

Technische Universität München
Institut für Energietechnik

Lehrstuhl für Thermodynamik

Simulation selbsterregter Verbrennungsschwingungen in Raketenschubkammern im Zeitbereich

Jutta Elfriede Pieringer

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der
Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades
eines

DOKTOR – INGENIEURS

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Ulrich Walter

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattelmayer

2. Prof. Hans G. Hornung, Ph.D.

Univ. Pasadena / Kalifornien

Die Dissertation wurde am 20.02.2008 bei der Technischen Universität München eingereicht
und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 19.05.2008 angenommen.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Lehrstuhl für Thermodynamik der Technischen Universität München von Juni 2003 bis April 2008. Sie wurde von der Astrium GmbH und der Bayerischen Forschungsstiftung im Rahmen unterschiedlicher Forschungsprojekte gefördert.

Mein besonderer Dank gilt meinem Doktorvater, Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattelmayer für die Betreuung meiner Arbeit. Besonders dankbar bin ich für die wissenschaftlichen Freiräume, die mir während der Bearbeitung meines Projektes gewährt wurden. Vielen Dank auch für das Vertrauen und die Unterstützung während der letzten fünf Jahre.

Herrn Prof. Ph. D. Hans Hornung danke ich für die freundliche Übernahme des Koreferates und dafür, dass er für die mündliche Prüfung die Anreise aus den USA auf sich genommen hat. Herrn Professor Dr. rer. nat. Ulrich Walter danke ich für den Vorsitz bei der mündlichen Prüfung.

Mein Dank geht auch an meine Kolleginnen und Kollegen, zum einen für die fachliche Unterstützung, zum anderen aber auch für die freundschaftliche Atmosphäre am Lehrstuhl. Die Diskussionen im offiziellen und auch privaten Rahmen waren stets eine Bereicherung. Besonders möchte ich an dieser Stelle meinen langjährigen Bürokollegen, Thomas Komarek, erwähnen, der mich immer mit Rat und Tat unterstützte. Auch Oberingenieur Dr.-Ing. Christoph Hirsch stand mir stets als Diskussionspartner zur Verfügung.

Zum Gelingen dieser Arbeit hat eine ganze Reihe von Hiwis, Semestranten und Diplomanden beigetragen, denen ich für ihren Einsatz und die tatkräftige Unterstützung danken möchte. Insbesondere möchte ich an dieser Stelle Nikola Fink und Christoph Schmitt erwähnen. Mein Kollege Andreas Huber, mein Freund Jöran und Oberingenieur Dr.-Ing. Christoph Hirsch haben in ihrer Freizeit diese Arbeit Korrektur gelesen. Vielen Dank!

Auch bei den Industriepartnern von der Astrium GmbH und dem DLR Braunschweig möchte ich an dieser Stelle für ihre Unterstützung mit Ratschlägen und unterschiedlichen Software-Tools, insbesondere dem PIANO-Code, bedanken.

Ganz herzlich danke ich meinem Freund Jöran für den verständnisvollen Beistand während der Fertigstellung der Dissertation. Anschließend möchte ich mich bei meinen Eltern für die große Unterstützung während meiner gesamten Ausbildungszeit danken. Ihnen widme ich diese Arbeit.

München, im Juni 2008

Jutta Pieringer

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Geschichtlicher Überblick	1
1.2	Begriffsdefinitionen	2
1.3	Zielsetzung der Arbeit	4
2	Selbsterregte Verbrennungsschwingungen in Raketentriebwerken	6
2.1	Grundmechanismus	6
2.2	Verbrennung in Flüssigkeitsraketen	8
2.3	Initiierung von Verbrennungsinstabilitäten	12
2.4	Dämpfende Effekte	12
3	Berechnungsverfahren	15
3.1	Überblick über die Berechnungsverfahren	15
3.2	Berücksichtigung nicht-linearer Effekte	20
3.3	Zusammenfassung	21
4	Grundlagen	23
4.1	Linearisierte Grundgleichungen	23
4.1.1	Linearisierte Eulergleichungen	23
4.1.2	Acoustic Perturbation Equations (APE)	29
4.1.3	Gültigkeit der Gleichungen im Fall Raketentriebwerk	31
4.2	Harmonische Schwingungen	33
4.2.1	Klassische Akustik	35
4.2.2	Lösungen für zylindrische Geometrien	37
4.2.3	Impedanz, Admittanz und Reflexion	39
4.3	Überblick über Teilmodelle für Flamme, Düse und Absorber	42
4.3.1	Flammenmodelle	42

4.3.2	Düse	47
4.3.3	Absorber	49
4.3.4	Droplet Drag	52
4.4	Energiebilanz in selbsterregten Schwingungen	52
4.4.1	Selbsterregte Schwinger	53
4.4.2	Bilanzierung der akustischen Energie	56
4.4.2.1	Grundgleichungen	56
4.4.2.2	Zusammenhang Fluss und Admittanz	58
4.4.2.3	Zusammenhang Rayleigh-Integral	60
4.4.2.4	Energiebilanz im vorliegenden System	61
5	Modell und Simulationsumgebung	64
5.1	Das Triebwerk	64
5.2	Das Modell	66
5.2.1	Stoffwerte, Grundströmung und Eigenfrequenzen	68
5.2.1.1	Stoffwerte	68
5.2.1.2	Grundströmung	68
5.2.1.3	Analytische Eigenfrequenzen	71
5.2.2	Das Flammenmodell	72
5.3	Gitterwahl und numerische Aspekte	74
5.3.1	Ortsdiskretisierung	75
5.3.2	Zeitintegration	75
5.3.3	Filtern der Lösung	76
5.3.4	Gitterwahl	78
5.3.5	Verifikation der Gitterwahl	81
5.3.6	Rechenzeit	84
5.4	Randbedingungen	84
5.4.1	Feste Wände	84
5.4.2	Einlass-Randbedingungen	86
5.4.3	Auslass-Randbedingungen	87
5.4.4	Absorber-Randbedingungen	88
5.4.4.1	Überblick TdiBC	88
5.4.4.2	Transformation der Absorberrandbedingungen	89
5.4.4.3	Stoffwerte in den Absorbern	94
5.5	Zusammenfassung des Modells	95

6	Stabilitätsgrenzen ohne Absorber	97
6.1	Durchführung der Simulation	97
6.2	Ergebnisse der Simulation und ihre Auswertung	98
6.3	Trennung des instationären Verhaltens der einzelnen Moden	102
6.4	Bestimmung der Stabilität	105
6.5	Analyse der Ergebnisse	107
6.6	Darstellung in Form einer Stabilitätskarte	110
6.7	Zusammenfassung	111
7	Analyse des Düsenverhaltens	112
7.1	Düsenadmittanzen	112
7.1.1	Theoretische Beschreibung des Düsenverhaltens	112
7.1.2	Numerische Bestimmung der Düsenadmittanz	115
7.2	Düsenabklingkoeffizienten	119
7.2.1	Numerische Berechnung des Düsenabklingkoeffizienten	119
7.2.2	Analytische Abschätzung des Düsenabklingkoeffizienten	120
7.3	Experimentelle Validierung für longitudinale Moden	122
7.3.1	Beschreibung der experimentellen Daten	123
7.3.2	Validierung der berechneten Düsenadmittanzen	124
7.4	Zusammenfassung Düsenverhalten	126
8	Einfluss eines Absorberrings	128
8.1	Einfluss auf die Eigenmoden	128
8.2	Einfluss auf die Schwingungsamplituden	130
8.2.1	Abklingkoeffizienten	130
8.2.2	Stabilitätsverhalten mit Wärmefreisetzung	130
8.3	Schlussfolgerungen Dämpfering	132
9	Zusammenfassung und Ausblick	134
A	Anhang	152
A.1	Stoffwerte für hypergole Treibstoffe	152
A.2	Formulierung der Impulsgleichung am Ghost Point für TDIBC	154
A.2.1	Ausgangspunkt	154
A.2.2	Diskretisierung in der Zeit	155
A.2.3	Invertierung der linearisierten Impulsgleichung	156

A.2.4	Ablauf der Berechnung	158
A.3	Formulierung der Einlassrandbedingung	159

Nomenklatur

Lateinische Buchstaben

a	Schallgeschwindigkeit [m/s]
a_{FP}	Filterkoeffizient des Padé-Filters
A	Querschnittsfläche [m ²]
b	Konstante bei der Absorbermodellierung
b_G	Halbwertsradius des Gausspulses [-]
b_{FP}	Filterkoeffizient des Padé-Filters
B	allgemeine Amplitude
c	natürliche Zahl
c_{FP}	Filterkoeffizient des Padé-Filters
c_p	spezifische Wärmekapazität [J/(kg K)]
C	allgemeine Konstante
C_T	Widerstandskoeffizient eines Tropfens [-]
d	Durchmesser [m]
d_{FP}	Filterkoeffizient des Padé-Filters
E	(akustische) Energie [kg / (m s ²)]
\mathcal{E}	akustische Energie über das Volumen integriert [kg m ² /s ²]
f	Frequenz [1/s]
F	stromablaufende Welle [-]
\mathcal{F}	Funktion in Richtung der Koordinate x im Separationsansatz
g	allgemeine Funktion oder Größe
G	stromauflaufende Welle [-]
\mathcal{G}	Funktion in Richtung der Koordinate θ im Separationsansatz
h	allgemeine Funktion oder Größe
i	imaginäre Einheit [-]

I	akustischer Fluss [kg / s^3]
J	Besselfunktion erster Art
\mathbf{J}	Jakobi-Matrix
k	Wellenzahl [$1/\text{s}$]
\mathbf{k}	Wellenzahlvektor [$1/\text{s}$]
K	Kraft [N]
l	Index
L	Länge [m]
m	Ordnung der Bessel-Funktion [-]
m	Masse [kg]
\dot{m}	Massenstrom [kg/s]
n	Index
n	Interaktionsindex im Crocco-Modell[-]
\mathbf{n}	Normalenvektor [-]
p	Druck [Pa]
\dot{q}	spezifischer Wärmestrom [W/kg]
\dot{q}_V	Wärmestrom pro Volumeneinheit [W/m^3]
r	Raumkoordinate in radiale Richtung [m]
r^a	Reflexionsfaktor [-]
R	Resistanz; Realteil der Impedanz [-]
R_{BK}	Brennkammerradius [m]
R_i	innerer Widerstand
R_R	Einlaufwiderstand
\mathcal{R}	Funktion in Richtung der Koordinate r im Separationsansatz
S	Quellterm
\mathcal{S}	Quellterm über das Volumen integriert
t	Zeit [s]
T	Temperatur [K]
T_F	Amplitudenfaktor des Padé-Filters [-]
T_s	Schwingungsdauer [s]
\mathbf{u}	Geschwindigkeitsvektor, $\mathbf{u} = (u,v,w)^T$
u	Geschwindigkeitskomponente [m/s]
v	Geschwindigkeitskomponente [m/s]
V	Volumen [m^3]

w	Geschwindigkeitskomponente [m/s]
\mathbf{x}	Ortsvektor, $\mathbf{x} = (x,y,z)^T$
x	Raumkoordinate [m]
x_s	Amplitude einer allgemeinen, selbsterregten Schwingung
X	Reaktanz; Imaginärteil der Impedanz [-]
y	Raumkoordinate [m]
Y	Admittanz [-]
z	Raumkoordinate [m]
Z	Impedanz [-]

Griechische Buchstaben

α	Abklingkoeffizient [1/s]
α_P	Modellkonstante im Priem-Heidmann Modell [-]
α_{FP}	Koeffizient des Padé-Filters
β	Modellkonstante
β_P	Modellkonstante im Priem-Heidmann Modell [-]
Δ	Differenz [-]
Φ	Potential [m ² /s]
ϕ	Mischungsrate [kg _{Ox} /kg _{Tr}]
φ	Phasenwinkel [rad]
Γ	Stromfunktion
η	dynamische Viskosität [kg/m-s]
π	Zahl π
κ	Verhältnis der spezifischen Wärmekapazitäten [-]
κ_{mn}	Nullstellen der Bessel-Funktion der Ordnung m
λ	Wellenlänge [m]
Λ	Vorfaktor im nicht-linearen Absorberwiderstand
ω	Vorticity [1/s]
ω	Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ [1/s]
θ	Raumkoordiante in Umfangsrichtung
ρ	Dichte [kg/m ³]
τ	Verzugszeit [s]

Ψ Mode

Indices

∞ Umgebung
Abs Absorber
BK Brennkammer
char charakteristisch
 D Dämpfung
 DD Droplet Drag
Due Düse
DE Düseneintritt
DH Düsenhals
eff effektiv
 F Filter
KDE Krümmung Düseneintritt
KDH Krümmung Düsenhals
 i Injektor
 I Imaginärteil
 k Zählindex
 l Modenindex
 m Ordnung der Bessel-Funktion
max maximal
min minimal
 n ModenIndex
num numerisch
 Ox Oxidator
 R Realteil
rel relativ
sim Simulation
 t Total
theo theoretisch
 T Tropfen

V	Volumentrisch
Vap	Verdampfung
W	Wand
zu	Zugeführt
z	Zentrum
0	Ausgangswert

Kopfzeiger

–	Mittelwert
'	Schwankungswert erster Ordnung
"	Schwankungswert zweiter Ordnung
.	Zeitableitung
a	akustische Mode
e	Entropiemode
v	Vorticitymode
$\hat{}$	komplexe Amplitude
GZ	Wert am Grenzyklus
*	konjugiert komplex
*	entdimensionierter Wert
+	Ausbreitung stromauf
–	Ausbreitung stromab

Dimensionslose Kennzahlen

M	\bar{u} / \bar{a} Mach-Zahl
Re	$\rho L u / \eta$ Reynolds-Zahl

Operatoren

\mathcal{R}	Realteil
$\langle \rangle$	zeitliche Mittelung

Abkürzungsverzeichnis

APE	A coustic P erturbation E quations
CAA	C omputational A ero a coustics
CFD	C omputational F luid D ynamics numerische Strömungsberechnung
DNS	D irect N umerical S imulation
DRP	D ispersion R elation P reserving Scheme Direkte numerische Simulation
FFT	F ast F ourier T ransformation Schnelle Fourier-Transformation
LDDRK	L ow- D ispersion L ow- D issipation R unge K utta
LEE	L inearised E uler E quations Linearisierte Eulergleichungen
LES	L arge E ddy S imulation Grobstruktursimulation
L1	erste l ongitudinale Mode
TDIBC	T ime D omain I mpedance B oundary C onditions
T1	erste t ransversale Mode
T2	zweite t ransversale Mode
R1	erste r adiale Mode
URANS	U nsteady R eynolds A veraged N avier- S tokes Equations

1 Einleitung

1.1 Geschichtlicher Überblick

Das Auftreten von Verbrennungsinstabilitäten begleitet die Geschichte der Entwicklung von Raketen, sowohl im militärischen Bereich, als auch in der zivilen Raumfahrt. Es wird für eine Vielzahl von Problemen und Fehlschlägen verantwortlich gemacht. Das Phänomen „Verbrennungsinstabilität“ wurde in den späten 1930er Jahren in Flüssigkeits- und Feststoffraketen entdeckt, und bereitet auch in gasbetriebenen Raketen, in Nachbrennern, sowie in modernen Gasturbinen, Heizungsbrennern und industriellen Feuerungen Schwierigkeiten.

Bemühungen zur Unterdrückung von Verbrennungsinstabilitäten reichen bis in die 40er Jahre des letzten Jahrhunderts zurück. Damals wurde während des zweiten Weltkrieges in den USA versucht, in feststoffgetriebenen Raketen mit Hilfe von Geometrieänderungen, dem Einsatz von Baffles oder Resonanzbohrungen das sog. „high frequency resonant burning“ zu eliminieren [CY95]. In den 50er Jahren gewann die Forschung an Verbrennungsinstabilitäten für die Entwicklung der flüssigkeitsbetriebenen Interkontinentalraketen an Bedeutung. Auch bei der Entwicklung des F-1 Triebwerks für die Trägerrakete Saturn V im Apollo-Programm der 60er Jahre traten massive Probleme auf, obwohl das Triebwerk den Berechnungen nach ein stabiles Verhalten hätte aufweisen müssen. Nach über 2000 Triebwerkstests und geometrischen Modifikationen wurde das F-1 Triebwerk schließlich 1966 für die bemannte Raumfahrt freigegeben [CY95]. Auch sowjetische und europäische Programme litten unter dem Auftreten von Verbrennungsinstabilitäten. So kam es in der dritte Stufe RD-0110 der sowjetischen Trägerrakete Soyuz zu Instabilitäten, die ebenfalls durch Änderungen der Geometrie und der Treibstoff-Einspritzung beseitigt wurden [Rub95]. Beim zweiten Start der europäischen Trägerrakete Ariane

1980 führte eine Verbrennungsinstabilität in einem der Viking-Triebwerke der ersten Stufe [HLP91] zu einem Fehlschlag der gesamten Mission. Danach wurde die Einspritzung modifiziert und die Treibstoffkombination gewechselt. Zuletzt trat 2001 beim Ariane-Flug 142 eine Verbrennungsinstabilität im Oberstufentriebwerk auf [Ari01]. In allen genannten Beispielen konnten trotz vorhandener Rechenverfahren, Theorien, und ständig wachsendem Verständnis der physikalischen Ursachen von Verbrennungsinstabilitäten, nur Ausprobieren und kostspielige Triebwerkstests Abhilfe schaffen. Dies verdeutlicht die Notwendigkeit der Entwicklung besserer und zuverlässigerer Berechnungsverfahren.

1.2 Begriffsdefinitionen

Flüssigkeits-Raketentriebwerke werden mit flüssigen Treibstoffen betrieben. Es gibt eine Vielzahl unterschiedlicher Treibstoffe mit unterschiedlichen thermodynamischen Eigenschaften und abweichendem chemischen Reaktionsverhalten. Bei Einstoffsystemen (Monoergole) wird ein einziger Stoff thermisch oder katalytisch umgesetzt. Zweistoffsysteme (Biergole) hingegen bestehen aus Treibstoff und Oxidator. Die zunächst flüssigen Treibstoffe können in flüssiger oder gasförmiger Form oder auch in überkritischem Zustand in die Brennkammer eingebracht werden. Brennstoffe, die bei Kontakt spontan miteinander reagieren, nennt man hypergol. Bei nicht-hypergolen Treibstoffen bedarf es einer zusätzlichen Zündquelle. Diese Vielzahl an unterschiedlichen Eigenschaften lässt auch ein unterschiedliches Verhalten hinsichtlich Verbrennungsinstabilitäten erwarten. Das in der vorliegenden Arbeit untersuchte System wird mit der hypergolen Treibstoffkombination Monomethylhydrazin (MMH) und Distickstofftetroxid (NTO) betrieben.

In Flüssigkeits-Raketentriebwerken werden die folgenden Typen von Schwingungen des Brennkammerdrucks nach der Schwingungsfrequenz unterschieden: Pogo, Chugging, Buzz und High-Frequency-Instabilitäten (HF-Instabilitäten) [Sch99], [HR72]. Es können dabei Schwingungsamplituden auftreten, die 10% des Brennkammerdrucks weit übersteigen [HR72].

POGO Instabilitäten liegen in einem Frequenz-Bereich von $f = 1\text{Hz}$ bis ca. $f = 20\text{Hz}$. Damit ist die zugehörige Wellenlänge der Schwingungen viel größer als die Dimensionen der Brennkammer oder der Kraftstoffleitungen. Sie werden durch Resonanzerscheinungen zwischen Triebwerk, Struktur und Tank hervorgerufen: eine Störung im Schub resultiert in einer Störung der Beschleunigung des Triebwerks, was wiederum den Zulaufdruck zum Triebwerk und damit wiederum den Schub verändert [Sch99]. Die Entstehung von POGO-Instabilitäten ist gut erforscht [Cul88].

Mit „Chugging“ werden hydraulische Schwingungen im Antriebssystem bezeichnet [Sch99]. Die zugehörigen Frequenzen liegen bei einigen hundert Hertz. Sie entstehen durch Kopplung der fluidmechanischen Prozesse in der Brennkammer mit dem Treibstoffsystem [HR72]: Störungen in den Kraftstoffleitungen führen zu einem Druckabfall am Einspritzkopf, was wiederum ein Absinken des Brennkammerdrucks nach sich zieht. Je nach Zündverzug der Treibstoffe können sich daraus selbsterregte Schwingungen aufschaukeln. In ungünstigen Fällen kann Chugging hochfrequente Schwingungen auslösen.

Mit Buzz oder Buzzing werden Schwingungen in einem mittleren Frequenzbereich von ca. $f = 400\text{Hz}$ bis ca. $f = 1000\text{Hz}$ bezeichnet [SB01]. Dabei kommt es zu Kopplungen zwischen Schwingungen im Leitungssystem und der Brennkammer selbst. Die Schwingungsfrequenz liegt jedoch unterhalb der Eigenfrequenzen der Brennkammer [HR72] und damit auch unterhalb der Frequenzen der HF-Instabilität. Auch Buzzing gilt als ein möglicher Auslöser für hochfrequente Instabilitäten.

Verbrennungsschwingungen oder HF (High-Frequency)-Instabilitäten entstehen durch die direkte Kopplung der Verbrennung mit der Brennkammerakustik. Die Schwingungsfrequenz liegt dabei im Bereich der akustischen Eigenfrequenzen der Gasmasse in der Brennkammer, welche in der Regel mehrere tausend Hertz beträgt. Dieses Phänomen kann zusammen mit Chugging auftreten. Von allen oben genannten Schwingungsphänomenen hat die Verbrennungsschwingung das größte Potential, Schäden zu verursachen [Sch99], [HR72], worauf in Kapitel 2 näher eingegangen wird.

Verbrennungsschwingungen treten auch in anderen technischen Verbren-

nungssystemen wie Heizungsbrennern, stationären Gasturbinen, Flugtriebwerken und Nachbrennern auf. Auch hier handelt es sich um selbsterregte Schwingungen, denen über die Verbrennung Energie zugeführt wird. Bei den genannten technischen Systemen wird die Verbrennung zum Teil auf sehr unterschiedliche Art und Weise realisiert. Die Abläufe unterscheiden sich dabei zum einen in den physikalischen Mechanismen (z.B. vorgemischte Flammen, Diffusionsflammen, Sprayverbrennung). Zum anderen kommen auch unterschiedliche technische Realisierungen der Treibstoffzufuhr und der Flammenstabilisierung zum Einsatz. Daraus resultieren sehr verschiedene Möglichkeiten, wie die Verbrennung aus Störungen in der Treibstoffzufuhr und auf Schwingungen in der Brennkammer selbst reagiert. Zudem spielen unterschiedliche Mechanismen der Rückkopplung der Verbrennung auf die Schwingung (rein akustische Reflexion, Entropiewellen, usw.) und unterschiedliche Dämpfungsmechanismen eine Rolle. Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf HF-Instabilitäten in Flüssigkeits-Raketentriebwerken, die sich durch die Verbrennung hypergoler Treibstoffpaarungen und akustische Wellenausbreitung bei großen Strömungsgeschwindigkeiten in der Brennkammer auszeichnen.

1.3 Zielsetzung der Arbeit

Die zuverlässige rechnerische Vorhersage von Verbrennungsschwingungen in Raketentriebwerken stellt nach wie vor ein nicht gelöstes Problem dar. Dies liegt zum einen daran, dass trotz der Vielzahl von Modellen, die in der Stabilitätsberechnung verwendet werden, der physikalischer Hintergrund der Instabilität oft noch nicht genau verstanden ist. Dieser wird daher in den Modellen unvollständig abgebildet. Zum anderen ist das Lösen der gesamten modellfreien thermo-fluidmechanischen Erhaltungsgleichungen aufgrund des zu hohen numerischen Aufwandes unmöglich. Selbst mit erheblichen Vereinfachungen sind die zugehörigen Gleichungen wegen numerischer Probleme kaum lösbar. Die vorliegende Arbeit untersucht ein neuartiges Verfahren zur Simulation von HF-Instabilitäten im Zeitbereich. Dieses basiert auf der Lösung der linearisierten Störungsgleichungen. Dies bringt einen vergleichswei-

se niedrigen Modellierungsgrad bei gleichzeitig begrenztem numerischen Rechenaufwand mit sich. Grundlage für das Verfahren sind die Arbeiten von C. Pankiewitz [Pan04] [PS03], der die inhomogene Wellengleichung im Zeitbereich für eine Modellringbrennkammer gelöst hat. Die vorliegende Arbeit erweitert diesen Ansatz erheblich, um die Methodik auf hypergole Flüssigkeits-Raketenschubkammern anwenden zu können. Das Verfahren schließt nun auch die Ausbreitung akustischer Wellen in Strömungen mit großen Mach-Zahlen mit ein. Das Rechengbiet umfasst damit die Brennkammer und den konvergenten Düsenteil, so dass die vorgestellte Methode im Gegensatz zu den sonst üblichen Verfahren ohne Teilmodell für das Düsenverhalten auskommt. Als Flammenmodell wird das klassische $n - \tau$ -Modell nach Crocco [CC56] eingesetzt. Akustische Dämpfer werden über eine Randbedingung eingebunden. Ziel der Arbeit ist die Analyse des Einflusses von Düse und Dämpfern auf die Stabilitätsgrenzen, um so genauere Vorhersagen von Verbrennungsinstabilitäten zu ermöglichen und somit gezielte Maßnahmen zu deren Vermeidung zu unterstützen.

Kapitel 2 gibt einen Überblick über die Physik und die technischen Auswirkungen von HF-Instabilitäten in Raketentriebwerken. Kapitel 3 analysiert die vorhandenen Verfahren zur Berechnung von Verbrennungsschwingungen in Raketentriebwerken und zeigt ihre Stärken und Schwächen auf. Kapitel 4 beschreibt die Grundlagen für die mathematische Modellierung der in Kapitel 2 beschriebenen physikalischen Effekte. Aufbauend hierauf erläutert Kapitel 5 das Simulationsverfahren im Zeitbereich, die hierfür verwendeten Teilmodelle und das numerische Lösungsverfahren. Die Stabilitätsgrenzen für das Triebwerk ohne Dämpfer werden in Kapitel 6 bestimmt. In Kapitel 7 folgt eine Betrachtung des Düseninflusses und ein Vergleich der Ergebnisse mit Daten aus dem halb-analytischen Verfahren von Bell und Zinn [BZ73]. Die numerischen Ergebnisse werden für longitudinale Moden im Vergleich zu Daten von Bell [Bel72] validiert. Kapitel 8 analysiert den Einfluss des Dämpferrings auf das Stabilitätsverhalten des Systems. Die Zusammenfassung zeigt die Stärken des untersuchten Verfahrens, als auch notwendige Weiterentwicklungen des Verfahrens für eine weitere Verbesserung der Zuverlässigkeit der Stabilitätsvorhersage auf.

2 Selbsterregte Verbrennungsschwingungen in Raketentriebwerken

Das vorliegende Kapitel gibt einen Überblick über die physikalischen Prozesse, die an der Entstehung von Verbrennungsinstabilitäten beteiligt sind. Es dient als Grundlage zur Bewertung von Modellierungsansätzen und Berechnungsverfahren in Kapitel 3 und dem in dieser Arbeit entwickelten Berechnungsverfahren.

2.1 Grundmechanismus

Verbrennungsschwingungen entstehen durch die Kopplung der Verbrennungsvorgänge in der Brennkammer mit der Fluidodynamik des Systems. Die Verbrennung wirkt hierbei über die schwankende Wärmezufuhr als Quelle für die Schwingungsenergie. Der grundsätzliche Entstehungsmechanismus von Verbrennungsschwingungen ist in Abbildung 2.1 dargestellt: Störungen in der Brennkammer führen zu einer schwankenden Wärmefreisetzung. Diese schwankende Wärmefreisetzung führt zu einer schwankenden thermischen Expansion des Fluids, die wiederum als akustische Quelle wirkt. Die dadurch entstehenden akustischen Wellen werden zum Teil durch dissipative Prozesse gedämpft oder aus der Brennkammer hinaus transportiert. Der andere Teil der Wellen wird an den Brennkammerwänden reflektiert, und breitet sich in Richtung der Flamme aus. Die Reaktion der Flamme auf die zurück transportierten Störungen kann zu einem Rückkopplungsmechanismus und damit zu einer selbsterregten Schwingung führen. Diese Schwingungen treten in Form von stehenden Wellen bei bestimmten Frequenzen auf. Die zugehö-

rige Schwingungsformen heißen Schwingungsmoden.

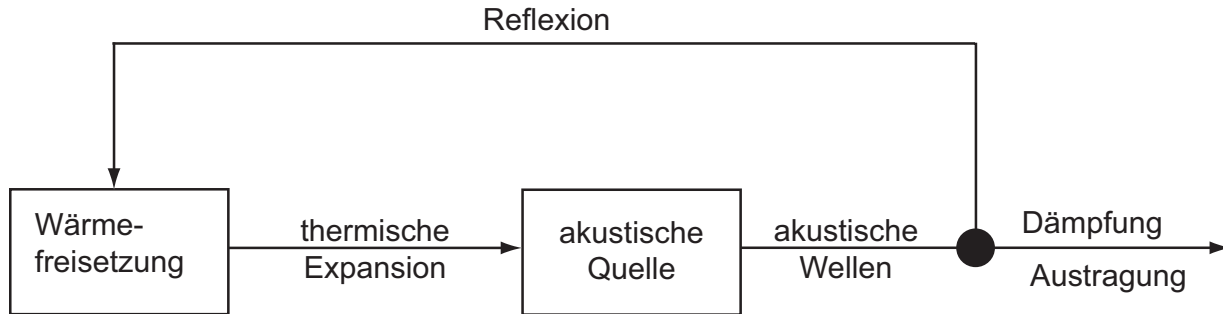


Abbildung 2.1: Rückkopplungsmechanismus zur Entstehung selbsterregter Verbrennungsschwingungen

Für die Entstehung von Verbrennungsschwingungen müssen zwei Kriterien erfüllt sein: Die erste (notwendige aber nicht hinreichende) Voraussetzung ist die Erfüllung des sog. Rayleigh-Kriteriums [Ray78], [Ray26]. Dieses besagt, dass die Wärmefreisetzung der Schwingung Energie zuführen kann, wenn das über einen Schwingungszyklus der Schwingungsdauer T_s gemittelte Produkt aus volumetrische Wärmefreisetzungsschwankung \dot{q}'_V und Druckschwankung p' integriert über das Volumen V einen positiven Wert annimmt

$$\int_V \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} p' \cdot \dot{q}'_V dt dV > 0. \quad (2.1)$$

Die zweite Bedingung besagt, dass die durch die Wärmefreisetzung zugeführte Schwingungsenergie die Verluste an Schwingungsenergie übersteigen muss. Verluste von Schwingungsenergie treten durch Abstrahlung an die Umgebung und Dissipation im System auf. Aus diesen beiden Voraussetzungen lässt sich ableiten, dass es prinzipiell zwei Möglichkeiten gibt, das Auftreten von Verbrennungsschwingungen zu verhindern: Die erste Möglichkeit besteht darin, die konstruktive Kopplung der Verbrennung mit der Akustik zu reduzieren, so dass die Druckschwankung und die Wärmefreisetzungsschwankung nicht in Phase sind. Die zweite Möglichkeit ist die Vergrößerung der Verluste von Schwingungsenergie. Zum besseren Verständnis der Rolle der beteiligten Prozesse werden in den nächsten Absätzen die bei der Verbrennung in

Raketenbrennkammern auftretenden Abläufe sowie die möglichen dämpfenden Effekte näher betrachtet.

2.2 Verbrennung in Flüssigkeitsraketen

Der Verbrennungsprozess in Flüssigkeitsraketenantrieben umfasst verschiedene physikalische und chemische Teilprozesse, die zum Teil sequenziell, zum Teil parallel ablaufen und sich gegenseitig beeinflussen. Abbildung 2.2 gibt einen Überblick über diese Teilprozesse. Die Darstellung ist an eine Skizze von Culick [CY95] angelehnt. Analoge Überblicke zu diesem Thema finden sich bei Sutton und Biblarz [SB01] oder Harrje und Reardon [HR72].

Sowohl der Oxidator als auch der Treibstoff werden über Einspritzelemente in die Brennkammer eingebracht. Dort treffen die einzelnen Treibstoff- und Oxidatorjets aufeinander. Es bilden sich Tröpfchen, die wiederum in kleinere Tröpfchen aufbrechen. Die Tröpfchen heizen sich auf und verdampfen. Nach der Verdampfung mischen sich Treibstoff und Oxidator und reagieren chemisch miteinander. Bei hypergolischen Treibstoffen findet zudem auch Mischung und Reaktion zwischen den flüssigen Phasen statt. All diese Prozesse interagieren wiederum mit der Turbulenz in der Brennkammer. Schließlich expandieren die Verbrennungsprodukte in der Raketendüse, wobei gasdynamische Prozesse eine Rolle spielen. Bei der Expansion ändern sich Temperatur und Druck, was über Gleichgewichtsreaktionen wiederum die chemische Zusammensetzung des verbrannten Gases beeinflusst.

Abbildung 2.3 illustriert die räumliche Aufteilung der Verbrennungsabläufe in der Brennkammer. Die Einspritzung und Tropfenbildung sowie der Großteil der Verdampfung geschieht nahe dem Einspritzkopf. Die Wärmefreisetzung findet hauptsächlich in der sog. „schnellen Verbrennungszone“ statt. Die chemische Reaktion ist jedoch auch in der Strömungszone noch nicht komplett abgeschlossen. Die Ausdehnung der einzelnen Zonen hängt wiederum von der Treibstoffkombination ab.

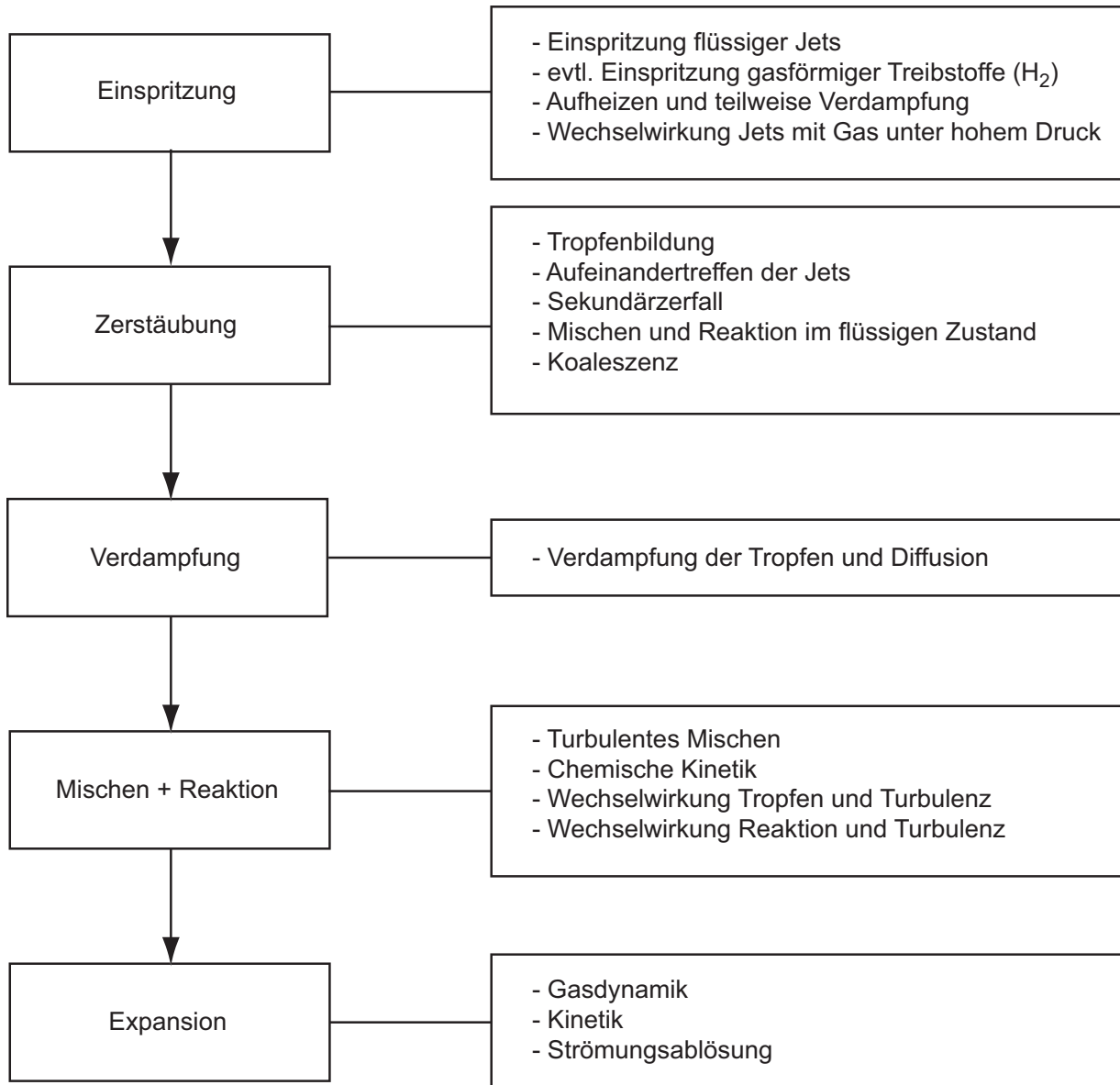


Abbildung 2.2: Physikalische und chemische Teilprozesse bei der Verbrennung von flüssigen Raketentreibstoffen

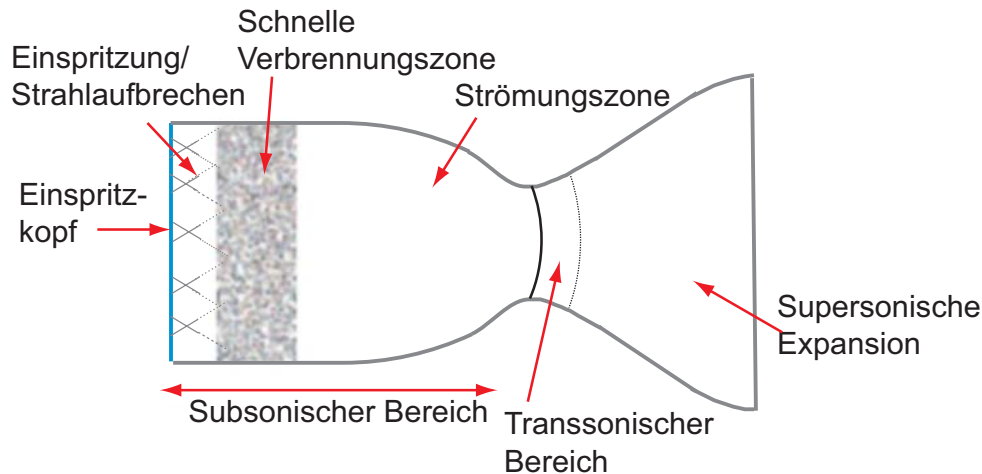


Abbildung 2.3: Aufteilung der Brennkammer in verschiedene Zonen nach Sutton und Biblarz [SB01]

Bei der Verbrennung hypergoler Treibstoffe läuft eine Vielzahl von Vorgängen ab, die über die klassische Vorstellung der Sprayverbrennung hinausgehen. Vermutlich geschieht der größte Teil der chemischen Reaktion zwischen flüssigem Oxidator und flüssigem Treibstoff, wobei die Treibstofftröpfchen in einer oxidatorreichen Umgebung verdampfen [HSZ95], da der Oxidator N_2O_4 einen niedrigeren Siedepunkt besitzt als die hypergolen Treibstoffe selbst. Daneben gibt es aber noch Mischung und Reaktion zwischen den flüssigen Phasen und Reaktionen als Einstoffsystem im Inneren der Tröpfchen. Schließlich kann es zur Ansammlung und anschließenden Explosion von Zwischenprodukten kommen. Dieses Phänomen wird als „Popping“ bezeichnet und kann Auslöser für Instabilitäten sein. Es lässt sich besonders häufig bei hypergolen Treibstoffpaarungen beobachten.

Das Auftreten von Verbrennungsinstabilitäten kann nach Schmidt [Sch99] ein Triebwerk in kürzester Zeit zerstören. Eine besonders destruktive Wirkung wird den in dieser Arbeit insbesondere betrachteten Transversalmoden zugeschrieben: Die oszillierende Strömung erhöht den Wärmeübergang auf die Wände auf der gesamten Länge des Triebwerks. Dies kann zum Durchschmelzen der Brennkammerwände führen. Zudem können Druckschwankungen und Schwankungen des Schubs Vibrationen der Struktur nach sich ziehen [Cul89].

Das Entstehen einer Verbrennungsinstabilität ist an folgende Bedingungen geknüpft: Erstens muss mindestens einer der oben beschriebenen Teilprozesse der Verbrennung, also Einspritzung, Tropfenbildung, Verdampfung oder chemische Reaktion, auf akustische Schwankungen reagieren, so dass dies eine schwankende Wärmefreisetzung erzeugt. Zweitens muss diese schwankende Wärmefreisetzung das Rayleigh-Kriterium erfüllen. Damit diese Bedingung erfüllt wird, muss der Prozess, der die Wärmefreisetzung kontrolliert (i.e. der langsamste), ein charakteristisches Zeitmaß in der gleichen Größenordnung besitzen wie die Verbrennungsschwingung selbst. Als kontrollierender Prozess wird bei der Verbrennung in Flüssigkeitsraketen im Allgemeinen die Tropfenverdampfung identifiziert [SDCB95]. Aber auch andere Effekte, die die charakteristische Zeit des kontrollierenden Prozesses verändern, können indirekt die treibende Wirkung der akustischen Quelle beeinflussen. Als Beispiel hierfür sind z.B. Änderungen an den Einspritzelementen zu nennen, die wiederum die Tropfengröße beeinflussen. Die Tropfengröße bestimmt schlussendlich die Verdampfungzeit. Dieser Zusammenhang erklärt, warum in der Vergangenheit Änderungen an den Einspritzelementen oder die Wahl eines anderen Treibstoffs zur Verbesserung des Stabilitätsverhaltens von Brennkammern geführt haben.

Beeinflussen Störungen in der Brennkammer direkt das Verhalten der Einspritzelemente, so kann es, analog der „Geschwindigkeitskopplung“ in Gasturbinen, zu Schwankungen des eingespritzten Massenstroms kommen. Dies kann wiederum über Schwankungen des Mischungsverhältnisses die Wärmefreisetzung verändern. Insbesondere führt die Kopplung zwischen Schwingungen in der Brennkammer und den Injektoren zu schwankenden Einspritzgeschwindigkeiten des Treibstoffs. Da dann schnellere Tröpfchen langsamere Tröpfchen überholen, verursacht dies die Bildung von Tröpfchenansammlungen, die dann paketweise in die Wärmefreisetzungszone hineintransportiert werden [HR72], [McC64]. Dort ziehen die Treibstoffpakete eine schwankende Wärmefreisetzung nach sich. Dieser Effekt heißt analog zur Elektrotechnik „Klystron-Effekt“, wo er zur Verstärkung hochfrequenter Signale eingesetzt wird.

Die Komplexität der Zusammenhänge und Abhängigkeiten bei den Verbren-

nungsprozessen verdeutlicht, warum das Ableiten von allgemeinen, physikalischen Modellen für die Wärmefreisetzungsschwankung Schwierigkeiten bereitet.

2.3 Initiierung von Verbrennungsinstabilitäten

Verbrennungsinstabilitäten können sich entweder spontan entwickeln oder durch eine Störung ausgelöst werden [HR72]. Spontane Instabilitäten entstehen aus Strömungs- oder Verbrennungslärm heraus. Diese beiden breitbandigen Lärmspektren können in Raketenschubkammern Druckamplituden zwischen ein und drei Prozent des Brennkammerdrucks aufweisen. Die entstehenden Verbrennungsschwingungen besitzen anfangs ebenfalls kleine Schwingungsamplituden bei einer oder wenigen Frequenzen, so dass die Entstehung spontaner Instabilitäten zunächst als lineares Phänomen betrachtet werden kann.

Getriggerte Instabilitäten werden von einer Störung mit einer bestimmten Amplitude ausgelöst. Es gibt dabei eine bestimmte Mindestamplitude, unter der die Störung wieder abklingt. Wird sie jedoch überschritten, entsteht eine selbsterregte Schwingung. Druckamplituden zur Erzeugung dieses nicht-linearen Verhaltens können natürlich auftretende Phänomene bei der Verbrennung zur Ursache haben: Die in Kapitel 2.2 erwähnten „Pops“ („Pops“ beim Hochfahren des Triebwerks werden in der Literatur zum Teil auch als „Spikes“ bezeichnet [HR72]) erzeugen Druckpulse, die Instabilitäten auslösen können. Bei Triebwerkstests zur Überprüfung der Stabilität werden deshalb Sprengladungen als künstliche Trigger für Instabilitäten eingesetzt. Dabei spricht man von sog. „Bomb Tests“.

2.4 Dämpfende Effekte

Verluste von Schwingungsenergie treten durch Transport der akustischen Schwankungen aus dem System heraus und durch Dissipation auf. Für den

ersten Verlusttyp ist in Raketentriebwerken insbesondere die Raketendüse maßgeblich. Die Düsengeometrie und die Wechselwirkung der Schwingung mit Gradienten der Strömungsgeschwindigkeit, der Dichte und des Drucks in der Düse führen zu einer teilweisen Reflexion als auch zu einer Transmission der Schwingungsenergie durch den Düsenhals. Abhängigkeiten von den einzelnen Größen und ihre Modellierung werden in Kapitel 4.3.2 diskutiert.

Flüssigkeitstropfen, die entweder als nicht-verdampfter Treibstoff oder in Form von kondensiertem Abgas oder kondensiertem, unverbranntem Treibstoff im Raketentriebwerk vorhanden sind, erfahren einen Widerstand, wenn sie sich in der Brennkammer bewegen. Dieser Widerstand, in der Literatur als „Droplet Drag“ bezeichnet, entzieht der Schwingung Energie und stellt einen volumetrischen Dissipationsmechanismus dar. Andere dämpfende Mechanismen im Volumen wie die Viskosität sind nach Harrje und Reardon [HR72] unbedeutend.

Neben diesen natürlich vorhandenen Verlustmechanismen können zusätzliche dämpfende Elemente in die Brennkammer eingebracht werden. In diesem Zusammenhang sind die sog. „Baffels“ und akustische Resonatoren zu nennen.

Baffels sind eine Anordnung von Rippen in der Brennkammer, meist nahe des Einspritzkopfes, die die Stabilität des Triebwerks über drei verschiedene Effekte beeinflussen: Zum einen verändern sie die akustischen Eigenschaften des Systems, zum anderen induzieren sie eine Dämpfung der Schwingungen durch die Bildung von Wirbeln, Ablösungen und Reibungseffekten. Zudem können die Rippen die Verbrennungszone von den Schwingungen abschirmen. Baffels werden hauptsächlich zur Vermeidung transversaler Moden eingesetzt.

Akustische Resonatoren werden üblicherweise in Form von Bohrungen oder Hohlräumen in die Brennkammerwände eingebracht. Die beiden verbreitetsten technischen Ausführungen, der Helmholtz-Resonator und der $\lambda/4$ -Resonator (engl. „Quarterwavetubes“), sind in Abbildung 2.4 illustriert. Die Wirkung der Resonatoren beruht auf einer Verstimmung des akustischen Systems sowie auf dissipativen Effekten. Im linearen Fall dominiert die viskose

Dissipation an den Wänden der Dämpfer die akustischen Verluste, bei größeren Schwingungsamplituden spielt vor allem die Wirbelbildung an der Mündung und die anschließende Dissipation dieser Wirbel eine große Rolle. Die Verluste sind dann abhängig von der Schwingungsamplitude [LPPP95]. Die mathematische Modellierung dieser Eigenschaften folgt in Kapitel 4.3.3.

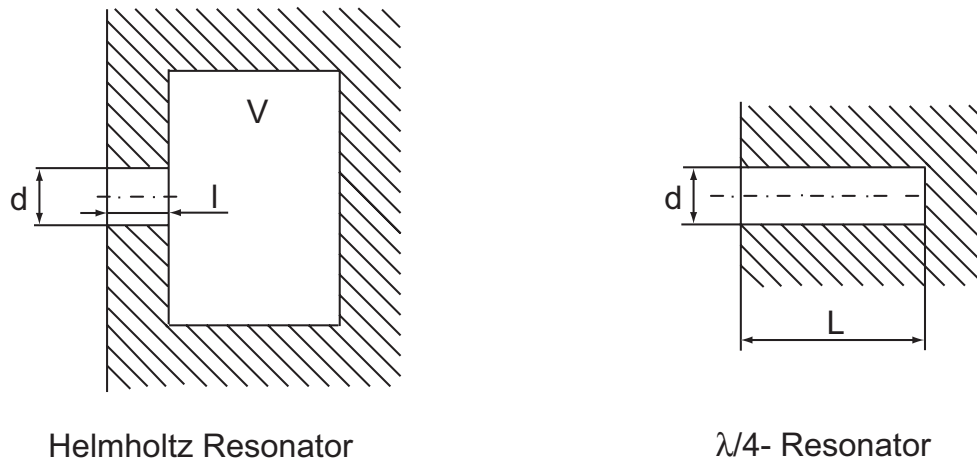


Abbildung 2.4: Helmholtz-Resonator und $\lambda/4$ -Resonator mit den wichtigsten Abmessungen

Wandgrenzschichten führen zu Reflexion und Brechung von akustischen Wellen. Wird die Öffnung der Resonatoren überströmt, so kann die Wandgrenzschicht, insbesondere bei großen Mach-Zahlen, den dämpfenden Effekt der Resonatoren reduzieren [JF01]. Tam und Auriault [TA96] zeigen, dass dieser Effekt für dünne Grenzschichten vernachlässigbar ist. Um die Dämpfungseigenschaften der Resonatoren sicherzustellen, sollten sie also an Stellen angebracht werden, wo der Einfluss der mittleren Strömung gering ist.

3 Berechnungsverfahren

Die Anstrengungen, Verbrennungsinstabilitäten in Raketenbrennkammern zu modellieren und vorherzusagen, reichen bis in die 50er Jahre des letzten Jahrhunderts zurück. Daher gibt es eine große Menge an Literatur zu vielen Teilaspekten des Themas. Harrje und Reardon [HR72] geben den Stand der Technik zu Beginn der 70er Jahre wieder. Die Aufsatzsammlung von Yang und Anderson [YA95] enthält Übersichtsartikel zu verschiedenen Fallstudien (siehe z.B. [CY95], [Rub95], [HSZ95]), Mechanismen und Berechnungsverfahren (siehe z.B. [HD95]) mit dem Wissensstand Mitte der 90er Jahre. Des Weiteren gibt es zahlreiche Übersichtsartikel von Culick ([Cul88] [Cul89] [Cul94]). Das folgende Kapitel gibt einen kurzen Überblick über die Schwächen, Stärken und Möglichkeiten vorhandener Verfahren zur Vorhersage von Verbrennungsinstabilitäten mit dem Schwerpunkt auf dem Einsatz in Raketentriebwerken. Anschließend wird der Kenntnisstand zur Einbindung nicht-linearer Effekte diskutiert. Für Informationen, die darüber hinausgehen, sei auf die oben genannten Übersichtswerke verwiesen.

3.1 Überblick über die Berechnungsverfahren

Alle Berechnungsverfahren für Verbrennungsinstabilitäten basieren prinzipiell auf der Lösung der Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie. Um mit Hilfe der Erhaltungsgleichungen die Stabilität des Systems zu bestimmen, sind jedoch bei den einzelnen Methoden unterschiedliche Annahmen und Vereinfachungen notwendig. Abbildung 3.1 gibt einen Überblick über die Verfahren, die zur Berechnung von Verbrennungsschwingungen eingesetzt werden. Die Darstellung ist an die Übersicht von Pankiewitz [Pan04] angelehnt. Der Modellierungsgrad der in Abbildung 3.1 dargestellten Methoden nimmt von links nach rechts zu. Gleichzeitig sinkt der Rechenaufwand der

Verfahren. Bis auf das direkte Lösen der Erhaltungsgleichungen wird für alle vorgestellten Verfahren ein Flammenmodell benötigt, das die Reaktion der Wärmefreisetzung auf die Schwankungsgrößen beschreibt.

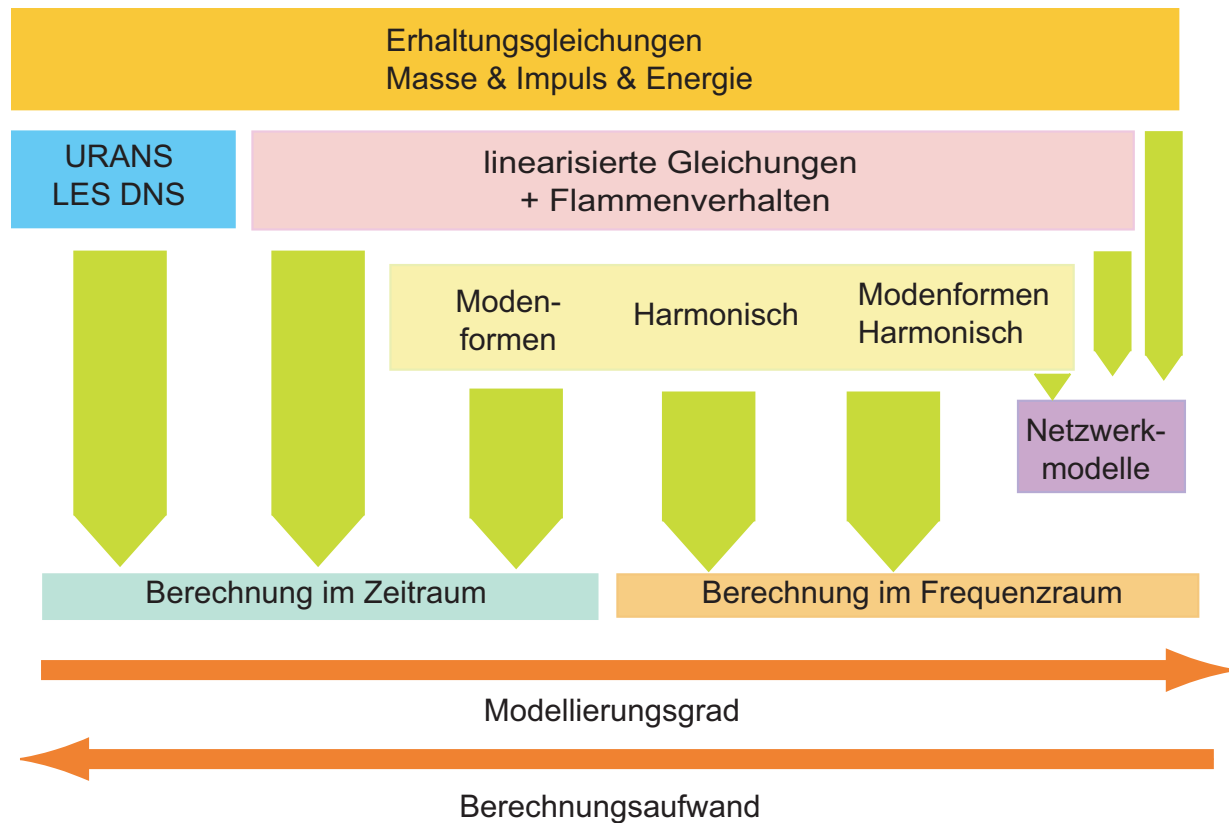


Abbildung 3.1: Übersicht über die Verfahren zur Berechnung von Verbrennungsschwingungen nach [Pan04]

Den größten Modellierungsgrad bei relativ geringem Rechenaufwand weisen Netzwerkmodelle auf. Diese unterteilen das betrachtete Verbrennungssystem in einfache Teilsysteme, die jeweils durch den Zusammenhang der ein- und ausgehenden akustischen Größen beschrieben sind. Solche Teilsysteme können z.B. Rohrstücke, Flächensprünge oder Flammen sein. Modelle für die Teilsysteme können entweder analytisch aus den Erhaltungsgleichungen [Put71], numerisch [GFEP03], [PFHS03], [SLBF05], [PPPD01] oder auch experimentell [NKS06], [SBG⁺04] gewonnen werden. Zur Bestimmung der Stabilität können verschiedene regelungstechnische Verfahren eingesetzt werden. Netzwerkmodelle haben vor allem zur Bestimmung der Stabilität von Gasturbinen (siehe z.B. [LKP⁺05], [BSN⁺04], [EP02]) und Feuerungen (sie-

he z.B. [McI87], [Roo01]) eine Bedeutung erlangt. Im Bereich der Raketentriebwerke finden sie bei der Modellierung der Zufuhr- und Leitungssysteme [DM74] [DBO05] [HA74] Anwendung. Die Modelle dienen dann zur Analyse von Instabilitäten, die das Zufuhrsystem einschließen. So verwendet De Benedictis [DBO05] ein Netzwerkmodell zur Ableitung einer Randbedingung, mit der das Zufuhrsystem in das Berechnungsverfahren nach Culick eingebunden wird (siehe z.B. [CY95]).

Viele Arbeiten zur Stabilität von Raketenschubkammern sind der zweiten Kategorie von rechts „Modenformen/ Harmonisch“ in Abbildung 3.1 zuzuordnen. Dabei muss sowohl die auftretende Modenform vorgegeben, als auch die Annahme harmonischer Schwingungen getroffen werden. Die einzelnen Arbeiten unterscheiden sich darin, mit welchem mathematischen Verfahren dann tatsächlich eine Lösung berechnet wird. Frühe Arbeiten aus den 50er und 60er Jahren wie zum Beispiel von Crocco [CC56] [Cro65] reduzieren die Grundgleichungen schließlich so weit, dass das Ergebnis für die Wachstumsrate der Schwingung analytisch als Funktion der beteiligten dämpfenden und treibenden Effekte dargestellt werden kann. Die linearen Ansätze von Culick [Cul75], [Cul88], [Cul89], [CY95] und Fassl [FSB05] zählen ebenfalls zur Gruppe dieser halbanalytischen Ansätze. Mitchell und Eckert [ME79] bedienen sich eines ähnlichen Verfahrens, wobei hier die reduzierten Erhaltungsgleichungen über einen Greens-Funktion-Ansatz in eine integrale Form überführt, und anschließend iterativ gelöst werden. Zinn [ZS68] wiederum löst das Problem mittels numerischer Integration, wobei er Düse und Brennkammer separat betrachtet.

Das Lösen linearisierter Erhaltungsgleichungen im Frequenzraum ohne Vorgabe einer Schwingungsform führt mathematisch auf ein Eigenwertproblem. Zusammen mit den frequenzabhängigen Flammenmodellen ergeben sich Gleichungen, die sich nicht mit den gängigen mathematischen Methoden lösen lassen. Benoit [BN05] entwickelt eine Feldmethode, die dieses Problem durch eine mathematische Näherung des Quellterms (sog. asymptotische Expansion) umgeht. Ein weiterer Ansatz der gleichen Gruppe [NBSP07] löst das Problem iterativ, ausgehend von den Eigenmoden ohne Flamme. Die Machbarkeit wird sowohl anhand eines akademischen Beispiels als auch an

verschiedenen Versuchskonfigurationen gezeigt. Dabei kommen analytische Ausdrücke für das Flammenmodell und gemessene Flammentransferfunktionen zum Einsatz [Ben05]. Die präsentierte Methode ist allerdings auf kleine Mach-Zahlen beschränkt. Zur Anwendung auf Raketenschubkammern müsste die Gültigkeit der Methode entweder auf Bereiche mit großen Mach-Zahlen ausgedehnt werden oder die Bereiche mit hohen Mach-Zahlen müssten durch geeignete Randbedingungen modelliert werden.

Die Vorgabe der Schwingungsform ohne Vorgabe der zeitlichen Abhängigkeit der Schwingungsamplitude reduziert die linearisierten Erhaltungsgleichungen auf gewöhnliche Differentialgleichungen. Dieses Verfahren stammt aus der mechanischen Schwingungslehre und trägt dort den Namen „Galerkin-Verfahren“ [MP05]. Es wird sowohl zur Berechnung der Stabilität von Gasturbinen-Brennkammern [BW04] als auch von Raketenschubkammern eingesetzt [ZP70], [Cul94] [LZ73], [CBS95], [YC90]. Das Verfahren ermöglicht auch die Betrachtung nicht-linearer Wellenausbreitung. Dabei werden Terme höherer Ordnung in den Schwankungsgrößen miteinbezogen.

Das direkte Lösen der linearisierten Grundgleichungen ist ein relativ neues Feld, das sich mit steigender Rechnerleistung eröffnet hat. Hierbei müssen weder Annahmen über die Modenform noch über den zeitlichen Verlauf der Schwingungsamplitude getroffen werden. Der numerische Aufwand ist jedoch im Vergleich zur Lösung der vollständigen Erhaltungsgleichungen gering. Pankiewicz [Pan04] konnte anhand des Beispiels einer Modellringbrennkammer zeigen, dass dieses Verfahren in der Lage ist, das Auftreten verschiedener Schwingungsmoden vorherzusagen. Zusammen mit einem nicht-linearen Flammenmodell konnten auch Grenzzyklen berechnet werden. Sein Simulationsverfahren ist jedoch auf Problemstellungen mit sehr kleiner Mach-Zahl beschränkt und bedarf daher zur Anwendung auf Raketenschubkammern einer Erweiterung.

Mit steigender Rechnerleistung gewinnen in den letzten Jahren zunehmend Verfahren an Bedeutung, die die vollständigen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie für reaktive Strömungen numerisch lösen. Vorteil dieser Verfahren ist, dass die Erhaltungsgleichungen die wechselseitige Kopplung zwischen Akustik und schwankender Wärmefreisetzung implizit enthal-

ten, und daher keine Modellierung dieses Zusammenhangs notwendig ist. Auch nicht-lineare Effekte sind in dieser Beschreibung enthalten und müssen nicht modelliert werden. Nachteil der Verfahren ist, dass das Lösen der fluidmechanischen Erhaltungsgleichungen einen hohen numerischen Aufwand erfordert und trotzdem noch die Verwendung von Modellen zur Beschreibung der Turbulenz und der Verbrennung verlangt. Zur Modellierung von Verbrennungsinstabilitäten in Raketentriebwerken werden unter anderem Modelle für das Aufbrechen der Treibstoffstrahlen und die Verdampfung benötigt (siehe z.B. Habiballah [HD95]). Daher sind Ansätze, die die gesamten Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie lösen, oft auf zwei Dimensionen beschränkt und/ oder beinhalten einschränkende Modelle für Turbulenz und Verbrennung. Das Ergebnis der Simulation für Schwingungsamplituden, Grenzyklen und Schwingungsmoden hängt wiederum stark von der Genauigkeit der verwendeten Teilmodelle und Randbedingungen ab [PV01].

Erste Arbeiten von Priem ([PG62], [Pri65], [Pri62]), die die fluidmechanischen Erhaltungsgleichungen lösen, tauchen bereits in den 60er Jahren auf. Die betrachteten Geometrien sind auf maximal zwei Dimensionen beschränkt. Die Modellierung enthält unterschiedliche Teilmodelle für die Einspritzung, Verdampfung und chemische Reaktion. In den 80er Jahren wurde dieser Ansatz auf dreidimensionale Geometrien ausgeweitet [PB89]. Die Arbeiten von Habiballah [HLP91], [HD95] umfassen die zweidimensionale Modellierung von Raketenschubkammern mit Teilmodellen für Tropfengrößenverteilungen, Verdampfung und Verbrennung für hypergole und kryogene Treibstoffe. Der Autor weist selbst darauf hin, dass für eine verbesserte Vorhersage dreidimensionale Geometrien und verbesserte physikalische Modelle notwendig sind. Die Arbeiten von Grenda et al. [GVM94] umgehen die Problematik der Turbulenzmodellierung, in dem sie die Euler-Gleichungen numerisch lösen. Um den Modellierungsgrad weiter zu reduzieren, werden heute zunehmend Anstrengungen unternommen, Verbrennungsinstabilitäten mittels Grobstruktursimulation (Large Eddy Simulation - LES) zu untersuchen. Auf dem Gebiet der Gasturbinen werden dort mittlerweile auch technisch relevante Systeme untersucht (siehe z.B. [DGM⁺05] [SPSG07]). Bei Raketenschubkammern sind Berechnungen mit LES derzeit noch auf die Untersuchung von Teilaspekten begrenzt. So betrachten Rey et al. [RDC05] den Einfluss trans-

versaler Anregung auf die Verbrennung von koaxialen Injektoren. Zur Berechnung gesamter Raketenmotoren müssen die bestehenden Ansätze jedoch noch weiterentwickelt werden.

Die Ausführungen in Kapitel 1 verdeutlichen, dass keiner der bestehenden Ansätze in der Lage ist, das Entstehen und Auftreten von Verbrennungsschwingungen sicher vorherzusagen.

3.2 Berücksichtigung nicht-linearer Effekte

Mit einer rein linearen Betrachtungsweise lassen sich das Auftreten von Grenzyklen und das Phänomen „Triggering“ nicht vorhersagen. In der Literatur herrscht eine gewisse Uneinigkeit darüber, wie diese beiden Phänomene beschrieben werden können.

Mehrere Arbeiten aus der Klasse der Galerkin-Verfahren beschäftigen sich mit der Berücksichtigung nicht-linearer Wellenausbreitung und/oder der Verwendung nicht-linearer Flammenmodelle. Culick [Cul94] und Yang [YWY95] geben hierzu einen Überblick über den Stand des Wissens in den 90er Jahren. Alle Ansätze in diesem Bereich sind ähnlich, die Ergebnisse aber zum Teil widersprüchlich. Die wichtigsten Ergebnisse lassen sich laut Yang [YWY95] folgendermaßen zusammenfassen:

- Die Berücksichtigung akustischer Prozesse zweiter Ordnung erlaubt den Austausch von Energie zwischen den Schwingungsmoden. Diese Betrachtung allein ist ausreichend für die Vorhersage von Grenzyklen (siehe auch [Cul94], [YC90]).
- Die Berücksichtigung akustischer Prozesse zweiter Ordnung und die Verwendung geeigneter nicht-linearer Flammenmodelle ermöglicht die Vorhersage von „Triggering“ (siehe auch [Cul94], [CBS95]).
- Die Berücksichtigung akustischer Prozesse dritter Ordnung allein reicht nicht für die Betrachtung von „Triggering“. Grenzyklen können aber

vorhergesagt werden. Dies steht im Widerspruch zu den Ergebnissen von Lores [LZ73].

Wie die theoretischen Überlegungen in dieser Arbeit in Abschnitt 4.4.2.4 zeigen, ist die Vorhersage von Grenzzyklen und „Triggering“ auch für lineare Akustik bei Wahl eines geeigneten nicht-linearen Flammenmodells möglich. Auf das hierzu erforderliche Verhalten der Flammenmodelle wird in Abschnitt 4.4.2.4 genauer eingegangen. Die dort dargestellten theoretischen Überlegungen werden von Ergebnissen verschiedener neuerer numerischer Arbeiten bestätigt. Balasubramanian und Sujith [BS07] zeigen für einen Galerkin-Ansatz, dass die Vorhersage von Grenzzyklen und „Triggering“ von der Wahl der Ansatzfunktionen abhängt: Werden entgegen der üblichen Wahl orthogonaler Ansatzfunktionen nicht-orthogonale Ansatzfunktionen verwendet, kann „Triggering“ auch für lineare Akustik und nicht-lineare Flammenmodelle auftreten. Pankiewitz [Pan04] konnte in seinem Zeitbereich-Ansatz durch die Verwendung linearer Akustik und eines nicht-linearen Flammenmodells mit gekappter Amplitude Grenzzyklen erreichen. Auch der in dieser Arbeit verwendete Ansatz kann durch die Wahl eines geeigneten Modells für das Flammenverhalten grundsätzlich Grenzzyklen und „Triggering“ vorher-sagen.

3.3 Zusammenfassung

Der Literaturüberblick verdeutlicht, dass eine Vielzahl von Ansätzen zur Vorhersage von Verbrennungsinstabilitäten existiert. Die Geschichte der Entwicklung von Raketenmotoren unterstreicht allerdings, dass trotz dieser Vielzahl von Ansätzen eine sichere Vorhersage und Vermeidung von Verbrennungsinstabilitäten nach wie vor nicht möglich ist. Dies liegt zum einen sicherlich an den fehlenden fundierten Modellen zum Flammenverhalten mit quantitativer Aussagekraft. Zum anderen ist die Schuld auch in den unzähligen Annahmen zu suchen, die eine mathematische Lösung des Problems erst möglich machten. Galerkin-Verfahren und Verfahren, bei denen sowohl die Moden- als auch die zeitliche Schwingungsform angenommen wird, haben

den Nachteil, dass die Lösung von der Qualität der Näherung der Schwingungsmoden abhängt. Dabei wird der Einfluss der Flamme auf die Modenform im Allgemeinen vernachlässigt. Andererseits ist die vollständige Lösung der fluidmechanischen Erhaltungsgleichungen wiederum so aufwändig, dass auch dort bisher stets stark vereinfachende Annahmen getroffen werden müssen (2D-Lösungen, Lösen von Eulergleichungen auf einem Ring, etc.). So ist dann dort die Bezeichnung „Vollständige Lösung der Erhaltungsgleichungen“ nicht mehr gerechtfertigt.

Pankiewicz konnte in seinen Arbeiten [Pan04] [PS03] zeigen, dass eine qualitative Vorhersage verschiedener Schwingungsmoden in einer Modellringbrennkammer mit einem Ansatz, der direkt die Wellengleichung im Zeitbereich auf drei Dimensionen löst, möglich ist. Dieser Ansatz hat den Vorteil, dass er einen relativ geringen Modellierungsgrad mit einem vergleichsweise geringen numerischen Aufwand kombiniert. Die vorliegende Arbeit zeigt, dass dieser Ansatz auf die Anwendung in Raketenschubkammern übertragen werden kann. Die Verwendung linearisierter Grundgleichungen, die die akustische Wellenausbreitung in nicht-gleichförmigen Strömungen wiedergibt, ermöglicht eine gemeinsame Berechnung von Brennkammer und Düse, was die Verwendung eines Modells für das Düsenverhalten überflüssig macht. Das Gesamtmodell der Raketenschubkammer beinhaltet somit das Düsenverhalten, die Flammentransferfunktion und Modelle für die Dämpfer. Die Möglichkeit der Verwendung nicht-linearer Flammenmodelle gibt dem Ansatz das Potential, in Zukunft auch nicht-lineare Probleme zuverlässiger untersuchen zu können. Durch die Wahl einer geeigneten Impedanzrandbedingung stromauf kann prinzipiell auch das Verhalten der Zufuhr- und Leitungssysteme berücksichtigt werden.

4 Grundlagen

Die vorliegende Arbeit untersucht das Auftreten von Verbrennungsinstabilitäten in Raketentriebwerken durch die Lösung linearisierter Grundgleichungen im Zeitbereich. In diesem Kapitel werden nun zunächst die Ableitung, die Eigenschaften und die Gültigkeit der gewählten Grundgleichungen diskutiert. Danach folgt die analytische Berechnung der genäherten Schwingungsformen im Raketentriebwerk im Frequenzraum. Anschließend wird die in der Literatur übliche Betrachtungsweise von Wärmefreisetzung, Düse und Absorbern diskutiert. Als Basis für das Verständnis der Wechselwirkung zwischen den verschiedenen beteiligten treibenden und dämpfenden Mechanismen betrachtet der darauf folgende Abschnitt dann die generischen Eigenschaften eines eindimensionalen, selbsterregten Schwingers. Eine Energiebetrachtung für dieses System verdeutlicht die Problematik der Vorhersage von selbsterregten Verbrennungsschwingungen im Raketentriebwerk. Anschließend erfolgt eine Analyse der akustischen Energiebilanz in linearisierten Systemen, wie sie in der vorliegenden Arbeit verwendet werden.

4.1 Linearisierte Grundgleichungen

4.1.1 Linearisierte Eulergleichungen

Ausgangsbasis für die Herleitung der linearisierten Eulergleichungen sind die Erhaltungsgleichungen für Masse 4.1, Impuls 4.2 und Energie 4.3 in einem reibungsfreien Fluid ohne Gravitationseinfluss. Die Gleichungen involvieren die Dichte ρ , den Druck p , die Strömungsgeschwindigkeit $\mathbf{u} = (u, v, w)^T$, die

Schallgeschwindigkeit a und den Isentropenexponenten κ .

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = 0 \quad (4.2)$$

$$\frac{1}{a^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{a^2} (\mathbf{u} \cdot \nabla) p + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{(\kappa - 1)}{a^2} \dot{q}_V \quad (4.3)$$

Die verwendete Energiegleichung 4.3 gilt für ideale Gase. Die Wärmezufuhr wird über die externe, unbewegliche, volumetrische Quelle \dot{q}_V modelliert. Details zur Herleitung der Energiegleichung 4.3 finden sich in [Pan04].

Zur Ableitung der linearisierten Eulergleichungen werden in den Erhaltungsgleichungen für Masse 4.1, Impuls 4.2 und Energie 4.3 alle Zustandsgrößen in ihren Mittelwert und in Schwankungsgrößen zerlegt (siehe z.B. [CY95], [CC56]). Dieses Vorgehen ist äquivalent einer Taylor-Reihenentwicklung der Größe um einen Mittelwert. So gilt dann z.B. für den Druck p :

$$p = \bar{p} + p' + p'' + \dots \quad (4.4)$$

Hierbei stellt \bar{p} den Mittelwert des Drucks, p' die Schwankungsgröße erster Ordnung und p'' die Schwankungsgröße zweiter Ordnung dar. Zur Ableitung der linearisierten Erhaltungsgleichungen werden nur kleine Schwankungsgrößen erster Ordnung berücksichtigt. „Klein“ bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Druckschwankung p' klein im Vergleich zum mittleren Druck \bar{p} ($p' \ll \bar{p}$), die Schwankungsdichte ρ' klein im Vergleich zur mittleren Dichte $\bar{\rho}$ ($\rho' \ll \bar{\rho}$) und die Geschwindigkeitsschwankungen u', v' und w' klein im Vergleich zur Schallgeschwindigkeit \bar{a} ($u' \ll \bar{a}$, $v' \ll \bar{a}$, $w' \ll \bar{a}$) sind. Die mittleren Größen sind dabei stationär. Produkte aus Schwankungsgrößen werden als sehr klein vernachlässigt.

Die Annahme kleiner Schwankungsgrößen ist für Verbrennungsinstabilitäten in Raketenschubkammern nicht allgemein gerechtfertigt. Für die Entstehung

spontaner Instabilitäten (also Instabilitäten, die ausgehend von kleinen Störungen in der Brennkammer anwachsen), wie sie in dieser Arbeit ausschließlich betrachtet werden, ist sie aber vertretbar. Die unklare Bedeutung nichtlinearer akustischer Phänomene bei der Vorhersage von Verbrennungsinstabilitäten in Raketen wurde bereits in Abschnitt 3.2 vertieft.

Die linearisierten Eulergleichungen lauten

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{\rho} + \bar{\rho} \nabla \cdot \mathbf{u}' + \rho' \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = 0, \quad (4.5)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}' + (\mathbf{u}' \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} + \frac{\nabla p'}{\bar{\rho}} - \frac{(\nabla \bar{p}) \rho'}{\bar{\rho}^2} = 0, \quad (4.6)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla p' + \mathbf{u}' \cdot \nabla \bar{p} + \kappa \bar{p} \nabla \cdot \mathbf{u}' + \kappa p' \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = (\kappa - 1) \cdot \dot{q}'_V. \quad (4.7)$$

Der Einfluss der Flamme erscheint im Gleichungssystem 4.5 - 4.7 als Quellterm in der Energiegleichung 4.7 in Form der volumetrischen Wärmefreisetzungsschwankung \dot{q}'_V mit den Einheiten $[\text{W}/\text{m}^3]$.

Die linearisierten Eulergleichungen beschreiben die Ausbreitung von Störungen in einer gegebenen, mittleren, nicht-gleichförmigen Strömung als Überlagerung von drei verschiedenen Ausbreitungsmoden: einer akustischen Mode (oder Welle), einer Entropie-Mode (oder -Welle; Transport von Temperaturschwankungen) und einer Vorticity-Mode (oder -Welle; Ausbreitung von Wirbelfluktuationen). Diese drei Ausbreitungsmoden besitzen die folgenden grundlegenden Eigenschaften [CK57]:

- Die akustische Mode beschreibt die Ausbreitung von Druckschwankungen in einem kompressiblen Medium. Die dadurch induzierten Geschwindigkeitsfluktuationen sind wirbelfrei. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist die Überlagerung aus Schall- und Strömungsgeschwindigkeit.
- Die Vorticity-Mode beschreibt den Transport und die Entstehung von Wirbelfluktuationen in einem inkompressiblen Medium. Mit ihr sind keine Schwankungen anderer thermodynamischer Zustandsgrößen wie

des Drucks oder der Dichte verbunden. Wirbelfluktuationen werden mit Strömungsgeschwindigkeit transportiert.

- die Entropie-Mode beschreibt die Produktion und die Ausbreitung von Dichte- bzw. Temperaturschwankungen. Sie ist nicht von Druckschwankungen, sondern nur von einem schwachen, meist vernachlässigten, Feld von Geschwindigkeitsfluktuationen begleitet. Sie breitet sich ebenfalls mit Strömungsgeschwindigkeit aus.

In einer nicht-gleichförmigen Strömung tritt aufgrund der Gradienten der mittleren Größen des Strömungsfeldes eine Wechselwirkung zwischen den einzelnen Modenarten auf. Diese Wechselwirkung zwischen den Moden lässt sich besser verstehen, wenn das Gleichungssystem 4.5 -4.7 durch Variablenzerlegung in ein äquivalentes Gleichungssystem überführt wird. Diese Variablenzerlegung wird z.B. bei Ewert et al. [EMS02a], [EMS02b], [ES03] angedacht und von Pankiewitz [Pan04] durchgeführt. Die linke Seite dieses äquivalenten Gleichungssystems beschreibt die Ausbreitung der jeweiligen Mode, die rechte die Quellen der Moden durch Wechselwirkung der anderen beiden Moden mit den mittleren Größen.

Zur Ableitung des äquivalenten Gleichungssystems wird die Dichteschwankung ρ' in einen Anteil der Entropiemode ρ^e und in einen Anteil der akustischen Mode ρ^a aufgespalten:

$$\rho' = \rho^e + \rho^a. \quad (4.8)$$

Die Dichteschwankung der akustischen Mode ρ^a ist wiederum über die linearisierte Isentropiebeziehung an die Druckfluktuation p' gekoppelt, welche alleinig durch die akustische Mode zustande kommt:

$$p' = \bar{a}^2 \rho^a. \quad (4.9)$$

Die Aufspaltung der Geschwindigkeitsschwankung erfolgt analog den Ideen der Potentialtheorie. Sie kann in einen zur akustischen Mode gehörigen wirbelfreien Anteil und einen Wirbelanteil aufgespalten werden. Hierfür wird das

akustische Potential Φ eingeführt. Der akustische Anteil an der Geschwindigkeitsfluktuation kann damit als Gradient des akustischen Potentials $\mathbf{u}^a = \nabla\Phi$ geschrieben werden:

$$\mathbf{u}' = \nabla\Phi + \mathbf{u}^v. \quad (4.10)$$

Zwischen den Druckfluktuationen und dem akustischen Potential besteht der folgende Zusammenhang über die substantielle Ableitung $\bar{D}/Dt = \partial/\partial t + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla$:

$$p' = -\bar{\rho} \frac{\bar{D}\Phi}{Dt}. \quad (4.11)$$

Einsetzen von Gleichung 4.8 bis Gleichung 4.11 in Gleichung 4.5 - 4.7 liefert das Gleichungssystem

$$\left[\frac{\bar{D}}{Dt} \left(\frac{1}{\bar{a}^2} \frac{\bar{D}}{Dt} \right) - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \nabla) \right] \Phi = S^a(\mathbf{u}^v, \rho^e), \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^v}{\partial t} + (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla) \mathbf{u}^v + (\mathbf{u}^v \cdot \nabla) \bar{\mathbf{u}} = S^v(\Phi, \rho^e), \quad (4.13)$$

$$\frac{\partial \rho^e}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho^e + \rho^e \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} = S^e(\Phi, \mathbf{u}^v, \dot{q}'_V). \quad (4.14)$$

Gleichung 4.12 beschreibt die Ausbreitung der akustischen Mode, Gleichung 4.13 die Ausbreitung der Vorticity-Mode und Gleichung 4.14 die Ausbreitung der Entropiemode. Auf der rechten Seite des Gleichungssystems 4.12 bis 4.14 sind die Quellen für die jeweilige Mode zu finden. Diese Quellterme

lauten ausgeschrieben

$$S^a(\mathbf{u}^v, \rho^e) = \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\frac{\partial \rho^e}{\partial t} + \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \rho^e + \rho^e \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} + \nabla \cdot (\mathbf{u}^v \bar{\rho}) \right), \quad (4.15)$$

$$S^v(\Phi, \rho^e) = -\bar{\boldsymbol{\omega}} \times \nabla \Phi + \frac{\nabla \bar{p}}{\bar{\rho}^2} \rho^e + \frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\bar{D}\Phi}{Dt} \left(\nabla \left(\frac{\kappa \bar{p}}{\bar{a}^2} \right) - \frac{1}{\bar{a}^2} \nabla \bar{p} \right), \quad (4.16)$$

$$S^e(\phi, \mathbf{u}^v, \dot{q}'_V) = \left(\frac{1}{\bar{a}^2} \nabla \bar{p} - \nabla \bar{\rho} \right) \cdot (\nabla \Phi + \mathbf{u}^v) - \frac{\bar{\rho}}{\bar{a}^2} \left((\kappa - 1) \nabla \cdot \bar{\mathbf{u}} + \frac{2}{\bar{a}} \bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{a} \right) \frac{\bar{D}\Phi}{Dt} - \frac{(\kappa - 1)}{\bar{a}^2} \cdot \dot{q}'_V. \quad (4.17)$$

Im Gegensatz zur Analyse von Pankiewitz [Pan04] wurden hier Quellterme in Gleichung 4.16, die den Faktor $1/\bar{a}^2$ enthalten, nicht als klein vernachlässigt. Diese Terme besitzen jedoch nur einen minimalen Einfluss, da sie in etwa zwei Größenordnungen kleiner sind als die anderen beiden Terme in Gleichung 4.16. Eine Analyse der Quellterme verdeutlicht die wechselseitige Interaktion der einzelnen Ausbreitungsmoden: Die akustische Mode bezieht bzw. verliert Energie durch das Wechselspiel zwischen den Gradienten der mittleren Größen und dem nicht-isentropen Anteil der Dichte-Schwankung ρ^e bzw. dem drehungsbehafteten Anteil der Geschwindigkeitsschwankung \mathbf{u}^v . Die Vorticity-Mode wiederum interagiert hauptsächlich mit der akustischen Mode über die Vorticity des mittleren Strömungsfeldes $\bar{\boldsymbol{\omega}} = \nabla \times \bar{\mathbf{u}}$. Analog tritt eine Wechselwirkung über die Gradienten der mittleren Größen der Entropiemode mit den anderen beiden Moden und der Wärmefreisetzungsschwankung auf.

Für die Wechselwirkung zwischen den Moden lassen sich die folgenden beiden, für Verbrennungsschwingungen relevanten Effekte nennen [Pan04]: Zum einen kann eine Kopplung der akustischen Schwankungen mit der Treibstoffzufuhr zu Luftzahlschwankungen führen, welche in der Flamme wiederum Temperatur- beziehungsweise Dichteschwankungen nach sich ziehen. Diese Schwankungen werden in Form einer Entropiewelle stromab transportiert. Die Ausbreitung dieser Entropiewelle der beschleunigten mittleren Strömung produziert Schall [Sch03a], der wiederum auf die Flamme zurückwirken kann.

Zum anderen werden akustische Wellen in der nicht-gleichförmigen Strömung zum Teil in Vorticity umgewandelt. Durch den Transport der Wirbel-
fluktuationen aus dem System heraus, ergibt sich so ein Verlustmechanismus
für akustische Energie.

Für eine mittlere Strömung ohne Gradienten, verschwinden alle Quellterme
in 4.15 bis 4.18 bis auf den Einfluss der Wärmefreisetzung. In einer Strö-
mung ohne Gradienten in den mittleren Größen und ohne Wärmefreiset-
zungsschwankung sind daher die drei Moden voneinander entkoppelt.

4.1.2 Acoustic Perturbation Equations (APE)

Für manche mittlere Strömungsfelder können Effekte durch die Gleichun-
gen 4.13 und 4.14 zu Instabilitäten in der Lösung der linearisierten Eulerglei-
chungen 4.5 - 4.7 führen. Daher schlagen Ewert et al. [EMS02a], [EMS02b],
[ES03] die sog. „Acoustic Perturbation Equations (APE)“ vor. Die APEs, die die
Ausbreitung von akustischen Störungen in nicht-gleichförmigen Strömungen
beschreiben, entstehen aus den linearisierten Eulergleichungen durch geeig-
netes Filtern der Quellen [ES03]. Damit wird die physikalische Stabilität des
Gleichungssystems sichergestellt.

Das APE-Gleichungssystem für Wellenausbreitung in kompressiblen Strö-
mungen mit einer Quelle für die Wärmezufuhr lautet

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{a}^2 \nabla \cdot \left(\bar{\rho} \mathbf{u}' + \bar{\mathbf{u}} \frac{p'}{\bar{a}^2} \right) = (\kappa - 1) \dot{q}'_V, \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} + \nabla (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}') + \nabla \left(\frac{p'}{\bar{\rho}} \right) = 0. \quad (4.19)$$

$\bar{a} = \sqrt{\kappa \bar{p} / \bar{\rho}}$ ist die lokale Schallgeschwindigkeit im idealen Gas und damit
im Allgemeinen keine Konstante. Für die Dichteschwankung wird keine Glei-
chung gelöst. Die akustische Dichteschwankung ρ^a ist über die Beziehung
 $p' = \bar{a}^2 \rho^a$ an die Druckschwankung p' gekoppelt. Der Transport und die Ent-
stehung von Entropiemoden ist im APE-Gleichungssystem 4.18 - 4.19 daher

nicht enthalten.

Analog zur Betrachtung in Abschnitt 4.1.1 lässt sich auch das APE-Gleichungssystem hinsichtlich der Modenwechselwirkung analysieren. Einsetzen von Gleichung 4.10 und 4.11 in 4.18 - 4.19 führt auf

$$\left[\frac{\bar{D}}{Dt} \left(\frac{1}{\bar{a}^2} \frac{\bar{D}}{Dt} \right) - \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \nabla) \right] \Phi = \frac{1}{\bar{\rho}} \nabla \cdot (\bar{\rho} \mathbf{u}^\nu) - \frac{(\kappa - 1)}{\bar{\rho} \bar{a}^2} \cdot \dot{q}'_V, \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}^\nu}{\partial t} + \nabla (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}^\nu) = 0. \quad (4.21)$$

Gleichung 4.20 beschreibt die im APE-Gleichungssystem enthaltene Ausbreitung der akustischen Mode. Die linke Seite von Gleichung 4.20 ist identisch der akustischen Mode der LEEs in Gleichung 4.12. Der erste Quellterm auf der rechten Seite gibt die Interaktion mit der Vorticity-Mode wieder, der zweite den Einfluss der schwankenden Wärmefreisetzung. Beide Terme tauchen in dieser Form auch in den LEEs auf.

Unterschiede zwischen den LEEs und den APes zeigen sich bei der Beschreibung der Vorticity-Mode, deren Transport im Falle der APes von Gleichung 4.21 wiedergegeben wird. Anwenden des Rotationsoperators $\nabla \times$ auf Gleichung 4.21 ergibt den Zusammenhang

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{u}^\nu}{\partial t} + \nabla \times \nabla (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}^\nu) = 0. \quad (4.22)$$

Da $\nabla \times \nabla = 0$ gilt, ergibt sich für $\boldsymbol{\omega}' = \nabla \times \mathbf{u}^\nu$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}'}{\partial t} = 0. \quad (4.23)$$

Gleichung 4.23 beschreibt ein eingefrorenes Feld der Vorticity. Dies bedeutet, dass sich die Vorticity im APE-Gleichungssystem mit der Zeit nicht ändert, und dass diese nicht konvektiv transportiert wird. Ist zu Beginn der Rechnung

keine Vorticity im Feld vorhanden, so ist diese auch zu einem späteren Zeitpunkt null. Diese Eigenschaft stellt die Stabilität des Gleichungssystems für beliebige mittlere Strömungsfelder sicher.

Obwohl erste Quellterm auf der rechten Seite von Gleichung 4.20 die gleiche Form besitzt wie in Gleichung 4.15 des LEE-Gleichungssatzes, weist er ein anderes Verhalten auf: Da sich das Vorticity-Feld in beiden Fällen in der Zeit unterschiedlich entwickelt, nimmt auch der Quellterm unterschiedliche Werte an. Damit wird die Wechselwirkung zwischen Vorticity und Akustik vom APE-Gleichungssystem nur eingeschränkt wiedergegeben.

4.1.3 Gültigkeit der Gleichungen im Fall Raketentriebwerk

Bei der mittleren Strömung in Raketentriebwerken handelt es sich im Allgemeinen um eine beschleunigte nicht-gleichförmige Strömung. In diesem Abschnitt werden die Gültigkeitsbereiche der zuvor diskutierten Gleichungssysteme in diesem Kontext bewertet. Anschließend wird die Verbindung zur Wellengleichung und Helmholtz-Gleichung dargestellt, da diese häufig für Abschätzungen verwendet werden.

Abbildung 4.1 gibt einen Überblick, welches Gleichungssystem welche Annahmen impliziert. Grundsätzlich kann die Störungsausbreitung in einer nicht-gleichförmigen Grundströmung durch die linearisierten Eulergleichungen beschrieben werden, sofern man sich auf kleine Störungen beschränkt. Die Isentropieannahme reduziert den Gleichungssatz um eine Gleichung. Wird weiterhin der Transport von Vorticity-Wellen ausgeschlossen, ergeben sich die Acoustic-Perturbation Equations. Vernachlässigen von Geschwindigkeitsgradienten führt auf die konvektive Wellengleichung. Für eine verschwindende mittlere Geschwindigkeit ergibt sich die Wellengleichung, die sich bei Annahme eines gleichförmigen Feldes für Druck und Dichte auf die bekannte klassische Form der Wellengleichung 4.24 reduziert.

$$\frac{1}{\bar{a}^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = 0. \quad (4.24)$$

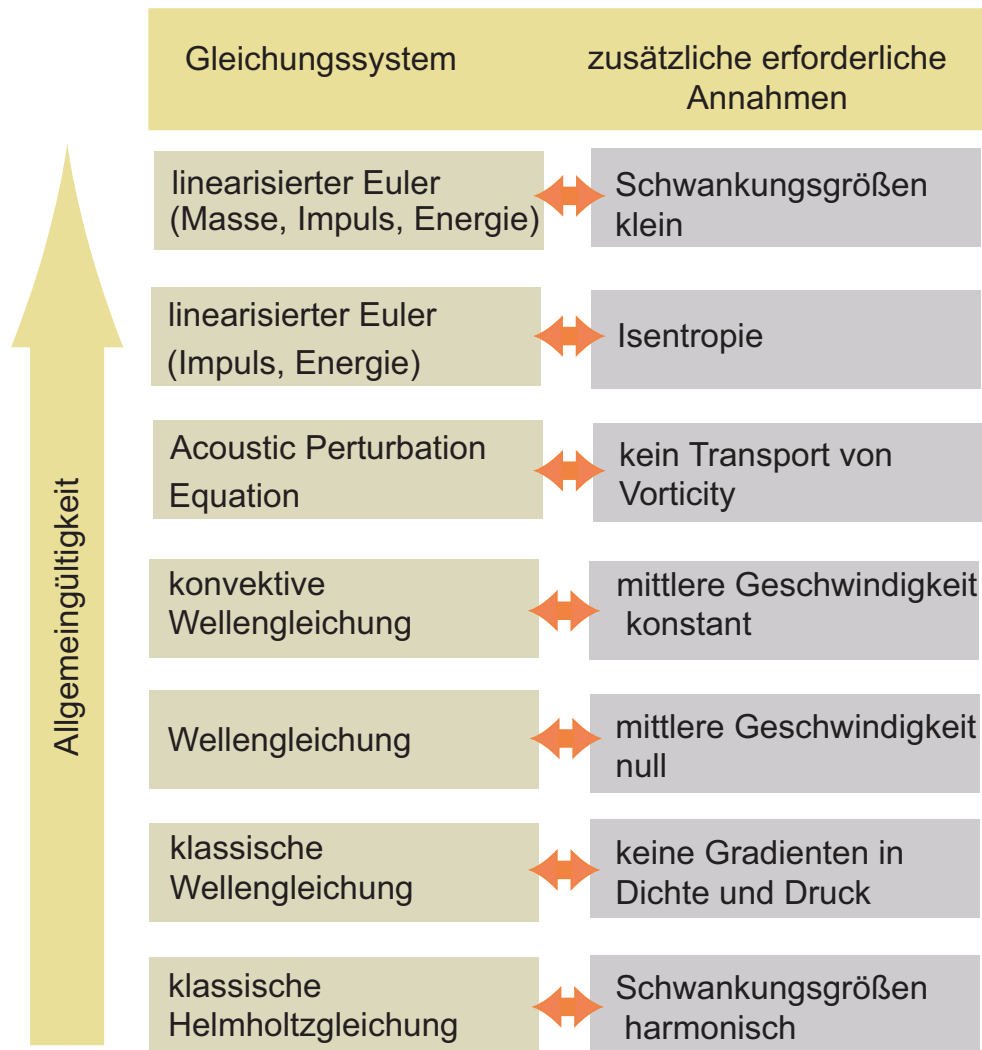


Abbildung 4.1: Vom linearisierten Euler zur Helmholtz-Gleichung: Gleichungssysteme und Annahmen

Aus der klassischen Wellengleichung wiederum lässt sich für harmonische Schwankungen die Helmholtz-Gleichung ableiten. Um demnach von den LEEs zur Wellengleichung zu gelangen, muss neben einer isentropen Störungsausbreitung ein vernachlässigbares mittleres Geschwindigkeitsfeld und ein homogenes Feld für die mittlere Dichte und mittleren Druck vorausgesetzt werden.

Im Teil einer Raketenschubkammer stromauf des Düseneingangs ist die mittlere Strömung näherungsweise gleichförmig. Nicht-isentrope Dichteschwan-

kungen bzw. Temperaturschwankungen sind aufgrund der Verbrennungsvorgänge (nicht-gleichförmige Mischung von Brennstoff und Oxidator, etc.) sicherlich vorhanden [Cul88]. Der Transport dieser Temperaturschwankungen in eine kritisch durchströmten Düse erzeugt wiederum akustische Druckschwankungen, die bei der Entstehung von Verbrennungsinstabilitäten mitwirken können. Verschiedene Arbeiten weisen jedoch darauf hin, dass dieses Phänomen, wenn überhaupt, nur bei niederfrequenten Oszillationen eine Rolle spielt (siehe [Sat00], [EFHS04], [Eck05]). Daher wird in dieser Arbeit der Einfluss von Entropiemoden vernachlässigt.

Dieser Arbeit liegt der homogene APE-Gleichungssatz 4.18 und 4.19 zu Grunde. Dieser beschreibt streng genommen die Ausbreitung akustischer Wellen in nicht-gleichförmigen rotationsfreien Strömungen. Wie in Abschnitt 4.1.2 diskutiert, ist der Quellterm, der den Transfer von Vorticity in Akustik steuert, formal vorhanden, hat aber aufgrund der fehlenden Konvektion der Vorticity eine andere Wirkung als in den LEEs. Der Transfer von Akustik in Vorticity wird bei den LEEs hauptsächlich vom ersten Term in Gleichung 4.16 bestimmt. Dieser enthält die Wechselwirkung der Wirbelstärke des mittleren Strömungsfeldes und der akustischen Schnelleschwankung $\mathbf{u}'^a = \nabla\Phi$. In den APEs gibt es diesen Term nicht. In einem Strömungsfeld mit geringer mittlerer Wirbelstärke, wie es in dieser Arbeit verwendet wurde, hat er aber einen geringen Einfluss. Auch Ewert und Schröder [ES03] zeigen, dass der homogene APE-Gleichungssatz in Strömungen mit geringer mittlerer Wirbelstärke näherungsweise anwendbar ist und dass dort Abweichungen zur Lösung der LEEs gering sind. Damit ist die Anwendung der APEs im gesamten betrachteten Rechengebiet, d.h. in Brennkammer und Düse, gerechtfertigt. Trotzdem kann es wegen der eingeschränkten Wechselwirkung zwischen akustischer Mode und Vorticity-Mode bei der Bilanzierung der akustischen Energie zu Abweichungen zwischen den Lösungen aus LEEs und APEs kommen.

4.2 Harmonische Schwingungen

Viele Analysen zu Verbrennungsinstabilitäten werden im Frequenzraum durchgeführt. Zudem bietet die Frequenzraumdarstellung für viele Zusam-

menhänge in dieser Arbeit eine anschauliche Möglichkeit für grundlegende Abschätzungen. Die Frequenzraumdarstellung schränkt die Schwingungsform in der Zeit auf harmonische Schwingungen ein. Die Schwankungsgrößen weisen damit für harmonische Schwingungen in der Zeit ein sinusförmiges Schwingungsverhalten auf. Die Druckschwankung lässt sich im Falle zeitlich konstanter Schwingungsamplituden schreiben als

$$p'(t) = \hat{p}(\mathbf{x}) \exp(i\omega t). \quad (4.25)$$

Die reelle Kreisfrequenz ω ist über die Zusammenhänge

$$\omega = 2\pi f \quad (4.26)$$

$$\omega = 2\pi \frac{1}{T_s} \quad (4.27)$$

mit der Schwingungsfrequenz f und der Schwingungsdauer T_s verknüpft.

Analog zu Gleichung 4.25 gilt für Schwingungen, deren Amplitude mit der Zeit auf- oder abklingt

$$p'(\mathbf{x}, t) = \hat{p}(\mathbf{x}) \exp[(i\omega + \alpha)t]. \quad (4.28)$$

Das Vorzeichen des Koeffizienten α bestimmt, ob die Schwingung auf- oder abklingt. Für negative Werte von α wird die Schwingung gedämpft, für positive angefacht.

4.2.1 Klassische Akustik

Bei Annahme harmonischer Schwankungsgrößen lässt sich die Wellengleichung der klassischen Akustik 4.24 in die Helmholtz-Gleichung

$$\frac{\omega^2}{\bar{a}^2} \hat{p} + \nabla^2 \hat{p} = 0 \quad (4.29)$$

transformieren. Die komplexe Amplitude $\hat{p}(\mathbf{x})$ gibt die räumliche Druckverteilung an, welche sich als Funktion des Wellenzahlvektors \mathbf{k} und der Ortskoordinate \mathbf{x} schreiben lässt:

$$\hat{p}(\mathbf{x}) = \hat{p}_0(\mathbf{x}) \exp(i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) \quad (4.30)$$

$\hat{p}_0(\mathbf{x})$ ist die räumliche Verteilung der Amplitude von $\hat{p}(\mathbf{x})$, der Exponentialterm beschreibt die Verteilung der Phasenlage $\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}$.

Die Komponenten des Wellenzahlvektors \mathbf{k} sind im Ruhenden ($\bar{\mathbf{u}} = 0$) definiert als $k_{x,y,z} = \frac{\omega}{\bar{a}}$. Breitet sich die akustische Welle in einem durchströmten Gebiet aus, so muss der Wellenzahlvektor um die Strömungsgeschwindigkeit $\bar{\mathbf{u}}$ korrigiert werden zu

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{\bar{a} + \bar{\mathbf{u}}}. \quad (4.31)$$

Das in Abbildung 4.2 dargestellte Beispiel verdeutlicht die Bedeutung von Gleichung 4.31: In einem mit der Geschwindigkeit \bar{u}_1 in Richtung der Koordinate x durchströmten Rohr breitet sich eine Welle vom Punkt x_1 zum Punkt x_2 aus. Damit haben der Ortsvektor \mathbf{x}^+ und die Strömungsgeschwindigkeit \bar{u}_1 die gleiche Richtung und die Wellenzahl k_x^+ nimmt den Wert $\omega / (\bar{a} + \bar{u}_1)$ an. Die Welle breitet sich entlang des Ortsvektors \mathbf{x}^+ mit der Geschwindigkeit $\bar{a} + \bar{u}_1$ aus.

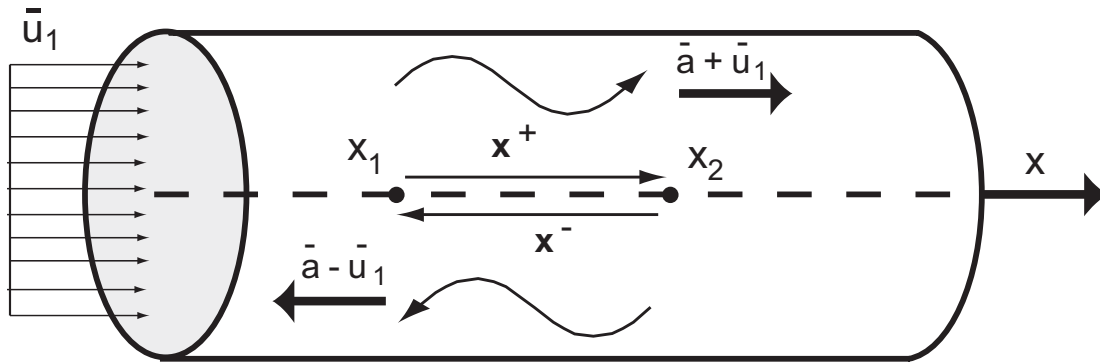


Abbildung 4.2: Wellenausbreitung in einem durchströmten Rohr

Betrachtet man hingegen die Ausbreitung von x_2 nach x_1 , so haben der Ausbreitungsvektor \mathbf{x}^- und die Strömungsgeschwindigkeit \bar{u}_1 unterschiedliche Vorzeichen. Die Wellenzahl beträgt in diesem Fall $k_x^- = -\omega / (\bar{a} - \bar{u}_1)$. Die Welle breitet sich mit der Geschwindigkeit $\bar{a} - \bar{u}_1$ aus.

Mit Hilfe einer Betrachtung im Frequenzraum kann auch die Frage beleuchtet werden, inwieweit der konvektive Anteil bei der akustischen Wellenausbreitung im zylindrischen Teil der Raketenschubkammer vernachlässigbar ist [PV01]. Hierfür wird eine Abschätzung über die Wellenzahl der substantiellen Ableitung einer eindimensionalen harmonisch oszillierenden Größe $g = (\exp(kx - i\omega t))$ herangezogen:

$$\frac{\bar{D}g}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial g}{\partial x} \quad (4.32)$$

$$= (-i\omega + \bar{u} i k) g \quad (4.33)$$

$$= -i \omega \left(1 \pm \frac{M}{1 \pm M} \right) g \quad (4.34)$$

Für kleine Werte der Mach-Zahl M gilt daher $\frac{\bar{D}g}{Dt} \approx \frac{\partial g}{\partial t}$. Im zylindrischen Teil von Raketentriebwerken können jedoch Mach-Zahlen bis zu $M = 0,3$ auftreten. Damit stellt die Näherung der akustischen Ausbreitung mit der klassischen Wellengleichung dort eine eher grobe Näherung dar. Im konvergenten Teil der Düse gilt diese Näherung nicht mehr. Es sei an dieser Stelle vor-

weggenommen, dass bei der Betrachtung des Transports akustischer Energie über Ränder auch eine relativ geringe mittlere Geschwindigkeit eine entscheidende Rolle beim Ergebnis der Stabilitätsbetrachtung spielen kann (siehe Abschnitt 4.4.2.2).

4.2.2 Lösungen für zylindrische Geometrien

Zur Abschätzung der Frequenzen und Schwingungsmoden in einem Raketentriebwerk wird das Triebwerk üblicherweise als Zylinder genähert. Die Wellenausbreitung in diesem Zylinder wird dabei mit Hilfe der Wellengleichung aus der klassischen Akustik für ein ruhendes homogenes Medium beschrieben (Gleichung 4.24). Wenn die Wände des Zylinders schallhart ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' = 0$) sind, folgt für die Druckschwankung p' an der Wand die Bedingung

$$\mathbf{n} \cdot \nabla p' = 0. \quad (4.35)$$

Die Druckschwankung an der Stelle \mathbf{x} im Raketentriebwerk kann als Summe der zueinander normalen Moden Ψ_k mit jeweils einem harmonischen Verlauf der Amplitude in der Zeit $\hat{p}_k \exp(i \omega_k t)$ ausgedrückt werden

$$p'(\mathbf{x}, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \hat{p}_k \exp(i \omega_k t) \Psi_k. \quad (4.36)$$

Einsetzen von Gleichung 4.36 in die Bedingungen 4.24 und 4.35 führt auf die homogene Helmholtz-Gleichung und die Randbedingung,

$$\frac{\omega_k^2}{\bar{a}^2} \Psi_k + \nabla^2 \Psi_k = 0 \quad (4.37)$$

$$\mathbf{n} \cdot \Psi_k = 0, \quad (4.38)$$

welche die einzelnen normalen Moden erfüllen müssen.

Eine Lösung für Gleichung 4.37 lässt sich durch Umformulieren in Zylinderkoordinaten und einen Separationsansatz der Form

$$\Psi_k = \mathcal{F}(x) \mathcal{R}(r) \mathcal{G}(\theta) \quad (4.39)$$

finden. $\mathcal{F}(x)$ beschreibt die Abhängigkeit der Schwingungsmode in die Achsrichtung x , $\mathcal{R}(r)$ in radiale Richtung und $\mathcal{G}(\theta)$ in Umfangsrichtung. Der Ansatz führt auf eine Bessel-Differentialgleichung für die radiale Komponente $\mathcal{R}(r)$.

Die Lösung der Gleichungen 4.37 und 4.38 für eine zylindrische Brennkammer mit Radius R_{BK} und Länge L_{BK} ergibt damit die in Gleichung 4.40 und 4.41 dargestellten Ausdrücke für die beiden möglichen stehenden Schwingungsmoden $\Psi_{k,1}$ und $\Psi_{k,2}$. Bei stehenden Moden ändert sich die Position der Schwingungsbäuche mit der Zeit nicht. Bei den beiden Lösungen ist die Lage der Schwingungsbäuche um 90° verdreht.

$$\Psi_{k,1} = \cos\left[\frac{\pi l}{L_{\text{BK}}} x\right] J_m\left(\kappa_{mn} \frac{r}{R_{\text{BK}}}\right) \cos(m\theta), \quad (4.40)$$

$$\Psi_{k,2} = \cos\left[\frac{\pi l}{L_{\text{BK}}} x\right] J_m\left(\kappa_{mn} \frac{r}{R_{\text{BK}}}\right) \sin(m\theta). \quad (4.41)$$

κ_{mn}^2 sind die Nullstellen der Bessel-Funktion J erster Art der Ordnung m . Abbildung 4.3 zeigt die Draufsicht der Druckverteilung in einer zylindrischen Brennkammer für die erste transversale Mode (T1; $l = 0, m = 1, n = 0$), die zweite transversale Mode (T2; $l = 0, m = 2, n = 0$), die dritte transversale Mode (T3; $l = 0, m = 3, n = 0$) und die erste radiale Mode (R1, $l = 0, m = 0, n = 1$).

Die zugehörigen Schwingungsfrequenzen lassen sich mit dem Ausdruck

$$f_k = \frac{\bar{a}}{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\pi l}{L_{\text{BK}}}\right)^2 + \left(\frac{\kappa_{mn}}{R_{\text{BK}}}\right)^2} \quad (4.42)$$

berechnen.

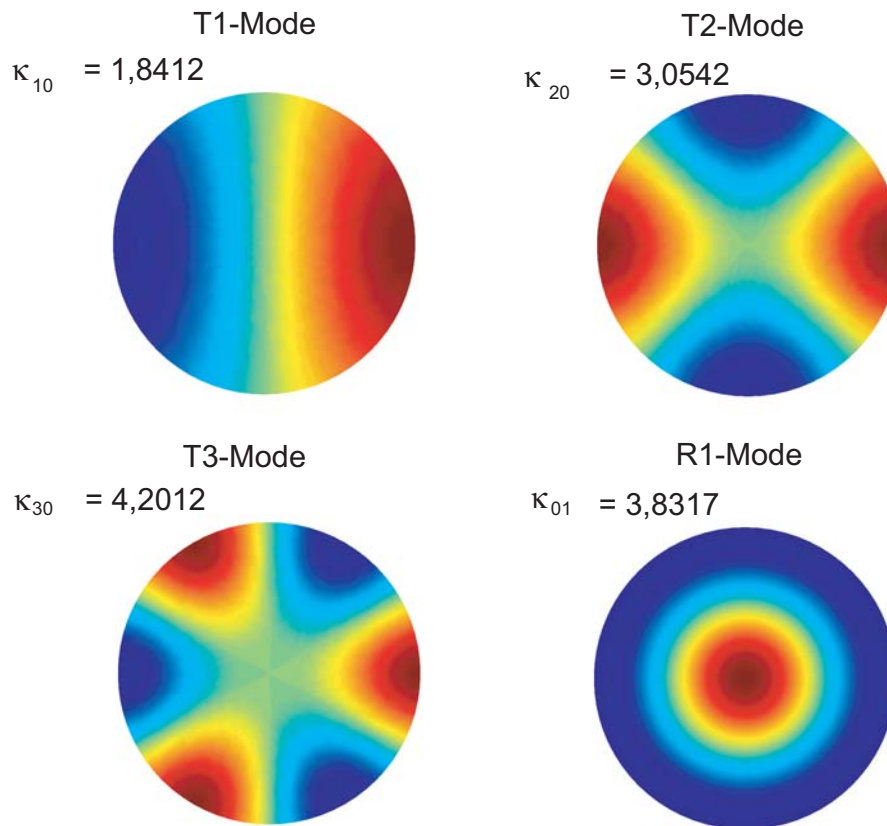


Abbildung 4.3: Draufsicht der Druckverteilung in einer zylindrischen Brennkammer für die T1, T2, T3 und R1-Mode; die Farben rot und blau stellen Druckbäuche (d.h. Druckmaxima bzw. Druckminima) dar

4.2.3 Impedanz, Admittanz und Reflexion

Die Eigenschaften von akustischen Feldern oder Rändern lassen sich durch die Begriffe Impedanz, Admittanz und Reflexionsfaktor charakterisieren. Der folgende Abschnitt beschreibt die Definitionen, Zusammenhänge und Bedeutung dieser drei Größen.

Das Verhältnis aus Druckschwankung und der Geschwindigkeitsschwankung in Normalen-Richtung in einer Ebene des akustischen Feldes heisst akustische Impedanz. Formelmäßig ausgedrückt lässt sich dieser Zusammenhang

schreiben als

$$Z = \frac{1}{\bar{\rho} \bar{a}} \frac{\hat{p}}{\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}}. \quad (4.43)$$

Die Impedanz ist dimensionslos und im Normalfall eine komplexe Größe. In Analogie zur Elektrotechnik trägt ihr Realteil auch den Namen „Resistanz“, der Imaginärteil heisst auch „Reaktanz“. Der Kehrwert der Impedanz wird als Admittanz bezeichnet und lässt sich ausdrücken als

$$Y = \frac{1}{Z} = \bar{\rho} \bar{a} \frac{\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}}{\hat{p}}. \quad (4.44)$$

Der Realteil des Admittanz wird auch als „Konduktanz“, ihr Imaginärteil als „Suszeptanz“ bezeichnet.

Abbildung 4.4 veranschaulicht die Definition des Reflexionsfaktors für ebene Wellen in einem Rohr mit konstantem Querschnitt.

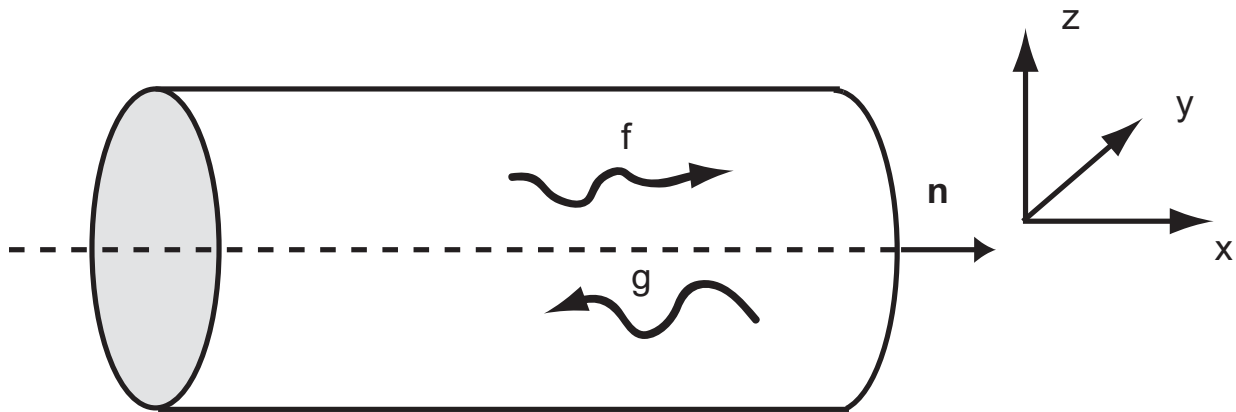


Abbildung 4.4: Wellenausbreitung in einem Rohr mit konstantem Querschnitt

Der Reflexionsfaktor stromab r^a ist definiert als das Verhältnis aus der stromauflaufenden (also reflektierten) Welle G und der stromablaufenden (also ein-

fallenden) Welle F

$$r^a = \frac{G}{F} \quad (4.45)$$

Die stromablaufene Welle F und die stromauflaufende Welle G sind wiederum über die Zusammenhänge

$$\frac{p'}{\bar{\rho} \bar{a}} = F + G \quad (4.46)$$

$$u' = F - G \quad (4.47)$$

mit der Druckschwankung p' und der Geschwindigkeitsschwankung u' in Ausbreitungsrichtung verknüpft. Damit ist der Reflexionsfaktor auch eine Funktion der Impedanz bzw. Admittanz:

$$r^a = \frac{Z - 1}{Z + 1} \quad (4.48)$$

$$= \frac{1 - Y}{1 + Y} \quad (4.49)$$

Im Allgemeinen handelt es sich bei Impedanz, Admittanz und Reflexionsfaktor um komplexe Größen. Dies bedeutet, dass die einfallenden und die reflektierten Wellen unterschiedliche Amplituden besitzen, und in ihrer Phasenlage zueinander verschoben sind. Zudem weisen diese Größen in der Regel ein frequenzabhängiges Verhalten auf.

Für eine rein reelle Impedanz (und damit eine rein reelle Admittanz oder Reflexionsfaktor), sind nur die Amplituden unterschiedlich. Es liegt jedoch keine Phasendrehung zwischen ein- und ausfallender Welle vor.

Tabelle 4.1 gibt einen Überblick über die wichtigsten Randbedingungen und die Werte Ihrer Impedanz, Admittanz und Reflexionsfaktoren.

Rand	Verhalten	Z	Y	r^a
feste Wand	$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' = 0$	∞	0	1
offenes Ende	$p' = 0$	0	∞	-1
nicht reflektierend	$\frac{p'}{\rho a} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}'$	1	1	0

Tabelle 4.1: Impedanz, Admittanz und Reflexionsfaktor für die wichtigsten Randbedingungen

4.3 Überblick über Teilmodelle für Flamme, Düse und Absorber

Die in Kapitel 3.1 vorgestellten Berechnungsverfahren benötigen Teilmodelle für das Flammenverhalten, zum Teil für das Verhalten der Raketendüse, und für die verschiedenen Dämpfungsmechanismen. Auch die vorliegende Arbeit ist auf ein Flammenmodell und ein Absorbermodell angewiesen. Ein Düsenmodell dient in Kapitel 7 zur Verifizierung des numerisch berechneten Düsenverhaltens. Das folgende Kapitel gibt einen Überblick über die in der Literatur üblichen Methoden zur Beschreibung der Flamme, der Raketendüse, der akustischen Resonatoren und des Droplet Drags sowie dem zugehörigen physikalischen Hintergrund. Normalerweise werden alle vorgestellten Modelle im Frequenzraum formuliert. Zur späteren Verwendung im Simulationsverfahren müssen sowohl das Flammenmodell als auch das Absorbermodell vom Frequenzraum in den Zeitbereich transformiert werden. Die Einbindung der Modelle in die Zeitbereichssimulation wird anschließend in Kapitel 5 erklärt.

4.3.1 Flammenmodelle

Wie in Kapitel 2.2 erläutert, spielen bei der Verbrennung in Flüssigkeitsraketen mehrere physikalische Prozesse eine Rolle: Der gesamte Verbrennungsprozess ist ein Wechselspiel von Einspritzung, Aufbrechen des Strahls, Verdampfung und chemischer Reaktion. In der gängigen Modellierungspraxis wird jedoch angenommen, dass der Verdampfungsprozess in Wechselwirkung mit

den akustischen Größen tritt, und so die Rückkopplung zwischen Akustik und Wärmefreisetzung liefert. Trotz der Vielzahl der Arbeiten zur Stabilität von Raketenmotoren erscheint in der Literatur vor allem das einfache, aus den 50er Jahren stammende Zeitverzugsmodell von Crocco und Cheng [CC56]. Modelle, die den Verbrennungsprozess mit allen Teilaspekten wiedergeben, sind bis heute nicht vorhanden. Dies liegt daran, dass „the critical experiments necessary for such model developments have yet to be performed“ [Mit95].

Die am häufigsten verwendete Form des Wärmefreisetzungmodells nach Crocco [CC56] drückt die Wärmefreisetzungsschwankung \hat{q}'_V als Funktion der Druckschwankung p' in der Brennkammer aus. Damit geht dieses Modell davon aus, dass die Wärmefreisetzungsschwankung ausschließlich vom fluktuierenden Druckfeld beeinflusst wird. In einem solchen Fall spricht man auch von einer „Druckkopplung“ zwischen Wärmefreisetzung und Akustik. Die beiden Modellparameter, der Interaktionsindex n und die Verzugszeit τ , sind örtlich konstant und frequenzunabhängig. Das Modell lautet im Frequenzraum

$$\hat{q}' = \bar{q} n (1 - \exp(i\omega\tau)) \frac{\hat{p}}{\bar{p}_{\text{BK}}} \quad (4.50)$$

\bar{q} ist die mittlere Wärmefreisetzung in der Brennkammer und \bar{p}_{BK} der mittlere Brennkammerdruck. Der Interaktionsindex n gibt an, wie stark die Wärmefreisetzung mit der Akustik koppelt, die Verzugszeit τ stellt einen Phasenverzug zwischen Druckschwankung und Wärmefreisetzungsschwankung dar. Sie lässt sich physikalisch als die charakteristische Zeit der Tropfenverdampfung interpretieren.

Obwohl verschiedene Autoren (z.B. [CY95], [Mit95]) kritisieren, dass sich der komplexe Verbrennungsvorgang in Flüssigkeitsraketen wohl kaum in Abhängigkeit von zwei Parametern abbilden lasse, gibt es auch physikalische Argumente für dieses einfache Modell: So konnte die Existenz der Verzugszeit τ für Flüssigkeitsraketen experimentell nachgewiesen werden [HR72]. Harrje und Reardon [HR72] geben für hypergole Treibstoffe die folgenden Werte für den

Interaktionsindex n und die Verzugszeit τ an:

$$0.14 \cdot 10^{-3} s \leq \tau \leq 0.20 \cdot 10^{-3} s \quad (4.51)$$

$$0.6 \leq n \leq 0.8 \quad (4.52)$$

Bei den Werten für n und τ in Gleichung 4.51 und 4.52 handelt es sich um empirisch gewonnene Werte. Um sie zu bestimmen wurden experimentell ermittelte Stabilitätsgrenzen mit den theoretisch vorhergesagten Stabilitätsgrenzen für verschiedene Triebwerksgeometrien und Injektortypen verglichen [HR72].

Es ist üblich, die Stabilitätsgrenzen eines Triebwerks analog Abbildung 4.5 für verschiedene Schwingungsmoden als Funktion von n und τ darzustellen (siehe z.B. [Cro65], [HR72], [Cul88]).

Abbildung 4.5 zeigt exemplarisch, dass zur Anregung der T3- und R1-Mode sehr geringe Werte für die Verzugszeit τ nötig sind. Für größere Werte der Verzugszeit τ kann die T1- oder T2-Mode, aber prinzipiell auch die L1-Mode entstehen. Die Erzeugung der L1-Mode verlangt jedoch einen deutlich höheren Interaktionsindex n . Daher ist das Auftreten der L1-Mode eher unwahrscheinlich.

Neben dem Modell nach Crocco und Cheng, gibt es mehrere ähnlich strukturierte Verbrennungsmodelle, die jedoch eine deutlich geringere Verbreitung haben: Das Modell nach Priem und Heidmann [PH60] basiert wie das Modell nach Crocco und Cheng [CC56] auf der Annahme, dass die Tropfenverdampfung der maßgebliche Prozess bei der Verbrennung in Flüssigkeitsraketen ist. Ausgehend von der Bilanzierung der Massen- und Wärmeströme an den Treibstofftröpfchen leiten sie einen analytischen Zusammenhang zwischen der Verdampfungsrate und dem Zustand in der Brennkammer her. Grenda et al. [GVM95] geben eine linearisierte Form der Schwankung der Verdampfungsrate \dot{m}'_{vap} in Abhängigkeit der akustischen Schwankungsgrößen u'

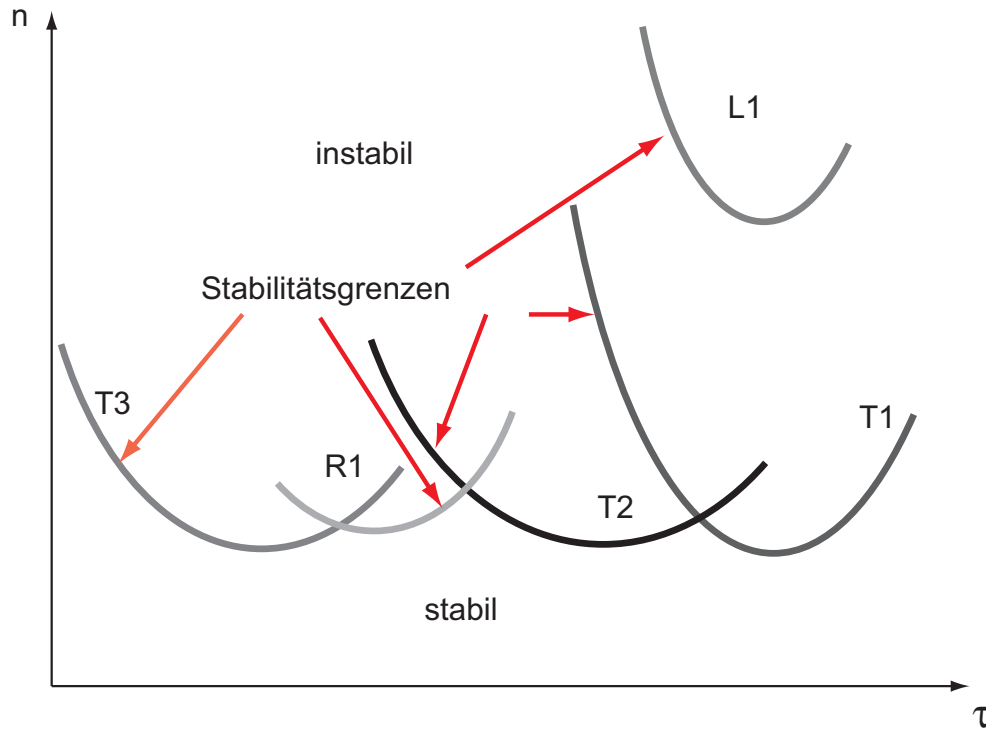


Abbildung 4.5: Beispielhafte Stabilitätskarte in Abhängigkeit der Parameter des Crocco-Modells n und τ für verschiedene Schwingungsmoden (T1, T2, T3, R1, L1)

und p' an. Diese lautet

$$\dot{m}'_{\text{Vap}} = \bar{m}_V \left[\alpha_P \frac{p'}{\bar{p}_{\text{BK}}} + \beta_P \frac{u'}{\bar{u}_{\text{BK}}} \right] \quad (4.53)$$

Bei den Konstanten α_P und β_P handelt es sich um komplexe Größen, die wiederum von den Eigenschaften der Tropfen und der umgebenden Gasphase abhängen. Die komplexen Konstanten führen auch in diesem Modell zu einem Phasenverzug zwischen den akustischen Größen und der Schwankung der Verdampfungsrate \dot{m}'_{Vap} .

Eine aktuelle experimentelle Arbeit von Richecoeur et al. [RDC07] korreliert die Zeitableitung der Wärmefreisetzungsschwankung \dot{q}'_V mit der transversalen Geschwindigkeitsfluktuation v' . Basis für die Korrelation sind Experimen-

te zur Verbrennung von Methan und flüssigem Sauerstoff in der Mascotte Versuchskammer der französischen Forschungseinrichtung ONERA. Die untersuchten Sprays wurden transversal angeregt.

Für die Verbrennung in Feststoffraketen existieren ebenfalls ähnlich strukturierte Modelle, obwohl dort der maßgebliche Prozess nicht die Tröpfchenverdampfung, sondern die Massenabtragung an der Wand ist. Das Modell nach Baum und Levine [BLL84] hat die folgende Struktur, die die Massenstromschwankung \dot{m}' als nicht-lineare Funktion der Schwankungsgrößen und der Modellkonstanten β_1 , β_2 und β_3 beschreibt:

$$\dot{m}' = \beta_1 p' + \beta_2 p' |u'| + \beta_3 |u'| \quad (4.54)$$

Dieses Modell findet z.B. in den Studien zur Simulation von Triggering von Culick [CBS95] Anwendung.

Um die Kopplung der Wärmefreisetzungsschwankung mit dem Einspritzsystem zu berücksichtigen („Klystron-Effekt“) führen Harrje und Reardon [HR72] und McCormack [McC64] eine weitere Verzugszeit τ_t ein. Diese Verzugszeit τ_t beschreibt die Zeit, die ein Treibstofftröpfchen von seiner Einspritzung bis zu seiner Verbrennung benötigt, und kann als konvektive Verzugszeit interpretiert werden. Bei einer Kopplung zwischen Akustik und Einspritzsystem ändert sich die Geschwindigkeit der Treibstofftröpfchen und damit auch die konvektive Verzugszeit τ_t . Harrje und Reardon [HR72] und ein Bericht von Rockwell International [RI75] geben den folgenden Zusammenhang zwischen der Massenstromschwankung \dot{m}' an einer Position \mathbf{x} in der Brennkammer, den Massenströmen am Einspritzkopf \dot{m}_i und der mittleren konvektiven Verzugszeit $\bar{\tau}_t$ an

$$\frac{\dot{m}'(\mathbf{x}, t)}{\bar{\dot{m}}} = \frac{\dot{m}'_i(t - \bar{\tau}_t)}{\bar{\dot{m}}} + \bar{\tau}_t \left(\frac{d}{dt} \frac{\dot{m}'_i}{\bar{\dot{m}}} \right)_{t - \bar{\tau}_t}. \quad (4.55)$$

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass, wie bereits eingangs erwähnt, keines der erwähnten Verbrennungsmodelle die Komplexität des Verbren-

nungsvorgangs im Detail beschreibt. Zudem sind alle vorhandenen Modelle ähnlich strukturiert. Daher wird in den folgenden Teilen der Arbeit auf das am weitesten verbreitete Modell nach Crocco und Cheng zurückgegriffen.

4.3.2 Düse

Der klassische Weg zur Einbindung des Einflusses der Raketendüse auf die Entstehung selbsterregter Verbrennungsschwingungen erfolgt mittels der sogenannten Düsenadmittanz. Die Düsenadmittanz ist die Randbedingung, die die Störungen in der Brennkammer am Düseneintritt erfüllen müssen und ist definiert als das Verhältnis der axialen Geschwindigkeitsfluktuation zur Druckfluktuation am Düseneintritt [BZ73] (siehe Definition in Gleichung 4.44). Als Standardwerk hinsichtlich der Berechnung von Düsenadmittanzen ist die Arbeit von Crocco und Sirignano [CS67] zu nennen. Die Arbeit von Bell und Zinn [BZ73] stellt eine Weiterentwicklung dieser Arbeit für Wellen mit veränderlicher Amplitude (d.h. aufklingende oder abklingende Wellen) dar.

Sowohl Crocco und Sirignano [CS67] als auch Bell und Zinn [BZ73] gehen bei der Entwicklung von linearen Modellen für Düsenadmittanzen von den folgenden Annahmen aus:

- Die Verbrennung findet ausschließlich in der Brennkammer statt. Dort herrschen vergleichsweise kleine Mach-Zahlen.
- In der Düse selbst findet keine Verbrennung statt. Dort wächst die Mach-Zahl auf $M = 1$ an.
- Im divergenten Teil der Raketendüse herrschen überkritische Strömungsgeschwindigkeiten. Dort können sich Störungen ausschließlich stromab ausbreiten und haben daher keinen Einfluss auf das akustische Feld im konvergenten Teil der Düse.

Im Folgenden soll kurz dargestellt werden, wie sich Düsenadmittanzen ausgehend von den strömungsmechanischen Grundgleichungen für ein reibungs-

berechnet. Dieses Ergebnis ist abhängig von

- der Düsengeometrie,
- der Schwingungsfrequenz,
- der Schwingungsmode,
- der Mach-Zahl M_{DE} in der Düseneintrittsebene,
- den Stoffgrößen und,
- im Falle der Arbeiten von Bell und Zinn, vom Ab - oder Aufklingkoeffizienten α .

Die theoretischen Vorhersagen der Modelle wurde für longitudinale Moden und longitudinal-transversal gemischte Moden von Bell [Bel72] und Zinn [ZBDS73] für verschiedene Düsengeometrien durch Experimente validiert.

Für eine kompakte Düse (d.h. Abmessungen der Düse viel kleiner als die Wellenlänge der Schwingung) reduzieren sich die Gleichungssätze auf den folgenden einfachen Ausdruck

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' = \left[\frac{(\kappa - 1)}{2\kappa} \right] M_{DE} p' \quad (4.56)$$

Damit ist die Düsenadmittanz nur mehr eine Funktion der Mach-Zahl am Düseneingang M_{DE} und der Stoffgrößen. Der Ausdruck in Gleichung 4.56 ist auch aus der Arbeit von Marble und Candel [MC77] bekannt. Da der Ausdruck $\frac{(\kappa-1)}{2\kappa}$ stets kleine Werte annimmt (d.h. $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' \approx 0$), verhält sich Gleichung 4.56 ähnlich einer festen Wand.

4.3.3 Absorber

Zur Beschreibung des Einflusses von akustischen Dämpfern ist es üblich, deren Austrittsimpedanz oder -admittanz zu betrachten. Die Literaturstudie

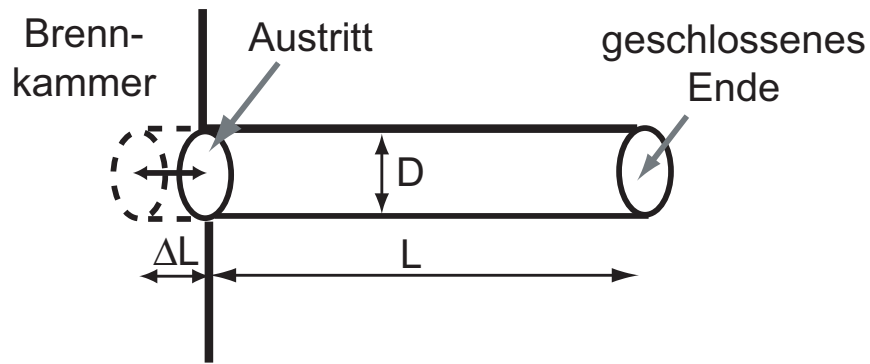


Abbildung 4.7: akustischer Absorber mit Abmessungen

zur Modellierung von $\lambda/4$ - Rohren mit gleichförmiger Temperatur liefert ein einheitliches Bild. Die Impedanz lässt sich hierbei als komplexe Größe ausdrücken, deren Realteil R den Resonatorwiderstand (Resistanz) und damit die Verluste des Absorbers beschreibt und deren Imaginärteil X (Reaktanz) die Phasenlage bestimmt.

$$Z = R + i X. \quad (4.57)$$

Im Resonanzfall sind p' und $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}'$ in Phase und die Reaktanz wird zu $X = 0$. Da die Dämpfung im Resonanzfall am größten ist, wird die Reaktanz auch zum „Tuning“ (Abstimmen auf die Eigenfrequenzen der Brennkammer) von Absorbern eingesetzt.

Die Reaktanz für einen einseitig geschlossenen Absorber mit gleichförmiger Temperatur kann man mit dem Verhalten eines Rohrstücks modellieren. Sie lautet dann

$$X = -\cot\left(\frac{\omega L_{\text{eff}}}{a_{\text{Abs}}}\right). \quad (4.58)$$

Als Länge des Absorbers wird dabei die sogenannte effektive Länge L_{eff} benutzt, die sich aus der tatsächlichen Länge L und einer Längenkorrektur ΔL zusammensetzt. Die Längenkorrektur ΔL beschreibt die Tatsache, dass im

Mündungsbereich des Resonators noch ein Teil der Gasmasse mitschwingt. Für die Längenkorrektur gibt es eine Vielzahl an Modellen (siehe z.B. [Vei96] oder [PHR69]). Im Prinzip muss sie an die Zustände in der Kammer, d.h. Strömungsgeschwindigkeiten und Pulsationspegel, und an die Abmessungen (Länge, Radius) des Absorbers angepasst werden.

Der Resonatorwiderstand R setzt sich aus dem Einlaufwiderstand an der Resonatoröffnung R_R und der viskosen Dissipation im Absorber R_i zusammen. Für kleine Amplituden überwiegt die viskose Dissipation und der Resonatorwiderstand ist linear. Hierfür wird gerne ein Zusammenhang der folgenden Form verwendet [Mit93], [Mit95], [LPPP95], [PHR69]

$$R_i = \frac{1}{\rho_{\text{BK}} a_{\text{BK}}} \sqrt{(8 \eta \bar{\rho}_{\text{Abs}} \omega)} \left(1 + \frac{L_{\text{eff}}}{d_{\text{Abs}}} \right). \quad (4.59)$$

d_{Abs} beschreibt den Resonatordurchmesser und η die dynamische Viskosität. Der Ausdruck geht auf experimentelle Untersuchungen von Ingard [II67] an einer Bohrung in einer Platte zurück.

Für große Schwingungsamplituden kommt es zur Bildung von Jets im Bereich des Resonatoreingangs. Diese erzeugen wiederum Wirbelringe, die sich von der Öffnung wegbewegen und dann in Turbulenz dissipieren [Zin70]. Verluste durch diesen Vorgang übersteigen die linearen Verluste deutlich. Dieser Zusammenhang wurde von Ingard [II67] und Tang et al. [THS73] untersucht und lässt sich formulieren zu

$$R_R = \Lambda \bar{\rho}_{\text{BK}} \hat{u}. \quad (4.60)$$

Λ ist hierbei ein Proportionalitätsfaktor, der experimentell bestimmt werden muss.

4.3.4 Droplet Drag

Treibstoff- und Oxidatortröpfchen breiten sich im Regelfall mit einer anderen Geschwindigkeit aus, als das sie umgebende Heißgas. Dieser Geschwindigkeitsunterschied zwischen Tropfen und Heißgas bewirkt eine Widerstandskraft, die der Schwingung Energie entziehen kann. Zur Berücksichtigung von Tropfen mit unterschiedlichen Durchmessern d_T und Geschwindigkeiten u_T , muss die Widerstandskraft K_{DD} aller vorhandenen Tropfen aufsummiert werden. Die Modellierung der Widerstandskraft K_{DD} kann näherungsweise über den Strömungswiderstand einer Kugel erfolgen [HR72]. Die von Habiballah [HD95] verwendete Formulierung für eine Anzahl von k Tropfen eines Durchmessers d_T basiert auf den klassischen strömungsmechanischen Zusammenhängen und lautet

$$K_{DD} = \frac{\pi}{8} \eta k d_T C_T Re_{rel} (u - u_T) \quad (4.61)$$

Die Reynolds-Zahl Re_{rel} wird hier aus dem Tropfendurchmesser d_T , der Relativgeschwindigkeit $u - u_T$ zwischen Heißgas und Tropfen, der Dichte ρ und der dynamischen Viskosität η des Heißgases gebildet

$$Re_{rel} = \frac{\rho d_T (u - u_T)}{\eta}. \quad (4.62)$$

Der Widerstandkoeffizient C_T ist eine Funktion der Reynolds-Zahl. Bei der Formulierung von differentiellen Erhaltungsgleichungen erscheint der Einfluss des Droplet Drags als Senkenterm in der Impulserhaltungsgleichung des Heißgases (siehe Culick [Cul88] oder Habiballah [HD95]).

4.4 Energiebilanz in selbsterregten Schwingungen

Bei Verbrennungsinstabilitäten in Raketentriebwerken handelt es sich um selbsterregte Schwingungen. Als Basis für das Verständnis der Wechselwir-

kungen zwischen den verschiedenen beteiligten treibenden und dämpfenden Mechanismen betrachtet. Der folgende Abschnitt zunächst die Eigenschaften eines eindimensionalen, selbsterregten Schwingers. Eine Energiebilanz für dieses System verdeutlicht die Problematik der Vorhersage von selbsterregten Verbrennungsschwingungen im Raketentriebwerk. Anschließend erfolgt eine Analyse der akustischen Energiebilanz in linearisierten Systemen, wie sie in der vorliegenden Arbeit verwendet werden. Dabei wird sowohl der Transport von Energie über die Grenzen des Systems und deren dämpfender Einfluss, als auch der Einfluss der Flamme auf die Energiebilanz betrachtet.

4.4.1 Selbsterregte Schwinger

Der Antriebssmechanismus selbsterregter Schwingungen basiert auf der Zufuhr von Energie im Takte der Eigenfrequenzen des Systems, was Verluste durch Dämpfungseffekte ausgleicht. Dabei tritt eine Rückkopplung vom Schwinger auf die Energiezufuhr auf. Im allgemeinen Fall ist die Bewegungsgleichung selbsterregter Schwingungen nicht-linear und lässt sich in der Form

$$\frac{\partial^2 x_s}{\partial t^2} + f\left(x_s, \frac{\partial x_s}{\partial t}\right) = 0 \quad (4.63)$$

schreiben [MP05]. x_s stellt hierbei die Auslenkung des Systems dar.

Anhand des Beispiels eines einfachen, allgemeinen selbsterregten Schwingers wird im Folgenden eine grundlegenden Energiebilanz durchgeführt, die die Komplexität des Verhaltens derartiger Systeme verdeutlicht und die Bedeutung der korrekten Beschreibung der Energiezufuhr und der Dämpfung unterstreicht.

Neben den Energien, die bei der Schwingung ineinander überführt werden, wie z.B. bei einem Feder-Masse-Schwinger die potentielle und kinetische Energie, spielt bei selbsterregten Schwingungen die Bilanz aus der zugeführten Energie ΔE_{zu} und der dissipierten Energie ΔE_D eine wichtige Rolle. Es las-

sen sich die folgenden Bereiche unterscheiden:

$$\begin{aligned}\Delta E_D - \Delta E_{zu} &> 0 : \text{gedämpftes System} \\ \Delta E_D - \Delta E_{zu} &= 0 : \text{System im Gleichgewicht} \\ \Delta E_D - \Delta E_{zu} &< 0 : \text{angefachtes System}\end{aligned}\tag{4.64}$$

Im Allgemeinen sind die zugeführte Energie ΔE_{zu} und die dissipierte Energie ΔE_D eine Funktion der Schwingungsamplitude \hat{x}_s . Die folgenden beiden theoretischen Beispiele illustrieren die Auswirkungen dieser Tatsache auf die Lage von Dämpfungsgebieten und Bereichen mit wachsender Amplitude.

Beispiel 1 soll die grundsätzliche Entstehung eines Grenzzyklus verdeutlichen. Hier verhalte sich die dissipierte Energie ΔE_D proportional zur Geschwindigkeit \dot{x}_s . Für eine harmonische Schwingung führt dies auf eine quadratische Abhängigkeit der dissipierten Energie ΔE_D von der Schwingungsamplitude \hat{x}_s . Ist die zugeführte Energie ΔE_{zu} zudem unabhängig von der Amplitude \hat{x}_s , so ergibt sich das in Abbildung 4.8 dargestellte Verhalten.

Für Amplituden kleiner als die Grenzamplitude \hat{x}_s^{GZ} ist das System instabil, da dort die zugeführte Energie überwiegt. Für Amplituden größer als die Grenzamplitude \hat{x}_s^{GZ} wird das System gedämpft. Dieses System läuft für alle Schwingungsamplituden stets auf die Grenzamplitude \hat{x}_s^{GZ} zu.

Beispiel 2 verdeutlicht das Entstehen von Triggering und das anschließende Erreichen eines Grenzzyklus. Der in Abbildung 4.9 dargestellte Fall geht von einem linearen Zusammenhang zwischen der dissipierten Energie ΔE_D der Schwingungsamplitude \hat{x}_s aus. Die Energiezufuhr beginnt erst bei einer bestimmten Mindestamplitude $\hat{x}_{s,0}$ und hängt in der Form $E_{zu} \sim \sqrt{\hat{x}_s}$ von der Schwingungsamplitude \hat{x}_s ab.

Die Verläufe für die zugeführte Energie ΔE_{zu} und die dissipierte Energie ΔE_D schneiden sich für die beiden Grenzamplituden $\hat{x}_{s,1}^{GZ}$ und $\hat{x}_{s,2}^{GZ}$. Für Amplituden kleiner als die Grenzamplitude $\hat{x}_{s,1}^{GZ}$ und größer als $\hat{x}_{s,2}^{GZ}$ ist das System gedämpft. Zwischen diesen beiden Grenzamplituden liegt ein Anfachungsgebiet. Für Anregungsamplituden kleiner als $\hat{x}_{s,1}^{GZ}$ ist das System grundsätzlich

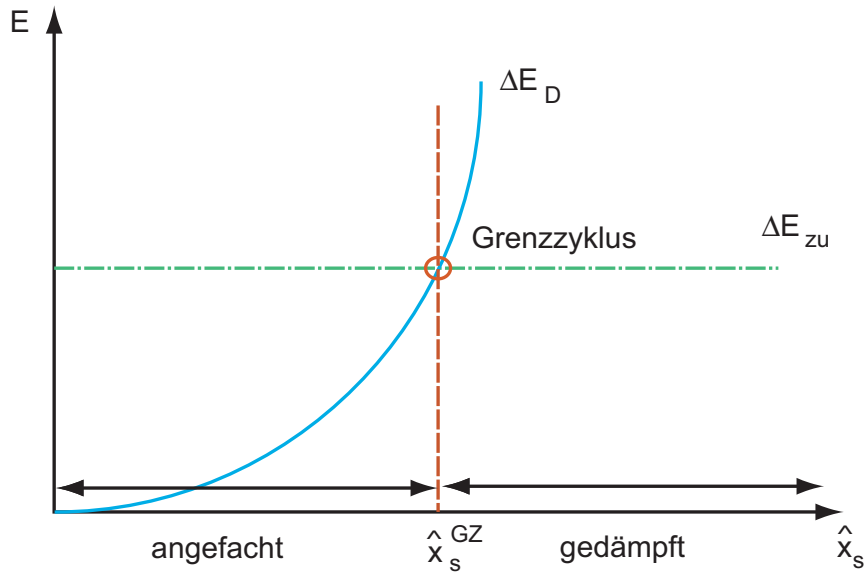


Abbildung 4.8: Beispiel 1: Energiebilanz eines selbsterregten Schwingers

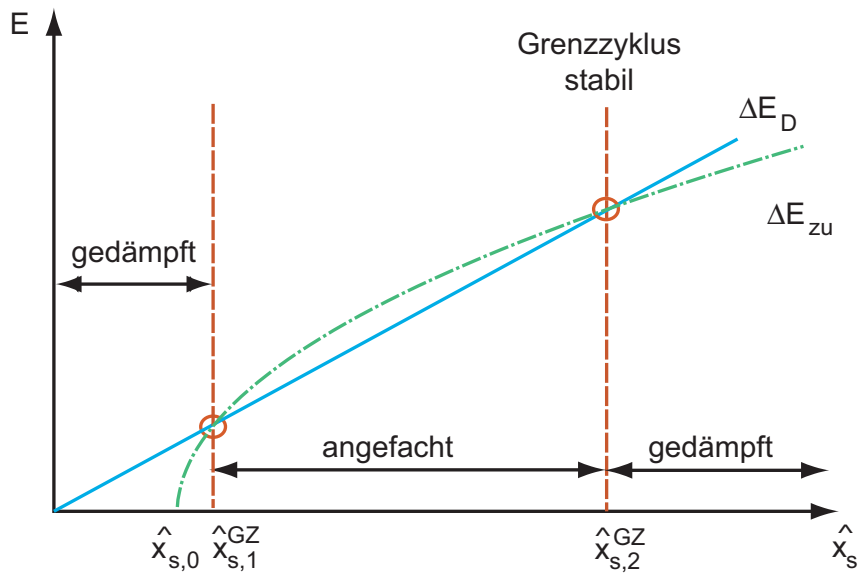


Abbildung 4.9: Beispiel 2: Energiebilanz eines selbsterregten Schwingers

stabil. Für alle Anregungsamplituden größer als $\hat{x}_{s,1}^{GZ}$ bewegt sich das System auf den Grenzyklus $\hat{x}_{s,2}^{GZ}$ zu. Damit kann ein System in der Form von Beispiel 2

das Phänomen Triggering beschreiben.

Diese beiden künstlich erdachten Beispiele verdeutlichen, wie unterschiedlich sich ein selbsterregtes System verhalten kann. Bei Verbrennungsschwingungen in Raketentriebwerken spielen, wie in Kapitel 2 erläutert, eine ganze Reihe dämpfender und antreibender Effekte eine Rolle. Ein Berechnungsverfahren, das das Auftreten sowohl spontaner als auch getriggelter Verbrennungsschwingungen vorhersagen kann, muss die Abhängigkeiten sowohl der dissipativen als auch der antreibenden Effekte von den Schwingungsamplituden wiedergeben können.

4.4.2 Bilanzierung der akustischen Energie

4.4.2.1 Grundgleichungen

Die Bilanzierung akustischer Quellen und akustischer Verluste erlaubt es zu bestimmen, ob ein System akustisch stabil oder instabil ist. Für ein System ohne interne Verluste und ohne interne Quelle, also ein System, bei dem die Änderung der akustischen Energie nur durch Transport von Energie über die Grenzen des Systems zu Stande kommt, lautet die differentielle Erhaltungsgleichung

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{I} = 0. \quad (4.65)$$

Die Integration von Gleichung 4.65 über das Volumen V des betrachteten Systems und das Anwenden des Gaußschen Integralsatzes liefert die integrale Form der akustischen Energieerhaltung

$$\int_V \frac{\partial E}{\partial t} dV = - \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} dA. \quad (4.66)$$

Soll die Bilanz der akustischen Energie über eine Schwingungsperiode mit der

Schwingungsdauer T_s betrachtet werden, so wird Gleichung 4.66 über eine Schwingungsperiode integriert. Die resultierende Gleichung lautet:

$$\frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t \int_V \frac{\partial E}{\partial t} dV dt = -\frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t \int_A \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} dA dt. \quad (4.67)$$

Die linke Seite von Gleichung 4.67 lässt sich so umschreiben, dass sich ein Ausdruck für die Änderung der akustischen Energie $\Delta \mathcal{E}$ im Volumen V ergibt. Hierbei soll gelten $\mathcal{E} = \int_V E dV$. Die Integration über die Zeit und über das Volumen bzw. die Fläche darf vertauscht werden. Damit wird Gleichung 4.67 zu

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E} &= \frac{d}{dt} \frac{1}{T_s} \int_V \int_{t-T_s}^t E dV dt = \frac{\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_{t-T_s}}{dt} dt \frac{1}{T_s} \\ &= \frac{\mathcal{E}_t - \mathcal{E}_{t-T_s}}{T_s} \\ &= - \int_A \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \rangle dA. \end{aligned} \quad (4.68)$$

$\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \rangle$ bezeichnet hierbei die über eine Schwingungsperiode gemittelte Intensität.

Die akustische Energie E und der akustische Fluss \mathbf{I} nehmen je nach Zustand der mittleren Größen im System unterschiedliche Formen an. Diese Formen sind für unterschiedliche Strömungstypen in Tabelle 4.2 zusammengefasst.

Die Ausdrücke für E und \mathbf{I} in einer ruhenden, homogenen Umgebung stammen aus der klassischen Akustik und sind in vielen Arbeiten zur Akustik zu finden (z.B. [MI86] [Sch03b]). Sie sind leicht durch durch Aufsummieren der linearisierten Impuls - und Energieerhaltung abzuleiten. Die Zusammenhänge in konstanter mittlerer Strömung werden z.B. von Williams [Wil85] und Ibrahim und Williams [IWBL06] zur Bestimmung der thermoakustischen Stabilität verwendet. Der Einfluss der mittleren Geschwindigkeit lässt sich hierbei

Strömung	Energie E	Intensität \mathbf{I}
ruhend	$E = \frac{p'^2}{2\bar{a}^2\bar{\rho}} + \frac{\bar{\rho}\mathbf{u}'^2}{2}$	$\mathbf{I} = p'\mathbf{u}'$
konstant	$E = \frac{p'^2}{2\bar{a}^2\bar{\rho}} + \frac{\bar{\rho}\mathbf{u}'^2}{2}$	$\mathbf{I} = p'\mathbf{u}' + \frac{p'^2}{2\bar{a}^2\bar{\rho}}\bar{\mathbf{u}} + \frac{\bar{\rho}\mathbf{u}'^2}{2}\bar{\mathbf{u}}$
isentropie		
Potentialströmung	$E = \frac{p'^2}{2\bar{a}^2\bar{\rho}} + \frac{\bar{\rho}\mathbf{u}'^2}{2} + \frac{(\bar{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{u}')p'}{\bar{a}^2}$	$\mathbf{I} = p'\mathbf{u}' + \frac{p'^2\bar{\mathbf{u}}}{\bar{\rho}\bar{a}^2} + \bar{\rho}(\bar{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{u}')\mathbf{u}' + \frac{p'}{\bar{a}^2}(\bar{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{u}')\bar{\mathbf{u}}$

Tabelle 4.2: Ausdrücke zur Berechnung der akustischen Energie

intuitiv verstehen: der Transport von akustischer Energie über die Grenzen erfolgt über den Fluss im Ruhenden $p' \cdot \mathbf{u}'$ und einen konvektiven Transport von akustischer Energie. Die Ausdrücke für E und \mathbf{I} für isentrope Potentialströmungen nehmen eine noch komplexere Gestalt an. Für ihre Herleitung wird auf die Arbeit von Morfey [Mor70] verwiesen.

Dieser Arbeit liegen die Ausdrücke für E und \mathbf{I} in isentropen Potentialströmung zu Grunde, wie sie z.B. von Cantrell und Hart [CH64], von Morfey [Mor70] oder Zinn [Zin72] abgeleitet und verwendet wurden. Candel [Can75] zeigte, dass die Erhaltung der akustischen Energie in dieser Form im periodischen Mittel für die Strömung in Düsen und Diffusoren erfüllt ist. Daher beschreibt der periodische Mittelwert dieser Ausdrücke für E und \mathbf{I} die Energieerhaltung auf der gesamten in dieser Arbeit betrachteten Geometrie inklusive Brennkammer und konvergentem Düsenteil.

4.4.2.2 Zusammenhang Fluss und Admittanz

Ist die mittlere Strömung eindimensional, kann für harmonische Schwankungsgrößen ein direkter Zusammenhang zwischen der Admittanz (bzw. der Impedanz) und dem über eine Schwingungsperiode gemittelten akustischem Fluss $\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \rangle$ hergestellt werden. Im folgenden Kapitel 4.4.2.2 wird stets angenommen, dass die mittlere Strömung nur die Komponente \bar{u} in die Achsrichtung x besitzt. Die Normale der betrachteten Oberfläche zeigt ebenfalls in Richtung der Koordinate x . Zusätzlich werden die folgenden mathematischen Zusammenhänge, die z.B. einer gängigen (mathematischen) Formelsammlung [RW97] entnehmbar sind, benötigt. Zur Berechnung des quadratischen

Mittelwertes

$$\langle g^2 \rangle = \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t g^2(t) dt \quad (4.69)$$

für eine reelle harmonische Größe g , die sich schreiben lässt als (* bedeutet konjugiert komplex)

$$g = \frac{1}{2} \hat{g} \exp(i\omega t) + \frac{1}{2} \hat{g}^* \exp(-i\omega t) \quad (4.70)$$

gilt

$$\langle g^2 \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{R}(\hat{g} \hat{g}^*) \quad (4.71)$$

$$= \frac{1}{2} \hat{g} \hat{g}^* \quad (4.72)$$

$$= \frac{1}{2} |g|^2. \quad (4.73)$$

Analog gilt für zwei Größen g und h mit der Form nach Gleichung 4.70

$$\langle g \cdot h \rangle = \frac{1}{2} \mathcal{R}(\hat{g} \hat{h}^*) \quad (4.74)$$

Einsetzen der Zusammenhänge 4.70 bis 4.74 in den Ausdruck für den akustischen Fluss \mathbf{I} aus Tabelle 4.2 liefert für den gemittelten akustischen Fluss in Normalenrichtung $\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \rangle = & \frac{1}{2} \left(\mathcal{R}(\hat{p} \cdot \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}^*) + \mathcal{R}(\hat{p} \cdot \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}^*) \cdot \frac{\bar{u}^2}{\bar{a}^2} \right. \\ & \left. + \bar{\rho} \bar{u} \left(\mathcal{R}(\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}^*) \right) + \frac{\bar{u}}{\bar{\rho} \bar{a}^2} \mathcal{R}(\hat{p} \cdot \hat{p}^*) \right) \end{aligned} \quad (4.75)$$

Zusammen mit der Definition der Admittanz ergibt sich dann

$$\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \rangle = \frac{1}{2} \frac{|\hat{p}|^2}{\bar{\rho} \bar{a}} \{ (1 + M^2) \mathcal{R}(Y) + M|Y|^2 + M \}. \quad (4.76)$$

Für eine ruhende Umgebung ($\bar{u} = 0$) reduziert sich Gleichung 4.76 auf

$$\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \rangle = \frac{1}{2} |\hat{p}|^2 \frac{\mathcal{R}(Y)}{\bar{\rho} \bar{a}}. \quad (4.77)$$

Gleichung 4.77 bedeutet, dass in einem System ohne mittlere Strömung das Vorzeichen des Realteils der Admittanz angibt, ob dem System über die betrachtete Grenze Energie zugeführt oder entzogen wird. Ein positiver Realteil bedeutet Energieverlust, ein negativer Energieeintrag. Für ein durchströmtes System ist dieser Zusammenhang komplexer (siehe Gleichung 4.76): Dort spielt neben dem Realteil auch der Imaginärteil sowie die Mach-Zahl eine Rolle. Ob dem System Energie zugeführt oder entzogen wird, hängt vom Zusammenspiel dieser drei Größen ab.

4.4.2.3 Zusammenhang Rayleigh-Integral

Wird zusätzlich zum Transport von akustischer Energie über die Berandungen des betrachteten Systems der Eintrag von akustischer Energie durch die Flammendynamik betrachtet, so ergibt sich in der differentiellen Form der akustischen Energieerhaltung 4.65 auf der rechten Seite ein zusätzlicher Term der Form

$$S_{\text{Verbr}} = \frac{(\kappa - 1)}{\bar{\rho} \bar{a}^2} \dot{q}'_V p'. \quad (4.78)$$

Der Quellterm S_{Verbr} entsteht aus dem Quellterm für die Wärmefreisetzung in den linearisierten Eulergleichungen 4.5 - 4.7. Die hierfür notwendigen Umformungen werden z.B. von Schuermans [Sch03b] diskutiert.

Für eine periodisch gemittelte Energiebilanz analog Gleichung 4.67 für das Volumen V ergibt sich aus Gleichung 4.78 der Ausdruck

$$\langle \mathcal{S}_{\text{Verbr}} \rangle = \frac{1}{T_s} \int_{t-T_s}^t \int_V \frac{(\kappa-1)}{\bar{\rho} \bar{a}^2} \dot{q}'_V p' dV dt. \quad (4.79)$$

Die akustische Quelle 4.79 ist proportional dem Rayleigh-Integral in Kapitel 2.1. Dies lässt die folgende Interpretation des Quellterms bzw. des Rayleigh-Integrals zu: Sind Druckschwankung und Wärmefreisetzungsschwankung in Phase, so ist der Wert des Integrals sowohl für das Rayleigh-Integral als auch den Quellterm 4.79 positiv. Dem System wird durch die Wirkung der Verbrennung akustische Energie zugeführt. Nimmt das Integral 4.79 negative Werte an, so wird dem System Energie entzogen und die Verbrennung hat einen dämpfenden Effekt.

4.4.2.4 Energiebilanz im vorliegenden System

Bei den in dieser Arbeit analysierten selbsterregten Verbrennungsschwingungen in Raketenschubkammern wird der akustischen Schwingung Energie durch Transport über die Systemgrenzen entzogen. Diese Systemgrenzen können in Form der Admittanz Y beschrieben werden. Gleichung 4.76 verdeutlicht, dass dieser Energieverlust quadratisch mit der Schwingungsamplitude \hat{p} an der Systemgrenze ansteigt. Im akustischen Feld selbst werden keine weiteren physikalischen dissipativen Mechanismen betrachtet.

Bei Verwendung der APE erfolgt die Energiezufuhr ausschließlich über die Flamme. Das in dieser Arbeit eingesetzte Flammenmodell nach Crocco [CC56] (formelmäßiger Ausdruck siehe 4.50) gibt im Frequenzraum einen linearen Zusammenhang zwischen der Wärmefreisetzungsschwankung \hat{q}'_V und der Druckamplitude an. Die Modellkonstanten, der Interaktionsindex n und die Verzugszeit τ können bei einer bestimmten Frequenz zu einer komplexen Proportionalitätskonstante zusammengefasst werden. Das Durchführen der zeitlichen Mittelung gemäß Gleichung 4.74 führt dann auf einen re-

ellen Zusammenhang zwischen Energiezufuhr und Druckamplitude. Damit hängt gemäß Gleichung 4.79 auch die Energiezu- oder -abfuhr durch die Flamme quadratisch von der Druckamplitude \hat{p} ab.

Ein Energiediagramm analog zu Abbildung 4.8 sieht also im Fall der betrachteten Raketenschubkammer und für eine gegebene Druckamplitude \hat{p} wie in Abbildung 4.10 dargestellt aus.

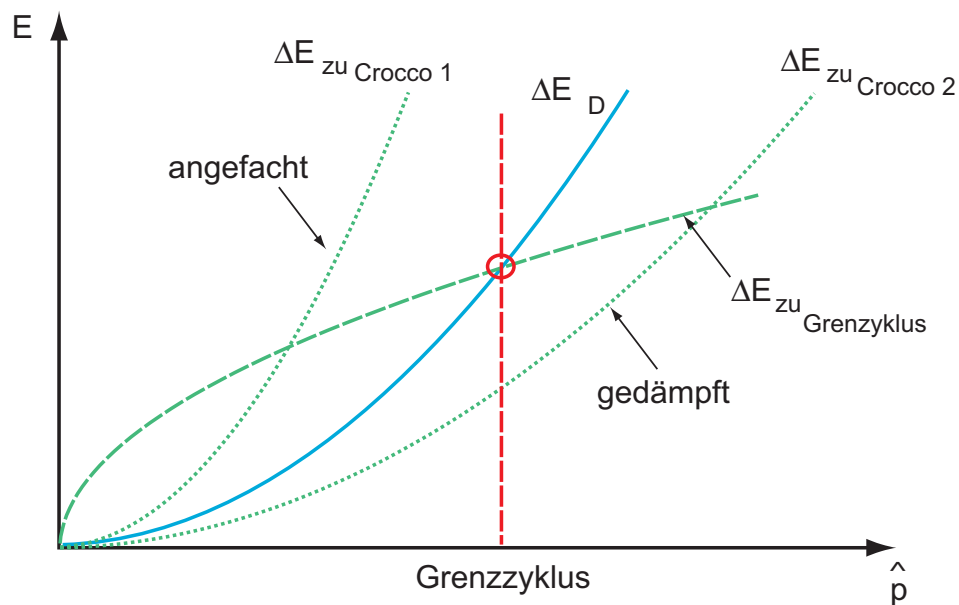


Abbildung 4.10: Energieerhaltung für die selbsterregte Verbrenungsschwingung in der Rakete

Ob das System stabil oder instabil ist, hängt demnach nur davon ab, wie die beiden Parabeln für E_D und E_{zu} zueinander liegen. Das mit „Crocco1“ gekennzeichnete Flammenverhalten (gepunktete Linie) würde ein instabiles Verhalten zur Folge haben, das mit „Crocco2“ gekennzeichnete Flammenverhalten (Strichpunktlinie) ein stabiles. Es ist offensichtlich, dass diese Form der Betrachtung das Auftreten von Grenzyklen oder Phänomenen wie Triggern nicht zulässt, da sich die Linien für E_{zu} und E_D nicht schneiden. Die Beobachtung eines Grenzyklus wäre jedoch z.B. für ein Flammenverhalten möglich,

das das Verhalten der gestrichelten Linie aufweist. Auch ein Verhalten, das eine mögliche Beschreibung von „Triggering“ bedingt, lässt sich leicht vorstellen und ist z.B. in Abbildung 4.9 dargestellt. Damit beinhaltet der in dieser Arbeit gewählte Ansatz die Möglichkeit der Vorhersage dieser im Allgemeinen als „nichtlinear“ bezeichneten Phänomene durch die geeignete Wahl des Flammenmodells.

5 Modell und Simulationsumgebung

Ausgehend von den grundlegenden Eigenschaften des untersuchten Aestus-Triebwerks beschreibt und diskutiert dieses Kapitel die bei der Modellierung getroffenen Annahmen. Danach folgen Details zur Umsetzung hinsichtlich der Eingangsdaten und der numerischen Verfahren. Dies umfasst sowohl die Diskussion der numerischen Fehler als auch Analysen des Verhaltens der verwendeten Randbedingungen für Einspritzkopf, Wände, Auslass und Absorber.

5.1 Das Triebwerk

Beim analysierten Triebwerk handelt es sich um das Aestus-Triebwerk, das als Oberstufe in der europäischen Trägerrakete Ariane V eingesetzt wird. Abbildung 5.1 zeigt eine schematische Skizze der Brennkammer des Aestus-Triebwerks mit Düse.

Als Treibstoff dient die lagerfähige Treibstoffkombination MMH (Monomethylhydrazin) und Distickstofftetroxid N_2O_4 (NTO). Die Treibstoffe treten über 132 koaxiale Einspritzelemente in flüssigem Zustand in die Brennkammer ein, wobei das NTO in der Mitte, und das MMH radial verteilt darum herum eingespritzt wird. Die Einspritzelemente mischen und zerstäuben die Treibstoffe. Das verbrannte Heisgas erfährt anschließend eine Beschleunigung bis zu einer Geschwindigkeit von $M = 1$ im Düsenhals. Tabelle 5.1 gibt einen Überblick über die wichtigsten, in dieser Arbeit benutzten, Parameter am Nennbetriebspunkt.

Die Temperatur in der Brennkammer erreicht Werte um die 3000K. Der Treibstoff kühlt die Brennkammerwände im Gegenstromprinzip. Dazu wird das MMH über ein Verteilerrohr in kleine Kanäle in der Brennkammerwand eingebracht und fließt in diesen Kanälen entlang der Brennkammerwände. Zur

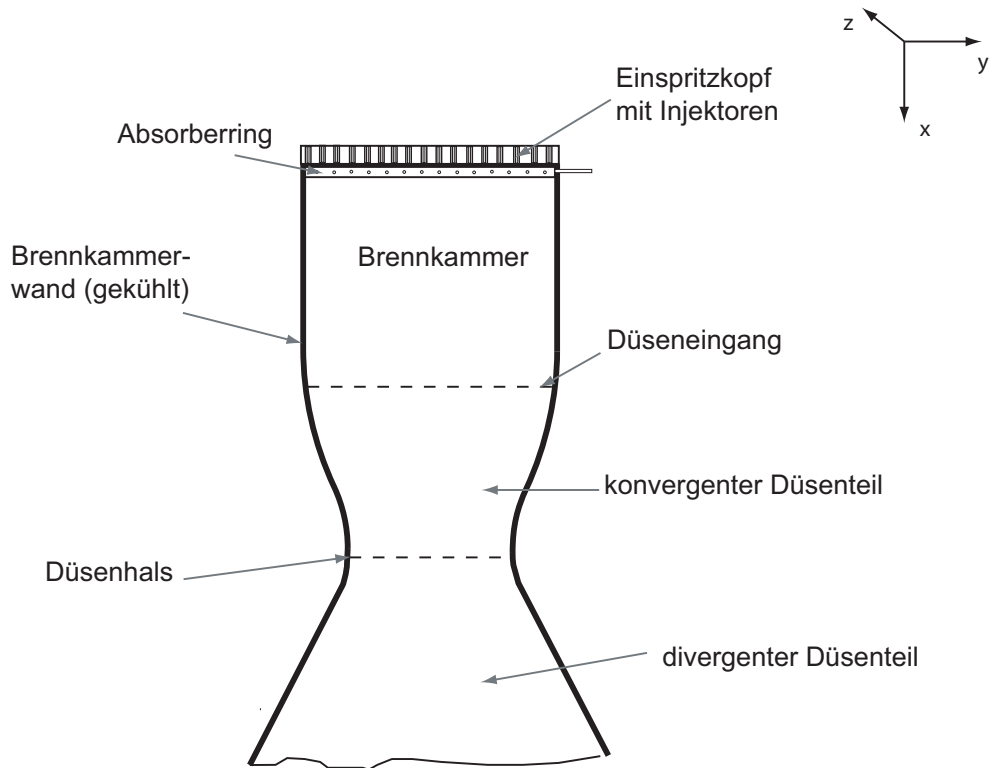


Abbildung 5.1: Schematische Skizze des Aestus-Triebwerks

Größe	Wert
Gesamtdurchsatz	$\dot{m} = 8,772 \frac{\text{kg}}{\text{s}}$
Mischungsrate	$\phi = 2,05 \frac{\text{kg}_{\text{NTO}}}{\text{kg}_{\text{MMH}}}$
Brennkammerdruck	$p_{BK} = 11 \text{ bar}$

Tabelle 5.1: Parameter des Aestustriebwerks am Nennbetriebspunkt

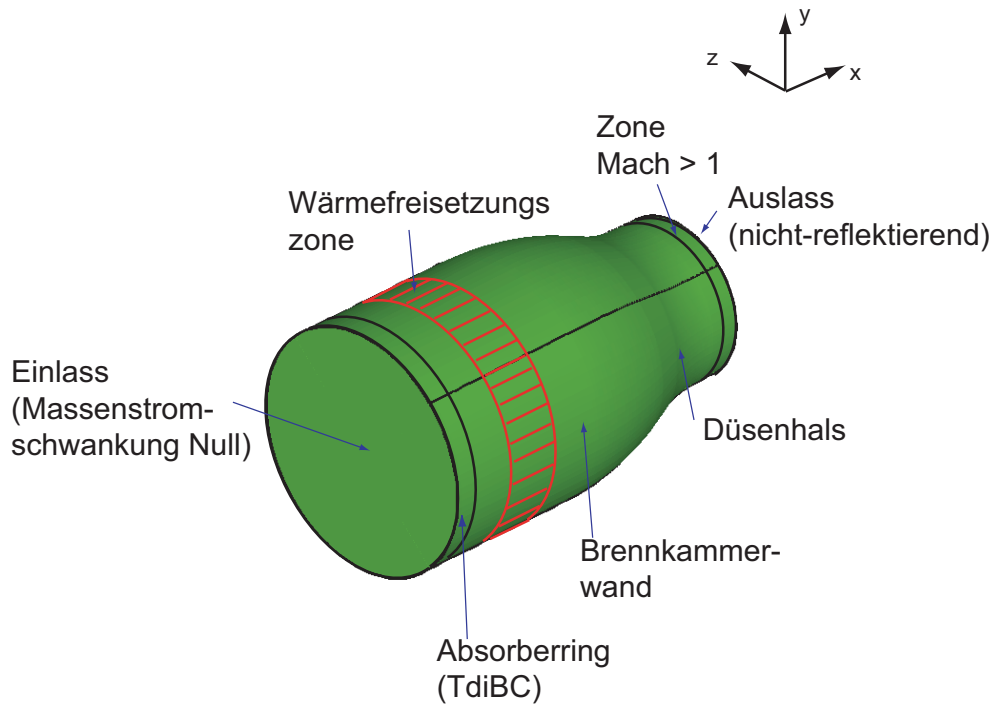


Abbildung 5.2: Modell der Raketenschubkammer für die Akustiksimulation

Sicherstellung der Stabilität gibt es einen Absorberring, der aus $\lambda / 4$ -Rohren besteht und nahe dem Einspritzkopf in der Brennkammer sitzt.

5.2 Das Modell

Das in der Simulation betrachtete dreidimensionale Modell umfasst die Brennkammer selbst und den konvergenten Teil der Düse, was in Abbildung 5.2 dargestellt ist.

In die Modellierung fließen die folgenden Annahmen und Voraussetzungen ein:

- Brennkammer und Düse sind mit heißem Abgas mit den Eigenschaften aus Abschnitt 5.2.1.1 gefüllt.
- Die Brennkammerwände werden als adiabat betrachtet. Obwohl die Brennkammerwände gekühlt werden, ist dies zulässig, da die Kühlung in

erster Linie die Wandtemperatur herabsetzt, jedoch einen geringen Einfluss auf Strömung und Temperaturen im Triebwerk selbst hat. Abschätzungen zeigen, dass die Grenzschichtdicke im Vergleich zum Durchmesser der Brennkammer klein ist. In der Brennkammer selbst ist nur eine geringfügig niedrigere Temperatur zu erwarten als theoretisch für den adiabaten Fall berechnet wird.

- Am Einspritzkopf ist der eintretende Massenstrom konstant. Dort treten keine Massenstromfluktuationen auf. Dies ist gleichbedeutend mit einer akustischen Abkopplung der Treibstoffleitungen von der Brennkammer. Diese Annahme stellt eine deutliche Vereinfachung der Realität dar.
- Der Düsenhals setzt eine klar definierte Randbedingung für die Akustik: Akustische Störungen können sich dort nicht mehr entgegen der Strömungsrichtung ausbreiten.
- Die Verbrennung läuft entsprechend der in Abbildung 2.3 dargestellten Vorstellungen ab. Die Wärmefreisetzung findet damit hauptsächlich im Bereich der schnellen „Verbrennungszone“ statt. Diese wird als Scheibe in der Brennkammer modelliert.
- Das Verhalten der Absorber lässt sich mit Hilfe einer geeigneten, linearen, frequenzabhängigen Randbedingung beschreiben.
- Die Störungsausbreitung ist isentrop. Entropiewellen spielen keine Rolle. Die akustische Wellenausbreitung kann mit Hilfe der APEs beschrieben werden.

Das Modell macht insbesondere keine Annahmen zum Verhalten der Düse oder zu den vorhandenen Schwingungsmoden im Triebwerk, was ein erheblicher Vorteil gegenüber den klassischen Methoden ist.

5.2.1 Stoffwerte, Grundströmung und Eigenfrequenzen

5.2.1.1 Stoffwerte

Die Stoffwerte in der Brennkammer am Nennbetriebspunkt wurden mit Hilfe des „Chemical Equilibrium and Applications“-Codes (CEA-Codes) von Gordon und McBride ([GM94], [GM96]) unter den folgenden Annahmen bestimmt:

- Der Brennstoff wird komplett umgesetzt. Dies ist gerechtfertigt, da der Feuerungswirkungsgrad des Aestus-Triebwerks am Nennbetriebspunkt über 98% beträgt [Ast01].
- Die chemische Zusammensetzung des Abgases ändert sich bei der Expansion im konvergenten Düsenteil nicht („eingefrorene Zusammensetzung“).

Unter diesen Annahmen ergeben sich die in Tabelle 5.2 zusammengefassten Werte für die Totalgrößen und Stoffwerte im Triebwerk.

Größe	Wert
Dichte	$\rho_0 = 0,915 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$
Temperatur	$T_0 = 3190 \text{ K}$
Druck	$p_0 = 11,0 \text{ bar}$
Schallgeschwindigkeit	$a_0 = 1213 \frac{\text{m}}{\text{s}}$
Isentropenexponent	$\kappa_0 = 1,2244$
Molmasse	$M_0 = 22,074 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$

Tabelle 5.2: Verwendete Totalgrößen und Stoffwerte

5.2.1.2 Grundströmung

Die gelösten linearisierten Grundgleichungen, die APEs, beschreiben die Wellenausbreitung in nicht-gleichförmigen mittleren Strömungen. Die mittlere

Strömung selbst stellt dabei eine Eingangsgröße für die Akustiksimulation dar. Die Berechnung der Grundströmung erfolgte zweidimensional mit dem Strömungslöser Fluent [Flu05]. Das Rechengebiet umfasst in diesem Fall, wie in Abbildung 5.3 gezeigt, die Brennkammer selbst, den konvergenten Düsenteil und einen Abschnitt des divergenten Düsentails. In dieser Geometrie erfährt das Heissgas mit den Totalgrößen nach Tabelle 5.2 eine Beschleunigung bis auf ca. $M = 1.4$.

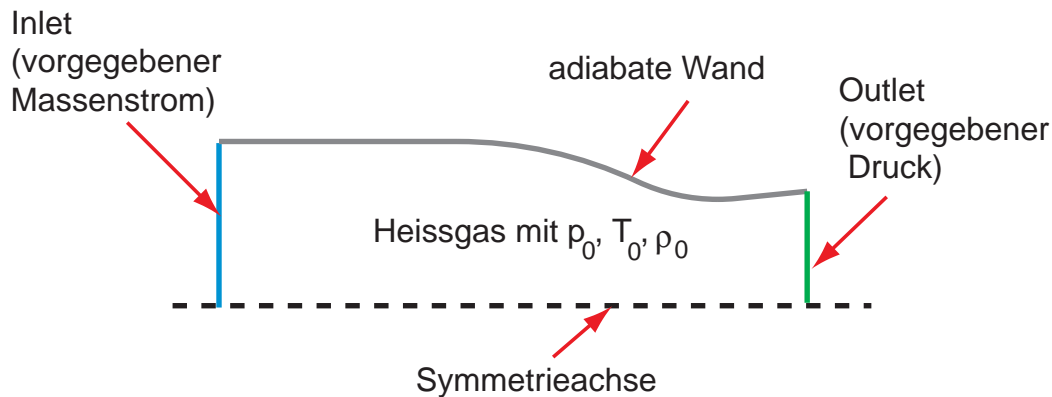


Abbildung 5.3: Modell der Raketendüse zur Berechnung der mittleren Strömung

Zur Verwendung der Ergebnisse aus der Strömungsberechnung in der Akustiksimulation müssen diese in dimensionslose Form gebracht werden. Grundlage für die Entdimensionierung sind die Größen charakteristische Länge L_{char} , charakteristische Geschwindigkeit u_{char} und charakteristische Dichte ρ_{char} . Werte für die charakteristische Frequenz f_{char} , die charakteristische Zeit t_{char} , den charakteristischen Druck p_{char} und die charakteristische Wärmefreisetzung $q_{V,\text{char}}$ können entsprechend dem Gleichungssatz 5.1 aus den restli-

chen charakteristischen Größen bestimmt werden.

$$\begin{aligned}
 L_{\text{char}} &= D_{BK} &= 0,21\text{m} \\
 u_{\text{char}} &= a_0 &= 1213\frac{\text{m}}{\text{s}} \\
 \rho_{\text{char}} &= \rho_0 &= 0,915\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \\
 p_{\text{char}} &= \rho_{\text{char}} \cdot u_{\text{char}}^2 &= 13,46\text{bar} \\
 t_{\text{char}} &= \frac{L_{\text{char}}}{u_{\text{char}}} &= 1,73 \cdot 10^{-4}\text{s} \\
 f_{\text{char}} &= \frac{u_{\text{char}}}{l_{\text{char}}} &= 5776\text{Hz} \\
 q_{V,\text{char}} &= \rho_{\text{char}} \cdot \frac{u_{\text{char}}^2}{L_{\text{char}}} &= 7,78 \cdot 10^9\frac{\text{W}}{\text{m}^3}
 \end{aligned} \tag{5.1}$$

Die dimensionslosen Größen für die mittlere Strömung, der mittlere Druck \bar{p}^* , die mittlere Dichte $\bar{\rho}^*$, die mittlere Geschwindigkeit in Achsrichtung \bar{u}^* und die mittlere Geschwindigkeit in radiale Richtung \bar{v}_r^* entstehen aus der Division der Simulationsergebnisse aus Fluent mit den charakteristischen Größen. Da die statische Temperatur in der Düse mit zunehmender Strömungsgeschwindigkeit sinkt, sinkt auch die lokale Schallgeschwindigkeit entlang der Düsenachse. Dies bedeutet, dass der Wert eins der resultierenden dimensionslosen Geschwindigkeit \bar{u}^* einer tatsächlichen Mach-Zahl größer als eins entspricht.

Strömungs- und Akustiksimulation erfolgen auf Gittern unterschiedlicher Geometrie und Auflösung. Für das dreidimensionale Akustikgitter gilt das in Abbildung 5.2 dargestellte Koordinatensystem. Die tatsächlichen Eingangsgrößen für die Akustiksimulation werden durch eine Interpolation der Ergebnisse der Strömungssimulation auf das dreidimensionale Gitter für die akustische Berechnung ermittelt. Die radiale Komponente der mittleren Geschwindigkeit \bar{v}_r^* aus der zweidimensionalen Strömungssimulation muss hierbei in eine Komponente \bar{v}^* entlang der y-Achse und in eine Komponente \bar{w}^* entlang der z-Achse aufgespalten werden. Abbildung 5.4 zeigt einen Vergleich dieser radialen Komponente auf dem Gitter für die Strömungssimulation mit der Komponente \bar{v}^* in der Ebene $y = 0$ des Akustikgitters.

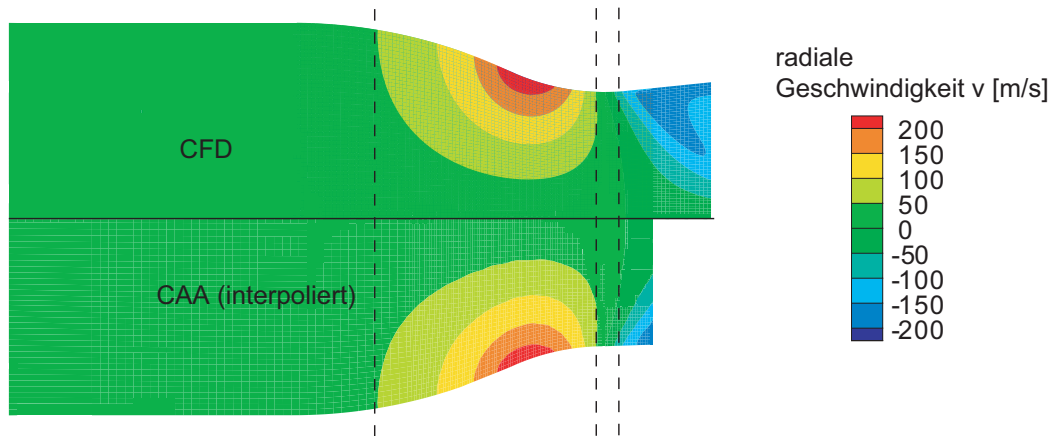


Abbildung 5.4: Qualität der Interpolation: Vergleich der radialen Geschwindigkeitskomponente in der Strömungsberechnung (CFD) und der Akustiksimulation (CAA)

Der Vergleich in Abbildung 5.4 zeigt, dass die Übereinstimmung zwischen Ausgangsströmungsfeld und interpoliertem Strömungsfeld gut ist.

5.2.1.3 Analytische Eigenfrequenzen

Wird die Brennkammer analog Abschnitt 4.2.2 als Zylinder mit vollreflektierenden Wänden und gleichförmiger Temperatur modelliert, so ergeben sich die in Tabelle 5.3 zusammengestellten Frequenzen für die ersten sechs Eigenmoden. Der Abschätzung liegt die Annahme zu Grunde, dass die Brennkammer mit einem Zylinder der Länge $L_{BK} = D_{BK} = 0,21\text{m}$ genähert werden kann. Diese Länge entspricht einer virtuellen Verlängerung des zylindrischen Brennkammerteils in die Düse hinein. Der Zylinder ist mit Heissgas der Temperatur $T_0 = 3190\text{K}$ gefüllt.

Diese Frequenzen werden im Folgenden für Abschätzungen verschiedener Art benötigt. Sie entsprechen näherungsweise den Frequenzen, die das Ergebnis der Simulation liefert.

Mode	Frequenz [Hz]
L1	2888
T1	3385
T1L1	4450
T2	5615
T2L1	6314
R1	7045
T3	7724

Tabelle 5.3: Eigenfrequenzen der als Zylinder genäherten Brennkammer

5.2.2 Das Flammenmodell

Wie in vielen anderen Arbeiten zur Bestimmung der Stabilitätsgrenzen von Flüssigkeitsraketenantrieben kommt auch in dieser Arbeit das Verbrennungsmodell von Crocco und Cheng [CC56] zum Einsatz. Die frequenzabhängige Form des Crocco-Modells 4.50 lautet im Zeitraum

$$\dot{q}'_V = \bar{q}_V \frac{n}{\bar{p}_{BK}} (p'(t) - p'(t - \tau)), \quad (5.2)$$

wobei $p'(t - \tau)$ für die Druckschwankung zum Zeitpunkt $t - \tau$ steht.

Das Crocco-Modell 5.2 wird in der Rechnung in der Form

$$\dot{q}^{*'}_V = n_{\text{sim}} (p^{*'}(t^*) - p^{*'}(t^* - \tau^*)) \quad (5.3)$$

verwendet. Der Parameter n_{sim} ist ein dimensionsloser Eingabewert für die Rechnung und setzt sich zusammen aus

$$n_{\text{sim}} = n \frac{p_{\text{char}}}{\bar{p}_{BK}} \frac{\bar{q}_V}{\dot{q}_{V,\text{char}}}. \quad (5.4)$$

Die Referenzwerte p_{char} und $\dot{q}_{V,\text{char}}$ werden den Werten im Gleichungssatz 5.1 entnommen. Zur Bestimmung der mittleren volumetrischen Wärmefreisetzungsrates \bar{q}_V werden die folgenden Annahmen getroffen:

- Für die chemische Reaktion stehen die Oxidator- und Treibstoffmassenströme im Nennbetriebspunkt zur Verfügung.
- Bei der Verbrennung wird der vorhandene Oxidator vollständig umgesetzt.
- Die Verbrennung findet in einer Zone der Dicke $0,2 \cdot D_{\text{BK}}$ über den ganzen Querschnitt der Brennkammer verteilt statt. Dieser Annahme liegt die Aufteilung der Brennkammer in verschiedene Verbrennungszonen gemäß Abbildung 2.3 zu Grunde. Der Hauptteil der Wärmefreisetzung findet demnach in der „schnellen Verbrennungszone“ relativ nahe am Einspritzkopf statt.

Zahlenmässig ausgedrückt ergibt dies die folgenden Werte für die beteiligten Molenströme von Oxidator \dot{n}_{Ox} und Treibstoff \dot{n}_{Tr} :

$$\left. \begin{array}{l} \dot{m}_{\text{ges}} = 8,772 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \\ \frac{\dot{m}_{\text{Ox}}}{\dot{m}_{\text{Tr}}} = 2,05 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \dot{m}_{\text{Ox}} = 5,91 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \\ \dot{m}_{\text{Tr}} = 2,88 \frac{\text{kg}}{\text{s}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{n}_{\text{Ox}} = 0,06428 \frac{\text{kmol}}{\text{s}} \\ \dot{n}_{\text{Tr}} = 0,0625 \frac{\text{kmol}}{\text{s}} \end{array} \quad (5.5)$$

Das Volumen der Wärmefreisetzungzone berechnet sich zu

$$V_{\text{Verbr}} = \frac{D_{\text{BK}}^2}{4} \cdot \pi \cdot 0,2 \cdot D_{\text{BK}} = 1,4546 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3. \quad (5.6)$$

Zusammen mit dem pro Kilomol Oxidator freigesetzten Reaktionsenthalpie ΔH_R^m , deren Berechnung Anhang A.1 entnommen werden kann, beträgt die pro Volumeneinheit freigesetzte Wärme \bar{q}_V

$$\bar{q}_V = \Delta H_R^m \cdot \frac{\dot{n}_{\text{Ox}}}{V_{\text{Verbr}}} = 0,4 \cdot 10^{11} \frac{\text{J}}{\text{m}^3 \text{ s}}. \quad (5.7)$$

Einsetzen der Werte in Gleichung 5.4 ergibt als Zusammenhang zwischen dem physikalischen Interaktionsindex n und dem Eingabewert für die Simulation n_{sim}

$$n_{\text{sim}} = 6,26 n. \quad (5.8)$$

Entsprechend den Angaben für hypergole Treistoffpaarungen von Harrje und Reardon [HR72] nach Gleichung 4.51 und Gleichung 4.52 ergeben sich als Eingabewerte für die Rechnung in dimensionsloser Form

$$0,808 \leq \tau^* \leq 1,213 \quad (5.9)$$

$$3,756 \leq n_{\text{sim}} \leq 5,008. \quad (5.10)$$

In der Wärmefreisetzungszone wird die Wärmefreisetzungsschwankung \dot{q}'_V als ortsaufgelöste Funktion bestimmt: \dot{q}'_V ist an jedem Punkt der Wärmefreisetzungszone eine Funktion der aktuellen Druckschwankung $p'(t)$ und der zeitlich zurückliegenden Druckschwankung $p'(t - \tau)$ an diesem Punkt. Daher müssen in der gesamten Wärmefreisetzungszone die Werte für die Druckschwankung bis zum Zeitpunkt $(t - \tau)$ während der gesamten Simulation zur Verfügung stehen.

5.3 Gitterwahl und numerische Aspekte

Als numerisches Werkzeug zur Lösung der APEs diente der Aeroakustik-Code PIANO (**P**erturbation **I**nteraction of **A**erodynamic **N**oise) des DLR Braunschweig [DBG⁺07]. Da die Wahl von Gitterweite, Zeitschritt, Geometrie und Randbedingungen von den Fähigkeiten und Details der zu Grunde liegenden Numerik abhängt, erläutert der folgende Abschnitt zunächst einige numerische Aspekte. Hierauf aufbauend untersucht Abschnitt 5.3.4 die Konsequenzen für das verwendete Rechengitter. Eine numerische Vergleichsstudie verschiedener Gitter verifiziert die abgeleiteten Bedingungen für Gestalt und Auflösung.

5.3.1 Ortsdiskretisierung

Die örtliche Diskretisierung erfolgt in PIANO mit dem sog. DRP (**D**ispersion **R**elation **P**reserving)-Schema nach Tam und Webb [TW93]. Beim DRP-Schema handelt es sich um ein Finite-Differenzen-Verfahren vierter Ordnung für rechtwinklige, strukturierte Gitter. Das Verfahren basiert auf der Idee, die Dispersions-Relation, also die Beziehung zwischen der Kreisfrequenz ω und der Wellenzahl k , für einen bestimmten Wellenzahl-Bereich zu erhalten. Dies bedeutet, dass der Fehler zwischen der numerischen Wellenzahl des diskretisierten Problems und der tatsächlichen Wellenzahl in diesem Wellenzahlbereich auf ein Minimum reduziert wird. Im Feld werden die räumlichen Ableitungen durch einen symmetrischen Differenzenstern aus sieben Punkten genähert. Für ein eindimensionales, gleichförmiges Gitter mit dem Zellenabstand Δx , lautet Näherung der räumlichen Ableitung $\partial p' / \partial x$ der Druckschwankung p' im Punkt n

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{l=-3}^{l=3} c_l p'_{n+l}. \quad (5.11)$$

Die Wahl der Koeffizienten c_l des DRP-Schemas minimiert den Dispersionsfehler. Die Randbereiche der Geometrie erlauben das Bilden symmetrischer Differenzensterne nicht. Dort wird auf asymmetrische Differenzensterne ausgewichen. Bei tatsächlichen, verzerrten physikalischen Gittern, bildet eine Koordinaten-Transformation das physikalische Gitter auf ein gleichförmiges rechtwinkliges Gitter ab, das dann nach dem DRP-Schema diskretisiert wird.

5.3.2 Zeitintegration

PIANO erlaubt die Verwendung verschiedener Runge-Kutta-Verfahren zur Zeitintegration. Die Zeitintegration in dieser Arbeit erfolgt mit Hilfe eines vierstufigen Runge-Kutta Schemas. Die Verwendung des optimierten, abwechselnd fünfstufigen bzw. sechsstufigen LDDRK-Schemas (**L**ow-**D**issipation, **L**ow-

Dispersion Runge-Kutta) nach Hu et al. [HHM96] zeigte bei größerem Rechenaufwand nur einen minimalen Einfluss auf die Lösung des Problems.

Hu et al. [HHM96] untersuchen die Stabilitätsgrenzen von Runge-Kutta-Schemata in Verbindung mit Finite-Differenzen Verfahren höherer Ordnung wie dem DRP-Schema. Für das Standard Runge-Kutta-Verfahren 4ter Ordnung geben sie den Zusammenhang

$$u_{\text{Welle}} \tilde{k}_{\text{max}} \Delta t \leq 2,83 \quad (5.12)$$

zwischen der Ausbreitungsgeschwindigkeit der akustischen Welle u_{Welle} , der maximal zulässigen Wellenzahl des diskretisierten Problems \tilde{k}_{max} und dem Zeitschritt des Runge-Kutta-Verfahrens Δt an. Das Produkt aus der maximal zulässige Wellenzahl \tilde{k}_{max} und der Gitterweite Δx ist eine verfahrensabhängige Konstante. Aufgelöst nach dem Zeitschritt ergibt sich die Bedingung

$$\Delta t \leq \frac{2,83 \text{ const.}}{u_{\text{Welle}}} \Delta x. \quad (5.13)$$

Diese Ungleichung zeigt, dass mit höherer Ortsauflösung auch der Zeitschritt verringert werden muss. Darüber hinaus beschränkt die Wellenausbreitung in Strömungen mit größeren Mach-Zahlen bedingt wegen $u_{\text{Welle}} = \bar{a} + \bar{a} \cdot M$ den Zeitschritt weiter.

5.3.3 Filtern der Lösung

Die räumliche Diskretisierung mit dem DRP-Schema kann ausserhalb des optimierten Wellenzahlbereichs hochfrequente, unphysikalische Anteile der Lösung erzeugen [TWD93]. Diese führen gegebenenfalls zu einem instabilen Verhalten der Lösung.

Diese hochfrequenten Anteile können in der klassischen CAA (Computational Aero-Acoustics) entweder über das Einführen zusätzlicher Dämpfungsterme

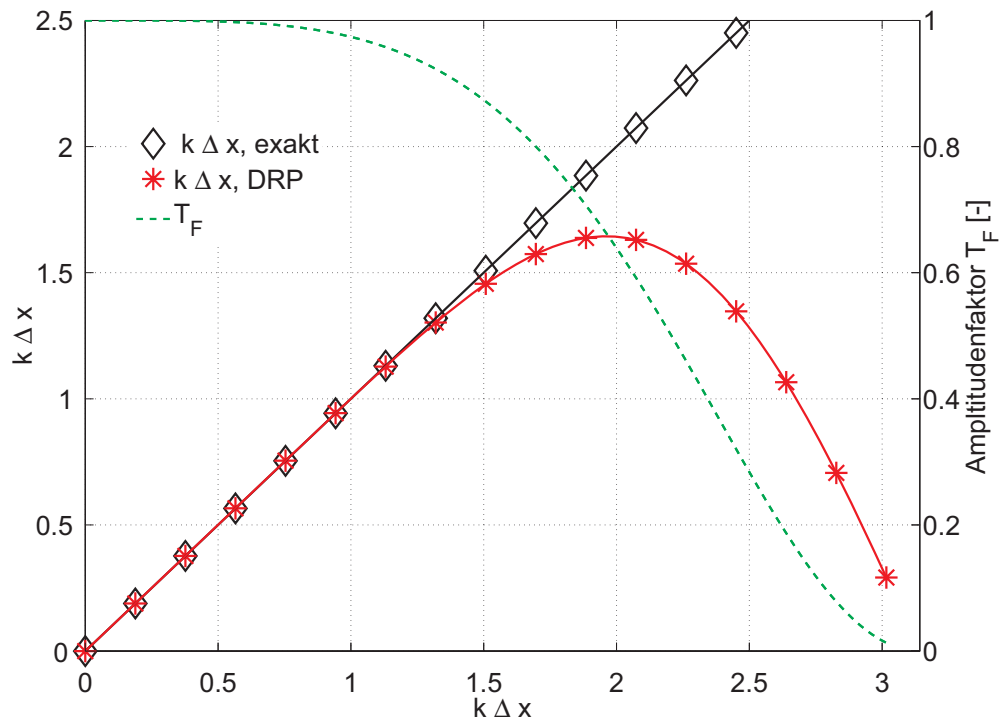


Abbildung 5.5: Vergleich zwischen der Spektralfunktion des DRP-Schemas (Sternchen), der idealen Spektralfunktion (Rauten) und der Amplitude der Transferfunktion des Padé-Filters (gestrichelt) aufgetragen über der dimensionslosen Wellenzahl $k\Delta x$

mit Tiefpass-Wirkung oder über ein Filtern der Lösung eliminiert werden. In dieser Arbeit kommen im Gegensatz zur CAA hauptsächlich eingeschlossene Geometrien mit voll- bzw. teilreflektierenden Rändern zum Einsatz. Verschiedene numerische Tests im Laufe der Arbeit haben gezeigt, dass die Dämpfungsterme und die expliziten Filter in diesen eingeschlossenen Geometrien die Stabilität der Lösung nur eingeschränkt sicherstellen können. Daher kommt in dieser Arbeit ausschließlich der implizite Padé-Filter [Lel92] zum Einsatz. Hierbei handelt es sich um einen räumlichen Filter, der die gefilterten Werte \hat{h} am Punkt n aus der Summe der ungefilterten Werte h an den benach-

barten Punkten berechnet

$$\begin{aligned} \alpha_{FP} \hat{h}_{n-1} + \hat{h}_n + \alpha_{FP} \hat{h}_{n+1} &= a_{FP} h_n + \frac{b_{FP}}{2} (h_{n-1} + h_{n+1}) \\ &+ \frac{c_{FP}}{2} (h_{n-2} + h_{n+2}) + \frac{d_{FP}}{2} (h_{n-3} + h_{n+3}). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Der Padé-Filter nach Gleichung 5.14 ist phasentreu und hat Tiefpasswirkung. Abbildung 5.5 zeigt einen Vergleich zwischen der Spektralfunktion des DRP-Schemas und der Amplitude der Übertragungsfunktion des Padé-Filters T_F als Funktion des Produktes aus Wellenzahl und Gitterweite $k \cdot \Delta x$. Die ideale Spektralfunktion ist durch die mit Rauten gekennzeichnete Winkelhalbierende dargestellt. Die Amplitude der Übertragungsfunktion (Kreise) weicht bereits für Werte für $k \cdot \Delta x$ größer als eins deutlich vom Wert eins ab. Das DRP-Schema (Sterne) hingegen folgt bis ca. $k \cdot \Delta x = 1,4$ der idealen Spektralfunktion. Dies bedeutet, dass, für eine konstante Gitterweite Δx der Filter bereits Wellenzahlen deutlich dämpft, die das DRP-Schema noch fehlerfrei auflöst. Damit gibt der Filter die Grenze für die Abbildung der zu untersuchenden Wellenzahlen vor.

5.3.4 Gitterwahl

Das Gitter sollte so gewählt werden, dass die Dämpfung durch numerische Effekte so gering wie möglich ist. Der Amplitudenverlauf der Übertragungsfunktion des Padé-Filters trägt maßgeblich zu dieser numerischen Dämpfung bei, da diese Amplitude auch für kleine Werte von $k\Delta x$ minimal vom Wert eins abweicht. Der Filter wird grundsätzlich nach Abschluss einer bestimmten Anzahl von Zeitschritten ausgeführt. So reduziert ein Amplitudenfaktor $T_F = 0,99999$ nach 20000mal Filtern (also z.B. bei 40000 Zeitschritten, wobei nach jedem zweiten Zeitschritt gefiltert wird) die ursprüngliche Amplitude um ca. 20 %, ein Amplitudenfaktor von $T_F = 0,9999$ sogar um 85%. Diese numerische Dämpfung lässt sich auch in Form eines Abklingkoeffizienten α_{num} ausdrücken. Dazu werden die Amplituden B_0 vor Anwenden des Filters und B

nach Anwenden des Filters über den Zusammenhang

$$B = B_0 \cdot \exp(\alpha_{\text{num}} \Delta t_F) \quad (5.15)$$

korreliert, wobei Δt_F den zeitlichen Abstand zwischen zwei Filtervorgängen bezeichnet. Zwischen B und B_0 besteht über die Amplitudenfaktor T_F des Filters der Zusammenhang $B = B_0 \cdot T_F$. Auflösen nach dem Abklingkoeffizienten α_{num} ergibt

$$\alpha_{\text{num}} = \frac{\ln T_F}{\Delta t_F}. \quad (5.16)$$

Für die Verhältnisse in der vorliegenden Raketenschubkammer, entspricht ein Amplitudenfaktor von $T_F = 0,99999$ bei einem dimensionslosen Zeitschritt von $\Delta t^* = 1 \cdot 10^{-3}$ und Filtern nach jedem Zeitschritt einem Abklingkoeffizienten von $\alpha_{\text{num}} = -59 \frac{1}{s}$. Für einen Amplitudenfaktor von $T_F = 0,999999$ gilt bei den gleichen Bedingungen $\alpha_{\text{num}} = -11 \frac{1}{s}$. Wie in Kapitel 7 gezeigt wird, ist durch den Düsen Einfluss ein Abklingkoeffizient $\alpha_{\text{Düse}}$ zwischen $-130 \frac{1}{s}$ und $-190 \frac{1}{s}$ zu erwarten. Die numerischen Abklingkoeffizienten sollten deutlich kleiner als die Abklingkoeffizienten durch physikalische Effekte, d.h. durch Düse und Absorber, sein.

Um dies zu gewährleisten und gleichzeitig den numerischen Rechenaufwand gering zu halten, sind verschiedene Überlegungen zur Gestaltung des Gitters möglich. Diese Überlegungen liefern einen qualitativen Zusammenhang zwischen dem Dämpfungsverhalten und verschiedenen Gitterparametern. Ein sichere quantitative Abschätzung ist aufgrund der Verwendung verzerrter Zellen im Düsenbereich und am Übergang der Gitterblöcke nicht möglich. Daher wird im Anschluss (siehe Abschnitt 5.3.5) an die theoretischen Überlegungen die Gitterwahl anhand verschiedener Testfälle verifiziert.

Der Amplitudenfaktor ist für den Padé-Filter nach Gleichung 5.14 abhängig von der Schwingungsfrequenz f und der Gitterweite Δx : Je größer die abzubildende Frequenz, desto feiner muss die Gitterauflösung gewählt werden. Dies

bedeutet aber mehr Zellen und gleichzeitig nach Gleichung 5.13 einen kleineren Zeitschritt. Damit steigt der numerische Aufwand zur Auflösung der Frequenzen höherer Eigenmoden überproportional an.

Die Simulation selbsterregter Schwingungen in dieser Arbeit zielt insbesondere auf die Vorhersage der ersten transversalen Mode ab. Um diese im zylindrischen Teil der Brennkammer mit geringer numerischer Dämpfung vorherzusagen, muss dort die Gitterweite so gewählt werden, dass der Padé-Filter einen möglichst kleinen Einfluss hat. Die Mach-Zahl in Achsrichtung, sowie in radialer Richtung beträgt maximal ca. $M = 0,25$. Damit ergibt sich für die T1-Mode eine Wellenzahl in Strömungsrichtung von $k^+ = \omega_{T1}/(\bar{a} + u) = 14,031/\text{m}$ und eine Wellenzahl entgegen der Strömungsrichtung von $k^- = \omega_{T1}/(\bar{a} - u) = 23,41/\text{m}$. Die Wellenzahl für den Rücktransport k^- entgegen der Strömungsrichtung ist grundsätzlich größer als die Wellenzahl für den Hintransport in Strömungsrichtung k^+ . Da die Wiedergabe höherer Wellenzahlen ein feineres Gitter verlangt, wird im Folgenden nur mit der Wellenzahl für den Transport entgegen der Strömungsrichtung k^- argumentiert.

Tabelle 5.4 gibt einen Überblick über den Amplitudenfaktor T_F in Abhängigkeit der Frequenz der Schwingungsmoden, der Mach-Zahl und der Gitterweite.

Wie Tabelle 5.4 noch einmal verdeutlicht, nimmt der Amplitudenfaktor T_F sowohl mit steigender Frequenz als auch zunehmender Mach-Zahl M ab. Um bei höheren Frequenzen den Rücktransport bei höheren Mach-Zahlen auflösen zu können, muss das Gitter sehr viel feiner gewählt werden. In der vorliegenden Arbeit wurde die Gitterweite im zylindrischen Teil $M < 0,5$ so gewählt, dass der Wert $\Delta x^* = 0,03$ nicht überschritten wird. Im konvergenten Düsenteil $M > 0,5$ verringert sich Δx^* bis auf $\Delta x^* = 0,0036$. Es ist schwierig, das Gitter so zu wählen, dass auch der Rücktransport bis nahe an $M = 1$ unverfälscht beschrieben wird. Jedoch nimmt dieser Bereich nur einen sehr kleinen Teil der Geometrie ein. Damit sollte die erhöhte numerische Dämpfung dort nur einen geringen Einfluss an der gesamten Dämpfung haben. Bei $M = 1$ findet kein akustischer Rücktransport mehr statt. Der Filter unterstützt hier die Wirkung der nicht-reflektierenden Randbedingung am Auslass der Geometrie.

$\Delta x^* = 0,03$				
Mode	M = 0.25	M=0.5	M=0.8	M=0.9
T1	$T_F = 0,99999997$	$T_F = 0,99999911$	$T_F = 0,99978$	$T_F=0,9878$
T2	$T_F = 0,9999997$	$T_F = 0,9999842$	$T_F = 0,9964$	$T_F=0,83502$
$\Delta x^* = 0,015$				
Mode	M = 0.25	M=0.5	M=0.8	M=0.9
T1	$T_F = 0,99999999877$	$T_F = 0,999999986$	$T_F = 0,9999966$	$T_F=0,999788$
T2	$T_F = 0,999999978$	$T_F = 0,99999975$	$T_F = 0,999940$	$T_F=0,99643$
$\Delta x^* = 0,005$				
Mode	M = 0.25	M=0.5	M=0.8	M=0.9
T1	$T_F = 1,0$	$T_F = 0,99999999980$	$T_F = 0,999999995$	$T_F=0,9999997$
T2	$T_F = 1,0$	$T_F = 0,9999999965$	$T_F = 0,999999916$	$T_F=0,99999469$

Tabelle 5.4: Werte der Amplitude der Übertragungsfunktion T_F

5.3.5 Verifikation der Gitterwahl

Um sicherzustellen, dass die Lösung insbesondere für die erste transversale Mode T1 weitgehend unabhängig von der Gitterwahl und der daraus resultierenden numerischen Dämpfung angenommen werden kann, wurde der Einfluss der Gitterwahl auf das Abklingverhalten der verschiedenen Moden getestet. Dazu wurde die zeitliche Entwicklung eines breitbandigen Druckpulses in der Raketengeometrie beobachtet. Dies ergibt ein zeitlich abklingendes Signal, welches verschiedene Frequenzen enthält.

Die Untersuchung wurde mit den folgenden drei Gittern durchgeführt:

- Gitter 1: 135 000 Zellen; in Achsrichtung 150 Zellen; in der Düse verfeinert von $\Delta x_{\max}^* = 0,022$ bis auf $\Delta x_{\min}^* = 0,0056$; in radiale Richtung $\Delta y_{\max}^* =$

0,03; Dieses Gitter sollte die T1 Mode ausreichend gut, die T2-Mode in gedämpfter Form beschreiben.

- Gitter 2: 200 000 Zellen; in Achsrichtung 80 Zellen gleichförmig verteilt ($\Delta x^* = 0,019$); in radiale Richtung $\Delta y_{\max}^* = 0,02$. Dieses Gitter sollte in der Brennkammer neben der T1-Mode auch die T2-Mode auflösen können.
- Gitter 3: 500 000 Zellen; in Achsrichtung 200 Zellen; in der Düse verfeinert bis auf $\Delta x_{\min}^* = 0,0036$; in radiale Richtung $\Delta y_{\max}^* = 0,02$. Dieses Gitter sollte auch in der Düse T1- und T2-Mode wiedergeben können.

Die Auswertung der Gitterstudie beruht auf den Eigenschaften der Frequenzraumdarstellung zeitlich abklingender Signale (siehe z.B. [LPPP95]): Ein in der Zeit abklingendes harmonisches und zu der Zeit $t = 0$ beginnendes Signal der Form $y(t) = \exp(-\alpha t) \cdot \exp(\omega_0 t)$ besitzt im Frequenzraum die Gestalt

$$Y(\omega) = \frac{1}{\alpha + i(\omega - \omega_0)}. \quad (5.17)$$

Das Quadrat der Amplitude dieses Signals besitzt den Ausdruck

$$|Y(\omega)|^2 = \frac{\alpha^2 + (\omega_0 - \omega)^2}{(\alpha^2 + (\omega_0 - \omega)^2)^2}. \quad (5.18)$$

Die Amplitude des Signals im Frequenzraum ist damit ein Ausdruck des Dämpfungsparameters α und der Schwingungsfrequenz ω_0 . ω_0 steuert dabei den Ort der Peaks im Frequenzraum, α und ω_0 die Höhe und Breite des Peaks. Ein identischer Verlauf der Amplituden zweier Spektren im Frequenzraum um eine Frequenz herum lässt daher den Schluss zu, dass die Dämpfung zweier Signale gleich sind. Diese Eigenschaft der Frequenzraum-Darstellung von gedämpften harmonischen Signalen erlaubt einen Vergleich des Dämpfungsverhaltens zweier Signale durch Vergleich der Peak-Höhen im Frequenzraum. Daher wurden die berechneten Zeitreihen für das Abklingen des breitbandigen Druckpulses an verschiedenen Punkten extrahiert und über die Fourier-Transformation in den Frequenzbereich transformiert. Für alle drei Fälle wurde der gleiche Druckpuls als Anfangsbedingung verwendet. Die Länge der

Zeitreihe umfasste jeweils 40 000 Zeitschritte. Abbildung 5.6 zeigt das Ergebnis für die Amplitude als Funktion der Frequenz an einem wandnahen Punkt in der Brennkammer für die drei Gitter.

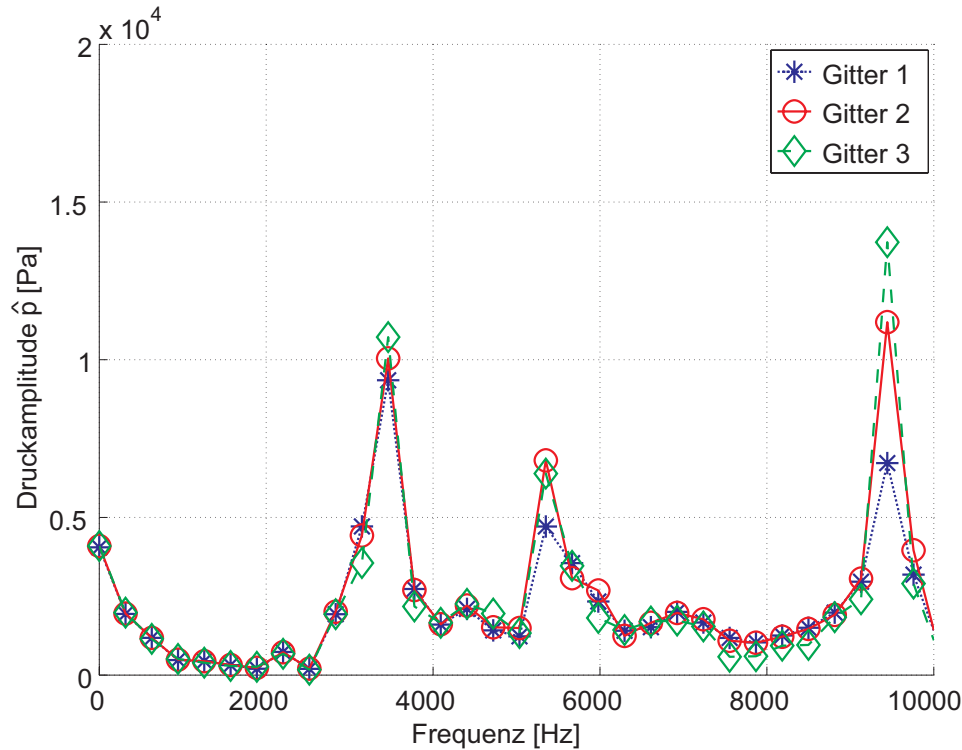


Abbildung 5.6: Vergleich verschiedener Gitter: Verlauf der Druckamplitude als Funktion der Frequenz an einem Punkt in der Brennkammer

Für die Frequenz der T1-Mode liefern alle drei Gitter fast identische Verläufe. Da für alle drei Gitter die gleiche Ausgangsamplitude gilt, bedeutet dies nach Formel 5.18, dass die T1-Mode von allen drei Gittern gleich gedämpft wird, und dass die feinere Auflösung in der Düse keinen Einfluss auf das Ergebnis hat. Für größere Frequenzen werden jedoch die Unterschiede deutlich: Das größte Gitter (Gitter 1) kann die T2-Mode weniger gut wiedergeben als die anderen beiden. Erst für noch größere Frequenzen wird der Effekt der räumlichen Auflösung in der Düse deutlich. Da alle Gitter den in Abschnitt 5.3.4 gemäß den Überlegungen in Abschnitt 5.3.3 gestaltet wurden, sind die Ergebnisse der Gitterstudie hinsichtlich der T1- und T2-Mode konsistent zu den obigen Überlegungen.

5.3.6 Rechenzeit

Die Rechnungen wurden stets auf Maschinen mit zwei Dual Core ADM Opterons mit 2,4 MHz und einem gesamten Arbeitsspeicher von vier Gigabyte durchgeführt. Die Rechnung selbst fand immer nur auf einem der Prozessoren statt. Auf diese Art konnten auf einer Maschine je nach Arbeitsspeicherbedarf drei bis vier Fälle parallel bearbeitet werden. Die Rechenzeit für die Fälle mit schwankender Wärmefreisetzung ohne Absorber beträgt auf diesen Rechnern ca. vier bis fünf Tage für 40000 Zeitschritte. Mit Absorberring und schwankender Wärmefreisetzung liegt die Rechenzeit für 40000 Zeitschritte bei ca. fünf bis sechs Tagen.

5.4 Randbedingungen

Randbedingungen haben einen entscheidenden Einfluss auf den Energiehaushalt der Akustiksimulation. Daher wird im Folgenden auf die Umsetzung der verwendeten Randbedingungen eingegangen und ihr Verhalten hinsichtlich der Energieerhaltung diskutiert.

5.4.1 Feste Wände

Wände, an denen nur eine mittlere Geschwindigkeitskomponente tangential zur Wand auftritt, werden als „Slip Wall“ modelliert. Dies bedeutet, dass Geschwindigkeitsfluktuationen normal zur Wand verschwinden ($\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' = 0$), wohingegen für Geschwindigkeitsfluktuationen parallel zur Wand keine Einschränkungen gelten. Im Falle der Raketenschubkammer können die Seitenwände als „Slip Walls“ modelliert werden.

Die Bedingung $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' = 0$ kann nicht direkt an den Wandpunkten gesetzt werden, da das mit den Finiten Differenzen diskretisierte Gleichungssystem sonst überbestimmt wäre. Dies könnte wiederum die Entstehung nicht-physikalischer, hochfrequenter Lösungsanteile begünstigen [TD94]. Abhilfe schafft hier die Einführung sogenannten „Ghost Points“ analog den Ideen von

Tam und Dong [TD94]. Bei den „Ghost Points“ handelt es sich um virtuelle, zusätzlich eingeführte Randpunkte, die zusätzliche Freiheitsgrade im zu lösenden Gleichungssystem erzeugen. Dies verhindert eine Überbestimmung des Systems und sorgt damit für stabilere Lösungen. Abbildung 5.7 zeigt ein quadratisches Rechengebiet mit Rändern und Ghost Points.

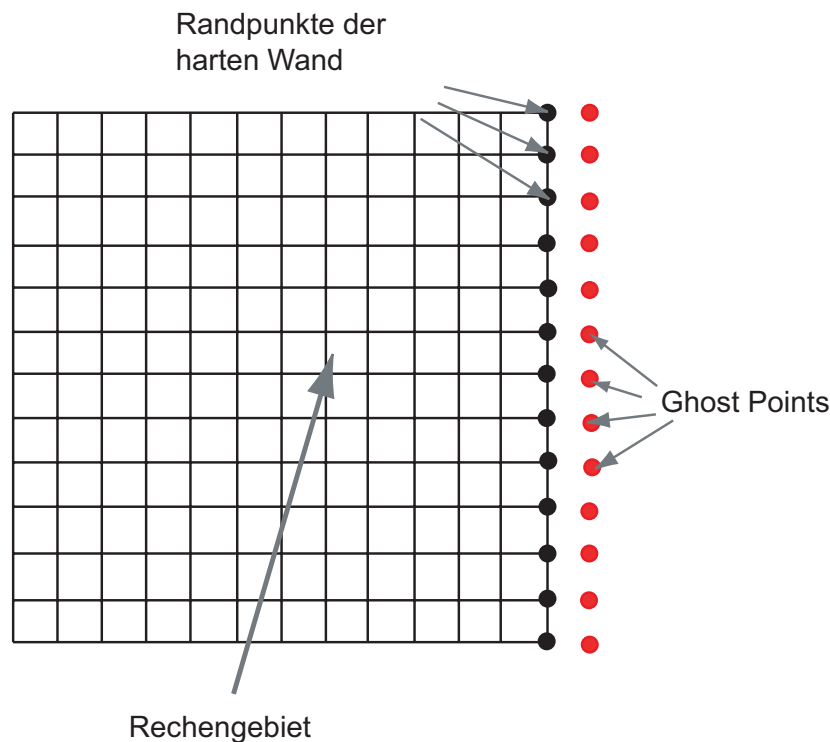


Abbildung 5.7: Quadratisches Rechengebiet mit Ghost Points

Um die Randbedingungen zu realisieren, wird die Druckschwankung p'_{GP} im Ghost Point vorgegeben. Die Druckschwankung p'_{GP} dort erfüllt die diskretisierte linearisierte Impulsgleichung in Normalenrichtung, so dass an den Randpunkten selbst die Bedingung $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' = 0$ erfüllt ist. Die genauen mathematischen Ausdrücke können dem Handbuch des PIANO-Codes [DBG⁺07] entnommen werden.

5.4.2 Einlass-Randbedingungen

Die Einlass-Randbedingung wird zur Beschreibung des akustischen Verhaltens des Einspritzkopfes benötigt. Die naheliegendste Modellierung des Einspritzkopfes als harte Wand führt jedoch zu einem Eintrag an akustischer Energie in das Rechengebiet, da die mittlere Geschwindigkeit \bar{u} senkrecht zu dieser Berandung ungleich Null ist. Dieser Energieeintrag lässt sich leicht durch eine Betrachtung des zeitlich gemittelten akustischen Flusses über diesen Rand nach Gleichung 4.76 verifizieren. Die Bedingung $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' = 0$ für die harte Wand reduziert Gleichung 4.76 zu

$$\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \rangle = \frac{1}{2} \frac{\bar{u}}{\bar{\rho} \bar{a}^2} \mathcal{R} |\hat{p}^2|^2 \quad (5.19)$$

Der akustische Fluss über die Wand nimmt damit nur den Wert Null an, wenn auch die mittlere Geschwindigkeit normal zur Wand \bar{u} verschwindet. Dies äußert sich in den Rechnungen in stets ansteigenden Druckamplituden, was nicht den physikalischen Tatsachen entspricht.

Wie bereits von Verhaar [Ver97] gezeigt, liefert jedoch die Bedingung einer verschwindenden Massenstromschwankung auch für überströmte Berandungen des Rechengebietes eine energieneutrale Randbedingung. Dazu wird der Massenstrom $\dot{m} = A \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \rho$ über eine konstante Querschnittsfläche A linearisiert

$$\begin{aligned} A \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \rho &= A (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}') (\bar{\rho} + \rho') \\ &= \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}} \rho' + \bar{\rho} \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' = 0. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Fließt zusätzlich die Definition der Schallgeschwindigkeit und die linearisierte Isentropiebeziehung ein, ergibt sich aus Gleichung 5.20

$$\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}} \frac{p'}{\bar{\rho} \bar{a}^2} + \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' = 0. \quad (5.21)$$

Gleichung 5.21 ist gleichbedeutend zu der Bedingung $\dot{m}' = 0$. Damit wird der akustische Einfluss der Brennstoffleitungen abgekoppelt. Einsetzen dieser Beziehung in den Ausdruck für den augenblicklichen akustischen Fluss über eine Berandung $\mathbf{n} \cdot \mathbf{I}$ in einer isentropen Potentialströmung nach Tabelle 4.2 liefert

$$\begin{aligned}
 \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} &= p' (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}') + \frac{p'^2 (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}})}{\bar{\rho} \bar{a}^2} + \bar{\rho} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}') (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}') + \frac{p'}{\bar{a}^2} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}') (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}}) \quad (5.22) \\
 &= -\frac{p'^2 (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}})}{\bar{\rho} \bar{a}^2} + \frac{p'^2 (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}})}{\bar{\rho} \bar{a}^2} - \frac{p'}{\bar{a}^2} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}') (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}}) + \frac{p'}{\bar{a}^2} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{u}') (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}}) \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Gleichung 5.22 zeigt, dass der akustische Fluss über eine mit Gleichung 5.21 beschriebene Berandung zu jedem Zeitpunkt verschwindet, und damit natürlich auch im Mittel den Wert Null annimmt. Daher wird in der Simulation der Einspritzkopf anstelle einer harten Wand mit der Bedingung „Massenstromschwankung gleich Null“ beschrieben. Auch diese Randbedingung wurde mit Hilfe des Ghost Point-Konzepts realisiert. Die hierfür verwendete Gleichungsformulierung kann Anhang A.3 entnommen werden.

5.4.3 Auslass-Randbedingungen

Die Auslass-Randbedingung muss das physikalische Verhalten der akustischen Wellenausbreitung in der Düse wiedergeben: Im Düsenhals, wo die Mach-Zahl $M = \mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}} / \bar{a} = 1$ erreicht, können sich akustische Wellen nicht mehr stromauf entgegen der Strömungsrichtung ausbreiten.

Für die Umsetzung dieses nicht-reflektierenden Verhaltens wurde das Rechengebiet in den Überschall hinein erweitert. Die Grundgleichungen bedingen dann automatisch dieses nicht-reflektierende Verhalten. Die berechnete Lösung in der Brennkammer ist damit unabhängig von der Wahl der Auslassrandbedingung. Dies wurde durch Tests mit verschiedenen Randbedingungen verifiziert. Am Auslass wurde trotzdem die zur Verfügung stehende

Abstrahl-Randbedingung („Radiation“) nach Tam und Webb [TW93] verwendet.

5.4.4 Absorber-Randbedingungen

5.4.4.1 Überblick TdiBC

Die Gleichungen zur Beschreibung des Verhaltens der Absorber hängen von der Schwingungsfrequenz ab. Das Problem, frequenzabhängige Randbedingungen in zeitabhängigen Simulationen zu verwenden, ist in der Literatur unter dem Namen „Time Domain Impedance Boundary Conditions“ (TdiBC) bekannt. Die zeitabhängige Implementierung der frequenzabhängigen Randbedingung verlangt die inverse Fourier-Transformierte dieser Bedingung. Um die Impedanzbedingung aus dem Frequenzraum in der Darstellung

$$\hat{p}(\omega) = \bar{\rho} \bar{a} Z(\omega) \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}(\omega) \quad (5.23)$$

in den Zeitbereich zu transformieren, muss das Faltungsintegral

$$p'(t) = \bar{\rho} \bar{a} \int_0^t Z(t-\tau) \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}'(\tau) d\tau \quad (5.24)$$

berechnet werden. Zur Auswertung dieses Integrals müssen stets alle zurückliegenden Werte der Geschwindigkeitsschwankung an der Wand $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}'$ zur Verfügung stehen, was mit enormen Anforderungen an die Rechenzeit und den verfügbaren Arbeitsspeicher verbunden ist. Es existieren verschiedene Ideen, die Berechnung des Faltungsintegrals zu umgehen und damit den Rechenaufwand, der mit dem Faltungsintegral verbunden ist, zu minimieren:

- Tam und Auriault [TA96] versuchen, die Frequenzabhängigkeit über Differentialgleichungen abzubilden, welche dann auf dem Rand mitgelöst werden.

- Özyörük et al. [OL97], [OLJ98] bedienen sich Methoden aus der Theorie der digitalen Filter und gehen einen Umweg über die z-Transformation.
- Fung und Ju [JF01], [FJT00], [FJ04] bedienen sich eines Reflexionskoeffizienten, um so die Kausalität der Randbedingung sicherzustellen. Zur Näherung des resultierenden Faltungsintegrals kommen unterschiedliche Methoden zum Einsatz.
- Richter et al. [LRT06], [RTLZ07] bedienen sich verschiedener Methoden, wie z.B. über Differentialgleichungen oder teilanalytische Transformationen.

All diese Ansätze besitzen die Gemeinsamkeit, dass die Autoren mit Instabilitäten ihrer Ansätze zu kämpfen haben. Da eine Strömung parallel zur betrachteten Wand das Reflexions- und Dämpfungsverhalten dieser Wand modifizieren kann (siehe Abschnitt 2.4), versuchen verschiedene Autoren, die Impedanz für ein ruhendes Medium mit Hilfe der Ausdrücke von Myers [Mye80] zu korrigieren. Dieses Vorgehen scheint besonders problematisch, da diese Korrektur oft weitere numerische Probleme nach sich zieht.

5.4.4.2 Transformation der Absorberrandbedingungen

Zur Transformation der in dieser Arbeit verwendeten linearen Absorberrandbedingungen dient ein halb-analytischer Ansatz analog einer Idee von Richter [RTLZ07]. Eine Korrektur der Impedanz aufgrund der Strömungsgeschwindigkeit kommt nicht zum Einsatz, da die Absorber so angebracht sind, dass die mittlere Strömung sie möglichst wenig beeinträchtigt.

Die Implementierung der Randbedingung geht davon aus, dass sich die Absorberimpedanz wie die eines geschlossenen Rohrs mit Dämpfung verhält

$$Z(\omega) = \coth(kL). \quad (5.25)$$

Die Wellenzahl k ist hier eine komplexe Größe

$$k = \alpha + i \frac{\omega}{a} \quad (5.26)$$

Die Dämpfung im Rohr lässt sich z.B. über die frequenzabhängige Dämpfungskonstante nach Kingsler und Frey [KF62] beschreiben

$$\alpha = \frac{2}{D a_{Abs}} \left(\sqrt{\frac{\eta \omega}{2 \rho_{Abs}}} + (\kappa - 1) \sqrt{\frac{\lambda \omega}{2 \rho_{Abs} c_p}} \right) \quad (5.27)$$

Aus numerischen Gründen wird die Absorberrandbedingung auf einer größeren Fläche als der reinen Absorberquerschnittsfläche aufgebracht. Daher wird der Übergang Wand/ Absorber als verlustfreier „Flächensprung“ von der Querschnittsfläche A_1 auf der Wand auf die Absorberquerschnittsfläche A_2 behandelt. Dies ergibt den Vorfaktor $\frac{A_1}{A_2}$, so dass die gesamte Absorberimpedanz im klassischen Fall lautet

$$Z(\omega) = \frac{A_1}{A_2} \coth(k L) \quad (5.28)$$

Abbildung 5.8 verdeutlicht die Aufbringung der Randbedingung. Jedem Absorber wird dabei ein Teil des Wandstückes zur Brennkammer zugeordnet.

Gleichung 5.25 weist ein identisches Verhalten wie die klassische Absorbermodellierung nach Gleichung 4.57, 4.58 und 4.59 auf. Jedoch sind für das Modell in Form von Gleichung 5.25 die erforderlichen Näherungen für die Transformationen in den Zeitbereich ohne weitere mathematische Vereinfachungen durchführbar.

Gleichung 5.28 kann mit Hilfe der Definition des \coth

$$\coth(f + i g) = \frac{\exp(f+i g) + \exp(-(f+i g))}{\exp(f+i g) - \exp(-(f+i g))} \quad (5.29)$$

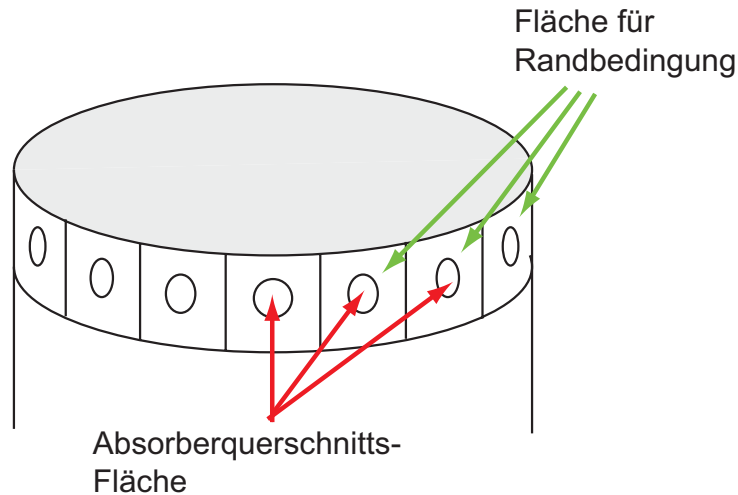


Abbildung 5.8: Aufteilung der Brennkammerwand zur Anbringung der Absorber-Randbedingung

umgeschrieben werden werden. Eine verwendbare Näherung erhält man, wenn die Terme der Form $\exp(f + i g)$ in Gleichung 5.29 in einer Taylorreihe entwickelt werden, die nach dem ersten Glied abgebrochen wird

$$\exp(f + i g) = 1 + f + i g + \dots \quad (5.30)$$

Damit ergibt sich für die Impedanz der Absorber

$$\frac{1}{\bar{\rho} \cdot \bar{a}} \frac{\hat{p}}{\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}} = \frac{A_1}{A_2} \frac{1 + b \exp(-i \omega \tau)}{1 - b \exp(-i \omega \tau)}. \quad (5.31)$$

Die Variable τ hat den Wert $\tau = \frac{2L}{a}$, die Variable $b = \exp(-C L)$ beschreibt die Dämpfung.

Diese Näherung nach Gleichung 5.29 beinhaltet im Gegensatz zu Gleichung 5.25 eine über den Frequenzbereich konstante Dämpfung. Die Konstante C muss entsprechend angepasst werden. Da hier die Dämpfung der Moden im Bereich unter $f = 10000\text{Hz}$ von Interesse ist, soll das Verhalten des genäherten Modells vor allem bei den ersten Resonanzpeaks dem Verhalten

des vollständigen Modells entsprechen. Abbildung 5.9 zeigt den Vergleich zwischen Näherung und Originalmodellierung des Reflexionsfaktors des Absorbers für $C = 0,5$. Die Näherung trifft das Originalverhalten im ersten Resonanzpeak sehr gut, im zweiten gut.

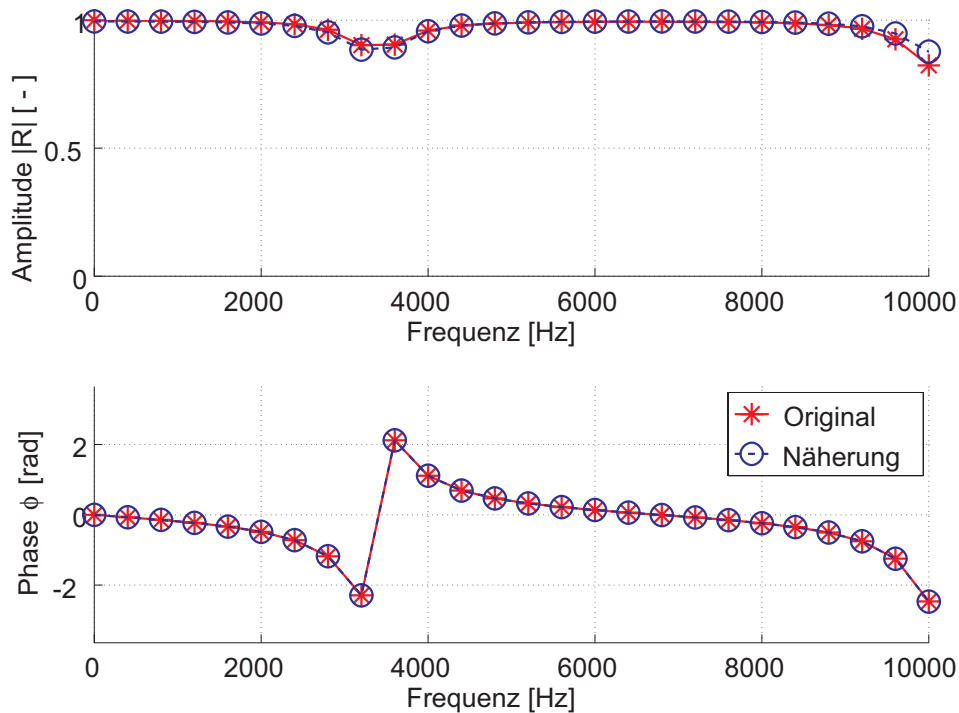


Abbildung 5.9: Vergleich des Reflexionsfaktors zwischen Näherung (blaue Kreise) und Originalmodell (rote Sternchen)

Abbildung 5.9 verdeutlicht, dass ein auf eine Schwingungsfrequenzen abgestimmter Absorber nur Frequenzen nahe der Resonanzfrequenz dämpft. Alle anderen Schwingungsfrequenzen bleiben unbeeinflusst. Um verschiedene Schwingungsmoden zu unterdrücken müssen daher Resonatoren mit unterschiedlichen Resonanzfrequenzen verwendet werden. In der Praxis kommen daher Rohrregister mit Absorbern unterschiedlicher Länge zum Einsatz.

Gleichung 5.31 kann nun analytisch in den Zeitbereich transformiert werden: Terme der Form $\exp(-i \omega \tau)$ entsprechen im Zeitraum einer zeitlichen Verschiebung um die Zeit τ . Aufgelöst nach der Geschwindigkeitsschwankung

normal zur Wand ergibt sich

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' = \frac{A_2}{A_1} \frac{1}{\bar{\rho} \bar{a}} (p' - b \cdot p'(t - \tau)) - b \cdot \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}'(t - \tau). \quad (5.32)$$

Analog der festen Wand muss ein Randpunkt, an dem die Absorberrandbedingung angebracht wird, sowohl die Erhaltungsgleichungen, als auch Bedingung 5.32 erfüllen. Dabei findet ebenfalls das Ghost Point-Konzept Verwendung. Die verwendete Formulierung der Gleichung im Ghost Point findet sich in Anhang A.2. Die Berechnung der Wandimpedanz erfolgt somit in drei Schritten:

1. Berechnen der Größen im Feld entsprechend eines Runge-Kutta-Teilschritts.
2. Setzen des Werts für p' im Ghost Point, so dass sowohl die Randbedingung als auch die linearisierte Impulsgleichung in Normalenrichtung erfüllt sind.
3. Korrigieren der Geschwindigkeit an der Wand, so dass auch $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}'$ die linearisierte Impulsgleichung zum neuen Zeitschritt erfüllt. Dazu wird die linearisierte Impulsgleichung unter Berücksichtigung des neuen Wertes im Ghost Point erneut gelöst.

Abbildung 5.10 zeigt das Ergebnis eines dreidimensionalen Testfalls mit Absorberrandbedingungen. Druck p' und Geschwindigkeitsfluktuation $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}'$ wurden in einem Wandpunkt aufgezeichnet und in den Frequenzraum transformiert. Die Lösung im Frequenzraum muss wiederum die Impedanzrandbedingung erfüllen. In diesem Fall werden die Amplitude der Schnellschwankung $\mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{u}}$ und das Produkt aus Druckschwankung und Admittanz (Kehrwert der Impedanz) $\hat{p} \cdot Y$ in dimensionsloser Form verglichen. Die Übereinstimmung der beiden Größen ist in Amplitude und Phase zufriedenstellend. Auffällig ist die Abweichung in der Phase bei ca. $f = 7000 \text{ Hz}$. Dort kann für die sehr geringen Werte der Geschwindigkeitsfluktuation kein sauberer Wert für die Phase bestimmt werden.

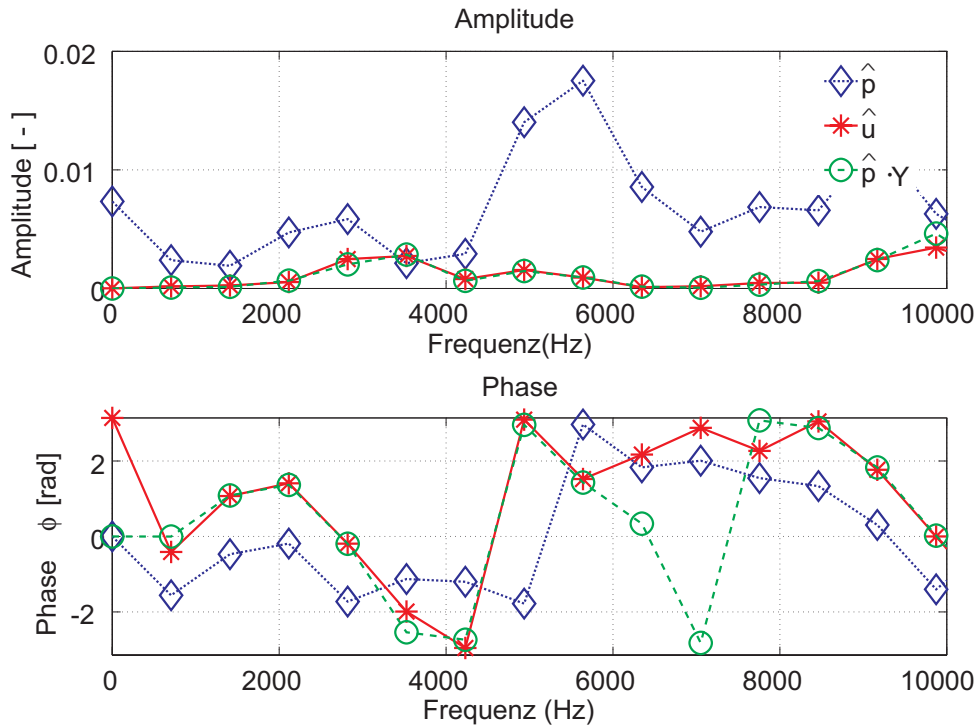


Abbildung 5.10: Vergleich zwischen dem Simulationsergebnis für \hat{u} und dem angestrebten Ergebnis $\hat{p} \cdot Y$ an der Absorberrandbedingung

5.4.4.3 Stoffwerte in den Absorbern

Die in dieser Arbeit behandelten Absorber sind stets mit Abgas gefüllt. Die verwendeten Modelle gehen davon aus, dass die Temperatur in den Absorbern gleichförmig ist. Dies entspricht jedoch nicht der Realität, da an der Rückseite der Absorber die Kühlkanäle verlaufen. Dadurch sind in den Absorbern starke Temperaturgradienten zu erwarten.

Für Gradienten, deren Ausdehnung deutlich kleiner ist als die betrachtete Wellenlänge, kann nach Subramanyam [SSL01] eine mittlere effektive Temperatur in der Form

$$\frac{L}{T_{eff}} = \int_0^L \frac{1}{T(x)} dx. \quad (5.33)$$

berechnet werden. Mitchell [MDAH89] weist jedoch auf mögliche große Abweichungen bei der Bestimmung der Resonanzfrequenzen hin. Intuitives Abschätzen der mittleren Temperatur durch die Formel

$$T_m = \frac{1}{L} \int_0^L T(x) dx \quad (5.34)$$

vergrößert diese Abweichungen noch weiter. Für bestimmte Formen der Temperaturverläufe können jedoch analytische Näherungen der Resonanzfrequenz und damit auch einer mittleren Temperatur bestimmt werden. Dies wird z.B. von Sujith [SWZ95] für den Fall eines linearen Temperaturverlaufs gezeigt.

Die vorangehende Diskussion zeigt, dass eine genaue Bestimmung von Stoffwerten und Resonanzfrequenzen nur bei einer genauen Kenntnis des Temperaturverlaufs im Absorber vorgenommen werden kann. Dieser ist jedoch nicht bekannt. Daher werden die in dieser Arbeit verwendeten Absorber stets künstlich auf eine bestimmte Frequenz getrimmt. Die Stoffwerte werden bei der Temperatur angenommen, die zur mittleren Temperatur bei dieser Resonanzfrequenz passt. Eine genauere Analyse würde weiterführende experimentelle und numerische Untersuchungen voraussetzen.

5.5 Zusammenfassung des Modells

Die in Kapitel 5 beschriebenen Eigenschaften und Aspekte definieren ein Modell zur Berechnung selbsterregter Verbrennungsschwingungen im Zeitbereich, das

- die akustische Wellenausbreitung in der Strömung der Brennkammer und dem konvergenten Teil der Düse beschreibt,
- die Wärmefreisetzung über das Wärmefreisetzungsmodell nach Crocco berücksichtigt,

- energieneutrale Randbedingungen am Einspritzkopf und an den Brennkammerwänden zur Verfügung stellt,
- Energieabfuhr über die Absorberrandbedingungen und durch die Düse ermöglicht und
- die numerische Dissipation minimiert.

Damit können nun Untersuchungen zur Entstehung selbsterregter Verbrennungsschwingungen im Aestus-Triebwerk durchgeführt werden.

6 Stabilitätsgrenzen ohne Absorber

Dieses Kapitel beschreibt die Ergebnisse der Simulationen mit thermoakustischer Quelle und ohne Dämpfung. Die einzigen Dämpfungsmechanismen sind daher der Einfluss der Düse und eine geringe numerische Dämpfung. Die Ergebnisse werden in Form einer Stabilitätskarte dargestellt und hinsichtlich des Rayleigh-Kriteriums analysiert.

6.1 Durchführung der Simulation

Die Simulation wurde auf Gitter 1 mit 135 000 Zellen durchgeführt. Dieses Gitter kann die T1-Mode mit geringer numerischer Dämpfung wiedergeben, bei der T2-Mode ist eine deutlich höhere numerische Dämpfung zu erwarten. Als Anfangsbedingung dient ein kugelförmiger Druckpuls basierend auf einer Gauß-Funktion der Form

$$p'(\mathbf{x}, 0) = p'_{\max} \cdot \exp \left[-\ln 2 \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_z)^2}{b_G^2} \right]. \quad (6.1)$$

p'_{\max} beschreibt hierbei die maximale Höhe des Druckpulses, b_G den Halbwertsradius und \mathbf{x}_z die Koordinaten des Zentrums des Pulses. Dieser Druckpuls induziert ein Frequenzspektrum, das ebenfalls eine gaußförmige Frequenzverteilung besitzt: Je größer der Halbwertsradius b_G , desto kleiner wird das angeregte Frequenzband. Im Gegensatz hierzu würde ein Dirac-Impuls ein Frequenzspektrum mit unendlich vielen Frequenzen erzeugen.

Die Parameter der thermo-akustischen Quelle wurden im Bereich

$$0,6 \leq \tau^* \leq 1,2 \quad (6.2)$$

$$1,0 \leq n_{\text{sim}} \leq 3,0 \quad (6.3)$$

variiert. Dies entspricht einem realen Bereich für n und τ von

$$1,04 \cdot 10^{-4} \text{ s} \leq \tau^* \leq 2,08 \cdot 10^{-4} \text{ s} \quad (6.4)$$

$$0,16 \leq n_{\text{sim}} \leq 0,48. \quad (6.5)$$

Die Werte für die Verzugszeit τ entsprechen in etwa den in Kapitel 4.3.1 angegebenen Werten für hypergole Treibstoffe. Die Werte für den Interaktionsindex n liegen in der Nähe der numerischen Stabilitätsgrenzen. Da bei den im vorliegenden Kapitel 6 untersuchten Fällen der einzige Dämpfungsmechanismus die Düsenverluste sind, liegt der betrachtete Wertebereich für n unterhalb der sonst üblichen Angaben für den Interaktionsindex.

6.2 Ergebnisse der Simulation und ihre Auswertung

Die Simulation liefert die Felder der akustischen Schwankungsgrößen zu verschiedenen Zeitpunkten sowie die zeitliche Entwicklung der akustischen Schwankungsgrößen an vorab spezifizierten Punkten. Dies ermöglicht die Untersuchung der Gestalt der Schwingungsmoden, die Analyse des Frequenzinhalts der Zeitsignale sowie der Stabilität der Brennkammer.

Abbildung 6.1 zeigt den Verlauf der Druckschwankung p' als Funktion der Zeit für einen stabilen ($\tau = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$, $n_{\text{sim}} = 1$) und einen instabilen Fall ($\tau = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$, $n_{\text{sim}} = 3$). Der stabile Fall weist mit der Zeit leicht abfallende Signale auf, wohingegen das Drucksignal beim instabilen Fall ansteigt. Grundsätzlich liefert das Betrachten eines einzelnen Punktes bzw. des Druckfeldes allein jedoch weder eine eindeutige Information über die Stabilität noch über

die auftretenden Frequenzen: Liegt der Beobachtungspunkt in einem Schwingungsknoten, so kann dort die entsprechende Mode nicht beobachtet werden, auch wenn diese eine große Amplitude besitzt.

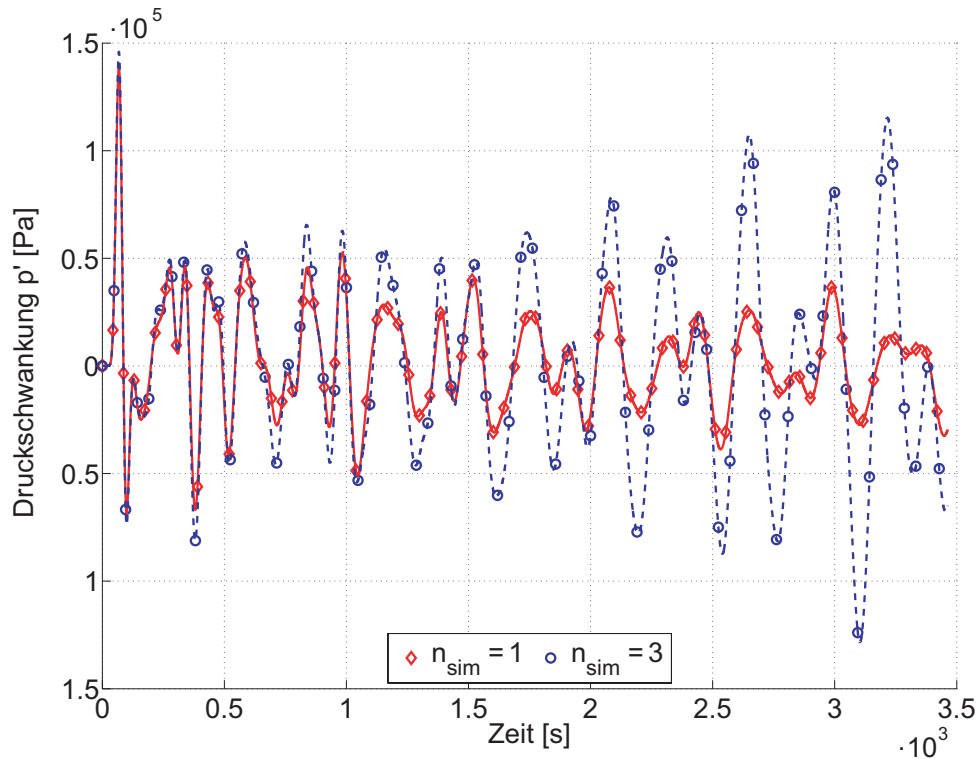


Abbildung 6.1: Zeitlicher Verlauf der Druckschwankung p' an einem wandnahen Punkt in der Brennkammer bei Verwendung einer thermo-akustischen Quelle nach Crocco mit den Parametern $\tau = 1, 2 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ für zwei Werte des Interaktionsindex n

Abbildung 6.2 zeigt ausgewählte Druckverteilungen auf der gesamten Geometrie zu einzelnen Zeitpunkten. Die Druckverteilung auf der linken Seite entspricht in etwa der T1-Mode, die auf der rechten Seite der T2-Mode. Abbildung 6.2 dient lediglich zur Illustration der erhaltenen Druckfelder auf der Geometrie. Die Verzerrung der Modenformen, d.h. die Abweichung von der erwarteten theoretischen Modenform, in beiden dargestellten Fällen legt den Verdacht nahe, dass jeweils nicht nur eine einzige Schwingungsmode in der Geometrie vorhanden ist, sondern dass es sich um eine Überlagerung unterschiedlich stark ausgeprägter Moden handelt.

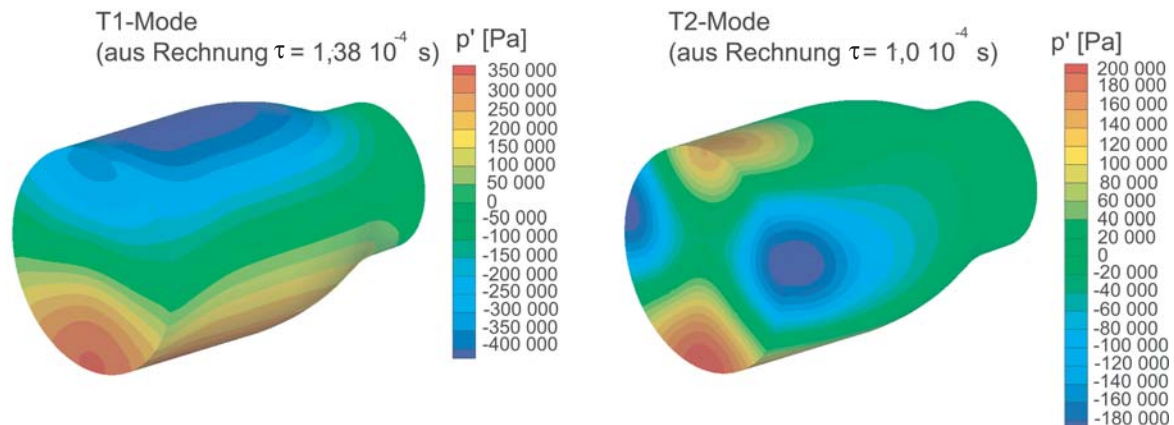


Abbildung 6.2: Druckfeld der T1 bzw. der T2-Mode aus Rechnungen mit thermoakustischer Quelle

Um zu zeigen, dass mehrere Schwingungsmoden gleichzeitig vorhanden sind, wurde eine Frequenzanalyse der Zeitsignale an verschiedenen Punkten durchgeführt. Abbildung 6.3 zeigt das erhaltene Frequenzspektrum für das Parameterpaar $n_{\text{sim}} = 2$ und $\tau = 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ in verschiedenen Ebenen der Brennkammer und im konvergenten Düsenteil. Die Ortsangaben in Abbildung 6.3 beschreiben die axiale Position der Ebenen parallel zum Einspritzkopf (y-z-Ebenen), in denen Beobachtungspunkte liegen. Die Beobachtungspunkte sind auf der gleichen Gerade parallel zur Brennkammerachse im Schwingungsbauch der T1-Mode lokalisiert.

Abbildung 6.3 verdeutlicht, dass stets mehrere Frequenzen in der Brennkammer auftreten. Das reine Vorhandensein der Peaks lässt jedoch keinen Schluss darüber zu, ob die zugehörigen Moden mit der Zeit anwachsen. Alle in der Anfangsbedingung enthaltenden Frequenzen müssen je nach Dämpfung oder Anregung mit unterschiedlichen Amplituden im Frequenzspektrum auftreten. Zwischen Amplitude und Anregungs- bzw. Abklingkoeffizient α gelten die in Abschnitt 5.3.5 beschriebenen Zusammenhänge. Aufgrund dieser Zusammenhänge lässt sich schlussfolgern, dass die höchsten Peaks zu den Moden mit der geringsten Dämpfung bzw. stärksten Anregung gehören. Die Peaks bei

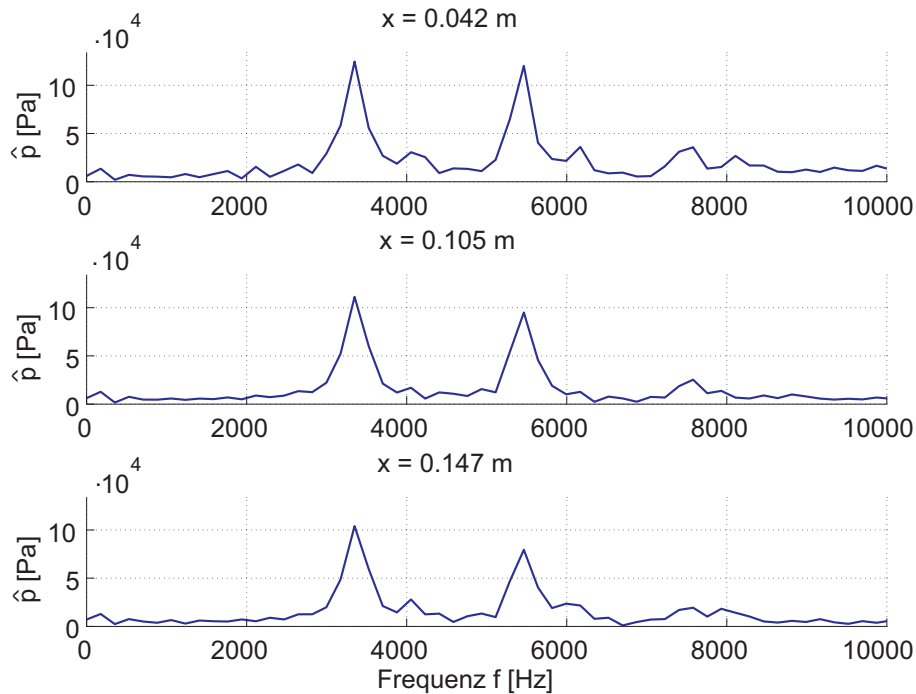


Abbildung 6.3: Frequenzinhalt der Signale in verschiedenen Ebenen für $n_{\text{sim}} = 2$ und $\tau = 1,21 \cdot 10^{-4} \text{s}$

$f = 3350 \text{Hz}$ und $f = 5600 \text{Hz}$ sind dabei besonders dominant. Diese beiden Peaks lassen sich den ersten beiden transversalen Moden T1 und T2 zuordnen. Des weiteren lässt sich beobachten, dass die Amplituden in der Brennkammer selbst am größten sind (siehe oberster Plot für $x = 0.042 \text{m}$), und in Richtung der Düse abnehmen (siehe unterster Plot für $x = 0.147 \text{m}$).

Auch die restlichen Frequenzpeaks lassen sich den Eigenmoden im Zylinder zuordnen. Abbildung 6.4 gibt eine Übersicht über diese Zuordnung. Die einzelnen Schwingungsfrequenzen liegen stets leicht unter den am gasgefüllten Zylinder abgeschätzten und in Tabelle 5.3 aufgelisteten Frequenzen.

Generell lassen sich hauptsächlich transversale oder gemischte Moden beobachten. Die longitudinalen Moden tauchen in den Plots nicht auf, da diese offenbar sehr stark gedämpft sind. Wie in Kapitel 7.1.1 diskutiert wird, erfahren die longitudinalen Moden die stärkste Dämpfung durch die Düse. Die ge-

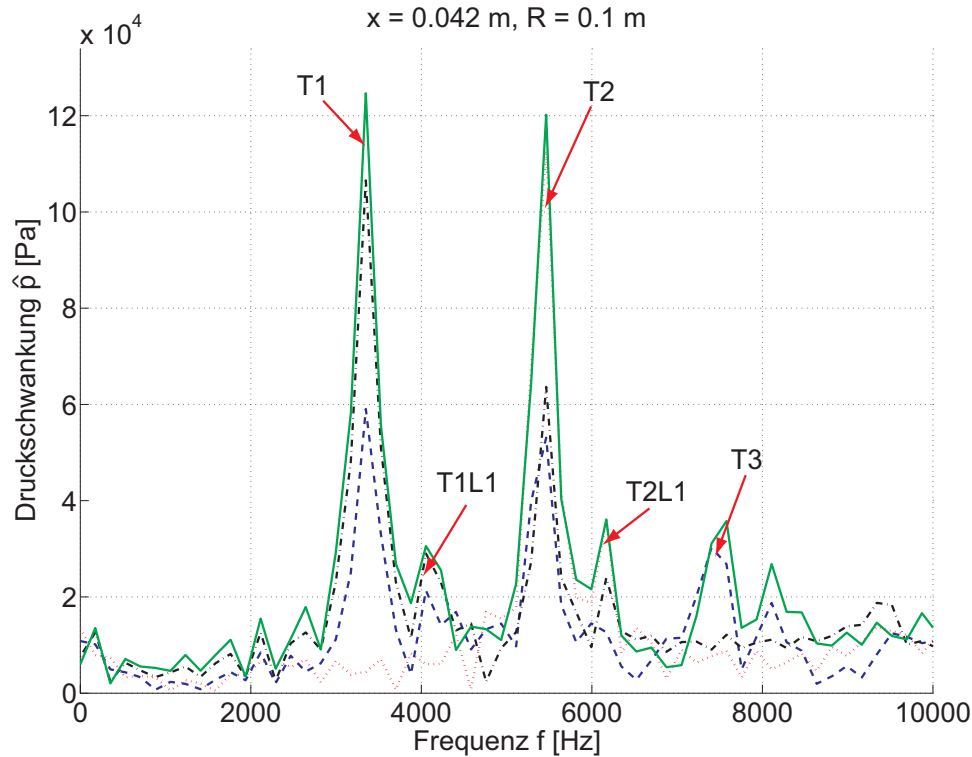


Abbildung 6.4: Schwingungsfrequenzen und zugehörige Moden in der Brennkammer

ringen Amplituden oberhalb $f = 6000$ Hz sind zum einen durch die Anfangsbedingung (höhere Frequenzen sind weniger stark darin vertreten) und zum anderen der numerischen Dämpfung zuzuschreiben.

6.3 Trennung des instationären Verhaltens der einzelnen Moden

Das vorangehende Kapitel zeigt, dass in den zeitabhängigen Signalen stets mehrere Frequenzen enthalten sind. Diese können den Eigenmoden der Brennkammer zugeordnet werden und klingen - entsprechend der Stabilität oder Instabilität dieser Eigenmode- ab oder auf.

Zur Analyse instationärer Signale, also Signale, deren Eigenschaften sich mit

der Zeit ändern, kann die sog. zeitabhängige Fourier-Transformation oder Kurzzeit-Fourier-Transformation herangezogen werden [OS99]. Dieses Konzept wird u.a. zur Beschreibung von Radar-, Sprach- und Datenkommunikationssignalen verwendet. Bei der Kurzzeit-Fourier-Transformation wird stets nur ein kurzer Abschnitt, ein sogenanntes Fenster, des Signals betrachtet und ausgewertet. Dieses Fenster wird, wie in Abbildung 6.5 dargestellt, in der Zeit weiterschoben. Für die Fourier-Transformation innerhalb des Fensters gelten die gleichen Regeln und Gesetze wie bei der Anwendung einer normalen Fourier-Transformation: je kleiner das betrachtete Fenster, umso größer wird bei gleicher Abtastfrequenz die Auflösung des Frequenzvektors.

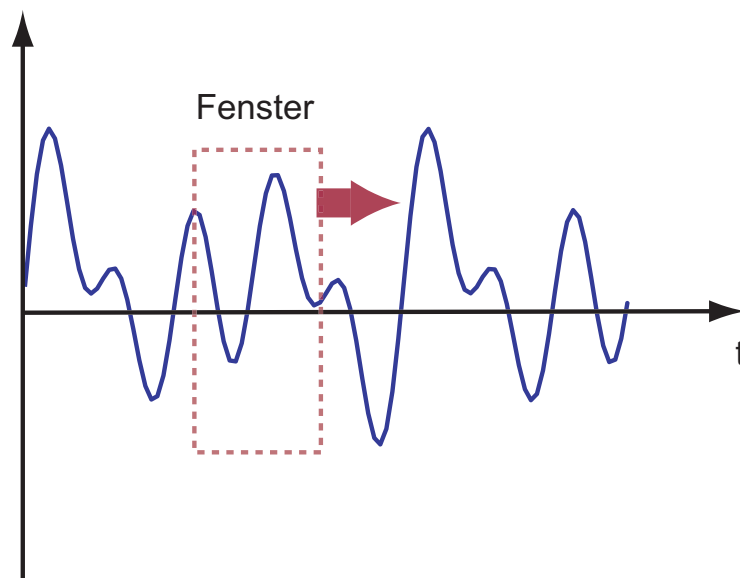


Abbildung 6.5: Beobachtungsfenster und Signal für die Kurzzeit-Fourier-Transformation

Um die in Kapitel 6.2 als besonders dominant beobachteten Transversalmoden näher zu betrachten, können die Zeitsignale an einzelnen Punkten der Geometrie mit Hilfe der Kurzzeit-Fourier-Transformation analysiert werden. Hierbei tritt das folgende Dilemma auf: Um einzelne Frequenzen möglichst genau ohne Störeinflüsse analysieren zu können, sollte die Fensterbreite ein Vielfaches der zugehörigen Schwingungsdauer umfassen. Um die zeitliche Veränderung bei dieser Frequenz jedoch gut auflösen zu können, muss das Fenster so kurz wie möglich sein. Kurze Fenster führen jedoch wiederum zu einer groben Auflösung des Frequenzvektors. Im Folgenden wird daher die

Festerlänge zur Analyse einer Schwingungsmode stets so gewählt, dass das Fenster eine Schwingungsperiode dieser Mode beinhaltet. Für die T1- bzw. T2-Mode bedeutet dies, dass die zugehörige Frequenz im zweiten bzw. dritten Bin des Frequenzvektors zu finden ist. Das Herauslesen der Schwingungsamplitude an diesem Bin liefert dann das Amplitudenverhalten der Schwingungsmode als Funktion der Zeit. Abbildung 6.6 zeigt beispielhaft dieses Verhalten für den Fall $n_{\text{sim}} = 2$ und $n_{\text{sim}} = 2$ und $\tau = 1.56 \cdot 10^{-4}$ s.

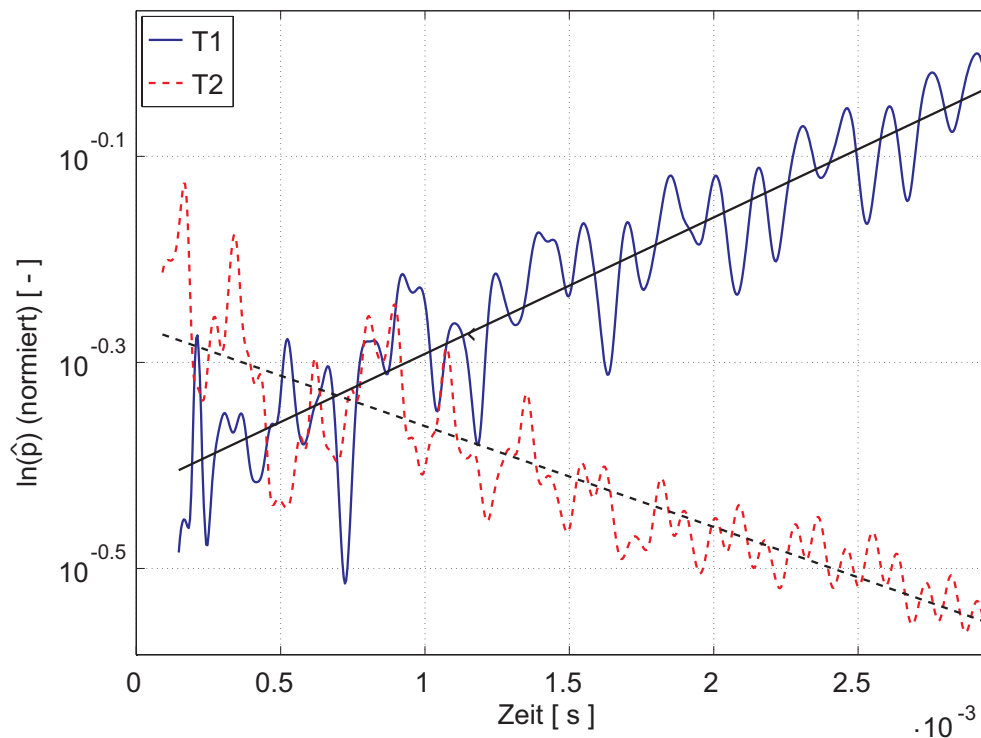


Abbildung 6.6: Verlauf der Amplituden der T1- und T2-Mode als Funktion der Zeit für $n_{\text{sim}} = 2$ und $\tau = 1.56 \cdot 10^{-4}$ s (halblogarithmische Darstellung)

Abbildung 6.6 zeigt deutlich, dass die Amplitude der T1-Mode in diesem Fall mit der Zeit zunimmt, die T2-Mode mit der Zeit abnimmt. Bei den Schwankungen innerhalb des Signals handelt es sich um Artefakte aus der diskreten Fourier-Transformation, da nicht garantiert werden kann, dass die Fenster beim Nulldurchgang der Schwingung beginnen. Außerdem führt die schlechte Frequenzauflösung zu Ungenauigkeiten. Daher sollte die vorliegende Me-

thode nur zur Abschätzung grober Trends verwendet werden.

Mit Hilfe des beschriebenen Verfahrens kann näherungsweise auch der Abklingkoeffizient α der einzelnen Schwingungsmoden bestimmt werden: In der halblogarithmischen Darstellung kann der Verlauf der Amplituden über der Zeit mit einer Gerade genähert werden. Die Steigung dieser Gerade entspricht dann dem Abklingkoeffizienten α .

6.4 Bestimmung der Stabilität

Ein stabiles System ist durch abfallende Schwingungsamplituden gekennzeichnet. Aus der Zeithistorie der Simulationen ist aber an einzelnen Punkten nicht immer unbedingt eindeutig erkennbar, ob die die Schwingungsamplitude ab- oder zunimmt. Auch die Methode zur Trennung des Amplitudenverlaufs der einzelnen Moden über die Kurzzeit-FFT birgt Ungenauigkeiten. Insbesondere nahe der Stabilitätsgrenze ist das Verfahren sehr fehleranfällig.

Daher wird in dieser Auswertung die akustische Energie herangezogen: In einem akustisch neutralen System nimmt die darin enthaltene akustische Energie weder zu noch ab. Dieser Sachverhalt lässt sich mathematisch ausdrücken als

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = 0 \iff \mathcal{E} = \text{const.} \quad (6.6)$$

Dies bedeutet auch, dass eine mit der Zeit abfallende akustische Energie im System für ein stabiles System spricht, eine mit der Zeit zunehmende für ein instabiles.

Zur Berechnung der akustischen Energie in der Brennkammergeometrie werden die Felddaten an einzelnen Zeitpunkten für die Schwankungsgrößen und mittleren Größen verwendet. Dies ergibt zunächst die Verteilung der akustischen Energie im Feld zu den einzelnen Zeitpunkten. Aufintegrieren dieses Wertes über das gesamte Volumen von Brennkammer und konvergentem Dü-

senteil liefert die gesamte, in diesem Volumen enthaltene, akustische Energie. Dieser Wert umfasst dann den Beitrag aller Schwingungsmoden und Frequenzen. Dies bedeutet jedoch auch, dass diese Betrachtung keine Aussage darüber liefern kann, welche der Schwingungsmoden den größten Anteil an der akustischen Energie hat.

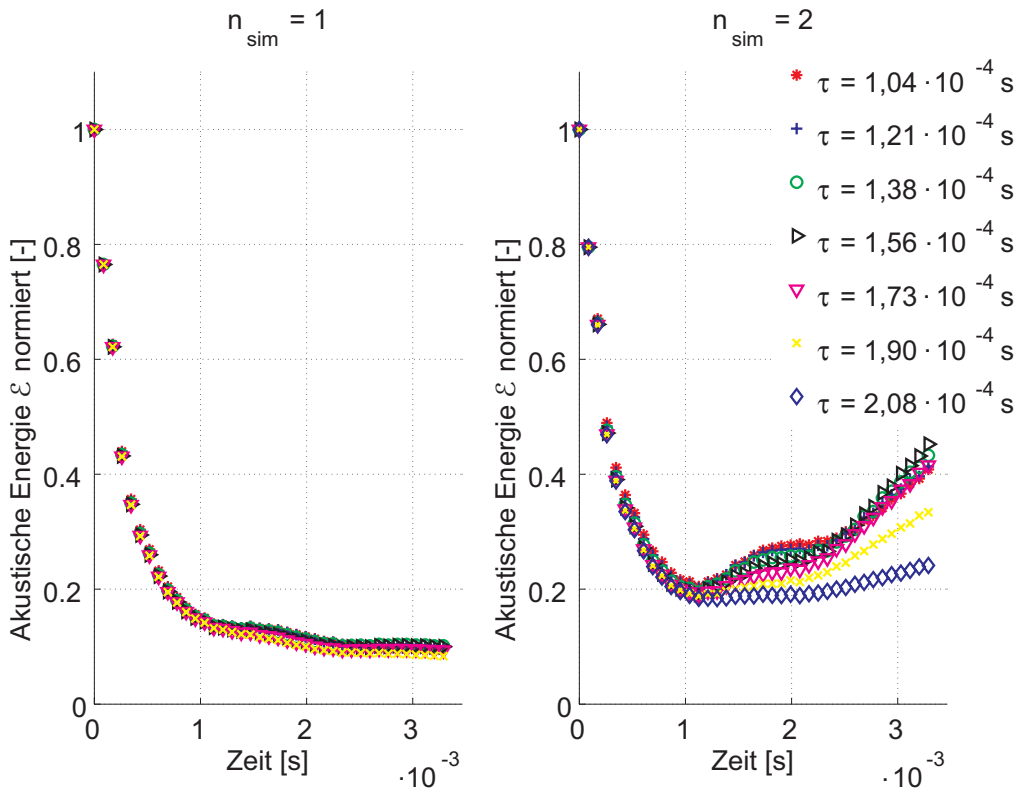


Abbildung 6.7: Akustische Energie im gesamten Volumen für unterschiedliche Parameter des Crocco-Modells als Funktion der Zeit

Abbildung 6.7 zeigt den Verlauf der akustischen Energie im Volumen für unterschiedliche Parameter des Crocco-Modells als Funktion der Zeit. Die stabilen Fälle auf der linken Seite von Abbildung 6.7 für $n_{\text{sim}} = 1$ zeigen einen monotonen Abfall der akustischen Energie mit der Zeit. Die instabilen Fälle für $n_{\text{sim}} = 2$ auf der rechten Seite von Abbildung 6.7 zeigen ebenfalls zuerst einen Abfall. Dieser Abfall entsteht, da am Anfang diejenigen Anteile aus der Anfangsbedingung herausgedämpft werden, die nicht durch das Flammenmodell verstärkt werden. Erst wenn die Anregungseffekte die Dämpfung der nicht verstärkten Moden überwiegen, tritt ein Wachstum der akustischen Energie

auf. Für unterschiedliche Verzugszeiten fallen sowohl das Absinken als auch der Anstieg unterschiedlich stark aus. Dieser Effekt lässt sich mit Hilfe einer Analyse des Rayleigh-Integrals erklären.

6.5 Analyse der Ergebnisse

Das Vorzeichen des Rayleigh-Integrals 2.1 bestimmt, ob die Wärmefreisetzung dem System akustische Energie zuführt oder entzieht. Eine lokale Betrachtung des Rayleigh-Integrals liefert die Bedingung

$$\frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} p' \cdot \dot{q}'_V dt dV > 0. \quad (6.7)$$

Dieses lokale Rayleigh-Integrals sagt aus, ob am betrachteten Punkt akustische Energie erzeugt oder vernichtet wird. Das lokale Rayleigh-Integral 6.7 lässt sich für das Crocco-Modell unter der Annahme einer sinusförmigen Schwingung mit konstanter Amplitude analytisch auswerten. Einsetzen des Ausdrucks für \dot{q}'_V aus Gleichung 5.2 und anschließendes Aufintegrieren über die Schwingungsperiode T_s resultiert in einem Ausdruck proportional zu

$$\left[\sin\left(\frac{\pi \tau}{T_s}\right) \right]^2 > 0. \quad (6.8)$$

Der Ausdruck auf der linken Seite von Gleichung 6.8 kann Werte zwischen null und eins annehmen. Gleichung 6.8 lässt die folgenden beiden Beobachtungen zu: Erstens kann der Ausdruck auf der linken Seite von Gleichung 6.8 keine negativen Werte annehmen. Dies bedeutet, dass eine durch das Crocco-Modell beschriebene Wärmefreisetzung nie dämpfende Wirkung haben kann, sondern stets akustische Energie zuführt. Zweitens hängt der tatsächliche Wert des aufintegrierten Rayleigh-Integrals 6.8 nur vom Verhältnis der Verzugszeit τ zur Schwingungsdauer T_s ab. Damit bestimmt die Verzugszeit τ für welche

Frequenzen das Rayleigh-Integral maximale Werte annimmt. Für diese Frequenzen ist die Energiezufuhr für die Schwingung dann am größten, was sich auch aus der energetischen Betrachtung in Abschnitt 4.4.2.3 ablesen lässt.

Das Rayleigh-Integral 6.8 nimmt für Werte von τ und T_s maximale Werte an, für die gilt

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{T_s}{2} (2c - 1) \\ &= \frac{1}{2f} (2c - 1),\end{aligned}\tag{6.9}$$

mit $c \in \mathbb{N}$. Einsetzen der analytischen Eigenfrequenzen des Triebwerks aus Tabelle 5.3 in Gleichung 6.10 ergibt die in Tabelle 6.1 zusammengefassten Werte für die Verzugszeiten τ , welche die einzelnen Moden „optimal“ antreiben können.

Mode	Verzugszeit τ [s] ($c = 1$)	Verzugszeit τ [s] ($c = 3$)
L1	$1,73 \cdot 10^{-4}$	$5,19 \cdot 10^{-4}$
T1	$1,48 \cdot 10^{-4}$	$4,44 \cdot 10^{-4}$
T1L1	$1,12 \cdot 10^{-4}$	$3,36 \cdot 10^{-4}$
T2	$0,89 \cdot 10^{-4}$	$2,67 \cdot 10^{-4}$
R1	$0,71 \cdot 10^{-4}$	$2,13 \cdot 10^{-4}$
T3	$0,65 \cdot 10^{-4}$	$1,95 \cdot 10^{-4}$

Tabelle 6.1: Optimale Werte der Verzugszeit τ zum Antreiben der Eigenmoden

Der durch die Parameterstudie abgedeckte Bereich von τ nach Gleichung 6.4 umfasst optimale Verzugszeiten zur Anregung aller in Tabelle 6.1 erwähnten Moden. Das Auswerten der Frequenzraumdarstellung für verschiedene Beobachtungspunkte analog Abbildung 6.3 zeigt, dass für alle verwendeten Werte von n und τ stets nur die erste und die zweite transversale Mode die größten Amplituden aufweisen. Kapitel 7 zeigt, dass diese beiden Moden im Vergleich zu den anderen die schwächste Dämpfung durch die Düse erfahren.

Die Anregung dieser beiden Moden lässt sich mit Hilfe des Rayleigh-Integrals analysieren. Der obere Teil von Abbildung 6.8 zeigt die Amplituden für die T1- und T2-Mode an einem Punkt in der Brennkammer als Funktion der Verzugszeit τ ($n_{\text{sim}} = \text{const}$). Die Amplitude der T1-Mode weist hierbei für eine Verzugszeit von $\tau = 1,56 \cdot 10^{-4} \text{s}$ ein Maximum auf, die T2-Mode bei $\tau = 1,01 \cdot 10^{-4} \text{s}$. Der in der unteren Hälfte von Abbildung 6.8 dargestellte Wert des Rayleigh-Integrals weist den gleichen Verlauf auf. An dieser Stelle sei nochmal darauf hingewiesen, dass der Wert des Rayleigh-Integrals von null zwar bedeutet, dass keine Anregung stattfindet, die entsprechende Mode aber trotzdem in gedämpfter Form vorhanden sein kann. Bei den größeren Werten für τ ist die Anregung für keine der beiden Moden optimal. Dort wird bei ähnlichen Verlusten weniger akustische Energie zugeführt. Dies erklärt, warum in Abbildung 6.7 die akustische Energie für diese Fälle langsamer anwächst.

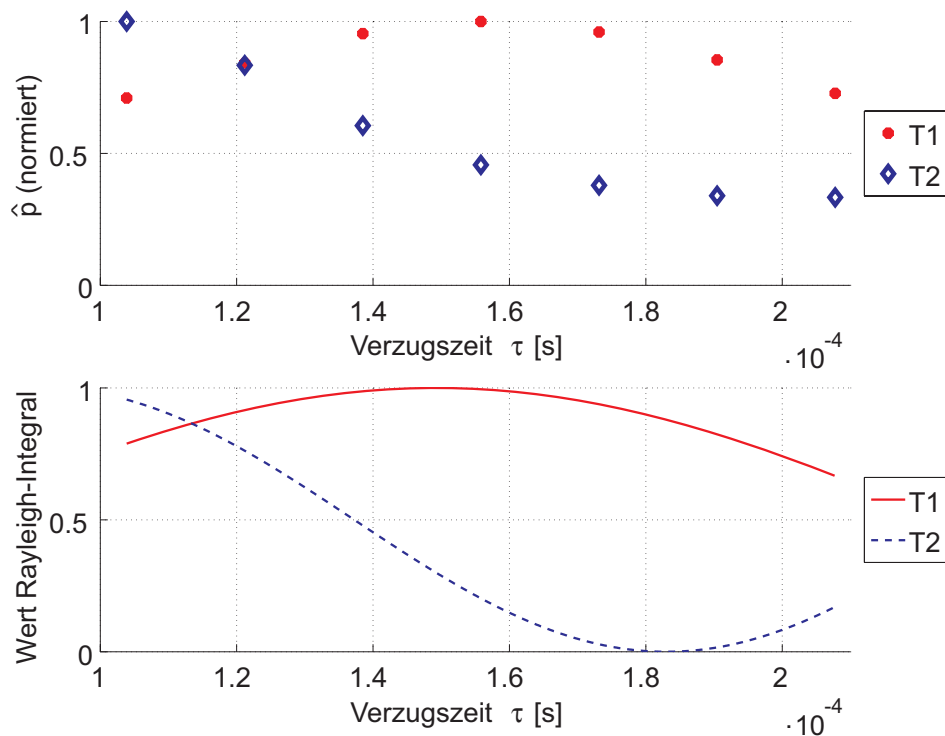


Abbildung 6.8: Vergleich der Schwingungsamplituden aus der Rechnung mit dem theoretischen Antrieb durch das Rayleigh-Integral

6.6 Darstellung in Form einer Stabilitätskarte

Die am stärksten vertretene Mode wird durch die Auswertung der Schwingungsamplituden an verschiedenen Beobachtungspunkten bestimmt. Zusammen mit den Informationen aus der zeitlichen Entwicklung der akustischen Energie im System lässt sich die Stabilität dieser Mode beurteilen. Abbildung 6.9 zeigt diese beiden Informationen zusammengefasst in einer Stabilitätskarte.

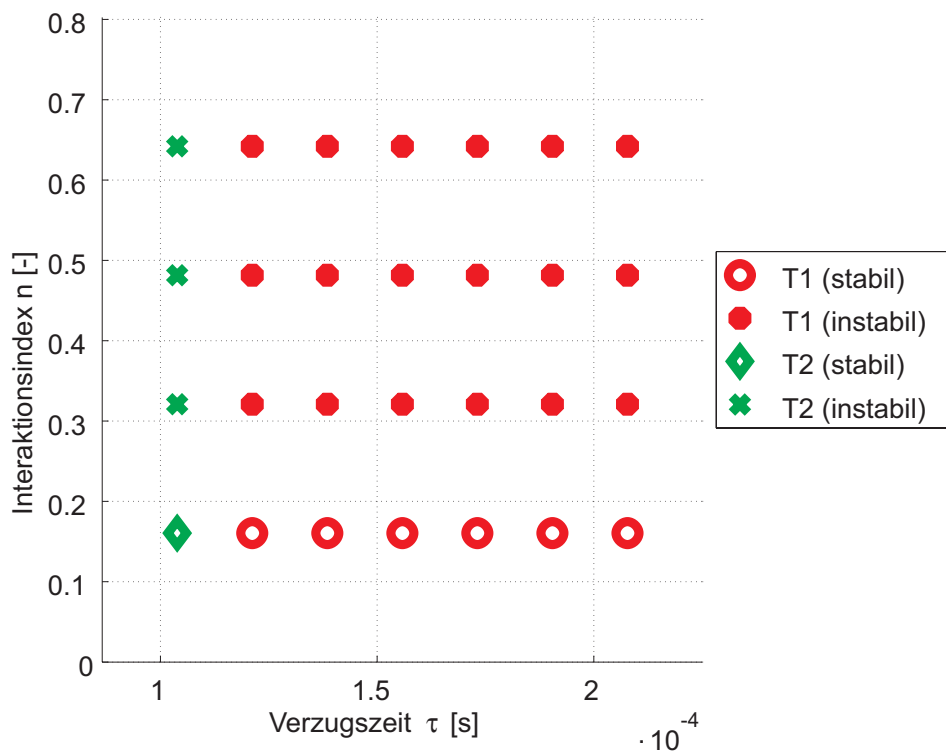


Abbildung 6.9: Stabilitätskarte für die untersuchten Fälle

Die Stabilitätskarte verdeutlicht, dass Instabilitäten bereits für sehr kleine Werte des Interaktionsindex n auftreten. Dies liegt daran, dass der einzige dämpfende Mechanismus bei den Rechnungen in diesem Kapitel die Düsen-dämpfung ist. Sie allein reicht offensichtlich nicht aus, um das Triebwerk bei realen Bedingungen stabil zu halten.

Bei der Erstellung der meisten Stabilitätskarten in der Literatur (siehe

z.B. [HR72]), bei denen die Instabilität bei ca. $n = 0,6$ beginnt, werden stets mehrere dämpfende Effekte wie Absorber, Baffels oder der Droplet Drag berücksichtigt. Ergebnisse wie z.B. von Mitchell [Mit95], bei denen ebenfalls nur die Düsendämpfung berücksichtigt wird, ergeben Stabilitätsgrenzen bei ebenfalls sehr geringen Werten von n . Bei diesen Ergebnissen liegen die Stabilitätsgrenzen für die T1-Mode bei $n = 0.25$, was in etwa den Aussagen der in Abbildung 6.9 dargestellten Ergebnisse entspricht.

6.7 Zusammenfassung

Das vorgestellte Berechnungsverfahren ermöglicht die Beschreibung von selbsterregten Verbrennungsschwingungen im Zeitbereich. Die auftretenden Moden lassen sich mit Hilfe der Theorie nach Rayleigh erklären. Dabei sind insbesondere die erste transversale Mode T1 und die zweite transversale Mode T2 dominant. Die Stabilität selbst lässt sich durch Berechnen der gesamten akustischen Energie im System beurteilen. Die Stabilitätsgrenzen liegen bei vergleichsweise niedrigen Werten des Interaktionsindex n . Diese Werte sind deutlich kleiner als diejenigen, die von Harrje und Reardon [HR72] für hypergole Treibstoffe angegeben werden. Dies bedeutet, dass die Düsendämpfung alleine nicht ausreicht, um das Triebwerk im stabilen Bereich zu halten. Dafür müssen weitere dämpfende Mechanismen vorhanden sein.

7 Analyse des Düsenverhaltens

Zur Untersuchung und Verifizierung des berechneten Düsenverhaltens werden verschiedene Techniken herangezogen: Ein direkter Vergleich zu halb-analytisch bestimmten Werten für die Düsenadmittanz nach Bell und Zinn [BZ73] zeigt Unterschiede und Gemeinsamkeiten zwischen dieser Theorie und der numerischen Simulation für Transversalmoden auf. Die Quantifizierung der gesamten akustischen Verluste der Düse für die in dieser Arbeit analysierte T1-Mode erfolgt durch die Berechnung eines Abklingkoeffizienten. Es folgt eine Validierung des verwendeten Ansatzes für Longitudinalmoden im Vergleich zu experimentellen Daten von Bell [Bel72].

7.1 Düsenadmittanzen

Dieser Abschnitt erläutert die physikalische Bedeutung der Düsenadmittanzen. Halb-analytisch ermittelte Werte nach Bell und Zinn [BZ73] werden mit Werten verglichen, welche aus der numerischen Simulation im Zeitbereich stammen.

7.1.1 Theoretische Beschreibung des Düsenverhaltens

Wie bereits im Abschnitt 4.3.2 beschrieben, wird der Einfluss der Raketendüse auf das akustische Feld in der Brennkammer gerne in Form einer Düsenadmittanz $Y_{\text{Düse}}$ angegeben. Die Düsenadmittanz ist hierbei eine Größe, die sowohl von den Strömungseigenschaften als auch von der Schwingungsfrequenz und der Schwingungsmode abhängt.

Düsenadmittanzen lassen sich z.B. mit dem Code von Bell und Zinn [BZ73]

berechnen. Dazu muss die Düsengeometrie, wie in Abbildung 7.1 dargestellt, in drei Abschnitte (Torus, Kegelabschnitt, Torus) eingeteilt werden. Die Düsenkontur kann dann eindeutig über die Parameter Brennkammerdurchmesser R_{BK} , Krümmungsradius am Düseneingang R_{KDE} , Düsenöffnungswinkel θ_{DUE} , Radius am Düsenhals R_{DH} und dem Krümmungsradius am Düsenhals R_{KDH} beschrieben werden.

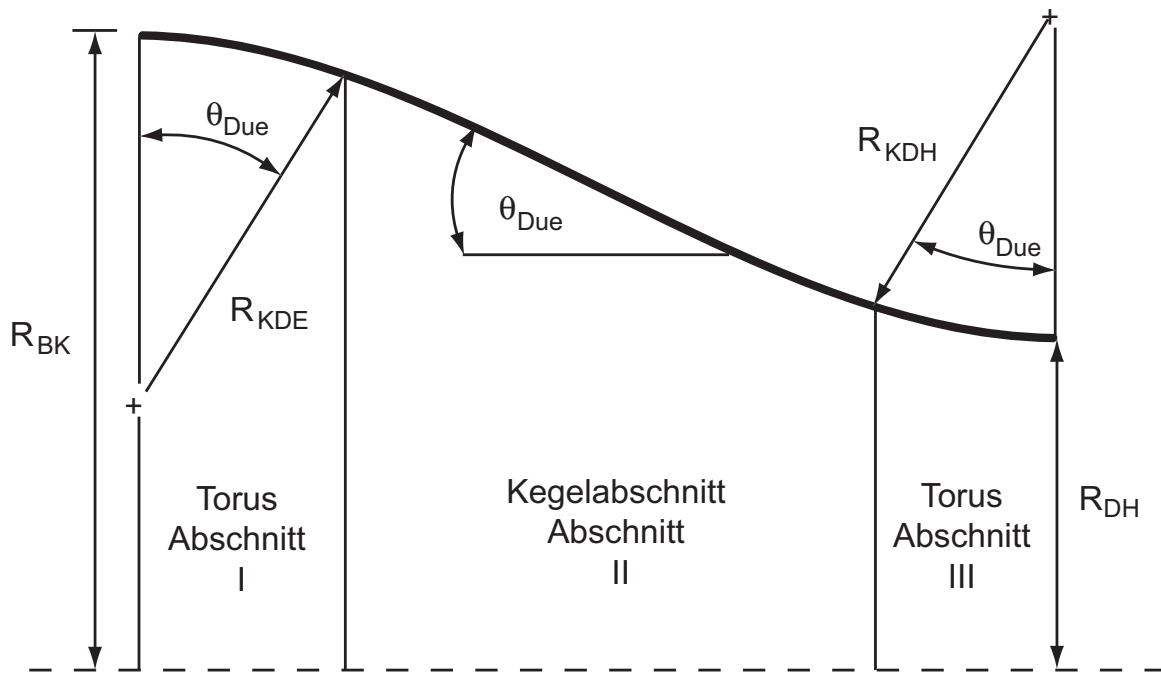


Abbildung 7.1: Parametrisierung der Düsenkontur nach Bell und Zinn [BZ73]

Weitere Eingabeparameter für die Berechnung der Düsenadmittanz sind die Schallgeschwindigkeit \bar{a} , die Mach-Zahl am Düseneintritt M_{DE} , der Isentrophenexponent κ , die Schwingungsmode und der Abklingkoeffizient α .

Für eine harmonische Schwingung mit konstanter Amplitude ($\alpha = 0$) ergeben sich die in Tabelle 7.1 zusammengestellten Werte für die einzelnen Schwingungsmoden des Aestus-Triebwerks. Tabelle 7.1 zeigt, dass die Düsenadmittanz sowohl im Realteil als auch im Imaginärteil positive oder negative Werte annehmen kann. Das Vorzeichen des Realteils der Düsenadmittanz $Y_{DUE,R}$ gibt nach Gleichung 4.77 die Richtung des rein akustischen Transports über die Intensität $\mathbf{u}' p'$ ohne konvektive Effekte an. Negative Werte des Realteils der Düsenadmittanz sagen aus, dass über die Düseneintrittsebene akustische

Mode	$Y_{\text{Due,R,theo}}$	$Y_{\text{Due,I,theo}}$
T1	-0,22	-0,13
L1	1,76	-0,56
T1L1	1,39	1,00
T2	-0,252	0,096
T2L1	0,95	-0,93

Tabelle 7.1: Düsenadmittanzen für das Aestus-Triebwerk nach der Theorie von Bell und Zinn [BZ73]

Energie von der Düse in die Brennkammer hinein transportiert wird. Positive Werte des Realteils der Düsenadmittanz zeigen an, dass die Brennkammer akustischen Energie über die Düse verliert. Je größer der positive Wert des Realteils, umso größer ist der Verlust an akustischer Energie durch die Düse.

Für die beiden transversalen Moden ist der Realteil der Düsenadmittanz in Tabelle 7.1 negativ. In der Literatur findet sich daher oft die Aussage, dass für transversale Moden die Düse eine destabilisierende Wirkung habe [CS67], [Cul88]. Diese Betrachtung berücksichtigt alleinig den rein akustischen Transport über die Intensität $\mathbf{u}'p'$ ohne konvektive Effekte. Betrachtet man jedoch den gesamten akustischen Fluss über die Düseneintrittsebene gemäß Formel 4.76, so sorgt der konvektive Transport akustischer Energie durch die mittlere Strömung meist auch im Falle negativer Realteile der Düsenadmittanz $Y_{\text{R,Due}}$ für einen akustischen Verlust der Brennkammer an die Düse.

Die Größenverhältnisse von rein akustischen Transport zu konvektivem Transport von akustischer Energie lassen sich durch die Analyse der vier Anteile des akustischen Flusses in Gleichung 4.76 bestimmen. Der akustische Fluss setzt sich dort aus vier verschiedenen Termen zusammen. Der erste Term beschreibt den rein akustischen Fluss, die Terme drei bis vier den konvektiven Transport akustischer Energie. Für die T1-Mode in Tabelle 7.1 ($Y_{\text{Due,R}} = -0,22$, $Y_{\text{Due,I}} = -0,13$, $M_{\text{DE}} = 0,26$) hat der erste Term destabilisierende Wirkung, da sein Vorzeichen negativ ist. Die Terme zwei und drei sind im Vergleich zu den anderen Termen klein, und werden hier vernachlässigt.

Damit wird der konvektive Einfluss hauptsächlich von Term vier beschreiben. Dieser ist positiv und hat daher stabilisierende Wirkung. Term vier ist betragsmäßig leicht größer als Term eins (ca. 0,8 mal Betrag von Term vier). Damit überwiegt im vorliegenden Fall leicht die stabilisierende Wirkung des konvektiven Transports akustischer Energie.

Für die Moden mit longitudinalen Anteilen, also die L1-, die T1L1- und die T2L1-Mode, ist der Realteil der Düsenadmittanz $Y_{R,Due}$ in Tabelle 7.1 positiv. Dies führt in jedem Fall zu akustischen Verlusten durch die Düse, die den dämpfenden Einfluss der Düse bei transversalen Moden deutlich übersteigen. Für die L1-Mode nimmt der Realteil der Düsenadmittanz den größten Wert an. Damit sind die akustischen Verluste durch die Düse für die L1-Mode am größten. Dies erklärt, warum im vorangehenden Kapitel 6 vor allem transversale Moden zu beobachten sind, obwohl auch longitudinale Moden vom Wärmefreisetzungsmodell angeregt werden müssten.

7.1.2 Numerische Bestimmung der Düsenadmittanz

Die Düsenadmittanz kann sowohl aus selbsterregten Rechnungen mit Wärmefreisetzungsquelle als auch als Simulationen, bei denen einzelne Schwingungsmoden künstlich über eine Fremderregung erzeugt werden, extrahiert werden. Bei den fremderregten Rechnungen wurde die Schwingung über eine periodische, kugelförmige Volumenquelle angeregt. Die Anregungsfrequenz entspricht bei diesen Fällen der Eigenfrequenz der gewünschten Schwingungsmode.

Beide Typen von Simulationen liefern den zeitlichen Verlauf der Druckschwankung p' und der Geschwindigkeitsschwankung \mathbf{u}' an verschiedenen Beobachtungspunkten. Aus den Zeitsignalen an Punkten in der Düseneintrittsebene lässt sich eine lokale, an diesem Punkt geltende Düsenadmittanz extrahieren.

Die Berechnung der Düsenadmittanz erfordert die folgenden Schritte:

- Durchführen der diskreten Fourier-Transformation für die Zeitsignale

der Druckschwankung p' und die Geschwindigkeitsschwankung normal zur Düsen Eintrittsebene u' .

- Extraktion der Amplituden \hat{p} und \hat{u} bei der Frequenz der zu betrachtenden Schwingungsmode.
- Extraktion der Phasendifferenz φ zwischen p' und u' . Wichtig ist hierfür, dass der betrachtete Punkt nicht in einem Schwingungsbauch der analysierten Mode liegt, da die Phasenwinkelbestimmung für Größen mit einer geringen Amplitude sehr fehleranfällig ist.
- Bilden der Düsenadmittanz aus dem Amplitudenverhältnis \hat{p} und \hat{u} von und dem Phasenwinkel φ und Aufspalten in Real- und Imaginärteil.

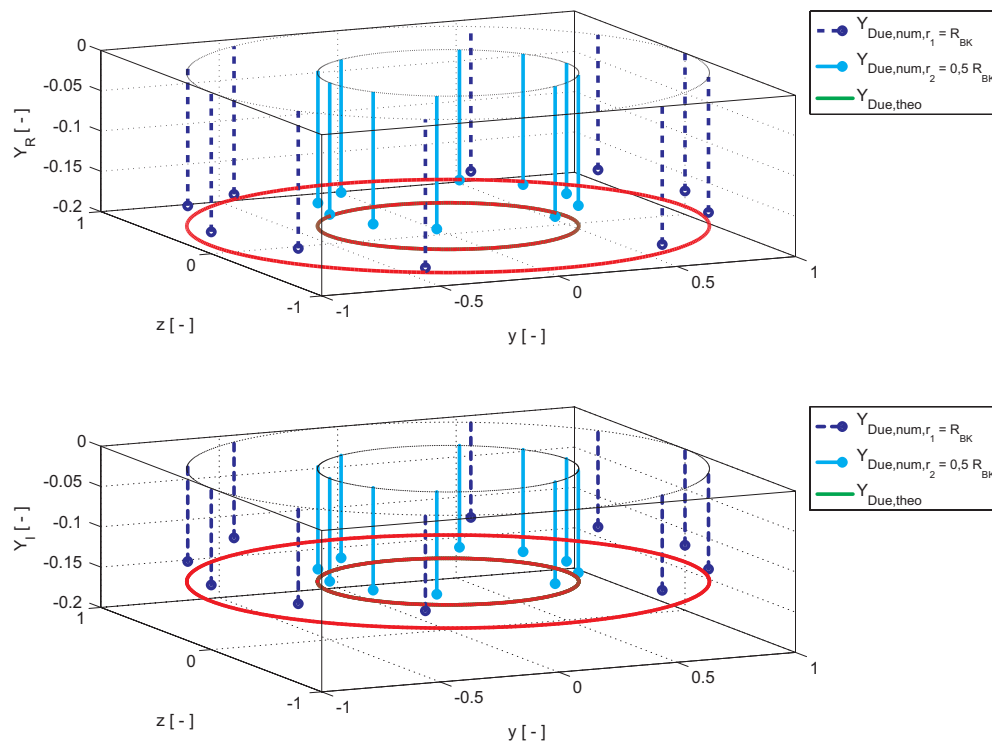


Abbildung 7.2: Vergleich numerisch (Punkte) und theoretisch (Linien) ermittelter Werte für die Düsenadmittanz der T1-Mode; oben Realteile; unten Imaginärteile

Abbildung 7.2 zeigt beispielhaft die Werte für Real- und Imaginärteil der Düsenadmittanz für die T1-Mode aufgetragen über die Position der Auswertepunkte. Die Werte der Düsenadmittanz sind durch die ausgefüllten Punkte dargestellt. Die Werte stammen aus der Rechnung für $n_{\text{sim}} = 2$ und $\tau = 1,56 \cdot 10^{-4}$ s. Die gezeigten Beobachtungspunkte liegen jeweils auf konzentrischen Kreisen in der Düsen Eintrittsebene mit dem Mittelpunkt auf der Symmetrieachse der Brennkammer und den Radien $r_1 = R_{\text{BK}}$ und $r_2 = 0,5 \cdot R_{\text{BK}}$. Die numerisch bestimmten Werte für die Düsenadmittanz werden in Abbildung 7.2 mit den Werten aus der Theorie nach Bell und Zinn [BZ73] verglichen. Die Theorie liefert die in durchgezogenen Linien dargestellten Werte, welche über den Querschnitt der Düsen Eintrittsebene konstant sind. Abbildung 7.2 zeigt grundsätzlich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen den theoretischen Werten und den numerischen Werten. Auch die Streuung der numerisch ermittelten Werte in Umfangsrichtung ist auf beiden Kreisen gering. Die Standardabweichung ist in beiden Fällen sowohl für Real- als auch Imaginärteil kleiner als 0,007. Daher wird im Folgenden stets mit umfangsgemittelten Werten argumentiert.

In Tabelle 7.2 sind in Umfangsrichtung gemittelte Werte für die Düsenadmittanz der T1-Mode jeweils für die Kreise mit $r_1 = R_{\text{BK}}$ und $r_2 = 0,5 \cdot R_{\text{BK}}$ und für verschiedene Abklingkoeffizienten zusammengestellt. Sie werden den Werten aus der Theorie nach Bell und Zinn [BZ73] verglichen. Die verwendeten Fälle mit Wärmefreisetzungsmodell wurden so gewählt, dass für diese mit Hilfe der Kurzzeit-FFT (siehe Abschnitt 6.3) eine eindeutige Abschätzung des Auf- bzw. Abklingkoeffizienten möglich ist. Bei den Fällen ohne Flamme wurde die T1-Mode über eine periodische Volumenquelle, wie am Anfang dieses Abschnittes erklärt, künstlich erzeugt.

Die Abweichungen der dargestellten umfangsgemittelten Werte von den theoretischen Werten beträgt auf dem äußeren Kreis mit $r_1 = R_{\text{BK}}$ im Realteil maximal 13%, im Imaginärteil zwischen 9 % und 38%. Auf dem inneren Kreis weicht der Realteil um maximal 13 % von den theoretischen Werten ab, der Imaginärteil um maximal 32%. Die Werte für die Admittanz aus der Numerik sind grundsätzlich etwas größer (und betragsmäßig kleiner) als diejenigen aus der Theorie. Damit ergibt die Numerik leicht größere Düsenverluste als die

Fall	α	$Y_{\text{Due,theo}}$	$Y_{\text{Due,num},r_1=R_{\text{BK}}}$	$Y_{\text{Due,num},r_2=0,5R_{\text{BK}}}$
$n_{\text{sim}} = 3$ und $\tau = 1,56 \cdot 10^{-4}$ s	536 1/s	-0,15 -0,16 i	-0,14 -0,124 i	-0,13-0,13 i
$n_{\text{sim}} = 2$ und $\tau = 1,56 \cdot 10^{-4}$ s	304 1/s	-0,18-0,148 i	-0,17 -0,12 i	-0,16 -0,127 i
$n_{\text{sim}} = 2$ und $\tau = 1,038 \cdot 10^{-4}$ s	179 1/s	-0,19-0,14 i	-0,185 -0,086 i	-0,174 -0,095 i
ohne Flamme, neutral	0 1/s	-0,22 -0,13 i	-0,20 -0,103 i	-0,19-0,11 i
ohne Flamme	-187 1/s	-0,24-0,13 i	-0,23 -0,11 i	-0,22 -0,12 i

Tabelle 7.2: Düsenadmittanzen: Vergleich der Admittanzen aus der numerischen Simulation mit den theoretischen nach Bell und Zinn [BZ73] für verschiedene Abklingkoeffizienten α

theoretische Vorhersage. Mögliche Ursache hierfür ist die Verwendung unterschiedlicher Gleichungssätze bei Ableitung der Theorie und bei den numerischen Berechnungen. Die Simulationen werden mit den APEs durchgeführt, wohingegen der Zinn-Theorie die LEEs für isentrope Störungsausbreitung zugrunde liegen. Wie in Kapitel 4.1.2 diskutiert, sollten die Unterschiede zwischen diesen beiden Gleichungssätzen für die vorliegende Grundströmung jedoch gering ausfallen.

Auffällig sind außerdem Unterschiede zwischen den numerischen Werten auf dem inneren und dem äußeren Kreis. Diese sind vermutlich Effekten durch das zweidimensionale Verhalten der mittleren Strömung zuzuschreiben. Im Gegensatz zur Theorie, die eine eindimensionale Grundströmung voraussetzt, kommt bei den numerisch berechneten Werten eine zweidimensionale Grundströmung zum Einsatz. Der Außenbereich, wo die Stromlinien nicht parallel zur Düsenachse sind, liefert andere Werte der Düsenadmittanz als der Bereich mit nahezu zur Achse parallelen Stromlinien.

Abgesehen von diesen geringen Abweichungen ist die Übereinstimmung zwischen den umfangsgemittelten Werten aus der Numerik und den Werten aus der Theorie nach Bell und Zinn sehr hoch.

Sowohl der Real- als auch der Imaginärteil der Düsenadmittanz sind eine Funktion des Abklingkoeffizienten α [BZ73]. Diese Eigenschaft der Düsenadmittanz wird auch von Tabelle 7.2 verdeutlicht: Je kleinere Werte α annimmt

umso kleiner wird der Realteil der Düsenadmittanz. Gleichzeitig steigt der Wert des Imaginärteils an. Der absinkende Realteil führt bei gleichen Stoff- und Strömungseigenschaften zu einem größeren akustischen Fluss über die Düseneintrittsebene in die Brennkammer hinein. Dies kann aus dem ersten Term in Gleichung 4.76 $\frac{1}{2} |\hat{p}|^2 \Re(Y)$ abgelesen werden. Damit wirkt die Düse dem Abklingen der Schwingung in der Brennkammer entgegen. Umgekehrt bremst das Ansteigen des Realteils mit steigender Amplitude das Aufklingen der Instabilität. Diese Abhängigkeit der Düsenadmittanz vom Abklingkoeffizienten α wird auch von den aus der Numerik extrahierten Werten wiedergegeben.

7.2 Düsenabklingkoeffizienten

Unter der Voraussetzung, dass keine Flüsse von akustischer Energie über andere Grenzen des Systems vorhanden sind, bietet die Bestimmung eines Düsenabklingkoeffizienten $\alpha_{\text{Düe}}$ eine weitere Möglichkeit zur Charakterisierung des Düsenverhaltens. Dieser gibt im Gegensatz zur Düsenadmittanz $Y_{\text{Düe}}$ auch durch konvektive Prozesse verursachte akustische Verluste wieder. Das folgende Kapitel beschreibt die numerische Berechnung eines Düsenabklingkoeffizienten und vergleicht diesen Wert mit einer Abschätzung über die akustische Energiebilanz der Brennkammer. Analoge Abschätzungen wurden für longitudinale Moden von Zinn [Zin72] oder Lecourt [LF96] veröffentlicht.

7.2.1 Numerische Berechnung des Düsenabklingkoeffizienten

Zur numerischen Berechnung des Düsenabklingkoeffizienten wird ein Fall ohne Verbrennungsmodell untersucht. Die T1-Mode wird künstlich, wie in Abschnitt 7.1.2 erklärt, über eine periodische Volumenquelle erzeugt. Dazu erfolgt die Anregung mit der Frequenz der T1-Mode. Dies stellt sicher, dass hauptsächlich eine Schwingungsmode, nämlich die T1-Mode, in der Brennkammer vorhanden ist. Anschließend wird das zeitliche Abklingen der Schwingung in der Brennkammer ohne Anregung beobachtet. Ein Beispiel

für das abklingende Signal (gerechnet auf Gitter 1) ist in Abbildung 7.3 dargestellt. Zur Extraktion des Düsenabklingkoeffizienten wird über die Hilbert-Transformation die Einhüllende des Signals bestimmt, welche wiederum über eine Exponentialfunktion angenähert werden kann. Die angenäherte Exponentialfunktion mit dem Abklingkoeffizienten $\alpha_{\text{Due,num}} = -187 \text{ 1/s}$ ist in Form einer gestrichelten Kurve in Abbildung 7.3 eingetragen.

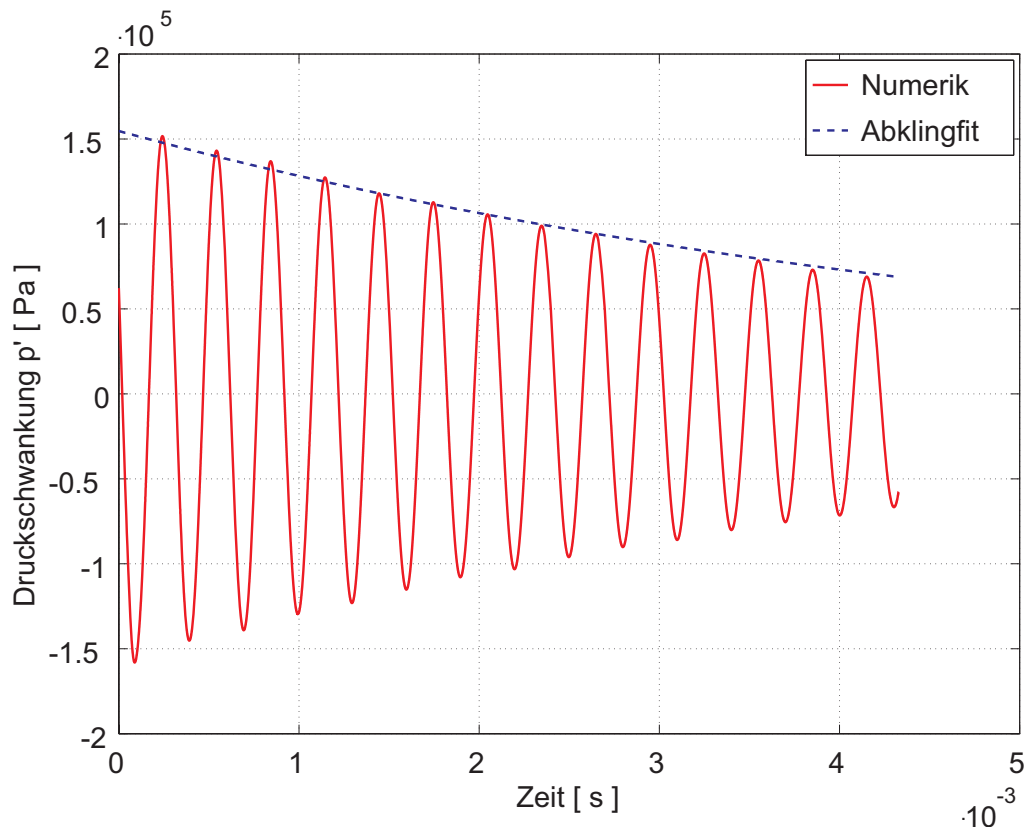


Abbildung 7.3: Abklingendes Signal der T1-Mode und Exponential-Fit der Einhüllenden mit $\alpha_{\text{Due,num}} = -187 \text{ 1/s}$

7.2.2 Analytische Abschätzung des Düsenabklingkoeffizienten

Der Düsenabklingkoeffizient α_{Due} lässt sich mit Hilfe einer Bilanzierung der akustischen Energie in der Brennkammer abschätzen. Nach Cantrell und Hart [CH64] besteht die folgende Beziehung zwischen dem Abklingkoeffizienten α , der gemittelten akustischen Energie $\langle \mathcal{E} \rangle$ im Volumen und dem gemittelten

akustischen Fluss über die Berandungen des Systems $\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \rangle$.

$$\alpha = -\frac{1}{2} \frac{\langle \mathbf{n} \cdot \mathbf{I} \rangle}{\langle \mathcal{E} \rangle} \quad (7.1)$$

Gleichung 7.1 wird nun im Folgenden für zeitlich harmonische Signale der Form $p' = \hat{p}(\mathbf{x}) \cdot \exp(i\omega t)$ ausgewertet. Zur Bestimmung der räumlichen Verteilung der Amplituden wird die Brennkammer als zylindrische Geometrie genähert, welche an den Wänden das akustisch vollreflektierende Verhalten einer festen Wand aufweist. Damit geht in diese Modellierung die Annahme ein, dass die Düsenadmittanz einen Wert nahe dem Wert Null annimmt. Dies stellt für die kleinen Werte der Düsenadmittanz der T1-Mode eine vertretbare Näherung dar. In diesem Zylinder besitzt die Druckschwankung für die erste transversale Mode die Form

$$p'(r, \theta) = J_1\left(\kappa_{10} \frac{r}{R_{BK}}\right) \cos(\theta). \quad (7.2)$$

Die Ausdrücke für die Geschwindigkeitsschwankung u' in axiale Richtung, v' in radiale Richtung und w' in Umfangsrichtung lassen sich mit Hilfe der linearisierten Impulsgleichung in Zylinderkoordinaten

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial x} \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p'}{\partial r} \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial w'}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial \theta} \quad (7.5)$$

bestimmen. Gleichungen 7.3 - 7.5 gelten für ein ruhendes Medium. Mit Hilfe dieser Ausdrücke für die akustischen Schwankungsgrößen kann nun die akustische Energie in einer zylindrischen Brennkammer berechnet werden.

Für die lokale akustische Energie in einem ruhenden Medium gilt nach Tabelle 4.2

$$E = \frac{p'^2}{2\bar{a}^2\rho} + \frac{\bar{\rho}\mathbf{u}'^2}{2}. \quad (7.6)$$

Zur Bestimmung von $\langle \mathcal{E} \rangle$ wird E über das Volumen des Zylinders integriert

$$\mathcal{E} = \int_0^{L_{BK}} \int_0^{R_{BK}} \int_0^{2\pi} E dx dr d\theta \quad (7.7)$$

und entsprechend Gleichung 4.73 zeitlich gemittelt.

Für den zeitlich gemittelten akustische Fluss über die Düsen Eintrittsebene gilt Gleichung 4.76. Hier wird nun im Gegensatz zur Bestimmung der akustischen Energie angenommen, dass diese Berandung mit der Geschwindigkeit \bar{u} überströmt wird.

Einsetzen der ermittelten Ausdrücke in Gleichung 7.1 für die Düsenadmittanz nach Bell und Zinn mit den Werten $Y_{R,Due,theo} = -0,22$ und $Y_{I,Due,theo} = -0,13$ für eine nicht-veränderliche Amplitude ergibt einen Abklingkoeffizienten $\alpha_{Due,theo} = -122$ 1/s. Dieser Wert liegt etwa 30% unter dem numerisch errechneten Wert. Jedoch weisen der analytische und der numerische Wert eine zufriedenstellende Übereinstimmung auf.

Grundsätzlich lässt sich feststellen, dass die Abschätzung und damit der Wert für den Abklingkoeffizienten sehr sensitiv auf kleine Änderungen in den verwendeten Werten der Realteil der Düsenadmittanz reagiert.

7.3 Experimentelle Validierung für longitudinale Moden

Zur experimentellen Validierung der entwickelten Zeitbereichsmethode werden Daten für Düsenadmittanzen aus Messungen von Bell [Bel72] herangezogen. Da für transversale Moden noch keine zuverlässigen Daten zur Verfügung stehen, erfolgt die Validierung des Verfahrens anhand longitudinaler Moden.

7.3.1 Beschreibung der experimentellen Daten

Die Arbeit von Bell [Bel72] beschäftigt sich mit der Messung von Düsenadmittanzen für L1- und L1T1-Moden mit Hilfe einer modifizierten Impedanz-Rohr-Methode. Der Versuchsaufbau für die klassische Impedanz-Rohr-Methode besteht aus einem glatten zylindrischen Rohr. An der einen Seite des Rohrs wird eine Schallquelle angebracht, an der anderen sitzt die Probe, deren Admittanz zu bestimmen ist. Dieser Versuchsaufbau ist in Abbildung 7.4 schematisch dargestellt. Zur Messung der Düsenadmittanzen wurde die klassische Impedanzrohrmethode um die Berücksichtigung dreidimensionaler Schwingungszustände und dem Vorhandensein einer mittleren Strömung erweitert.

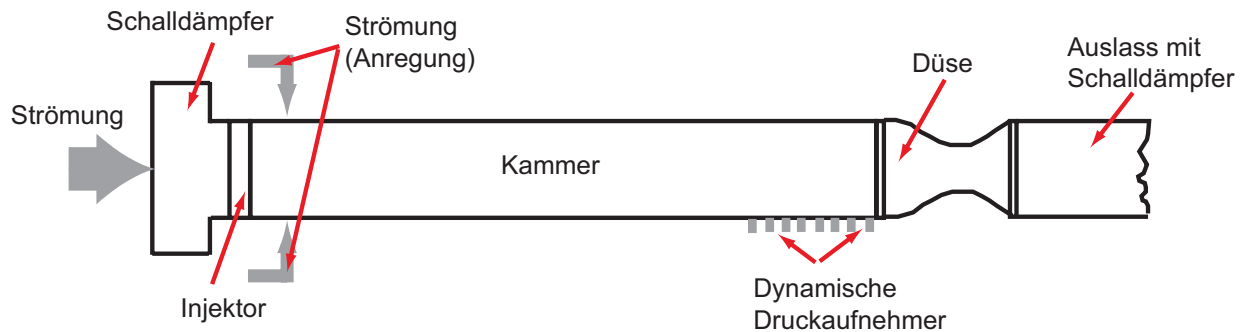


Abbildung 7.4: Schematische Skizze des Teststand zur Bestimmung der Düsenadmittanz nach Bell [Bel72]

Zur Bestimmung der Admittanz wird die Druckschwankung an zehn unterschiedlichen Positionen aufgezeichnet. Aus diesen Daten erfolgt dann die Berechnung der Düsenadmittanz. Für die detaillierten mathematischen Zusammenhänge wird an dieser Stelle auf die Arbeit von Bell [Bel72] verwiesen.

Die Versuche wurden mit Druckluft durchgeführt. Im Impedanzrohr herrscht eine Temperatur von ca. $T = 300$ K und ein statischer Druck von ca. $p = 1,8$ bar. Der Durchmesser des Impedanzrohrs beträgt $D = 12$ inch (≈ 30 cm).

Die Admittanz wurde für verschiedene Düsengeometrien mit unterschiedlichen Öffnungswinkeln $\theta_{\text{Düse}}$ und unterschiedlichen Einström-Mach-Zahlen M_{DE} in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz vermessen. Die Werte für Real- und Imaginärteil der Düsenadmittanz stehen in Form von Plots für diese ver-

schiedenen Düsengeometrien zur Verfügung.

Zur Validierung des Berechnungsverfahrens im Zeitbereich wurde eine Düse mit den in Tabelle 7.3 zusammengestellten Abmessungen gewählt. Die angegebenen Abmessungen ergeben eine nach dem in Abbildung 7.1 Verfahren parametrisierte Düsenkontur.

Größe		Wert
$\theta_{\text{Düse}}$	=	15°
R_{BK}	=	0,144 m
R_{KDE}	=	0,0634 m
R_{KDH}	=	0,0634 m
M_{DE}	=	0,08

Tabelle 7.3: Geometriedaten für die untersuchte Düse in der Validierungsrechnung

Die Düseneintritts-Mach-Zahl $M_{\text{DE}} = 0,08$ bedingt einen Düsenhalsradius $R_{\text{DH}} = 0,039$ m. Bei dieser Düsengeometrie sagen die experimentellen Daten eine starke Abhängigkeit des Real- und des Imaginärteils der Düsenadmittanz von der Schwingungsfrequenz voraus. Ziel der Validierungsrechnung ist es zu zeigen, dass das Berechnungsverfahren diese Abhängigkeit von der Schwingungsfrequenz richtig wiedergeben kann.

7.3.2 Validierung der berechneten Düsenadmittanzen

Die Düse mit den Abmessungen nach Tabelle 7.3 wurde entsprechend dem in Kapitel 5 beschriebenen Vorgehen modelliert. Die Erzeugung longitudinaler Schwingungszustände erfolgt über die Anregung in einem scheibenförmigen Abschnitt im zylindrischen Teil der Geometrie mit einer periodischen Volumenquelle. Die Anregungsfrequenz kann dabei entsprechend der in der Messung verwendeten Anregungsfrequenz variiert werden.

Die Admittanzen wurden nach dem in Abschnitt 7.1.2 beschriebenen Verfahren aus der numerischen Rechnung extrahiert. Auch hier erfolgte die Aus-

wertung auf zwei verschiedenen Kreisen mit $r_1 = R_{BK}$ bzw. $r_2 = 0,5 \cdot R_{BK}$. Auf den einzelnen Kreisen ist für die longitudinalen Moden die Admittanz jeweils konstant. Auf dem inneren Kreis werden grundsätzlich leicht höhere Werte erreicht als auf dem äußeren.

Abbildung 7.5 zeigt einen Vergleich zwischen den experimentell bestimmten Werten (Rauten) und den berechneten Werten für die Düsenadmittanz in Abhängigkeit der entdimensionierten Kreisfrequenz ω^* . Bei den durch die Sterne markierten Werten handelt es sich um die Ergebnisse aus der Simulation auf dem äußeren Kreis mit $r_1 = R_{BK}$. Die Kreise markieren die Ergebnisse auf dem inneren Kreis mit $r_2 = 0,5 \cdot R_{BK}$. Die durchgezogene Linie gibt die Werte aus der Theorie nach Bell und Zinn wieder.

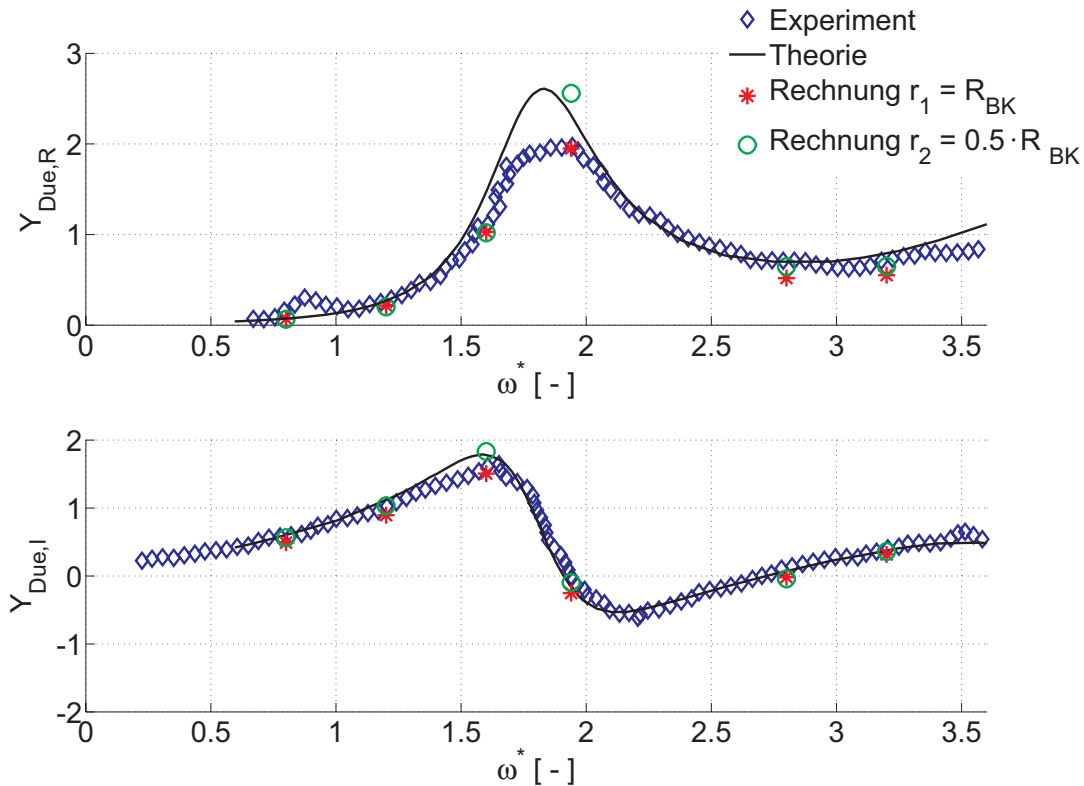


Abbildung 7.5: Real - und Imaginärteil der Düsenadmittanz für longitudinale Moden ($\theta_{DUE} = 15^\circ$, $M_{DE} = 0,08$) in Abhängigkeit der entdimensionierten Kreisfrequenz ω^* - Vergleich der experimentellen und numerischen Werte

Abbildung 7.5 zeigt deutlich, dass die numerisch ermittelten Werte sowohl in Real- als auch im Imaginärteil das gleiche frequenzabhängige Verhalten aufweisen wie die experimentellen Ergebnisse. Die absoluten Abweichungen der numerischen Ergebnisse von den experimentellen liegen auf dem Kreis $r_1 = R_{BK}$ bei maximal 11% im Realteil und maximal 23% im Imaginärteil. Auf dem Kreis $r_2 = 0,5 \cdot R_{BK}$ liegt für beide Anteile die maximale Abweichung bei ca. 40 %. Diese Abweichung wird durch die deutlich größeren Werte für die Admittanz bei der Frequenz $\omega^* = 1,95$ verschuldet. In dem Frequenzbereich um $\omega^* = 1,8$ liefert auch die Theorie nach Bell und Zinn deutlich größere Werte als die Messungen. Offensichtlich tritt in diesem Frequenzbereich eine Abweichung zwischen Theorie bzw. Numerik und dem Experiment auf. Aufgrund der starken Schwankungen der Admittanz bei kleinen Veränderungen in der Frequenz ist eine zuverlässige Auswertung der Daten in diesem Bereich grundsätzlich schwierig.

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass die Werte aus der numerischen Simulation auf beiden Kreisen bei fast allen untersuchten Frequenzen sehr gut mit den experimentell bestimmten Werten übereinstimmen.

7.4 Zusammenfassung Düsenverhalten

Das vorliegende Kapitel zeigt, dass es eine gute Übereinstimmung zwischen den Werten für die transversale Düsenadmittanz aus der Simulation und denjenigen nach der Theorie von Bell und Zinn [BZ73] gibt. Auch ein Vergleich der Düsenadmittanzen für longitudinale Moden mit experimentellen Daten von Bell [Bel72] liefert zufriedenstellende Ergebnisse. Mit Hilfe von Abklingkoeffizienten lassen sich die gesamten akustischen Verluste der Düse für Transversalmoden sowohl numerisch als auch über eine theoretische Abschätzung quantifizieren.

Die Untersuchungen bestätigen, dass die Düsenadmittanz und damit auch die akustischen Verluste der Düse eine starke Funktion des aktuellen Schwingungszustandes sind. Der Vorteil der vorgestellten Zeitbereichsmethode gegenüber den klassischen Verfahren besteht darin, dass die Zeitbereichssimu-

lationen automatisch für alle Schwingungszustände, d.h. Frequenzen, Moden und Abklingkoeffizienten, das richtige Düsenverhalten beinhalten. Für die vorgestellte Methode besteht daher kein Bedarf einer Vorabschätzung des zu erwartenden Schwingungszustandes.

8 Einfluss eines Absorberrings

Das vorliegende Kapitel beschreibt den Einfluss eines Absorberrings auf die Simulationsergebnisse und analysiert die zugehörigen Frequenzen und Schwingungsamplituden. Der verwendete Dämpfungerring besteht aus 40 gleichartigen $\lambda/4$ -Rohren, deren Resonanzfrequenz auf die T1-Mode abgestimmt ist. Der Ring selbst beginnt am Einspritzkopf und erstreckt sich in axialer Richtung über vier Zellen. Damit ergibt sich nahe des Einspritzkopfes ein ringförmiger Bereich, in dem die vollreflektierende harte Wand durch die in Abschnitt 5.4.4.2 beschriebene frequenzabhängige Randbedingung ersetzt wird. Dort erfolgt nun je nach Frequenz eine partielle Reflektion der akustischen Wellen. Die Randbedingung dämpft dabei insbesondere Frequenzen um die Eigenfrequenz der T1-Mode herum.

8.1 Einfluss auf die Eigenmoden

Um den Einfluss des Absorberrings auf die Eigenmoden zu testen, wird das Abklingen eines breitbandigen Pulses analog zum Vorgehen in den Studien zum Gittereinfluss durchgeführt. Eine diskrete Fourier-Transformation liefert das zu den Zeitsignalen gehörige Frequenzspektrum. Abbildung 8.1 vergleicht das Frequenzspektrum mit Absorberring (Sternchen) mit dem Frequenzspektrum ohne Absorberring (Rauten).

Im Frequenzbereich um die T1-Mode lässt sich ein deutlicher Einfluss des Absorberrings beobachten: Die Amplitude bei der ursprünglichen Frequenz der T1-Mode erscheint im Fall mit Absorber deutlich reduziert im Vergleich zum Fall ohne Absorber. Dafür tritt bei einer Frequenz etwas unterhalb der ursprünglichen Eigenfrequenz ein neuer Peak auf.

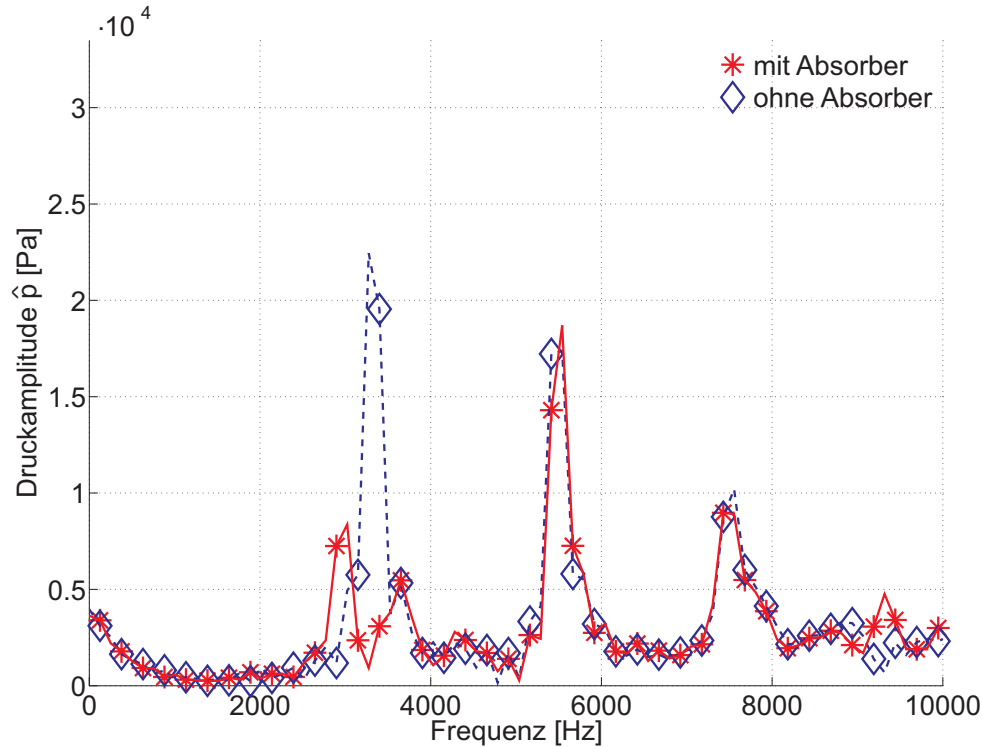


Abbildung 8.1: Vergleich des Frequenzspektrums mit Absorberring (Sternchen) und ohne Absorberring (Rauten) aus dem Abklingen einen breitbandigen Druckpulses

Das Erscheinen zusätzlicher Resonanzpeaks beim gezielten Dämpfen der ursprünglichen Resonanzfrequenz mit Resonatoren ist ein bekanntes Phänomen, das bereits von verschiedenen Autoren beobachtet werden konnten [CFF⁺04], [SD03]. Ursache hierfür ist das Schaffen zusätzlicher Freiheitsgrade des Systems, was eine Verschiebung der Eigenfrequenzen bzw. die Entstehung zusätzlicher benachbarter Eigenmoden zur Folge hat [CFF⁺04].

Wie in Abschnitt 5.4.4 diskutiert, dämpft das verwendete Absorbermodell ausschließlich Frequenzen um die Eigenfrequenz des Absorbers. Daher bleiben die Amplituden der restlichen Moden in Abbildung 8.1 weitgehend unbeeinflusst.

8.2 Einfluss auf die Schwingungsamplituden

8.2.1 Abklingkoeffizienten

Die Quantifizierung der Dämpfung der T1-Mode mit Düse und Absorbern erfolgt analog Abschnitt 7.2 über die Bestimmung eines Abklingkoeffizienten α . Dazu muss in der Raketenschubkammer eine Eigenschwingung bei der neuen Eigenfrequenz erzeugt werden. Es scheint jedoch schwierig, mit Absorberring eine saubere T1-Mode anzuregen. Unterschiedliche Punkte in der Geometrie weisen ein unterschiedliches Abklingverhalten auf und beinhalten offensichtlich Störeinflüsse. Das Beobachten des Abklingverhaltes an verschiedenen Punkten liefert einen mittleren Abklingkoeffizienten von ca. $\alpha_{\text{Abs,Due}} = -330$ 1/s. Dieser Abklingkoeffizient ist deutlich größer als der des Systems ohne Absorberring ($\alpha_{\text{Due}} = -187$ 1/s). Eine Trennung der Einflüsse von Düse und Absorberring auf den Abklingkoeffizienten ist jedoch so einfach nicht möglich: Da der Abklingkoeffizient ohne Absorber auch bei einer anderen Frequenz bestimmt wurde und das Düsenverhalten eine Funktion der Frequenz ist, gilt nicht der Zusammenhang

$$\alpha_{\text{Abs}} = \alpha_{\text{Abs,Due}} - \alpha_{\text{Due}}. \quad (8.1)$$

Der Abklingkoeffizienten $\alpha_{\text{Abs,Due}}$ ist vielmehr als Abklingkoeffizient des Gesamtsystems aus Brennkammer, Absorber und Düse zu verstehen. Trotzdem lässt der deutlich größere Abklingkoeffizient des Gesamtsystems ein stabileres Verhalten des Brennkammer mit schwankender Wärmefreisetzung erwarten.

8.2.2 Stabilitätsverhalten mit Wärmefreisetzung

Der Einfluss des Absorberrings auf Simulationen mit schwankender Wärmefreisetzung wurde für unterschiedliche Werte der Parameter des Crocco-Modells n und τ ermittelt. Abbildung 8.2 zeigt beispielhaft die Veränderung des Frequenzspektrums für den Fall $n_{\text{sim}} = 2$, $\tau = 1,56 \cdot 10^{-4}$ s bei Verwendung des Absorberrings.

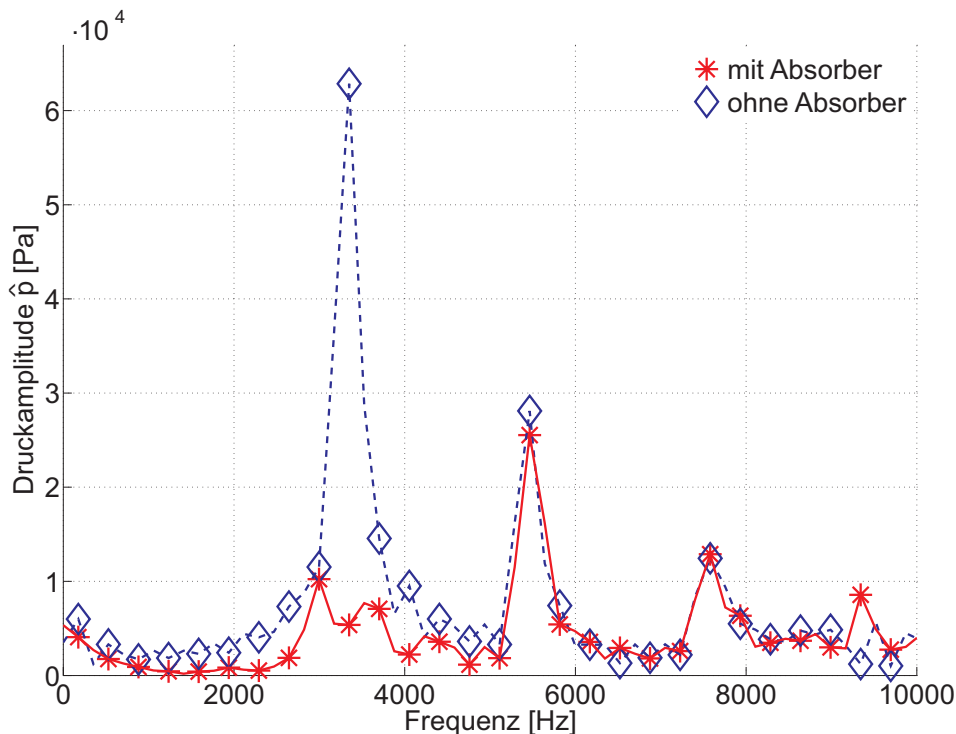


Abbildung 8.2: Frequenzspektrum für $n_{\text{sim}} = 2$, $\tau = 1,56 \cdot 10^{-4}$ s mit Absorberring (Sternchen) und ohne Absorberring (Rauten)

Das Spektrum zeigt deutlich, dass die Verwendung des Absorberrings die Amplitude des T1-Modus reduziert. In der Nähe der ursprünglichen Frequenz der T1-Mode entstehen wieder zwei Maxima. Das Stabilitätsverhalten dieses Falles kann mit Hilfe der zeitlichen Entwicklung der akustischen Energie (siehe Abschnitt 6.4) beurteilt werden. Diese Entwicklung ist in Abbildung 8.3 dargestellt: die rechte Seite von Abbildung 8.3 zeigt den zeitlichen Verlauf der akustischen Energie für den in Abbildung 8.2 illustrierten Fall: ohne Absorberring steigt die akustische Energie im System mit der Zeit an, mit Absorberring sinkt sie ab. Dies bedeutet, dass der Absorberring für diesen Fall das Anwachsen der T1-Mode unterdrücken kann.

Die linke Seite von Abbildung 8.3 zeigt das Verhalten der akustischen Energie als Funktion der Zeit für das Parameterpaar $n_{\text{sim}} = 2$, $\tau = 1,04 \cdot 10^{-4}$ s. In diesem Fall wächst ohne Absorberring sowohl die T1-Mode als auch die T2-Mode an (siehe Abschnitt 6.3). Auch mit Absorberring wird kein stabiles Ver-

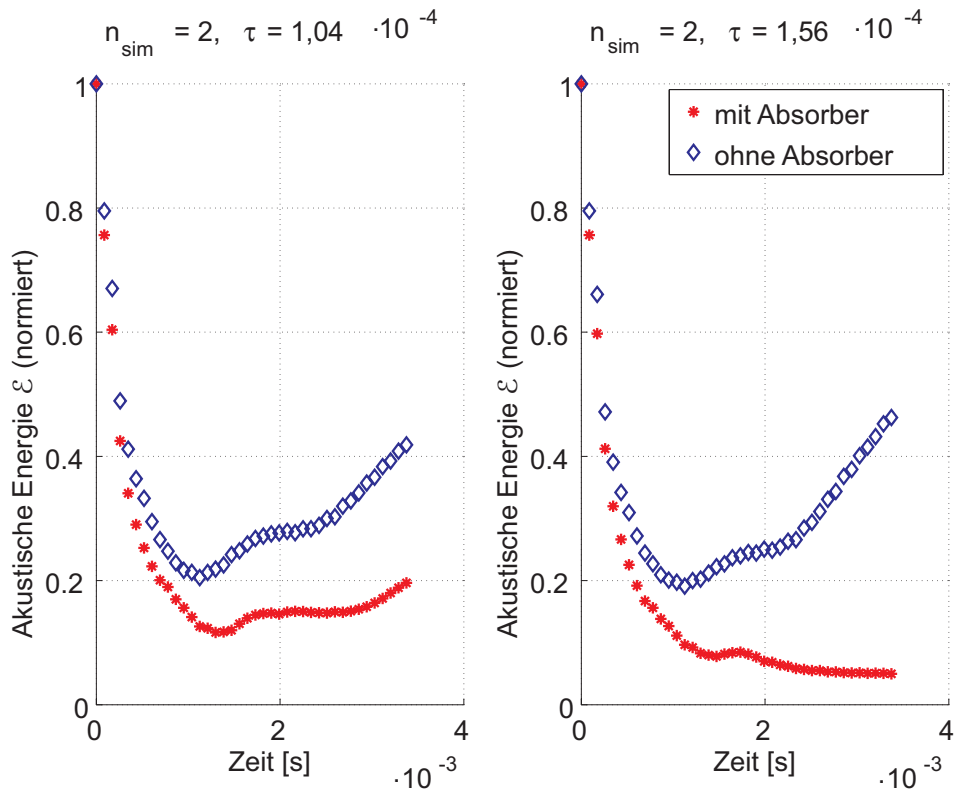


Abbildung 8.3: Entwicklung der akustischen Energie in der Brennkammer mit und ohne Absorberring für Rechnungen mit thermoakustischer Quelle

halten erzielt: Dieser kann nur die instabile T1-Mode, jedoch nicht die instabile T2-Mode unterdrücken, weil seine Eigenfrequenz auf die T1-Mode abgestimmt ist. Zur Unterdrückung der T1-Mode und T2-Mode müsste ein Dämpferring verwendet werden, der Absorber unterschiedlicher Längen enthält. Diese müssten jeweils auf die Frequenzen der T1- und der T2-Mode abgestimmt sein.

8.3 Schlussfolgerungen Dämpferring

Kapitel 8 zeigt, dass ein auf die Frequenz der T1-Mode abgestimmter Absorberring das Potential hat, die Entstehung selbsterregter Verbrennungsschwingungen in Raketenschubkammern zu unterdrücken. Das Kapitel zeigt jedoch

auch den bekannten Effekt, dass das Anbringen des Dämpferrings das System verstimmt, was in ungünstigen Fällen zur Entstehung von Instabilitäten bei benachbarten Frequenzen führen könnte. Vorteil des Berechnungsverfahrens im Zeitbereich ist auch hier, dass der Einfluss der Düse automatisch bei der veränderten Eigenfrequenz richtig berücksichtigt wird.

Grundsätzlich problematisch bleibt die Auslegung der Resonatoren in der Realität: wie in Abschnitt 5.4.4 erläutert, erfordert die Bestimmung der Resonanzfrequenz der Absorber die genaue Kenntnis der Temperaturverteilung bei jedem Betriebspunkt. Ohne diese Kenntnis ist es nicht fehlerfrei möglich, einen Absorberring, wie in dieser Arbeit geschehen, genau auf die Schwingungsfrequenz einer Eigenmode der Brennkammer auszulegen.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Die Vorhersage des Auftretens von Verbrennungsschwingungen in Raketenschubkammern stellt nach wie vor ein unzulänglich gelöstes Problem dar. Die bekannten Berechnungsverfahren leiden unter den folgenden Einschränkungen:

- Viele Verfahren erfordern eine starke mathematische Vereinfachung der Grundgleichungen und der den Instabilitäten zugrunde liegenden physikalischen Effekte. Sie beinhalten daher einen hohen Modellierungsgrad. Dies führt zu einer eingeschränkten Wiedergabe der Realität.
- Verfahren, die die Navier-Stokes-Gleichungen vollständig lösen sind numerisch sehr aufwändig. Im Allgemeinen beinhalten sie trotzdem eine Vielzahl von Modellen für die Turbulenz oder das Flammenverhalten.
- Viele Mechanismen bei der Entstehung von Verbrennungsschwingungen sind noch nicht vollständig verstanden. Die vorhandenen Modelle basieren daher oft auf stark vereinfachenden Annahmen.
- Verfahren, die Nicht-Linearitäten einschließen, liefern zum Teil widersprüchliche Ergebnisse.

Die vorliegende Arbeit legt den Grundstein für ein Verfahren, das Teile der oben beschriebenen Probleme löst. Dieses Verfahren basiert auf der Lösung linearisierter Grundgleichungen für dreidimensionale Geometrien im Zeitbereich. Der Einfluss der schwankenden Wärmefreisetzung wird dabei mit Hilfe eines Quellterms modelliert, was eine Rückkopplung zwischen Akustik und Flammenverhalten ermöglicht. Als Wärmefreisetzungsmodell kommt das bekannte Crocco-Modell zum Einsatz. Die gewählten Grundgleichungen, die sog. Acoustic Perturbation Equations, beschreiben die Wellenausbreitung

in nicht-gleichförmigen Strömungen. Die Berechnung der Wellenausbreitung erfolgt in der Brennkammer und im konvergenten Düsenteil, was die Verwendung eines Modells für die Raketendüse überflüssig macht. Des Weiteren ermöglicht das entwickelte Modell die Einbindung von Dämpfern über sog. „Time-Domain-Impedance“ Randbedingungen.

Die vorliegende Arbeit zeigt, dass das Verfahren

- die Berechnung selbsterregter Verbrennungsschwingungen im Zeitbereich ermöglicht. Die auftretenden Schwingungsmoden können mit Hilfe des Rayleigh-Kriteriums erklärt werden,
- das Düsenverhalten für die verschiedenen Schwingungssituationen automatisch richtig wiedergibt. Dies wird für transversale Moden mit der Theorie nach Bell und Zinn und für longitudinale Moden mit experimentellen Daten von Bell verifiziert,
- dazu geeignet ist, die experimentellen Werte für die Düsenadmittanz von Bell für longitudinale Moden wiederzugeben und
- die Möglichkeit bietet, über frequenzabhängige Absorber-Randbedingungen die auftretenden Schwingungsmoden gezielt zu dämpfen.

Das entwickelte Verfahren besitzt damit die folgenden Vorteile gegenüber den bekannten Methoden aus der Literatur:

- Es sind keine Annahmen über den zu erwartenden Schwingungszustand, d.h. Modenformen, Amplituden oder Wachstumsraten, notwendig. Diese ist ein Ergebnis der Simulation. Damit beinhaltet das Verfahren insbesondere auch keine Annahmen über die Orthogonalität der Eigenmoden.
- Das Reflexionsverhalten der Düse ist für jede auftretende Frequenz und jeden Schwingungszustand automatisch in der Simulation enthalten.

Auch hierzu sind keine Annahmen notwendig. Dies vermeidet aufwändige Vorabbestimmungen des zu erwartenden Schwingungszustandes und schaltet damit eine mögliche Fehlerquelle aus. Dies erhöht die Zuverlässigkeit der Vorhersagen.

- Die Lösung der linearisierten Grundgleichungen ist mit einem deutlich geringerem numerischen Aufwand verbunden, als die Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen.
- Das Verfahren bietet die Möglichkeit, nicht-lineare Flammenmodelle und/ oder nicht-lineare Dämpfermodelle einzubinden. Damit ist prinzipiell auch die Simulation von Grenzyklen und Triggering möglich.

Damit stehen nun die Grundlagen für ein neuartiges Simulationsverfahren von Verbrennungsschwingungen für Flüssigkeitsrakentriebwerke im Zeitbereich zur Verfügung. Um das Simulations-Verfahren zu einer Methode auszubauen, welche die gesamte Bilanzierung akustischer Energie für reale Situationen im Triebwerk richtig wiedergeben kann, werden an dieser Stelle aufbauend auf die vorliegende Arbeit die folgenden Schritte empfohlen:

- Verwendung eines nicht-linearen Flammenmodells, das die physikalischen Mechanismen detaillierter beschreibt, als das bisher verwendete. Dabei sollte auch eine mögliche Kopplung der Schwingungen mit dem Einspritzsystem, der sog. „Klystron Effekt“, berücksichtigt werden.
- Einbinden weiterer bedeutsamer Dämpfungsmechanismen wie dem sog. „Droplet-Drag“.
- Entwicklung einer Randbedingung am Einspritzkopf, die das tatsächliche Verhalten der Einspritzelemente wiedergibt.
- Übergang von den APEs zu den LEEs, um sämtliche Transfermechanismen zwischen Akustik und Wirbelstärke zu berücksichtigen.
- Verbesserung der Filter zur numerischen Stabilisierung der Lösung, um die numerische Dämpfung zu minimieren.

Die vorliegende Arbeit zeigt, wie mit Hilfe moderner numerischer Verfahren aus der Aeroakustik das Problem der Vorhersage von Verbrennungsinstabilitäten, das Entwickler schon seit 60 Jahren beschäftigt, neu angegangen werden kann. Sie verdeutlicht jedoch auch, dass die Qualität der numerischen Vorhersage stark von den Grenzen der numerischen Verfahren abhängt: Erstens müssen Fehler aus der Numerik, hier insbesondere die numerische Dämpfung, unbedingt reduziert werden. Zweitens wird die Implementierung beliebiger Effekte und Randbedingungen von den Stabilitätsgrenzen der numerischen Verfahren eingeschränkt. Zudem werden die Komplexität der physikalischen Zusammenhänge und das Fehlen zuverlässiger physikalischer Modelle die Entwickler auf diesem Gebiet noch viele Jahre beschäftigen.

Literaturverzeichnis

- [Ari01] ARIANESPACE: *Espace*. Newsletter Arianespace, Nr. 168, September 2001
- [Ast01] ASTRIUM: *AESTUS-Upper Stage Engine*. Infobroschüre, 2001
- [Bel72] BELL, W.A.: *Experimental Determination of Three-Dimensional Liquid Rocket Nozzle Admittances*, Georgia Institute of Technology, Atlanta, Diss., 1972
- [Ben05] BENOIT, Laurent: *Prédiction des instabilités thermoacoustiques dans les turbines à gaz*, Université Montpellier II, Diss., 2005
- [BLL84] BAUM, J.D. ; LEVINE, J.N. ; LOVINE, R.L.: Pulse Triggered Instability in Solid Rocket Motors. In: *AIAA Journal* 22(10) (1984), S. 1413–1419
- [BN05] BENOIT, L. ; NICLOUD, F.: Numerical Assessment of Thermo-Acoustic Instabilities in Gas Turbines. In: *International Journal for Numerical Methods in Fluids* 47 (2005), S. 849–855
- [BS07] BALASUBRAMANIAN, Koushik ; SUJITH, R. I.: Thermoacoustic Instability in a Rijke Tube: Non-Normality and Nonlinearity. In: *13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Rome, Italy, 2007*
- [BSN⁺04] BELLUCCI, Valter ; SCHUERMANS, Bruno ; NOWAK, Dariusz ; FLOHR, Peter ; PASCHEREIT, Christian O.: Thermoacoustic Modeling of a Gas Turbine Combustor Equipped with Acoustic Dampers. In: *ASME Turbo Expo 2004, Vienna, Austria, 2004*

- [BW04] BETHKE, Sven ; WEVER, Utz: *Azimuthale akustische Moden in Ringbrennkammern*. 9. Statusseminar der AG Turbo; Verbundprojekt für ein CO₂-armes Kraftwerk „500 MW auf einer Welle“, Dezember 2004. – Siemens AG Power Generation, Mühlheim
- [BZ73] BELL, W.A. ; ZINN, B.T.: *The Prediction of Three-Dimensional Liquid-Propellant Rocket Nozzle Admittances*. Georgia Institute of Technology, NASA CR-121129, 1973
- [Can75] CANDEL, S.M.: Acoustic Conservation Principles and an Application to Plane and Modal Propagation in Nozzles and Diffusers. In: *Journal of Sound and Vibration* 41(2) (1975), S. 207–232
- [CBS95] CULICK, F.E. ; BURNLEY, V. ; SWENSON, G.: Pulsed Instabilities in Solid-Propellant Rockets. In: *Journal of Propulsion and Power* 11 (1995), S. 657–665
- [CC56] CROCCO, Luigi ; CHENG, Sin-I: *Theory of Combustion Instability in Liquid Propellant Rocket Motors*. Butterworth Scientific Publications, 1956
- [CFF⁺04] CAMPOREALE, S.M. ; FORTE, A. ; FORTUNATO, B. ; MASTROVITO, M. ; FERRANTE, A.: Numerical Simulation of the Acoustic Pressure Field in an Annular Combustion Chamber with Helmholtz Resonators. In: *ASME Turbo Expo 2004, Vienna, 2004*
- [CH64] CANTRELL, R.H. ; HART, R.W.: Interaction between Sound and Flow in Acoustic Cavities: Mass, Momentum, and Energy considerations. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 36(4) (1964), S. 697–706
- [CK57] CHU, Boa-Teh ; KOVÁSZNAY, Leslie S.: Non-Linear Interactions in a Viscous Heat-Conducting Compressible Gas. In: *Journal of Fluid Mechanics* 3 (1957), S. 494–514
- [Cro65] CROCCO, L.: Theoretical Studies on Liquid-Propellant Rocket Instability. In: *Tenth Symposium (International) on Combustion*, 1965, S. 1101–1128

- [CS67] CROCCO, L. ; SIRIGNANO, W. A.: Behaviour of Supercritical Nozzles under Three-Dimensional Oscillatory Conditions / North Atlantic Treaty Organisation. 1967 (AGARDograph 117). – Forschungsbericht
- [Cul75] CULICK, F.E.C.: Stability of Three-Dimensional Motions in a Combustion Chamber. In: *Combustion Science and Technology* 10 (1975), S. 109–124
- [Cul88] CULICK, F.E.C.: Combustion Instabilities in Liquid-Fueled Propulsion Systems - an Overview. In: *Combustion instabilities in liquid-fuelled propulsion systems*, 1988 (AGARD-CP 450), S. 1–2 – 1–73
- [Cul89] CULICK, F.E.C.: Combustion Instabilities in Propulsion Systems. In: *Combustion Instabilities Driven by Thermo-Chemical Acoustic Sources* Bd. NCA-Vol.4, HTD-Vol. 128, The American Society of Mechanical Engineering, 1989, S. 33–52
- [Cul94] CULICK, F.E.C.: Some Recent Results for Nonlinear Acoustics in Combustion Chambers. In: *AIAA Journal* 32(1) (1994), S. 146–169
- [CY95] CULICK, F. E. ; YANG, V.: Overview of Combustion Instabilities in Liquid-Propellant Rocket Engines. In: YANG, Vigor (Hrsg.) ; ANDERSON, William E. (Hrsg.): *Liquid Rocket Engine Combustion Instability* Bd. 169. AIAA, 1995, Kapitel 1
- [DBG⁺07] DELFS, Jan ; BAUER, M. ; GROGGER, H. ; LUMMER, M. ; LAUKE, Th.: *Numerical Simulation of Aerodynamic Noise with DLR's Aeroacoustic Code PIANO*. Duetsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik, Abteilung Technische Akustik, Braunschweig, February 2007
- [DBO05] DE BENEDICTIS, Massimiliano ; ORDONNEAU, Gerard: Injection Coupled High Frequency Instabilities - Study of Combustion Chamber / Feed System Coupling. In: *Launcher Propulsion Symposium, Munich, Germany, 2005*

- [DGM⁺05] DUWIG, Christophe ; GHERMAN, Bogdan ; MIHAESCU, Mihai ; SALEWSKI, Mirko ; FUCHS, Laszlo: Numerical Study of Thermo-Acoustic Waves Generation by a Swirling Flame Using a New Approach Based on Large Eddy Simulation. In: *ASME Turbo Expo 2005, Reno-Tahoe, Nevada, USA, 2005*
- [DM74] DORDAIN, Jean-Jaques ; MARCHETTI, Michel: Matrices de transfert de systèmes hydrauliques. Etude théorique et expérimentale. In: *La Recherche Aérospatiale* 1 (1974), S. 23–35
- [Eck05] ECKSTEIN, Johannes: *On the Mechanisms of Combustion Driven Low-Frequency Oscillations in Aero-Engines*, Technische Universität München, Diss., 2005
- [EFHS04] ECKSTEIN, J. ; FREITAG, E. ; HIRSCH, C. ; SATTELMAYER, T.: Experimental Study on the Role of Entropy Waves in Low-Frequency Oscillations for a Diffusion Burner. In: *ASME Turbo Expo 2004, Vienna, Austria, 2004*
- [EMS02a] EWERT, R. ; MEINKE, M. ; SCHRÖDER, W.: Computation of Sound Radiation from a Trailing Edge Applying Acoustic Perturbation Equations. In: *3rd Swing Aeroacoustics Workshop, Stuttgart, Germany, 2002*. – Aerodynamisches Institut, RWTH Aachen
- [EMS02b] EWERT, Roland ; MEINKE, Matthias ; SCHRÖDER, Wolfgang: Computation of Trailing Edge Noise via LES and Acoustic Perturbation Equations. In: *8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit, Breckenridge, Colorado, 2002*
- [EP02] EVESQUE, Stéphanie ; POLIFKE, Wolfgang: Low-Order Acoustic Modelling for Annular Combustors: Validation and Inclusion of Modal Coupling. In: *ASME Turbo Expo 2002, Amsterdam, The Netherlands, 2002*
- [ES03] EWERT, R. ; SCHRÖDER, W.: Acoustic Perturbation Equations Based on Flow Decomposition via Source Filtering. In: *Journal of Computational Physics* 188 (2003), S. 365–398

- [FJ04] FUNG, K.-Y. ; JU, Hongbin: Time-Domain Impedance Boundary Conditions for Computational Acoustics and Aeroacoustics. In: *International Journal of Computational Fluid Dynamics* 18(6) (2004), August, S. 503–511
- [FJT00] FUNG, K.-Y. ; JU, Hongbin ; TALLAPRAGADA, BhanuPrakash: Impedance and Its Time-Domain Extensions. In: *AIAA Journal* 38(8) (2000), S. 30–38
- [Flu05] FLUENT INC. (Hrsg.): *Fluent 6.2 Documentation*. 10 Cavendish Court, Lebanon, NH 03766, U.S.A: Fluent Inc., 2005
- [FSB05] FASSL, F.A. ; SPAGNA, P. ; BORONINE, E.: Engineering Method for High Frequency Stability Investigations of Rocket Engines. In: *6th International Symposium on Launcher Technologies, Munich, Germany, 2005*
- [GFEP03] GENTEMANN, A. ; FISCHER, A. ; EVESQUE, S. ; POLIFKE, W.: Acoustic Transfer Matrix Reconstruction and Analysis for Ducts with Sudden Change of Area. In: *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit, South Carolina, USA, 2003*
- [GM94] GORDON, Sanford ; MCBRIDE, Bonnie J.: *Computer Program for Calculation of Complex Chemical Equilibrium Compositions and Applications, I. Analysis*, 1994. (NASA-RP-1311)
- [GM96] GORDON, Sanford ; MCBRIDE, Bonnie J.: *Computer Program for Calculation of Complex Chemical Equilibrium Compositions and Applications, II. Users Manual and Program Description*, 1996. (NASA-RP-1311)
- [GVM94] GREYDA, Jeffrey M. ; VENKATESWARAN, Sankaran ; MERKLE, Charles L.: Analyses of Liquid Rocket Instabilities Using a Computational Testbed. In: *Twenty-Fifth Symposium (International) on Combustion*, 1994, S. 1619–1625
- [GVM95] GREYDA, J.M. ; VENKATESWARAN, S. ; MERKLE, C.L.: Application of Computational Fluid Dynamics Techniques to Engine Instability

- Studies. In: YANG, Vigor (Hrsg.) ; ANDERSON, William E. (Hrsg.): *Liquid Rocket Engine Combustion Instability* Bd. 169. AIAA, 1995, Kapitel 15
- [HA74] HOLSTER, Jesse L. ; ASTLEFORD, J. William: Analytical Model for Liquid Rocket Propellant Feedline Dynamics. In: *Journal of Spacecraft and Rockets* 11(3) (1974), S. 180–187
- [HD95] HABIBALLAH, M. ; DUBOIS, I.: Numerical Analysis of Engine Instability. In: YANG, Vigor (Hrsg.) ; ANDERSON, William E. (Hrsg.): *Liquid Rocket Engine Combustion Instability* Bd. 169. AIAA, 1995, Kapitel 18
- [HHM96] HU, F.Q. ; HUSSAINI, M.Y. ; MANTHEY, J.L.: Low-Dissipation and Low-Dispersion Runge-Kutta Schemes for Computational Acoustics. In: *Journal of Computational Physics* 124 (1996), S. 177–191
- [HLP91] HABIBALLAH, M. ; LOURME, D. ; PIT, F.: PHEDRE-Numerical Model for Combustion Stability Studies Applied to the Ariane Viking Engine. In: *Journal of Propulsion and Power* 7(3) (1991), S. 322–329
- [HR72] HARRJE, David T. ; REARDON, Frederick H.: *Liquid Propellant Rocket Combustion Instabilities*. 1972 (NASA SP-194)
- [HSZ95] HURLBERT, Eric A. ; SUN, Jing L. ; ZHANG, Baojiong: Instability Phenomena in Earth Storable Bipropellant Rocket Engines. In: YANG, Vigor (Hrsg.) ; ANDERSON, William (Hrsg.): *Liquid Rocket Engine Combustion Instability* Bd. 169. AIAA, 1995, Kapitel 5
- [II67] INGARD, Uno ; ISING, Hartmut: Acoustic Nonlinearity of an Orifice. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 42(1) (1967), S. 6–17
- [IWBL06] IBRAHIM, Z.M. ; WILLIAMS, F.A. ; BUCKLEY, S.G. ; LEE, J.C.Y.: An Acoustic Approach to Modeling Combustion Oscillations. In: *ASME Turbo Expo 2006, Barcelona, Spain, 2006*

- [JF01] JU, Hongbin ; FUNG, K.-Y.: Time-Domain Impedance Boundary Conditions with Mean Flow Effects. In: *AIAA Journal* 39(9) (2001), September, S. 1683–1690
- [KF62] KINGSLER, Lawrence ; FREY, Austin: *Fundamentals of Acoustics*. John Wiley & Sons, Inc. New York, London, 1962
- [Le192] LELE, Sanjiva K.: Compact Finite Difference Schemes with Spectral-Like Resolution. In: *Journal of Computational Physics* 103 (1992), S. 16–42
- [LF96] LECOURT, R. ; FOUCAUD, R.: Acoustic Sensitivity Measurement of Injectors in a Small Liquid Propellant Rocket Engine. In: KUO, Kenneth (Hrsg.): *Recent Advances in Spray Combustion*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1996 (Chapter 15), S. 369–392
- [LKP⁺05] LEPERS, Joachim ; KREBS, Werner ; PRADE, Bernd ; FLOHR, Patrick ; POLLAROLLO, Giacomo ; ANTONIO, Ferrante: Investigation of Thermoacoustic Stability Limits of an Annular Gas Turbine Combustor Test-Rig with and without Helmholtz-Resonators. In: *ASME Turbo Expo 2005, Reno-Tahoe, Nevada, USA, 2005*
- [LPPP95] LAUDIEN, E. ; PONGRATZ, R. ; PIERRO, R. ; PRECLIK, D.: Experimental Procedures Aiding the Design of Acoustic Cavities. In: *Liquid Rocket Engine Combustion Instability* Bd. 169. AIAA, 1995, Kapitel 14
- [LRT06] LI, X.D. ; RICHTER, C. ; THIELE, F.: Time-Domain Impedance Boundary Conditions for Surfaces with Subsonic Mean Flows. In: *The Journal of the Acoustical Society of America* 119(5) (2006), S. 2665–2676
- [LZ73] LORES, Manuel. E. ; ZINN, Benn T.: Nonlinear Longitudinal Combustion Instability in Rocket Motors. In: *Combustion Science and Technology* 7 (1973), S. 245–256

- [MC77] MARBLE, F.E. ; CANDEL, S.M.: Acoustic Disturbance from Gas Non-Uniformities Convected through a Nozzle. In: *Journal of Sound and Vibration* 55(2) (1977), S. 225–243
- [McC64] MCCORMACK, P.D.: A Driving Mechanism for High Frequency Combustion Instability in Liquid Fuel Rocket Engines. In: *Journal of the Royal Aeronautical Society* 68 (1964), S. 633–637
- [McI87] MCINTOSH, A.: Combustion-Acoustic Interaction o a Flat Flame Burner System Enclosed within an Open Tube. In: *Combustion Science an Technology* 54 (1987), S. 217–236
- [MDAH89] MITCHELL, C.E. ; DODD, F.E. ; ACKER, T.L. ; HOWELL, D.J.: Two Dimensional and Temperature Effects on Acoustic Cavity Tuning and Performance in Rocket Combustors. In: *Combustion Instabilities Driven by Thermo-Chemical Acoustic Sources* Bd. NCa-Vol.4, 1989, S. 11–16
- [ME79] MITCHELL, C.E. ; ECKERT, K.: *A Simplified Computer Program for the Prediction of the Linear Stability Behaviour of Liquid Propellant Combustors*, 1979. (NASA-CR-3169)
- [MI86] MORSE, Philip M. ; INGARD, Uno K.: *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, 1986
- [Mit93] MITCHELL, Charles E.: Preventing and Suppressing Combustion Instabilities - Passive and Active Means. In: SCHÖYER, H.F.R. (Hrsg.): *Combustion Instability in Liquid Rocket Engines*, 1993
- [Mit95] MITCHELL, Charles E.: Analytical Models for Combustion Instability. In: YANG, Vigor (Hrsg.) ; ANDERSON, William E. (Hrsg.): *Liquid Rocket Engine Combustion Instability* Bd. 169. AIAA, 1995, Kapitel 15
- [Mor70] MORFEY, C.L.: Acoustic Energy in Non-Uniform Flows. In: *Journal of Sound and Vibration* 14(2) (1970), S. 159–170
- [MP05] MAGNUS, Kurt ; POPP, Karl: *Schwingungen - Eine Einführung in physikalische Grundlagen und die theoretische Behandlung von*

- Schwingungsproblemen.* Teubner, 2005. – Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik LAMM
- [Mye80] MYERS, M.K.: On the Acoustic Boundary Condition in the Presence of Flow. In: *Journal of Sound and Vibration* 71 (3) (1980), S. 429–434
- [NBSP07] NICOUD, F.; BENOIT, L.; SENSAU, C.; POINSOT, T.: Acoustic Modes in Combustors with Complex Impedances and Multidimensional Active Flames. In: *AIAA Journal* 45(2) (2007), S. 426–441
- [NKS06] NEUNERT, U.; KATHAN, R.; SATTELMAYER, T.: Determining Acoustic Properties of Open-Cell Metal Foams Using the Multi-Microphone Transfer Matrix Method. In: *13th International Congress on Sound and Vibration, No. 693, Vienna, Austria, 2006*
- [OL97] ÖZYÖRÜK, Yusuf; LONG, Lyle N.: A Time-Domain Implementation of Surface Acoustic Impedance Condition with and without Flow. In: *Journal of Computational Acoustics* 5(3) (1997), S. 277–296
- [OLJ98] ÖZYÖRÜK, Yusuf; LONG, Lyle N.; JONES, Michael G.: Time-Domain Numerical Simulation of a Flow-Impedance Tube. In: *Journal of Computational Physics* 146 (1998), Nr. CP985919, S. 29–57
- [OS99] OPPENHEIM, A.V.; SCHAFER, R.W.: *Zeitdiskrete Signalverarbeitung*. 3. Auflage. R. Oldenbourg Verlag, 1999
- [Pan04] PANKIEWITZ, Christian: *Ein hybrides Berechnungsverfahren für Verbrennungsschwingungen in Ringbrennkammern*, Technische Universität München, Diss., 2004
- [PB89] PRIEM, Richard J.; BREISACHER, Kevin J.: Nonlinear Combustion Instability Model in Two- to Three-Dimensions / NASA. 1989 (NASA-TM-102381). – Forschungsbericht
- [PFHS03] PANKIEWITZ, C.; FISCHER, A.; HIRSCH, Ch.; SATTELMAYER, T.: Computation of Transfer Matrices for Gas Turbine Combustors Including Acoustics/ Flame Interaction. In: *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit, South Carolina, 2003*

- [PG62] PRIEM, Richard J. ; GUENTERT, Donald C.: Combustion Instability Limits Determined by a Nonlinear Theory and a One-Dimensional Model / NASA. 1962 (Technical Note D-1409). – Forschungsbericht
- [PH60] PRIEM, Richard J. ; HEIDMANN, Marcus F.: Propellant Vaporization as a Design Criterion for Rocket-Engine Combustion Chambers / NASA. 1960 (NASA TR R-67). – Forschungsbericht
- [PHR69] PHILLIPS, Bert ; HANNUM, Ned P. ; RUSSELL, Louis M.: On the Design of Acoustic Liners for Rocket Engines: Helmholtz Resonators Evaluated with a Rocket Combustor / NASA. 1969 (NASA TN D-5171). – Forschungsbericht
- [PPPD01] POLIFKE, W. ; PONCET, A. ; PASCHEREIT, C.O. ; DÖBBELING, K.: Reconstruction of Acoustic Transfer Matrices by Instationary Computational Fluid Dynamics. In: *Journal of Sound and Vibration* 245(3) (2001), S. 483–510
- [Pri62] PRIEM, Richard J.: *Theoretical and Experimental Models for Unstable Rocket Combustors*. Prepared for 9th International Symposium on Combustion, Modeling Techniques Colloquium, Cornell University, Ithaca, N.Y., September 1962
- [Pri65] PRIEM, Richard J.: Influence of Combustion Process on Stability / NASA. 1965 (NASA TN D-2957). – Forschungsbericht
- [PS03] PANKIEWITZ, C. ; SATTELMAYER, T.: Time Domain Simulation of Combustion Instabilities in Annular Combustors. In: *Journal of Engineering for Gas Turbines and Power* 125 (2003), S. 677–685
- [Put71] PUTNAM, Abbott A.: *Combustion-Driven Oscillations in Industry*. American Elsevier Publishing Company, Inc., 1971
- [PV01] POINSOT, Thierry ; VEYNANTE, Denis: *Theoretical and Numerical Combustion*. R.T. Edwards, Inc., 2001
- [Ray78] RAYLEIGH, F.R.S.: The Explanation of Certain Acoustical Phenomena. In: *Nature* 18 (1878), S. 319–323

- [Ray26] RAYLEIGH, Lord: *The Theory of Sound, Volume I & II*. Second Edition Revised and Enlarged. Macmillan and Co., Limited, 1926
- [RDC05] REY, C. ; DUCRUIX, S. ; CANDEL, S.: A Method for the Transverse Modulation of Reactive Flows with Application to Combustion Instability. In: *Combustion Theory and Modelling* 9 (2005), S. 5–22
- [RDC07] RICHECOEUR, F. ; DUCRUIX, S. ; CANDEL, S.: A Velocity Coupling Model for High Frequency Instabilities. In: *2nd European Conference for Aerospace Sciences, Brussels, Belgium, 2007*
- [RI75] ROCKWELL INTERNATIONAL, Rocketdyne: *Orbital Maneuvering Engine: Feed System Coupled Instability Investigation; Final Report*. NASA CR-144409, 1975
- [Roo01] ROOK, Ronald: *Acoustics in Burner-Stabilised Flames*, Technische Universiteit Eindhoven, Diss., 2001
- [RTLZ07] RICHTER, Christoph ; THIELE, Frank H. ; LI, Xiaodong ; ZHUANG, Mei: Comparison of Time-Domain Impedance Boundary Conditions by Lined Duct Flows. In: *AIAA-Journal* 45(6) (2007), S. 1333–1345
- [Rub95] RUBINSKY, Vitaly R.: Combustion Instability in the RD-0110 Engine. In: YANG, Vigor (Hrsg.) ; ANDERSON, William E. A. (Hrsg.): *Liquid Rocket Engine Combustion Instability* Bd. 169. AIAA, 1995, Kapitel 4
- [RW97] RODE, Lennart ; WESTERGREN, Bertil: *Springers Mathematische Formeln*. Springer, 1997
- [Sat00] SATTELMAYER, T.: Influence of the Combustor Aerodynamics on Combustion Instabilities from Equivalence Ratio Fluctuations. In: *ASME Turbo Expo 2000, Munich, Germany, 2000*
- [SB01] SUTTON, George P. ; BIBLARZ, Oscar: *Rocket Propulsion Elements*. John Wiley & Sons, Inc., 2001

- [SBG⁺04] SCHUERMANS, Bruno ; BELLUCCI, Valter ; GUETHE, Felix ; MEILI, Francois ; FLOHR, Peter ; PASCHEREIT, Oliver: A Detailed Analysis of Thermoacoustic Interaction Mechanisms in a Turbulent Premixed Flame. In: *ASME Turbo Expo 2004, Vienna, Austria, 2004*
- [Sch99] SCHMIDT, Günther: *Technik der Flüssigkeitsraketenriebwerke*. 1999. – Vorlesungsskriptum Technische Universität München
- [Sch03a] SCHEMEL, Christoph: *Modellierung und numerische Simulation der Entstehung und Ausbreitung von Schall durch Entropiemoden in beschleunigten Rohrströmungen*, Technische Universität Berlin, Diplomarbeit, 2003
- [Sch03b] SCHUERMANS, Bruno: *Modeling and Control of Thermoacoustic Instabilities*, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Diss., 2003
- [SD03] STOW, S. ; DOWLING, A.: Modelling of Circumferential Modal Coupling due to Helmholtz Resonators. In: *ASME Turbo Expo 2003, Atlanta, Georgia, USA, 2003*
- [SDCB95] SIRIGNANO, W.A. ; DELPLANQUE, J.-P. ; CHIANG, C.H. ; BHATIA, R.: Liquid-Propellant Droplet Vaporization: A Rate-Controlling Process for Combustion Instability. In: YANG, V. (Hrsg.) ; ANDERSON, W.E. (Hrsg.): *Liquid Rocket Engine Combustion Instability* Bd. 169. AIAA, 1995, Kapitel 11
- [SLBF05] SCHUERMANS, Bruno ; LUEBCKE, Holger ; BAJUSZ, Denis ; FLOHR, Peter: Thermoacoustic Analysis of Gas Turbine Combustion Systems Using Unsteady CFD. In: *ASME Turbo Expo 2005, Reno-Tahoe, Nevada, USA, 2005*
- [SPSG07] SCHMITT, P. ; POINSOT, T. ; SCHUERMANS, B. ; GEIGLE, K.P.: Large-Eddy Simulation and Experimental Study of Heat Transfer, Nitric Oxide Emissions and Combustion Instability in a Swirled Turbulent High Pressure Burner. In: *Journal of Fluid Mechanics* 570 (2007), S. 17–46

- [SSL01] SUBRAHMANYAM, P.B. ; SUJITH, R.I. ; LIEUWEN, Tim C.: A Family of Exact Transient Solutions for Acoustic Wave Propagation in Inhomogeneous Non-uniform Area Ducts. In: *Journal of Sound and Vibration* 240(4) (2001), S. 705–715
- [SWZ95] SUJITH, R.I. ; WALDHERR, G.A. ; ZINN, B.T.: An Exact Solution for One-Dimensional Acoustic Fields in Ducts with an Axial Temperature Gradient. In: *Journal of Sound and Vibration* 184(3) (1995), S. 389–402
- [TA96] TAM, Christopher K. ; AURIAULT, Laurent: Time-Domain Impedance Boundary Conditions for Computational Aeroacoustics. In: *AIAA Journal* 34(5) (1996), S. 917–923
- [TD94] TAM, Christopher K. ; DONG, Zhong: Wall Boundary Conditions for High-Order Finite-Difference Schemes in Computational Aeroacoustics. In: *Theoretical and Computational Fluid Dynamics* 6 (1994), S. 303–321
- [THS73] TANG, P.K. ; HARRJE, D.T. ; SIRIGNANO, W.A.: Experimental Verification of the Energy Dissipation Mechanism in Acoustic Dampers. In: *Journal of Sound and Vibration* 26(2) (1973), S. 263–276
- [TW93] TAM, Christopher K. ; WEBB, Jay C.: Dispersion-Relation-Preserving Finite Difference Schemes for Computational Acoustics. In: *Journal of Computational Physics* 107 (1993), S. 262–281
- [TWD93] TAM, Christopher K. ; WEBB, Jay C. ; DONG, Zhong: A Study of the Short Wave Components in Computational Acoustics. In: *Journal of Computational Acoustics* 1(1) (1993), S. 1–30
- [Vei96] VEITH, Ivar: *Technische Akustik*. Vogel (Kamprath Reihe), 1996
- [Ver97] VERHAAR, Boudevijn: *On Thermo-Acoustic Stability Analysis of Gas Turbines*, TU Eindhoven, Diplomarbeit, 1997
- [Wil85] WILLIAMS, Forman A.: *Combustion Theory*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1985

- [WMD01] WARNATZ, J. ; MAAS, U. ; DIBBLE, R.W.: *Verbrennung*. 3. Auflage. Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 2001
- [YA95] YANG, Vigor ; ANDERSON, William E. ; ZARCHAN, Paul (Hrsg.): *Liquid Rocket Engine Combustion Instability*. Bd. 169. AIAA, 1995
- [YC90] YANG, V. ; CULICK, F.E.C.: On the Existence and Stability of Limit Cycles for Transverse Acoustic Oscillations in a Cylindrical Combustion Chamber. 1: Standing Modes. In: *Combustion Science and Technology* 72 (1990), S. 37–65
- [YWY95] YANG, Vigor ; WICKER, Josef M. ; YOON, Myong W.: Acoustic Waves in Combustion Chambers. In: YANG, Vigor (Hrsg.) ; ANDERSON, William E. (Hrsg.): *Liquid Rocket Combustion Instabilities* Bd. 169. AIAA, 1995, Kapitel 13
- [ZBDS73] ZINN, B.T. ; BELL, W.A. ; DANIEL, B.R. ; SMITH, A.J. J.: Experimental Determination of Three-Dimensional Liquid Rocket Nozzle Admittances. In: *AIAA Journal* 11 No. 3 (1973), S. 267–272
- [Zin70] ZINN, B.T.: A Theoretical Study of Non-Linear Damping by Helmholtz Resonators. In: *Journal of Sound and Vibration* 13(3) (1970), S. 347–356
- [Zin72] ZINN, B.T.: Review of Nozzle Damping in Solid Rocket Instabilities. In: *AIAA/SAE 8th Joint Propulsion Specialist Conference, New Orleans, Louisiana, 1972*
- [ZP70] ZINN, Ben. T. ; POWELL, Eugene A.: Nonlinear Combustion Instability in Liquid-Propellant Rocket Engines. In: *13th Symposium (International) on Combustion*, 1970, S. 491–503
- [ZS68] ZINN, B.T. ; SAVELL, C.T.: A Theoretical Study of Three-Dimensional Combustion Instability in Liquid Propellant Rocket Engines. In: *12th Symposium (International) in Combustion*, 1968, S. 139–147

A Anhang

A.1 Stoffwerte für hypergole Treibstoffe

Im folgenden sind die benötigten Stoffdaten für das hypergole Treibstoffpaar Monomethylhydrazin (MMH) und Distockstofftetroxid (engl. Nitrogen-Tetroxide, NTO) zusammengefasst. Als Quelle dient die Arbeit von Gordon und McBride [GM94] [GM96] und der Bericht von Schmidt [Sch99].

Größe	MMH	NTO
Summenformel	$\text{CH}_3\text{N}_2\text{H}_3$	N_2O_4
Molmasse	$M_{\text{MMH}} = 46,07 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$	$M_{\text{NTO}} = 92,01 \frac{\text{kg}}{\text{kmol}}$
Bildungsenthalpie	$h_{f,\text{MMH}}^0 = -17,549 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$	$H_{f,\text{NTO}}^0 = 54,84 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$

Tabelle A.1: Stoffwerte MMH und NTO

Die Reaktionsenthalpie der Reaktion von MMH und NTO kann mit Hilfe der Reaktionsgleichung (fl steht für flüssig und g für gasförmig)



und den Bildungsenthalpien von

- MMH,
- N_2O_4 ,
- CO_2 ($h_{f,\text{CO}_2}^0 = -393,5 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$),
- $\text{H}_2\text{O}(\text{g})$ ($H_{f,\text{H}_2\text{O}(\text{g})}^0 = -241,81 \frac{\text{kJ}}{\text{mol}}$) und

- N_2 ($h_{f,N_2}^0 = 0 \frac{kJ}{mol}$)

berechnet werden (siehe [WMD01]):

$$\begin{aligned} \Delta H_{\text{Reaktion}}^0 &= & (A.2) \\ & 4 \text{ mol CO}_2 \cdot h_{f,\text{CO}_2}^0 + 12 \text{ mol H}_2\text{O} \cdot h_{f,\text{H}_2\text{O}(g)}^0 \\ & - 4 \text{ mol MMH} \cdot h_{f,\text{MMH}}^0 - 5 \text{ mol NTO} \cdot h_{f,\text{NTO}}^0 \\ & = 151,19 \text{ kJ} \end{aligned}$$

A.2 Formulierung der Impulsgleichung am Ghost Point für TDIBC

A.2.1 Ausgangspunkt

Die Implementierung der frequenzabhängigen Absorberrandbedingung erfolgte über das sog. Ghost Point-Konzept. Dazu werden entlang der Ränder zusätzliche virtuelle Punkte, die Ghost Points, eingeführt. Dieses Vorgehen ist äquivalent der Methode zur Implementierung einer festen Wand (siehe Kapitel 5.4.1). An diesen Ghost Points wird der Wert für die Druckschwankung p' so gesetzt, dass am Rand

- die Erhaltungsgleichungen
- die Impedanzbedingung

erfüllt sind.

Der Ausdruck für die Druckschwankung p' am Ghost Point ergibt sich aus der in Zeit und Ort diskretisierten linearisierten Impulserhaltungsgleichung in Normalenrichtung

$$n_j \frac{\partial u'_j}{\partial t} + n_j u'_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} + n_j \bar{u}_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + \frac{1}{\bar{\rho}} n_j \frac{\partial p'}{\partial x_j} - n_j \frac{1}{\bar{\rho}^2} \rho' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} = 0. \quad (\text{A.3})$$

Zur besseren Übersicht über die einzelnen zu verwendenden Terme kommt im folgenden Abschnitt die Schreibweise über die Einsteinsche Summenkonvention zum Einsatz. $n_j \frac{\partial u_j}{\partial t}$ steht dann für die Summe $n_x \frac{\partial u_x}{\partial t} + n_y \frac{\partial u_y}{\partial t} + n_z \frac{\partial u_z}{\partial t}$.

Gleichung A.3 lässt sich in Kurzform auch schreiben als

$$n_j \frac{\partial u_j}{\partial t} = y(\mathbf{U}). \quad (\text{A.4})$$

Hierbei bezeichnet $y(\mathbf{U})$ eine allgemeine Funktion der Störungsvariablen $(u', v', w', p')^T$.

A.2.2 Diskretisierung in der Zeit

Zur Diskretisierung in der Zeit wird hier ein Standard Runge-Kutta-Verfahren verwendet. Zur Berechnung des Wertes

$$y(t_0 + dt) = y(t_1) \quad (\text{A.5})$$

für das Anfangswertproblem

$$\frac{\partial y}{\partial t} = y' = f(t, y) \quad (\text{A.6})$$

$$y(t_0) = y_0 \quad (\text{A.7})$$

verläuft über die Zwischenschritte

$$y_A = y_0 + \frac{dt}{2} \cdot y'_0 \quad (\text{A.8})$$

$$y_B = y_0 + \frac{dt}{2} \cdot y'_A \quad (\text{A.9})$$

$$y_C = y_0 + dt \cdot y'_B \quad (\text{A.10})$$

$$y_1 = y_0 + \frac{dt}{6} \cdot (y'_0 + 2(y'_A + y'_B) + y'_C) \quad (\text{A.11})$$

Für die Werte der Zeitableitungen an den Zwischenschritten gelten die folgenden Zusammenhänge

$$y'_0 = f(t_0, y_0) \quad (\text{A.12})$$

$$y'_A = f\left(t_0 + \frac{dt}{2}, y_A\right) \quad (\text{A.13})$$

$$y'_B = f\left(t_0 + \frac{dt}{2}, y_B\right) \quad (\text{A.14})$$

$$y'_C = f(t_0 + dt, y_C) \quad (\text{A.15})$$

Für die Teilschritte des Runge-Kutta-Verfahrens A, B, C, 1 wird im folgenden die Schreibweise $(t + \alpha dt)$ verwendet. α nimmt dabei je nach Zeitschritt die Werte (0, 50, 510) an. Dies ermöglicht eine einheitliche Schreibweise für alle Unterzeitschritte.

A.2.3 Invertierung der linearisierten Impulsgleichung

Damit der Wert des Drucks am Ghostpoint p'_{GP} bestimmt werden kann, muss die rechte Seite von Gleichung A.11, d.h. die rechte Seite der Impulsgleichung in Normalenrichtung A.3 nach dem Wert im Ghostpoint aufgelöst werden. Hierbei wird der Wert von $n_j u_j'^{(t+\alpha dt)}$ über die Beziehung 5.32 ausgedrückt. Gleichung 5.32 wird im folgenden als $\pm \frac{1}{\rho \bar{a}} \cdot Z p'^{(t+\alpha dt)}$ abgekürzt. Diese abkürzende Schreibweise kann auch andere Ausdrücke für die Impedanz abbilden.

Zur räumlichen Diskretisierung muss das physikalische Gitter mit den Koordinaten x, y, z auf ein gleichförmiges karthesisches Gitter mit den Koordinaten ξ, η und ϕ abgebildet werden (siehe [DBG⁺07]). Für die Gradienten gilt

$$\nabla_x = \mathbf{J} \nabla_\xi, \quad (\text{A.16})$$

wobei \mathbf{J} hier die Jakobi-Matrix mit den Einträgen $J_{mn} = \frac{\partial \xi_n}{\partial x_m}$ ist.

Der Gradient der Druckschwankung in Normalenrichtung $\frac{\partial p'}{\partial n}$ lautet damit

$$\frac{\partial p'}{\partial n} = \sum_{l=1}^3 n_l \left(J_{1l} \frac{\partial p'}{\partial \xi} + J_{2l} \frac{\partial p'}{\partial \eta} + J_{3l} \frac{\partial p'}{\partial \phi} \right). \quad (\text{A.17})$$

Befindet sich der betrachtete Rand beispielsweise bei $\eta = 0$, kann die Druckableitung in den Randpunkten $\left. \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}$ als Funktion des Druckwertes im Ghostpoint p'_{GP} über das DRP-Schema diskretisiert werden

$$\left. \frac{\partial p'}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = C_0 \cdot p'_{GP} + \sum_{m=0}^5 c_{m+1} p'_{i,m,k}. \quad (\text{A.18})$$

Das Zusammenfügen der einzelnen Terme ergibt

$$\begin{aligned} \pm \frac{1}{\bar{\rho} \bar{a}} \cdot Z p'^{(t+\alpha dt)} &= n_j \cdot u_j^t - \alpha \cdot dt \cdot \left[n_j u_i^t \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - n_j \bar{u}_i \frac{\partial u_j^t}{\partial x_i} \right. \\ &\quad + \frac{1}{\bar{\rho}} \left(\sum_{l=1}^3 n_l \left(J_{1l} \frac{\partial p'^t}{\partial \xi} + J_{2l} \left(C_0 \cdot p'_{GP} + \sum_{m=0}^p c_{m+1} p'_{i,m,k} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + J_{3l} \frac{\partial p'^t}{\partial \phi} \right) \right) + n_j \frac{1}{\bar{\rho}^2} \rho'^t \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \left. \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Auflösen nach dem Druck im Ghostpoint p'_{GP} liefert

$$\begin{aligned} p'_{GP} &= \frac{1}{C_0} \left[\frac{1}{\sum_{l=1}^3 n_l J_{2l}} \left(-\mp \frac{1}{\alpha dt} \frac{\bar{\rho}}{\bar{a}} \cdot Z p'^{(t+\alpha dt)} + n_j \frac{1}{\bar{\rho}} \rho'^t \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \bar{\rho} n_j u_i^t \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} - \bar{\rho} n_j \bar{u}_i \frac{\partial u_j^t}{\partial x_i} - \sum_{l=1}^3 n_l \left(J_{1l} \frac{\partial p'^t}{\partial \xi} + J_{3l} \frac{\partial p'^t}{\partial \phi} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{m=0}^p c_{m+1} p'_{i,m,k} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

A.2.4 Ablauf der Berechnung

Zur Implementierung der Randbedingungen ist der folgende Ablauf notwendig:

- Berechnen der Werte zum neuen Zwischen-Zeitschritt $t + \alpha \cdot dt$ (also die Zeitpunkte A, B, C in Gleichung A.11) auf dem gesamten Feld (ausser dem Ghost Point).
- Berechnen des Druckwertes am Ghostpoint zum Zeitpunkt t mit Gleichung A.20.
- Neu-Berechnen des Geschwindigkeitswertes $t + \alpha \cdot dt$ an der Wand mit dem nun bekannten Druckwert am Ghostpoint durch Lösen der linearisierten Impulsgleichung.

A.3 Formulierung der Einlassrandbedingung

Die energieneutrale Einlassrandbedingung aus Gleichung 5.21 lässt sich umformen zu

$$-\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}} \frac{p'}{\bar{\rho} \bar{a}^2} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' \quad (\text{A.21})$$

Einführen der zeitunabhängigen Konstante $C = -\frac{\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}}}{\bar{\rho} \bar{a}^2}$ führt auf

$$C p' = \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}' \quad (\text{A.22})$$

Differenzieren von Gleichung A.22 nach der Zeit ergibt

$$C \frac{\partial p'}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{n} \cdot \mathbf{u}'}{\partial t} \quad (\text{A.23})$$

In Gleichung A.22 lässt sich nun die linke Seite durch die linearisierte Energiegleichung 4.7 ausdrücken, die rechte Seite über die linearisierte Impulsgleichung in Normalenrichtung A.3.

Um die energieneutrale Einlassrandbedingung 5.21 über das Ghost Point-Konzept zu implementieren, muss auch hier analog dem Vorgehen in Anhang A.2, die Druckableitung in Normalenrichtung $\frac{\partial p'}{\partial n}$ als Funktion der Druckschwankung im Ghost Point p'_{GP} ausgedrückt werden.

Zur Implementierung der Randbedingung 5.21 wird die Druckschwankung in Ghostpoint p'_{GP} so gesetzt, dass sie Gleichung A.23 erfüllt. Hierbei gehen sowohl die linearisierte Energiegleichung als auch die linearisierte Impulsgleichung ein. Die Konstante C wird dabei aus der mittleren Strömungsgeschwindigkeit am Rand bestimmt.