Vorgängen beruht, sondern vielmehr durch konvektive Effekte ausgelöst wird [123]. Eine solche Art von Instabilitäten kann mittels des vorliegenden Modells nicht bestimmt werden.

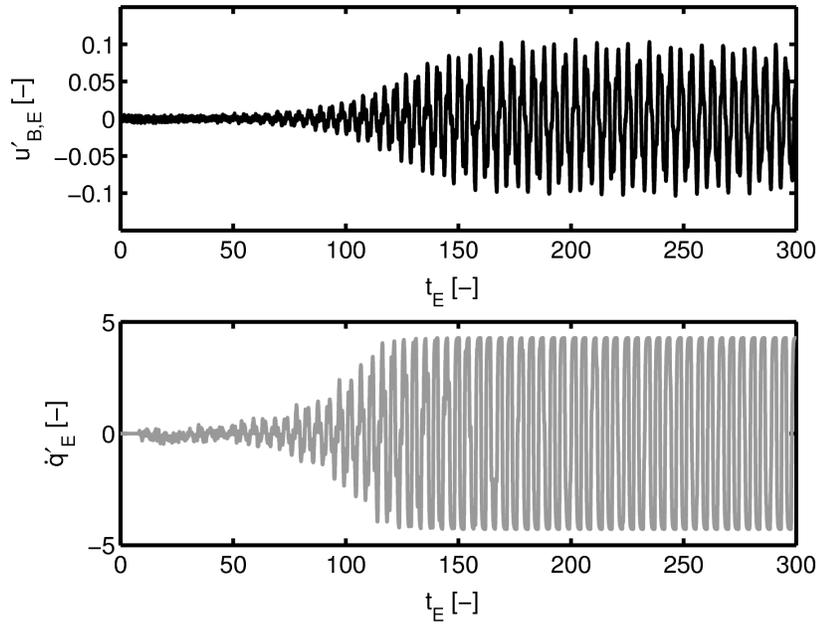


Abbildung 7.10: Schnelleschwankung und Wärmefreisetzungsschwankung am Referenzpunkt (Brenneraustritt, ohne Verluste)

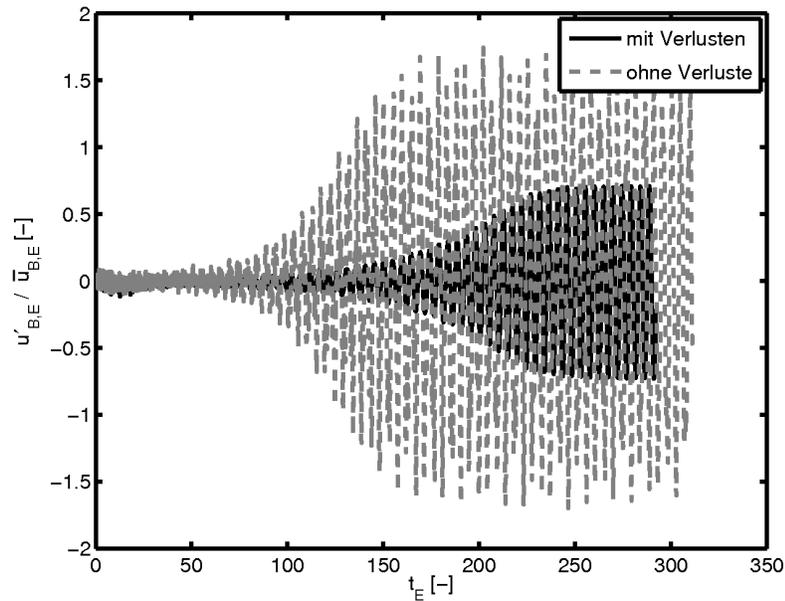


Abbildung 7.11: Vergleich der normierten Schnelleschwankungen am Brenneraustritt für die verlustfreie und die verlustbehaftete Simulation

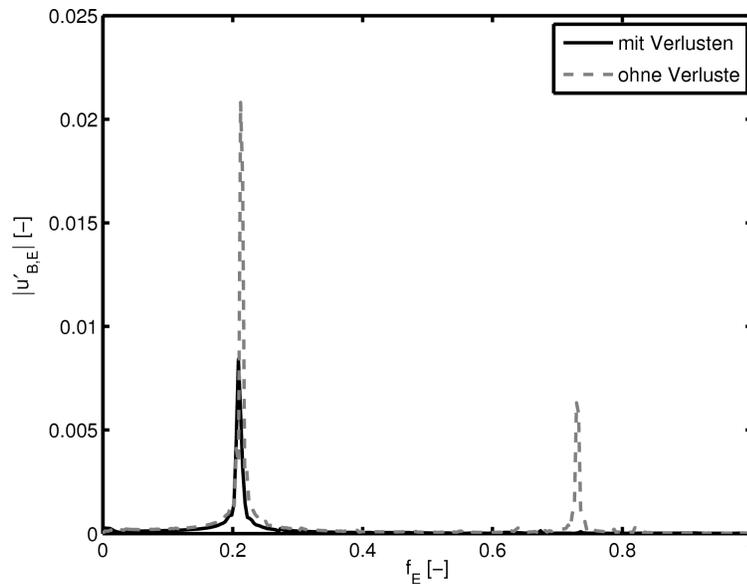


Abbildung 7.12: Frequenzspektren für die verlustfreie und die verlustbehaftete Berechnung

Mit Hilfe der zugehörigen Spektren lassen sich obige Aussagen bestätigen (Abbildung 7.12). In beiden Fällen wird im Wesentlichen die gleiche Mode angeregt (vgl. Abbildung 7.9), die Amplituden unterscheiden sich jedoch stark. Aus Abbildung 7.12 ist zudem zu erkennen, dass durch die Implementierung der akustischen Dämpfung die zusätzliche, instabile Mode bei $f = 0.73$ verschwindet.

7.9 Zusammenfassung

Im Rahmen der numerischen Bestimmung der akustischen Stabilität von Verbrennungssystemen ist es erstmals gelungen, akustische Verluste im Feld lokal in den hier verwendeten, transienten Berechnungsansatz mit einzubringen. Die Notwendigkeit der korrekten Beschreibung des Energiehaushalts der Schwingungen konnte deutlich belegt werden. Aufgrund von Problemen bezüglich der Validierungsdaten ist es im vorliegenden Fall jedoch nicht gelungen, quantitative Übereinstimmungen zwischen Numerik und Experiment zu

erzielen. Trotzdem konnten im Rahmen der hier gezeigten Untersuchungen qualitative Übereinstimmungen der numerischen und der experimentellen Ergebnisse (Stabilität vs. Instabilität) nachgewiesen werden.

8 Resümee und Ausblick

Ziel der Arbeit war die Erweiterung und Verbesserung eines existierenden Berechnungsmodells, um damit zukünftig quantitative Aussagen bezüglich der thermoakustischen Stabilität von Verbrennungssystemen machen zu können. Der Charakter eines Auslegungswerkzeugs sollte dabei beibehalten werden. Im Rahmen dieser Arbeit fanden im Wesentlichen folgende zusätzliche Entwicklungen statt:

- Die Wellengleichung wurde hinsichtlich ihrer hierfür optimalen Form analysiert.
- Empfehlungen zur Minimierung numerischer Verluste wurden herausgearbeitet.
- Es wurde ein neuartiger, ingenieurmäßiger Ansatz entwickelt, um akustische Verluste im System näherungsweise lokal zu erfassen. Entsprechende Modelle können sowohl für Berechnungen im Zeit- als auch im Frequenzbereich eingesetzt werden.
- Zur realistischen Erfassung frequenzabhängiger akustischer Verluste an den Rändern wurde ein Ansatz implementiert, um verschiedene Impedanzrandbedingungen vom Frequenzbereich in den Zeitbereich transformieren zu können.
- Mit dem erweiterten Modellpaket wurden Stabilitätsberechnungen anhand einer Brennerkonfiguration durchgeführt.

Trotz der Erweiterungen ist es nach wie vor möglich, die Rechnungen auf einem gewöhnlichen PC durchzuführen. Es ist zudem gelungen, schwerwiegende Probleme bezüglich der numerischen Stabilität der Berechnungen im Zeitbereich zu beheben. Entscheidend erwies sich hierbei eine Entdimensionie-

rung des Gleichungssatzes, welche es erlaubt, einen ausreichend kleinen Berechnungsschritt bei überschaubarem Berechnungsaufwand zu realisieren.

Das Simulationsmodell ist durch die Erweiterungen deutlich realitätsnaher und durch die neuen Versionen des verwendeten Softwarecodes deutlich leistungsfähiger geworden. Für die zukünftige Weiterentwicklung des Modells wird empfohlen:

- Die Generierung eines umfassenden Datensatzes zur Validierung der numerischen Ergebnisse, bestehend aus Strömungsberechnungen und insbesondere aus experimentellen Daten bezüglich des thermoakustischen Verhaltens.
- Die Optimierung der hier entwickelten Ansätze auf Basis dieser Validierungsdaten.
- Die Weiterentwicklung des Wärmefreisetzungsmodells hinsichtlich der Einbindung von Luftzahlschwankungen und einer Verzugszeitverteilung.

Literaturverzeichnis

- [1] KREBS, W. ; HELLAT, J. ; EROGLU, A.: Technische Verbrennungssysteme. In: LECHNER, C. (Hrsg.) ; SEUME, J. (Hrsg.): *Stationäre Gasturbinen*. Springer, Berlin, 2003, Kapitel 9, S. 447–486
- [2] SATTELMAYER, T.: Grundlagen der Verbrennung in stationären Gasturbinen. In: LECHNER, C. (Hrsg.) ; SEUME, J. (Hrsg.): *Stationäre Gasturbinen*. Springer, Berlin, 2003, Kapitel 8, S. 385–446
- [3] PANKIEWITZ, C.: *Hybrides Berechnungsverfahren für thermoakustische Instabilitäten von Mehrbrennersystemen*, Technische Universität München, Diss., 2004
- [4] ZINN, B. T. ; LIEUWEN, T. C.: Combustion Instabilities: Basic Concepts. In: FRANK, K. L. (Hrsg.) ; LIEUWEN, T. C. (Hrsg.) ; YANG, V. (Hrsg.): *Combustion Instabilities in Gas Turbine Engines: Operational Experience, Fundamental Mechanisms, and Modeling in Progress* Bd. 210; *Astronautics and Aeronautics*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Reston, 2005, Kapitel 1
- [5] HANTSCHK, C.-C.: *Numerische Simulation selbsterregter thermoakustischer Schwingungen*, Technische Universität München, Diss., 2000
- [6] PIERINGER, J. E.: *Simulation selbsterregter Verbrennungsschwingungen in Raketenschubkammern im Zeitbereich*, Technische Universität München, Diss., 2008
- [7] MUNJAL, M. L.: *Acoustics of Ducts and Mufflers*. John Wiley & Sons, New York, 1987

- [8] FISCHER, A.: *Hybride, thermoakustische Charakterisierung von Drallbrennern*, Technische Universität München, Diss., 2004
- [9] GENTEMANN, A. M. G. ; FISCHER, A. ; EVESQUE, S. ; POLIFKE, W.: Acoustic Transfer Matrix Reconstruction and Analysis for Ducts with Sudden Change of Area. In: *Proceedings der 9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit, Nr.: 2003-3142, Hilton Head, South Carolina, USA, 2003*
- [10] POLIFKE, W.: Combustion Instabilities. In: *VKI Lecture Series - Advances in Acoustics and Applications, Brüssel, Belgien. 2004*
- [11] PANKIEWITZ, C. ; FISCHER, A. ; HIRSCH, C. ; SATTELMAYER, T.: Computation of Transfer Matrices for Gas Turbine Combustors including Acoustics/Flame Interaction. In: *Proceedings der 9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit, AIAA-2003-3295, Hilton Head, South Carolina, USA, 2003*
- [12] FÖLLER, S. ; KAESS, R. ; POLIFKE, W.: Reconstruction of Acoustic Transfer Matrices from Large-Eddy-Simulations of Compressible Turbulent Flows. In: *Proceedings der 14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (29th AIAA Aeroacoustics Conference), Nr.: AIAA-2008-3046, Vancouver, Canada, 2008*
- [13] ALEMELA, P. R. ; FANACA, D. ; ETTNER, F. ; HIRSCH, C. ; SATTELMAYER, T.: Flame Transfer Matrices of a Premixed Flame and a Global Check with Modelling and Experiments. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2008, Power for Land, Sea and Air, Nr.: GT2008-50111, Berlin, Deutschland, 2008*
- [14] NEUNERT, U. ; KATHAN, R. ; SATTELMAYER, T.: Determining Acoustic Properties of Open-Cell Metal Foams using the Multi-Microphone Transfer Matrix Method. In: *Proceedings des Thirteenth International Congress on Sound and Vibration, Nr.: 693, Wien, Österreich, 2006*
- [15] EVESQUE, S. ; POLIFKE, W.: Low-Order Acoustic Modelling for Annular Combustors: Validation and Inclusion of Modal Coupling. In: *Procee-*

- dings of ASME Turbo Expo 2002, Nr.: GT2002-30064, Amsterdam, Niederlande, 2002*
- [16] PANKIEWITZ, C. ; EVESQUE, S. ; POLIFKE, W. ; SATTELMAYER, T.: Stabilitätsanalyse der Verbrennung in Gasturbinen unter Anwendung von modalen Ansätzen und Finite-Element-Methoden. In: *Proceedings des DGLR-Fachsymposiums, Berechnungsverfahren für Brennkammerströmungen in Raketen- und Gasturbinenbrennkammern, Stuttgart, Deutschland, 2002*
- [17] PASCHEREIT, C. O. ; SCHUERMANS, B. ; BELLUCCI, V.: Modeling and Control of Combustion Instabilities. In: *Proceedings des Twelfth International Congress on Sound and Vibration, Lissabon, Portugal, 2005*
- [18] SCHUERMANS, B.: *Modeling and Control of Thermoacoustic Instabilities*, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Diss., 2003
- [19] SATTELMAYER, T. ; POLIFKE, W.: Assessment of Methods for the Computation of the Linear Stability of Combustors. In: *Combustion Science and Technology* 175 (3) (2003), S. 453 – 476
- [20] SCHUERMANS, B. ; BELLUCCI, V. ; GUETHE, F. ; MEILI, F. ; FLOHR, P. ; PASCHEREIT, C. O.: A Detailed Analysis of Thermoacoustic Interaction Mechanisms in a Turbulent Premixed Flame. In: *Proceedings der ASME Turbo Expo 2004: Power for Land, Sea and Air, Nr.: GT2004-53831, Wien, Österreich, 2004*
- [21] SCHUERMANS, B. ; LUEBCKE, H. ; BAJUSZ, D. ; FLOHR, P.: Thermoacoustic Analysis of Gas Turbine Combustion Systems using Unsteady CFD. In: *Proceedings der ASME Turbo Expo 2005: Power for Land, Sea and Air, Nr.: GT 2005-68393, Reno-Tahoe, Nevada, USA, 2005*
- [22] FANACA, D. ; ALEMELA, P. R. ; ETTNER, F. ; HIRSCH, C. ; SATTELMAYER, T.: Determination and Comparison of the Dynamic Characteristics of a Perfectly Premixed Flame in both Single and Annular Combustion Chambers. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2008, Power for Land, Sea and Air, Nr.: GT2008-50781, Berlin, Deutschland, 2008*

- [23] GIAUQUE, A. ; POINSOT, T. ; NICOUD, F.: Validation of a Flame Transfer Function Reconstruction Method for Complex Turbulent Configurations. In: *Proceedings der 14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (29th AIAA Aeroacoustics Conference)*, Nr.: AIAA-2008-2943, Vancouver, Canada, 2008
- [24] STAFFELBACH, G. ; GICQUEL, L. Y. M. ; BOUDIER, G. ; POINSOT, T. J.: Large Eddy Simulation of Self Excited Azimuthal Modes in Annular Combustors. In: *Proceedings of the Combustion Institute*, 32, 2009
- [25] KOPITZ, J. ; HUBER, A. ; SATTELMAYER, T. ; POLIFKE, W.: Thermoacoustic Stability Analysis of an Annular Combustion Chamber with Acoustic Low Order Modeling and Validation against Experiment. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2005: Power for Land, Sea and Air*, Nr.: GT2005-68797, Reno-Tahoe, Nevada, USA, 2005
- [26] LEPERS, J. ; KREBS, W. ; PRADE, B. ; FLOHR, P. ; POLLAROLO, G. ; FERRANTE, A.: Investigation of Thermoacoustic Stability Limits of an Annular Gas Turbine Combustor Test-Rig with and without Helmholtz-Resonators. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2005: Power for Land, Sea and Air*, Nr.: GT2005-68246, Reno-Tahoe, Nevada, USA, 2005
- [27] MUROTA, T. ; OHTSUKA, M.: Large-Eddy-Simulation of Combustion Oscillation in the Premixed Combustor. In: *ASME-Paper No. 99-GT-274*, 1999
- [28] BROOKES, S. J. ; CANT, R. S. ; DUPERE, I. D. ; DOWLING, A. P.: Computational Modelling of Self-Excited Combustion Instabilities. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2000: Land, Sea and Air*, Nr.: 2000-GT-0104, München, Deutschland, 2000
- [29] HANTSCHK, C.-C. ; VORTMEYER, D.: Numerical Simulation of Self-Excited Combustion Oscillations in a Non-Premixed Burner. In: *Combustion Science and Technology* 174 (2002), S. 189–204
- [30] PANKIEWITZ, C. ; SATTELMAYER, T.: Time Domain Simulation of Combustion Instabilities in Annular Combustors. In: *Proceedings of ASME TURBO EXPO 2002*, Nr.: GT 2002-30063, Amsterdam, Niederlande, 2002

-
- [31] BLOXSIDGE, G. J. ; DOWLING, A. P. ; LANGHORNE, P. J.: Reheat Buzz: An Acoustically Coupled Combustion Instability. Part 2. Theory. In: *Journal of Fluid Mechanics* 193 (1988), S. 445–473
- [32] DOWLING, A. P.: Nonlinear Self-Excited Oscillations of a Ducted Flame. In: *Journal of Fluid Mechanics* 346 (1997), S. 271–290
- [33] CROCCO, L. ; CHENG, S. I. *Theory of Combustion Instability in Liquid Propellant Rocket Motors*. Butterworth Scientific Publications. 1956
- [34] RIENSTRA, S. W. ; HIRSCHBERG, A. *An Introduction to Acoustics*. Eindhoven University of Technology. 2005
- [35] EHRENFRIED, K.: *Strömungsakustik - Skript zur Vorlesung*. Mensch & Buch, Berlin, 2004
- [36] POINSOT, T. ; VEYNANTE, D.: *Theoretical and Numerical Combustion*. R. T. Edwards, Philadelphia, 2001
- [37] KINSLER, L. E. ; FREY, A. R. ; COPPENS, A. B. ; SANDERS, J. V.: *Fundamentals of Acoustics. Fourth Edition*. John Wiley & Sons, New York, 2000
- [38] SATTELMAYER, T. *Akustische Grundlagen, Unveröffentlicht, Stand 24.Juni 2004*. Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München. 2004
- [39] LANDAU, L. D. ; LIFSHITZ, E. M.: *Course of Theoretical Physics - Volume 6: Fluid Mechanics*. Pergamon Press, London, 1959
- [40] WILLIAMS, F. A.: *Combustion Theory*. Second Edition. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1985
- [41] IBRAHIM, Z. M. ; WILLIAMS, F. A. ; BUCKLEY, S. G. ; LEE, J. C. Y.: An Acoustic Energy Approach to Modeling Combustion Oscillations. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2006: Power for Land, Sea and Air, Nr.: GT2006-90096, Barcelona, Spanien, 2006*
- [42] FÖLLER, S. *Untersuchung zur Streuung von Schallwellen an unsteitigen Querschnittsänderungen mittels Systemidentifikation und Grob-*

- struktursimulation*. Zwischenreview, Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München. 2007
- [43] HOWE, M. S.: On the Theory of Unsteady High Reynolds Number Flow through a Circular Aperture. In: *Proceedings of the Royal Society of London A*. 366 (1979), S. 205–223
- [44] HOWE, M. S.: On the Absorption of Sound by Turbulence and other Hydrodynamic Flows. In: *IMA Journal of Applied Mathematics* 32 (1984), S. 187–209
- [45] LIGHTHILL, M. J.: On Sound Generated Aerodynamically - I. General Theory. In: *Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 211*, 1952
- [46] KÖLTZSCH, P. *Geräuscherzeugung durch Strömungen - Grundlagen und Überblick*. Vortrag zur Tagung 'Aeroakustik', Veranstalter: Haus der Technik Essen, Stuttgart, Deutschland. 2004
- [47] KÖLTZSCH, P. *Strömungsakustik - eine aktuelle Übersicht*, (Hrsg.: Der Rektor). ET-IAS-01-2000, Institut für Akustik und Sprachkommunikation, Technische Universität Dresden. 2000
- [48] BOIJ, S.: *Acoustic Scattering in Ducts and Influence of Flow Coupling*, KTH Stockholm, Diss., 2003
- [49] CHU, B.-T. ; KOVASZNAY, L. S. G.: Non-Linear Interactions in a Viscous Heat-Conducting Compressible Gas. In: *Journal of Fluid Mechanics* 3 (5) (1958), S. 494–514
- [50] PIERCE, A. D.: *Acoustics*. McGraw-Hill Book Company, 1981
- [51] EWERT, R. ; SCHRÖDER, W.: Acoustic Perturbation Equations based on Flow Decomposition via Source Filtering. In: *Journal of Computational Physics* 188 (2003), S. 365–398
- [52] PIERCE, A. D.: Wave Equation for Sound in Fluids with Unsteady Inhomogeneous Flow. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 87 (6) (1990), S. 2292–2299

- [53] BECHERT, D. W.: Sound Absorption caused by Vorticity Shedding, Demonstrated with a Jet Flow. In: *Journal of Sound and Vibration* 70 (3) (1980), S. 389–405
- [54] COMSOL: *COMSOL MULTIPHYSICS, User's Guide*. 2005
- [55] WEYERMANN, F. *Persönliche Mitteilung*. 2009
- [56] WEYERMANN, F. *Persönliche Mitteilung*. 2008
- [57] CHU, B.-T.: On the Generation of Pressure Waves at a Plane Flame Front. In: *Proceedings des Fourth Symposium (International) on Combustion, The Combustion Institute*, S. 603-612, 1953
- [58] KARTHIK, B. ; MANOJ KUMAR, B. ; SUJITH, R.I.: Exact Solutions to One-Dimensional Acoustic Fields with Temperature Gradient and Mean Flow. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 108 (1) (2000), S. 38–43
- [59] KAPUR, A. ; CUMMINGS, A. ; MUNGUR, P.: Sound Propagation in a Combustion Can with Axial Temperature and Density Gradients. In: *Journal of Sound and Vibration* 25 (1) (1972), S. 129–138
- [60] CUMMINGS, A.: Ducts with Axial Temperature Gradients: An Approximate Solution for Sound Transmission and Generation. In: *Journal of Sound and Vibration* 51 (1) (1977), S. 55–67
- [61] UMURHAN, O. M.: WKB Approximation for Acoustics in Combustion Chambers with Arbitrary Steady-State Heat Release Profiles. In: *Annual Research Briefs, Center for Turbulence Research* (1999), S. 99–108
- [62] PEAT, K. S.: The Transfer Matrix of a Uniform Duct with a Linear Temperature Gradient. In: *Journal of Sound and Vibration* 123 (1) (1988), S. 43–53
- [63] MUNJAL, M. L. ; PRASAD, M. G.: On Plane-Wave Propagation in a Uniform Pipe in the Presence of a Mean Flow and a Temperature Gradient. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 80 (5) (1986), S. 1501–1506

- [64] PEAT, K. S.: Convected Acoustic Wave Motion along a Capillary Duct with an Axial Temperature Gradient. In: *Journal of Sound and Vibration* 203 (5) (1997), S. 855–866
- [65] KARTHIK, B. ; KRISHNA MOHANRAJ, R. ; RAJESH RAMAKRISHNAN, . ; SUJITH, R. I.: Exact Solution for Sound Propagation in Ducts with an Axial Mean Temperature Gradient and Particulate Damping. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 106 (5) (1999), S. 2391–2395
- [66] SUJITH, R. I.: Exact Solutions for Modeling Sound Propagation through a Combustion Zone. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 110 (4) (2001), S. 1839–1844
- [67] SUJITH, R. I. ; WALDHERR, G. A. ; ZINN, B. T.: An Exact Solution for One-Dimensional Acoustic Fields in Ducts with an Axial Temperature Gradient. In: *Journal of Sound and Vibration* 184 (3) (1995), S. 389–402
- [68] MANOJ KUMAR, B. ; SUJITH, R. I.: Exact Solution for One-Dimensional Acoustic Fields in Ducts with a Quadratic Mean Temperature Profile. In: *Journal of the Acoustical Society of America* 101 (6) (1997), S. 3798–3799
- [69] KANAKA DURGA, K. ; SUJITH, R. I. ; TYAGI, M.: Finite Amplitude Longitudinal Gas Oscillations in a Duct with Temperature Gradient. In: *Acta Acoustica united with Acoustica* 90 (2004), S. 1131–1141
- [70] BALA SUBRAHMANYAM, P. ; SUJITH, R. I. ; LIEUWEN, T.: Propagation of Sound in Inhomogeneous Media: Exact, Transient Solutions in Cartesian and Curvilinear Geometries. In: *Proceedings des 39th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit, Nr.: AIAA-01-1102, Reno, Nevada, USA, 2001*
- [71] TYAGI, M. ; SUJIT, R. I.: Nonlinear Distortion of Travelling Waves in Variable-Area Ducts with Entropy Gradients. In: *Journal of Fluid Mechanics* 492 (2003), S. 1–22
- [72] BALASUBRAMANIAN, K. ; SUJITH, R. I.: Thermoacoustic Instability in a Rijke Tube: Non-Normality and Nonlinearity. In: *Physics of Fluids* 20 (044103) (2008)

- [73] MATVEEV, K. I. ; CULICK, F. E. C.: A Study of the Transition to Instability in a Rijke Tube with Axial Temperature Gradient. In: *Journal of Sound and Vibration* 264 (2003), S. 689–706
- [74] WANKE, E. ; SATTELMAYER, T.: On the Modelling of Density Gradients with the Wave Equation for the Analysis of Combustion Instabilities (8th APISCEU). In: *Proceedings der 8th APISCEU (Asia-Pacific International Symposium on Combustion and Energy Utilization)*, Sochi, Russland, 2006
- [75] HIRSCH, C. *Persönliche Mitteilung*. 2008
- [76] POLIFKE, W. ; KOPITZ, J.: *Wärmeübertragung - Grundlagen, analytische und numerische Methoden*. Pearson Studium, München, 2005
- [77] WÄSLE, J. *Optimierte Fast-Fourier-Transformation in MATLAB. Berechnungsalgorithmus*. Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München. 2006
- [78] PIERINGER, J. *Einfluss von Gradienten auf die Wellenausbreitung, Unveröffentlichte Zusammenfassung von Forschungsergebnissen*. 2006
- [79] PAUS, H. J.: *Physik in Experimenten und Beispielen*. Hanser, München, 1995
- [80] MORSE, P. M. ; INGARD, K. U.: *Theoretical Acoustics*. First Princeton University Press edition, with errata page. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1986
- [81] KIERKEGAARD, A.: *Numerical Investigations of Generation and Propagation of Sound Waves in Low Mach Number Internal Flows*, KTH Stockholm, Diss., 2008
- [82] BALTZER, S. *Studie zur Modellierung des akustischen Übertragungsverhalten von Schallwellen an unstetigen Querschnittsänderungen*. Semesterarbeit, Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München. 2008

- [83] DUPERE, I. D. J. ; DOWLING, A. P.: The Absorption of Sound near Abrupt Axisymmetric Area Expansions. In: *Journal of Sound and Vibration* 239 (4) (2001), S. 709–730
- [84] KOOIJMAN, G. ; TESTUD, P. ; AUREGAN, Y. ; HIRSCHBERG, A.: Multimodal Method for Scattering of Sound at a Sudden Area Expansion in a Duct with Subsonic Flow. In: *Journal of Sound and Vibration* 310 (2008), S. 902–922
- [85] HIRSCH, C. *Persönliche Mitteilung*. 2007
- [86] SATTELMAYER, T.: *Überlegungen zur Form des Senkenterms (V2), Unveröffentlichte Zusammenfassung von Forschungsergebnissen*. 2007. – 21.07.2007
- [87] BOIJ, S. ; NILSSON, B: Scattering and Absorption of Sound at Flow Duct Expansions. In: *Journal of Sound and Vibration* 289 (3) (2006), S. 577–594
- [88] RONNEBERGER, D.: Theoretische und experimentelle Untersuchung der Schallausbreitung durch Querschnittssprünge und Lochplatten in Strömungskanälen, Abschlussbericht zum DFG-Forschungsvorhaben: Akustische Reflexion und Transmission von Einbauten in durchströmten Kanälen - im Schwerpunktprogramm Geräuschenstehung - Geräuschkämpfung, Kennzeichen: Ro 369/11, 12, 14 / Universität Göttingen, Drittes Physikalisches Institut. 1987. – Forschungsbericht
- [89] FÖLLER, S. *Persönliche Mitteilung*. 2009
- [90] FÖRSTER, H. *User-Defined-Function zum Auslesen von Totaldruckgradienten aus einer stationären 2D-achsensymmetrischen Berechnung des Strömungsfeldes in FLUENT, Unveröffentlicht*. Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München. 2008
- [91] FÖLLER, S. ; KAESS, R. ; POLIFKE, W.: *Determination of Acoustic Transfer Behavior via Large Eddy Simulation and System Identification*. – to be published in High Performance Computing in Science and Engineering, Garching, 2009

- [92] FÖLLER, S. ; KAESS, R. ; POLIFKE, W.: *Determination of Acoustic Transfer Behavior via Large Eddy Simulation and System Identification*. – to be published at 16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Stockholm, 2010
- [93] BOHL, W.: *Technische Strömungslehre*. 12., völlig neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Würzburg : Vogel Fachbuch, Kamprath-Reihe, 2001
- [94] ALEMELA, P. R.: *Measurement and Scaling of Acoustic Transfer Matrices of Premixed Swirl Flames*, Technische Universität München, Diss., 2009
- [95] NEUNERT, U. *Persönliche Mitteilung*. 2009
- [96] ALEMELA, P. R. *Multimikrofonmessungen und Auswertungen bezüglich des Übertragungsverhaltens des TD1- und des EV-Brenners im Einzelbrennerprüfstand, Unveröffentlichte Zusammenfassung von Forschungsergebnissen*. Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München. 2007
- [97] ECKSTEIN, J.: *On the Mechanisms of Combustion-Driven Low-Frequency Oscillations in Aero-Engines*, Technische Universität München, Diss., 2004
- [98] TAY WO CHONG, L. *Simulation des kalten Strömungsfeldes des TD1-Brenners im Einzelbrennerprüfstand mittels FLUENT*. Simulationsergebnisse. Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München. 2008
- [99] WEYERMANN, F. *Abbildung von Strömungsdaten aus CFD-Rechnungen auf ein unstrukturiertes FEM-Gitter mittels MATLAB, unter Beibehaltung des integralen Wertes der CFD-Daten. Berechnungsalgorithmus*. Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München. 2008
- [100] WANKE, E. ; WEYERMANN, F. ; HIRSCH, C. ; SATTELMAYER, T.: GV5: Designsystem Brennkammerschwingungen. In: *Abschlussbericht Forschungsinitiative ‚Kraftwerke des 21. Jahrhunderts (KW21)‘ 01.07.2004 bis 31.12.2008, Band 2*. abayfor - Arbeitsgemeinschaft der Bayerischen

- Forschungsverbände c/o Bayerische Forschungsallianz GmbH, Deutsches Zentrum für Luft und Raumfahrt e. V. - Institut für Verbrennungstechnik, München, Stuttgart, 2009, S. 683–703
- [101] MARBLE, F. E. ; CANDEL, S. M.: Acoustic Disturbance from Gas Non-Uniformities Convected through a Nozzle. In: *Journal of Sound and Vibration* 55 (2) (1977), S. 225–243
- [102] DASSE, J. ; MENDEZ, S. ; NICOUD, F.: Large-Eddy Simulation of the Acoustic Response of a Perforated Plate. In: *Proceedings der 14th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (29th AIAA Aeroacoustics Conference)*, Nr.: AIAA-2008-3007, Vancouver, Canada, 2008
- [103] MENDEZ, S. ; NICOUD, F. ; POINSOT, T.: Large-Eddy Simulations of a Turbulent Flow around a Multi-Perforated Plate. In: *Lecture Notes in Computational Science and Engineering - Complex Effects in Large Eddy Simulations*, 56:289-303. 2006
- [104] ELDREDGE, J. D. ; BODONY, D. J. ; SHOEBY, M.: Numerical Investigation of the Acoustic Behavior of a Multi-Perforated Liner. In: *Proceedings der 13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (28th AIAA Aeroacoustics Conference)*, Nr.: AIAA-2007-3683, Rom, Italien, 2007
- [105] BELLUCCI, V. ; FLOHR, P. ; PACHERIT, C. O.: Numerical and Experimental Study of Acoustic Damping Generated by Perforated Screens. In: *AIAA Journal* 42 (8) (2004), S. 1543–1549
- [106] ELDREDGE, J. D. ; DOWLING, A. P.: The Absorption of Axial Acoustic Waves by a Perforated Liner with Bias Flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 485 (2003), S. 307–335
- [107] ELDREDGE, J. D.: On the Interaction of Higher Duct Modes with a Perforated Liner System with Bias Flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 510 (2004), S. 303–331
- [108] HUGHES, I. J. ; DOWLING, A. P.: The Absorption of Sound by Perforated Linings. In: *Journal of Fluid Mechanics* 218 (1990), S. 299–335

- [109] TAM, C. K. W. ; KURBATSKII, K. A. ; AHUJA, K. K. ; GAETA, Jr. R. J.: A Numerical and Experimental Investigation of the Dissipation Mechanisms of Resonant Acoustic Liners. In: *Journal of Sound and Vibration* 245 (3) (2001), S. 545–557
- [110] SUN, X. ; JING, X. ; ZHANG, H. ; SHI, Y.: Effect of Grazing-Bias Flow Interaction on Acoustic Impedance of Perforated Plates. In: *Journal of Sound and Vibration* 254 (3) (2002), S. 557–573
- [111] JING, X. ; SUN, X.: Effect of Plate Thickness on Impedance of Perforated Plates with Bias Flow. In: *AIAA Journal* 38 (9) (2000), S. 1573–1578
- [112] HEUWINKEL, C. ; ENGHARDT, L. ; ROEHLE, I.: Experimental Investigation of the Acoustic Damping of Perforated Liners with Bias Flow. In: *Proceedings der 13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference (28th AIAA)*, Nr.: AIAA-2007-3525, Rom, Italien, 2007
- [113] MENDEZ, S. ; NICOUD, F. ; MIRON, P.: Direct and Large-Eddy Simulations of a Turbulent Flow with Effusion. In: *Proceedings des 6th International ERCOFTAC Workshop - Direct and Large-Eddy Simulation*, S. 415-422, Poitiers, Frankreich, 2005
- [114] MENDEZ, S. ; ELDREDGE, J. ; NICOUD, F. ; POINSOT, T. ; SHOEYBI, M. ; IACCARINO, G.: Numerical Investigation and Preliminary Modeling of a Turbulent Flow over a Multi-Perforated Plate. In: *Proceedings of the Summer Program 2006, Center for Turbulence Research, Stanford University, USA*, S. 57-72, 2006
- [115] REHMAN, S. F. ; ELDREDGE, J. D.: Numerical Investigation of a Bias-Flow Perforated Liner for Damping of Thermoacoustic Instabilities. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo 2007: Power for Land, Sea and Air*, Nr.: GT 2007-27319, Montreal, Canada, 2007
- [116] PIERINGER, J. *Impedanzrandbedingung in Piano, Unveröffentlichte Zusammenfassung von Forschungsergebnissen*. Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München. 2007

- [117] RICHTER, C. ; THIELE, F. H. ; LI, X. ; ZHUANG, M.: Comparison of Time-Domain Impedance Boundary Conditions by Lined Duct Flows. In: *AIAA-Journal* 45 (6) (2007), S. 1333–1345
- [118] RADE, L. ; WESTERGRENN, B.: *Springers mathematische Formeln: Taschenbuch für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Wirtschaftswissenschaftler*. Zweite, korrigierte und erweiterte Auflage. Übersetzt und bearbeitet von Vachenaer, P., Springer, Berlin, 1997
- [119] KAESS, R. *Persönliche Mitteilung*. 2008
- [120] KOMAREK, T. ; TAY WO CHONG, L. ; ZELLHUBER, M. ; HUBER, A. ; POLIFKE, W.: Modeling the Effect of Heat Loss on Flame Stabilization in Shear Layers. In: *Proceedings der International Conference on Jets, Wakes and Separated Flows, ICJWSF-2008, Berlin, Deutschland, 2008*
- [121] KOMAREK, T. ; KAESS, R. *Experimentelle Bestimmung der akustischen Stabilität des BRS-Brenners im Einzelbrennerprüfstand. Messdaten*. Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München. 2007
- [122] KOMAREK, T. *Persönliche Mitteilung*. 2008
- [123] KAESS, R. *Persönliche Mitteilung*. 2009
- [124] ALEMELA, P. R. *Experimentelle Bestimmung der Reflexionskoeffizienten unterschiedlicher Abschlussplatten von Prüfständen bei verschiedenen Betriebszuständen, Unveröffentlichte Zusammenfassung von Forschungsergebnissen*. Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München. 2006

A Anhang

IMPLEMENTIERUNGSSCHRITTE ZUM TRANSFER FREQUENZABHÄNGIGER RANDBEDINGUNGEN IN TRANSIENTE SIMULATIONEN IN DER VERWENDETEN SIMULATIONSUMGEBUNG

Zur Realisierung des in Kapitel 6 beschriebenen Transfers frequenzabhängiger Randbedingungen vom Frequenz- in den Zeitbereich unter Verwendung des FEM-Codes, COMSOL MULTIPHYSICS, sind folgende Schritte nötig:

- Erstellung der gewünschten Geometrie.
- Zusätzliche Modellierung eines Referenzpunkts / einer Referenzfläche in geringem Abstand von der Impedanzrandbedingung unter Berücksichtigung der in Abschnitt 6.4 genannten Kriterien.
- Generierung eines entsprechenden Gitters.
- Definition sogenannter *extrusion coupling variables* für die Druckschwankung und die zugehörigen örtlichen Ableitungen am Referenzpunkt bzw. der Referenzebene¹.

Für jeden Zeitschritt der Berechnung erfolgt nun:

- Skalarmultiplikation der *extrusion coupling variables* der örtlichen Ableitungen der Druckschwankung mit dem Normalenvektor am Rand.
- Übergabe der geforderten Werte aus dem FEM-Code an die entsprechende MATLAB-Funktion.

¹Dadurch kann der Wert des Parameters am Referenzpunkt / an der Referenzebene auch am Rand verfügbar gemacht werden. Der gewählte lineare Abbildungsmechanismus stellt sicher, dass die entsprechenden Werte auf den jeweils nächstgelegenen Gitterpunkt am Rand abgebildet werden.

-
- Speicherung der Daten in MATLAB als globale Variablen in dynamischen oder in reduzierten Listen für spätere Verwendungszwecke.
 - Berechnung der zeitlichen Ableitung der Schnelle in Normalenrichtung sowie der Schnelle in Normalenrichtung.
 - Berechnung der eigentlichen Randbedingung.
 - Rückgabe der Ergebnisse an COMSOL MULTIPHYSICS als punktaufgelöste, örtliche Ableitung der Druckschwankung in Normalenrichtung.

Solange der Wert der rekursiven Zeit τ noch nicht erreicht ist, werden lediglich die zeitabhängigen Listen für $\mathbf{n} \cdot \nabla p'$, $\frac{\partial p'}{\partial t}$ usw. gefüllt. An die Simulationsumgebung zurückgegeben werden in diesem Fall die Ergebnisse einer nicht reflektierenden Randbedingung. Erst für $t \geq \tau$ tritt die eigentliche, frequenzabhängige Randbedingung in Kraft. Dieses Vorgehen wird benötigt, um eine physikalisch sinnvolle Funktion der Retardierung zu gewährleisten und um so die Berechnung des akustischen Wellenfeldes nicht zu verfälschen.