Technische Universität München
Institut für Energietechnik

Lehrstuhl für Thermodynamik

Modellierung der akustischen Wellenausbreitung in Raketenschubkammern unter Verwendung nichtlinearer Störungsgleichungen

Stefan Max Köglmeier

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:

Univ.-Prof. Dr. rer. nat. Ulrich Walter

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattelmayer
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Klaus Hannemann
   Justus-Liebig-Universität Gießen

Die Dissertation wurde am 13.10.2016 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 05.02.2017 angenommen.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Thermodynamik der Technischen Universität München. Einen Großteil der Zeit verbrachte ich dabei im Rahmen einer Kooperation bei Airbus Safran Launchers (ASL) in Ottobrunn bei München. Die Arbeit wurde durch die Raumfahrt-Agentur des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt (DLR) mit Mitteln des Bundesministeriums für Wirtschaft und Technologie aufgrund eines Beschlusses des Deutschen Bundestages (Kennzeichen 50 RL 1040) gefördert.

Mein ganz besonderer Dank gilt zunächst meinem Doktorvater Prof. Dr.-Ing Thomas Sattelmayer, der es mir gestattet hat, die Arbeit anwendungsbezogen bei ASL in Ottobrunn ausarbeiten zu können. Ich bedanke mich darüber hinaus für das mir entgegengebrachte Vertrauen, die Geduld, sowie für die gewährten wissenschaftlichen Freiräume während der Bearbeitung des Forschungsprojekts. Für die freundliche Übernahme des Zweitgutachtens danke ich Prof. Dr.-Ing. Klaus Hannemann ebenso wie Prof. Dr. rer. nat. Ulrich Walter für den Vorsitz bei meiner mündlichen Prüfung.

Weiterhin möchte ich Dr.-Ing. Oliver Knab und Roland Behr von ASL einen besonderen Dank aussprechen. Beide haben es mir bis zuletzt ermöglicht, die Dissertation neben meiner beruflichen Tätigkeit bei ASL fertigzustellen.

Für die gute und angenehme Zusammenarbeit möchte ich mich bei allen ehemaligen und aktuellen Kollegen am Lehrstuhl und bei ASL bedanken. Besonders hervorzuheben ist hier Dr.-Ing. Roland Kaess mit dem ich bis heute ein gemeinsames Büro in Ottobrunn teile. Er hat durch seine fachliche und freundschaftliche Unterstützung wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen. Ebenso sei Dr.-Ing. Daniel Morgenweck, meinem ehemaligen Mitstreiter in Sachen PIANO, für die wertvollen fachlichen Diskussionen und die entgegengebrachte Hilfsbereitschaft gedankt.

Ein herzliches Dankeschön für die Unterstützung in organisatorischen Angelegenheiten geht an das Sekreteriat des Lehrstuhls für Thermodynamik. Vor allem sei an dieser Stelle Frau Helga Bassett erwähnt, die auch bei kurzfristigen Problemen und Schwierigkeiten immer noch eine Lösung fand.

Abschließend möchte ich mich bei meinen Eltern ganz besonders herzlich bedanken. Ohne ihre fortwährende und bedingungslose Unterstützung während meiner gesamten Ausbildungszeit wäre diese Arbeit nicht denkbar gewesen. Ihnen widme ich diese Arbeit.

München, im Februar 2017 Stefan Köglmeier

Teile dieser Dissertation wurden vom Autor bereits vorab veröffentlicht [65, 71–74, 115]. Alle Vorveröffentlichungen sind entsprechend der gültigen Promotionsordnung ordnungsgemäß gemeldet. Sie sind deshalb nicht zwangsläufig im Detail einzeln referenziert. Vielmehr wurde bei der Referenzierung eigener Veröffentlichungen Wert auf Verständlichkeit und inhaltlichen Bezug gelegt.

Kurzfassung

Trotz intensiver Forschung stellen Verbrennungsinstabilitäten nach wie vor ein schwer einschätzbares Risko für die Entwicklung chemischer Raketenantriebssysteme dar. Um diesem Problem zu begegnen, ist man bestrebt, die wellendynamischen Vorgänge innerhalb einer Raketenbrennkammer theoretisch zu beschreiben und schließlich zu berechnen. Dazu wurde in der Vergangenheit vor allem auf lineare Modellgleichungen zurückgegriffen. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wird jedoch ein Ansatz auf Basis nichtlinearer Störungsgleichungen vorgestellt. Zur Lösung der Gleichungen wird dabei ein numerisches Zeitbereichsverfahren hoher Ordnung verwendet. Die Berücksichtigung komplexer Teilaspekte, wie Verbrennungseinfluss und akustische Dissipation, erfolgt durch spezielle Modellierungsansätze. Wie anhand unterschiedlicher Validierungsfälle gezeigt werden kann ist das Verfahren grundsätzlich in der Lage, die Ausbreitung akustischer Wellen innerhalb einer Raketenschubkammer auch quantitativ richtig zu beschreiben. Durch die Verwendung nichtlinearer Störungsgleichungen kann die Methode auch in gradientenbehafteten Strömungsfeldern stabil eingesetzt werden. Darüber hinaus ist der verwendete Ansatz auch im Bereich erhöhter Schwingungsamplituden gültig. Letzteres ist vor allem im Anwendungsbereich chemischer Raketenantriebssysteme von Bedeutung, da das Auftreten instabiler Verbrennungsvorgänge hier meist mit großen Störungsamplituden verbunden ist.

Abstract

Despite intensive research, combustion instabilities still imply a risk for the development of chemical rocket propulsion systems that is difficult to estimate. To address this problem, efforts are made to describe and simulate the processes related to the wave dynamics within the combustion chamber. In the past linear model equations have been used extensively. In the scope of this thesis, however, an approach based on nonlinear perturbation equations is presented. In this context the governing equations are solved with a high order time domain method. Complex processes such as the combustion response and the dissipation of acoustic energy are included by means of special modelling approaches. Within several test cases it is shown that the method is capable of quantitatively describing the dynamical behaviour of acoustic disturbances within the combustion chamber. By using nonlinear equations, numerically stable solutions are attained for configurations with intense flow gradients. Furthermore, the method is valid for disturbances of increased amplitude. This is especially relevant for applications related to rocket propulsion systems where the appearance of combustion instabilities is often linked with high disturbance amplitudes.

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur **xi**

1 Einführung **1**

1.1 Instabile Verbrennungsvorgänge 1

1.2 Modellierung 5

1.3 Inhalt und Zielsetzung der Arbeit 6

2 Grundlagen der akustischen Wellenausbreitung in Raketenbrennkammern **9**

2.1 Modellgleichungen 9

2.1.1 Nichtlineare Störungsgleichungen 11

2.1.2 Lineare Störungsgleichungen 14

2.2 Ausbreitung von Störungen 15

2.3 Analytische Lösung in Zylindergeometrien 18

2.4 Impedanz, Admittanz, Reflexionsfaktor 22

2.5 Energiebetrachtung 23

2.5.1 Energiebetrachtung im ruhenden Medium 25

2.5.2 Konvektiver Energietransport 27

2.6 Akustische Analogie 29

3 Numerisches Simulationsverfahren im Zeitbereich **35**

3.1 Ortsdiskretisierung 35

3.1.1 Finite Differenzen 36

3.1.2 Rechengitter und gekrümmte Koordinaten 40

3.2 Zeitintegration 41

3.3 Numerische Stabilisierung 42

3.4 Bewertung der Numerik 48
3.5 Randbedingungen 50
3.5.1 Wandrandbedingung 51
3.5.2 Energieneutrale Einlassrandbedingung 52
3.5.3 Nichtreflektierende Randbedingungen 53
3.5.4 Impedanzrandbedingung 53
3.5.5 Anregungs- und Dämpfungszonen 54

4 Quellterm- und Verlustmodellierung **57**
4.1 Frequenzabhängige Quelltermmodellierung 57
4.1.1 Digitale Filter 58
4.1.2 Bestimmung der Filterkoeffizienten 63
4.2 Modellierung akustischer Verluste 66
4.2.1 Modellierungsansatz 66
4.2.2 Ermittlung der Verlustparameter 68
4.2.3 Anisotropes Verlustverhalten 69
4.2.4 Numerische Umsetzung 71

5 Behandlung hydrodynamischer Instabilitäten im Zeitbereich **73**
5.1 Hydrodynamische Stabilität 73
5.2 Methoden der Stabilisierung im Zeitbereich 76
5.2.1 Glättung der Grundströmung 77
5.2.2 Dämpfung hydrodynamischer Lösungsanteile 77
5.2.3 Modifikation der linearisierten Eulergleichungen 78
5.2.4 Akustische Störungsgleichungen 79
5.2.5 Nichtlineare Störungsgleichungen 81

6 Validierung des Simulationsverfahrens in stratifizierten Strömungen **83**
6.1 Messaufbau und Testfallbeschreibung 83
6.2 Modellbildung 85
6.2.1 Grundströmung 85
6.2.2 Akustische Simulation im Zeitbereich 87
6.2.3 Auswertungsverfahren 92

6.3 Diskussion der Ergebnisse . . . 94
6.3.1 Akustische Streumatrix . . . 94
6.3.2 Akustische Transfermatrix . . . 96
6.3.3 Energiebetrachtung . . . 98
6.4 Zusammenfassung . . . 100

7 Simulation der akustischen Wellenausbreitung in Raketenschubkammern 103
7.1 Messaufbau und Testfallbeschreibung . . . 104
7.2 Akustischer Energieverlust durch die Düse . . . 106
7.2.1 Halbanalytische Lösung . . . 107
7.2.2 Grundströmung . . . 107
7.2.3 Akustische Simulation im Zeitbereich . . . 108
7.2.4 Diskussion der Simulationsergebnisse . . . 110
7.3 Akustische Verluste des Gesamtaufbaus . . . 115
7.3.1 Grundströmung . . . 116
7.3.2 Akustische Modellierung der Lochblechplatte . . . 117
7.3.3 Diskussion der Simulationsergebnisse . . . 119

8 Simulation nichtlinearer Wellenausbreitung in Raketenschubkammern 125
8.1 Anwendungsbereich nichtlinearer Akustik . . . 125
8.2 Durchführung der Simulation . . . 127
8.3 Diskussion der Simulationsergebnisse . . . 128

9 Zusammenfassung und Ausblick 135

A Eulergleichungen in nichtkonservativer Form 139
A.1 Kontinuitätsgleichung . . . 139
A.2 Impulsgleichung . . . 139
A.3 Energiegleichung . . . 140

B Akustische Analogie in Raketenschubkammern 141

C Fehlerordnung numerischer Glättungsfilter 145

D Akustische Streu- und Transfermatritzen **147**

D.1 Akustische Streumatrix 147

D.2 Akustische Transfermatrizen 148

D.3 Transformation in unterschiedliche Darstellungen 148

E Zur Konsistenz der akustischen Verlustmodellierung **151**

Betreute Arbeiten **154**

Literaturverzeichnis **157**

Nomenklatur

Lateinische Formelzeichen

A_σ	Dämpfungsmaximum	[-]
A_ϱ	maximale Stromdichte der Massenquelle	$[\mathrm{kg\,m^{-3}\,s^{-1}}]$
A_e	Amplitude der periodischen Energiequelle	$[\mathrm{W\,m^{-3}}]$
A_p	Amplitude der Druckstörung	[Pa]
A_{ij}	viskoser Widerstandstensor	$[\mathrm{s\,m^{-1}}]$
A_{ref}	Skalierungsparameter der Zielgrößenverteilung	[Pa]
a	viskoser Widerstandskoeffizient	$[\mathrm{s\,m^{-1}}]$
a_j^{NM}	Koeffizienten des Finite-Differenzen Operators	[-]
a_k	Filterkoeffizienten	[-]
B_{ij}	kinematischer Widerstanstensor	$[\mathrm{s^2\,m^{-2}}]$
$\mathbf{b}$	Amplitudenvektor der Multi-Mikrophon-Methode	$[\mathrm{m\,s^{-1}}]$
b	kinematischer Widerstandskoeffizient	$[\mathrm{s^2\,m^{-2}}]$
b_g	Halbwertsradius der Gaußverteilung	[m]
b_k	Filterkoeffizienten	[-]
C_{ij}^{pu}, C_{ij}^{fg}	akustische Transfermatrix	[-]
c	Schallgeschwindigkeit	$[\mathrm{m\,s^{-1}}]$
c_p, c_v	spezifische Wärmekapazität bei konst. Druck/Volumen	$[\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}]$
$\hat{D}$	Übertragungsfunktion der räuml. Tiefpassfilter	[-]
D	Durchmesser	[m]
D	akustische Quellen- bzw. Senkendichte	$[\mathrm{J\,m^{-3}}]$
d	Lochblechdicke	[m]
d_j^{NM}	Koeffizienten der räumlichen Tiefpassfilter	[-]
E	akustische Energiedichte	$[\mathrm{J\,m^{-3}}]$

e_t	spezifische innere Energie	$[\mathrm{J\,kg^{-1}}]$
e_t	spezifische innere Totalenergie	$[\mathrm{J\,kg^{-1}}]$
$\hat{F}_r$, $\hat{F}_\vartheta$, $\hat{F}_x$	Amplitude in negative r,ϑ,x-Richtung	[-]
$\mathcal{F}_\phi$	allgemeine Flammentransferfunktion	[-]
$\hat{f}$	Welle in positive Koordinatenrichtung	$[\mathrm{m\,s^{-1}}]$
f	Frequenz	[Hz]
f_{mn}	Resonanzfrequenz der transversalen Moden	[Hz]
$\hat{G}$	Übertragungsfunktion	[-]
$\hat{G}_r$, $\hat{G}_\vartheta$, $\hat{G}_x$	Amplitude in positive r,ϑ,x-Richtung	[-]
$\hat{g}$	Welle in negative Koordinatenrichtung	$[\mathrm{m\,s^{-1}}]$
$\hat{H}$	Filterübertragungsfunktion	[-]
H_ϱ, H_i, H_e	quasistationäre Quellterme des NLDE-Systems	
h	Zuströmhöhe	[m]
h_t	spezifische Totalenthalpie	$[\mathrm{J\,kg^{-1}}]$
I	Identitätsmatrix	[-]
I_i	Vektor der akustischen Flussdichte	$[\mathrm{W\,m^{-2}}]$
i	imaginäre Einheit ($i^2 = -1$)	$[\sqrt{-1}]$
J_n	Besselfunktion erster Art und Ordnung n	[-]
k	Wellenzahl	$[\mathrm{m^{-1}}]$
$k^\pm_{mn}$	axiale Wellenzahlen der Ordnung m und n	$[\mathrm{m^{-1}}]$
L_σ	Länge der Dämpfungszone	[m]
L_p	durchströmte Länge	[m]
m	Wellenzahl in ϑ-Richtung	$[\mathrm{rad^{-1}}]$
m_i	Vektor der Massenstromdichte	$[\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}]$
m_p	Trägheitskoeffizient	$[\mathrm{s^2\,m^{-1}}]$
N_t	Gitterknotenanzahl	[-]
n	Modenordnung in r-Richtung	[-]
n	Ordnung der Fourierfrequenzen	[-]
n_i	Normaleneinheitsvektor	[-]
$\hat{p}_r$, $\hat{p}_\vartheta$, $\hat{p}_x$	Ansatzfunktion in r,ϑ,x-Richtung	[-]
p	Druck	[Pa]
Q^{APE}_ϱ,Q^{APE}_i,Q^{APE}_e	hydrodynamische Quellterme des APE-Systems	
q_j	Vektor der Wärmestromdichte	$[\mathrm{W\,m^{-2}}]$
$\hat{R}$	akustischer Reflexionsfaktor	[-]
R	spezifische Gaskonstante	$[\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}]$
$R^\pm_e$,$T^\pm_e$,$D^\pm_e$	Reflexions-, Transmissions-, Dissipationskoeffizient	[-]

R_u	Parameter des tanh-Geschwindigkeitsprofils	[-]
r	Radius	[m]
S_ϱ	volumenspezifische Massenquelle	[$\mathrm{kg\,m^{-3}\,s^{-1}}$]
S_e	volumenspezifische Energiequelle	[$\mathrm{W\,m^{-3}}$]
S_i	volumenspezifische Impulsquelle	[$\mathrm{N\,m^{-3}}$]
S_{ij}	akustische Streumatrix	[-]
s	komplexe Winkelgeschwindigkeit bzw. Laplace-Variable	[$\mathrm{s^{-1}}$]
s_i	Vektor der Längsrichtung	[m]
T	Temperatur	[K]
T_a	Mittelungszeit	[s]
T_s	Abtastzeit	[s]
T_{ij}	Transformationsmatrix	[-]
t	Zeit	[s]
U	Geschwindigkeit	[$\mathrm{m\,s^{-1}}$]
U_m	Parameter des tanh-Geschwindigkeitsprofils	[$\mathrm{m\,s^{-1}}$]
u_i	Geschwindigkeitsvektor, $u_i = (u, v, w)^T$	[$\mathrm{m\,s^{-1}}$]
v	spezifisches Volumen	[$\mathrm{m^3\,kg}$]
w	Gewichtungsfunktion	[-]
w	interne Filtergröße	
x	allgemeine Filtereingangsgröße	
x_i^c	Zentrum der Gaußverteilung	[m]
x_σ	Abstand vom äußeren Rand der Dämpfungszone	[m]
x_h	Verteilungsparameter der Massenquelle	[m]
x_i	kartesischer Ortsvektor, $x_i = (x, y, z)^T$	[m]
$\hat{Y}$	akustische Admittanz	[$\mathrm{m^2\,s\,kg^{-1}}$]
Y_n	Besselfunktion zweiter Art und Ordnung n	[-]
y	allgemeine Filterausgangsgröße	
y^+	dimensionsloser Wandabstand	[-]
y_i	interne Runge-Kutta-Zustandsvariable	
$\hat{Z}$	akustische Impedanz	[$\mathrm{kg\,m^{-2}\,s^{-1}}$]
Z	Rekonstruktionsmatrix der Multi-Mikrophon-Methode	[-]
z	komplexe z-Variable	[-]
z_R	Kompressibilitätsfaktor	[-]

Griechische Formelzeichen

α	Dämpfungsrate	$[\mathrm{s}^{-1}]$
α	Wellenzahl in r-Richtung	$[\mathrm{m}^{-1}]$
β	Winkel	[rad], [°]
β_i	Runge-Kutta Koeffizienten	[-]
Δp	Druckverlust	[Pa]
Δt	Schrittweite der Zeitdiskretisierung	[s]
ΔU	Geschwindigkeitdifferenz der Scherschicht	$[\mathrm{m\,s}^{-1}]$
Δx	Schrittweite der Ortsdiskretisierung	[m]
δ	Courant-Friedrich-Lewy-Zahl, CFL-Zahl	[-]
$\Delta\phi_i$	Filterkorrektur	
δ_h	Verteilungsparameter der Massenquelle	[m]
$\Delta_r,\Delta_\vartheta,\Delta_x$	Gitterabstand in r,ϑ,x-Richtung	[m]
δ_u	Momentendicke	[m]
δ_{ij}	Kronecker-Delta	[-]
ϵ	Amplitudenparameter	[-]
ϵ	Fehler bzw. Abweichung	[-]
ϵ_{fg}	Fehler der Charakteristikenrekonstruktion	[-]
ϵ_{ijk}	Levi-Civita-Symbol (Permutationstensor)	[-]
η	dimensionslose Wellenzahl	[-]
η_{mn}	n-te Nullstelle der ersten Ableitung der Besselfunktion J_m	[-]
γ	Isentropenexponent	[-]
κ	Wärmeleitfähigkeit	$[\mathrm{W\,m}^{-1}\,\mathrm{K}^{-1}]$
λ	Wellenlänge	[m]
μ	dynamische Viskosität	[Pa s]
ω	Winkelgeschwindigkeit	$[\mathrm{s}^{-1}]$
ω_{mn}^c	Cut-On-Winkelgeschwindigkeit	$[\mathrm{s}^{-1}]$
ω_i	Wirbelstärke	$[\mathrm{s}^{-1}]$
Ω_{ij}	Abbildungsmatrix	[-]
ϕ, ϕ_i	generische Variable	
ψ	Stromfunktion	$[\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}]$
σ	Filter-Relaxationsparameter	[-]
σ_d	Dämpfungsfunktion	[-]
τ_{ij}	Schubspannungstensor	$[\mathrm{N\,m}^2]$

υ	Parameter zur Optimierung der Filter	[-]
φ	Phasenwinkel	[rad]
φ	akustisches Potential	[$\mathrm{m^2\,s^{-1}}$]
ϱ	Dichte	[$\mathrm{kg\,m^{-1}}$]
ϑ	Polarwinkel	[rad]
ξ_j	Ortsvektor des numerischen Raums	[-]
ζ_u	Druckverlustbeiwert	[-]

Hochgestellte Indizes

$(\cdot)'$	Schwankungsgröße
$(\cdot)^*$	dimensionslose Größe
$(\cdot)^+$	Ausbreitung in Strömungsrichtung
$(\cdot)^-$	Ausbreitung entgegen der Strömungsrichtung
$(\cdot)^0$	konvektive Ausbreitung
$(\cdot)^\dagger$	Moore-Penrose Pseudoinverse
$(\cdot)^\omega$	divergenzfreie (quellenfreie) Größe
$(\cdot)^\star$	numerische Größe
$(\cdot)^A$	stromaufseitige Anregung
$(\cdot)^B$	stromabseitige Anregung
$(\cdot)^n$	Größe zum Zeitschritt n
$(\cdot)^p$	isentrope bzw. rotationsfreie (wirbelfreie) Größe
$(\cdot)^s$	nicht-isentrope Größe
$(\cdot)^T$	transponierte Größe
$(\cdot)^\circ$	Nullstelle
$(\cdot)^\times$	Polstelle
$(\cdot)^d$	Diagonalform

Tiefgestellte Indizes

$(\cdot)_0$	Entdimensionierungsgröße
$(\cdot)_\perp$	Stoßbildung
$(\cdot)_\infty$	Umgebungszustand
$(\cdot)_a$	halb-analytisch
$(\cdot)_c$	Brennkammer

$(\cdot)_d$	stromab
$(\cdot)_s$	Längsrichtung
$(\cdot)_t$	Querrichtung
$(\cdot)_u$	stromauf
$(\cdot)_v$	Vorkammer
$(\cdot)_{ref}$	Zielgröße
$(\cdot)_{th}$	engster Querschnitt

Kopfzeiger

$(\bar{\cdot})$	zeitlich gemittelte Größe
$(\hat{\cdot})$	komplexe Größe
$(\tilde{\cdot})$	tiefpassgefilterte bzw. geglättete Größe

Operatoren und Funktionen

$\delta(\cdot)$	Dirac-Delta Funktion
$\Im(\cdot)$	Imaginärteil
$\langle\cdot\rangle$	zeitliche Mittelung
$\lvert\cdot\rvert$	Betragsnorm
$\lVert\cdot\rVert_2$	euklidische Norm
$\mathcal{O}(\cdot)$	Fehlerordnung
$\mathcal{Z}\{\cdot\}$	z-Transformation
$\Re(\cdot)$	Realteil
$\arg(\cdot)$	Argument
$\mathrm{rot}(\cdot)$	Rotation
$\partial^n(\cdot)/\partial t^n$	partielle Ableitung der Ordnung n
$\Theta(\cdot)$	Heaviside-Funktion
$A_\psi(\cdot)$, $B_\psi(\cdot)$	lineare Operatoren innerhalb von Gleichung 5.4
$D(\cdot)/Dt$	substantielle Ableitung
$d^n(\cdot)/dt^n$	vollständige Ableitung der Ordnung n
$R(\cdot)$, $R_i(\cdot)$	Flussoperator

Dimensionslose Kennzahlen

Γ_t	Gol'dbergzahl
He	Helmholtzzahl
M	Machzahl
Re	Reynoldszahl
St	Strouhalzahl

Abkürzungen

APE	**A**coustic **P**erturbation **E**quation
ASD	**A**rtificial **S**elective **D**amping
CAA	**C**omputational **A**ero**A**coustics
CDS	**C**entral **D**ifferencial **S**cheme
CFD	**C**omputational **F**luid **D**ynamics
CFL	**C**ourant-**F**riedrichs-**L**ewy
DRP	**D**ispersion **R**elation **P**reserving
F2	**F**ilter **2**. Ordnung
F6	**F**ilter **6**. Ordnung
FIR	**F**inite **I**mpulse **R**esponse
IIR	**I**nfinite **I**mpulse **R**esponse
LDDRK	**L**ow **D**issipation low **D**ispersion **R**unge-**K**utta
LEE	**L**inearized **E**uler **E**quations
LES	**L**arge **E**ddy **S**imulation
LNSE	**L**inearized **N**avier **S**tokes **E**quations
LPCE	**L**inearized **P**erturbed **C**ompressible **E**quations
MPI	**M**essage-**P**assing **I**nterface
NDE, NLDE	**N**on**L**inear **D**isturbance **E**quations
PPW	**P**oints **P**er **W**avelength
RANS	**R**eynolds-**A**veraged-**N**avier-**S**tokes
RK4	**R**unge-**K**utta **4**. Ordnung
RK6	**R**unge-**K**utta **6**. Ordnung
SI	**S**ystem **I**dentification
SOS	**S**econd **O**rder **S**ection
SST	**S**hear **S**tress **T**ransport
TDIBC	**T**ime **D**omain **I**mpedance **B**oundary **C**ondition

1 Einführung

Die Erforschung und Nutzung des Weltraums erfordert die stetige Entwicklung leistungsfähiger Raumtransportsysteme. Herzstück eines jeden Raumtransportsystems ist der Antrieb, wobei hier meist chemische Raketenantriebe mit flüssigen Treibstoffen verwendet werden. Flüssigkeitsraketenantriebe gelten im Allgemeinen als äußerst komplexe sowie hoch belastete Konstruktionen. Der Betrieb erfolgt häufig an der Grenze des technisch Machbaren.

Seit den Anfängen der Raumfahrt kam es deshalb immer wieder zu technischen Problemen, die sehr oft in einer vollständigen Zerstörung der Antriebssysteme endeten. Viele der anfänglichen Probleme sind inzwischen weitestgehend verstanden und gelöst. Eine Ausnahme bilden sogenannte Verbrennungsinstabilitäten, ein Phänomen, gekennzeichnet durch starke Brennkammerdruckschwingungen, mechanische Vibrationen sowie oft massiv erhöhtem Wärmeübergang.

1.1 Instabile Verbrennungsvorgänge

Die Thematik instabiler Verbrennungsvorgänge in Flüssigkeitsraketenantrieben ist eng mit der Geschichte der Großrakete verbunden. So schreibt etwa Walter Dornberger [31] über die Entwicklung der deutschen A4 Rakete in Peenemünde:

> *„Beim 25-t-Triebwerk gab es immer wieder heftige, sich aufschaukelnde Brummerscheinungen, Leistungsabfall und schwere Vibrationen des Ofens bei Standversuchen. Wir waren daher gezwungen, trotz aller Herstellungsschwierigkeiten für die Fertigung, zunächst beim 18-Topf-Ofen zu bleiben.“*

Nach dem zweiten Weltkrieg wurde die Entwicklung chemischer Raketenantriebe in den USA sowie in der Sowjetunion intensiv vorangetrieben. Dabei stellte sich die Beherrschung von Verbrennungsinstabilitäten immer mehr als ein zentrales Problem der Triebwerksentwicklung heraus. Tabelle 1.1 gibt einen groben Überblick über bekannte, auf Verbrennungsinstabilitäten zurückführbare Triebwerksprobleme innerhalb des US-amerikanischen Weltraumprogramms. Demnach war beinahe jedes größere Entwicklungsprogramm von Verbrennungsinstabilitäten betroffen.

Ein zweifelsfrei abschreckendes Beispiel für den mitunter erforderlichen Aufwand zur Beseitigung von Instabilitätsproblemen ist die Entwicklung des F-1 Triebwerks für die Saturn V Unterstufe [93, 132]. Die Schwierigkeiten waren hier so gewaltig, dass man entschied, ein eigenständiges Programm („Project First“) zur Untersuchung und Behebung der Instabilitätsprobleme ins Leben zu rufen. Letztendlich konnte nur durch extremen Testaufwand mit bis zu 2000 zusätzlichen Triebwerkstests eine stabile Konfiguration gefunden werden.

Trägersystem / Motor	Treibstoffe	Schub [kN]	Druck [MPa]	Instabilität	Stabilisierung	Injektortechnologie
Redstone A-6	Ethanol LOX[a]	347	2.2	verursacht durch Fördersystem	Zündsequenz-anpassung	Impingement
Atlas D LR-89	Kerosin LOX	735	4.0	nur ohne Baffle	Baffle	Impingement
Titan II - 1. Stufe LR-87	Aerozin 50[b] N_2O_4	1050	5.4	Pogo	Pogo-Suppressor auf N_2O_4 Seite	Impingement
Titan II - 2. Stufe LR-91	Aerozin 50 N_2O_4	445	5.7	getriggert	Baffle	Impingement
Saturn I/IB H-1	Kerosin LOX	910	4.9	getriggert	Baffle	Impingement
Saturn IB/V J-2	LH2[c] LOX	1020	4.7	spontan und getriggert	Injektor-modifikation	koaxial
Saturn V F-1	Kerosin LOX	6900	7.8	spontan und getriggert	Baffle	Impingement
Apollo Lunar Module LMAE	Aerozin 50 N_2O_4	16	0.8	spontan und getriggert	Baffle	Impingement

[a] Flüssigsauerstoff (Liquid Oxygen)
[b] 1,1-Dimethylhydrazin (UDMH) und Hydrazin im Massenverhältnis 50:50
[c] Flüssigwasserstoff (Liquid Hydrogen)

Tabelle 1.1: Zusammenstellung einiger bekannter, auf Instabilitäten zurückführbare Triebwerksprobleme innerhalb des US-amerikanischen Weltraumprogramms (nach [131] mit eigenen Ergänzungen und Anpassungen).

Auch die Geschichte des amerikanischen Atlas D Trägersystems ist in hohem Maße durch das Thema Verbrennungsschwingungen geprägt. Obwohl auf Basis ausgedehnter Test- und Qualifikationsprogramme die Stabilität des Triebwerks ausreichend nachgewiesen erschien, kam es hier in zwei aufeinander folgenden Testflügen zu unerwarteten Verbrennungsschwingungen [51]. Ein vollständiger Missionsverlust war jeweils die Folge, wobei nicht nur der Träger zerstört, sondern auch die zugehörigen Startanlagen erheblich beschädigt wurden. Als Konsequenz musste das Antriebssystem während der eigentlichen Flugerprobungsphase nochmals vollständig überarbeitet werden.

Ähnliche Beispiele finden sich auch in verschiedenen sowjetischen Programmen. So berichtet beispielsweise Rubinsky [112] von Instabilitätsproblemen bei der Entwicklung und Abnahme des RD-0110 Triebwerks für die dritte Stufe (Block I) des Molniya-M/Soyuz Trägersystems.

Auf europäischer Seite stehen im Wesentlichen zwei bekannte Ereignisse mit dem Auftreten unerwarteter Verbrennungsinstabilitäten in Verbindung. So kann der Verlust des zweiten Flugs der Ariane 1 Rakete auf Verbrennungsinstabilitäten in einem der vier SEP Viking 5 Triebwerke zurückgeführt werden [27, 50]. Ebenso werden Verbrennungsinstabilitäten für die verminderte Leistung sowie den vorzeitigen Brennschluss des Aestus Triebwerks im Rahmen des Ariane 5 Flugs 142 verantwortlich gemacht [50].

Zur grundlegenden Einordnung instabiler Betriebszustände in Flüssigkeitsraketenantrieben wird üblicherweise die Oszillationsfrequenz der auftretenden Schwingungsphänomene herangezogen. Für die unterschiedlichen Bereiche sind in der englischsprachigen Fachliteratur verschiedene Spezialausdrücke zu finden [51]. Man unterscheidet demnach die Phänomene *Pogo*, *Chugging*, *Buzz* sowie *Screeching*.

Instabile Betriebszustände mit sehr niedrigen Schwingungsfrequenzen können häufig auf sogenannte Pogo-Instabilitäten zurückgeführt werden. Dabei handelt es sich um eine Resonanzerscheinung zwischen dem Treibstoffördersystem, der Brennkammer sowie der mechanischen Struktur des Trägersystems. Chugging und Buzz sind hingegen mit deutlich höheren Schwingungsfrequenzen verbunden, üblicherweise im Bereich mehrerer hundert Hertz. Die Wellenlänge der Schwingungen ist aber nach wie vor deutlich größer als die charakteristischen Abmessungen der Brennkammer. Chugging und Buzz beinhalten im Wesentlichen hydraulische Schwingungen innerhalb des Treibstoffördersystems und damit verbunden eine sich selbst verstärkende Modulation der Verbrennung innerhalb der Schubkammer. Neben der fluiddynamischen „Steifigkeit" des Treibstoffördersystems stellt der Zündverzug der eingespritzten Treibstoffe hier eine maßgebliche Einflussgröße dar. Die Unterscheidung zwischen Chugging und Buzz ist meist fließend, wobei Chugging häufig den unteren Frequenzbereich und Buzz den oberen Frequenzbereich dieses Instabilitätsphänomens charakterisiert. Pogo, Chugging und Buzz werden zur Gruppe der niederfrequenten Instabilitäten gezählt. Letztere sind inzwischen soweit erforscht, dass größere Probleme nur noch sehr selten beobachtet werden. Im Gegensatz dazu stellen hochfrequente Instabilitäten, auch als Screeching bezeichnet, nach wie vor eine große Herausforderung für ein Entwicklungsprogramm dar. Charakteristisch für diesen Instabilitätstyp ist eine direkte Interaktion der Verbrennung mit der Akustik des Brennkammervolumens. Die Frequenzen der auftretenden Oszillationen entsprechen deshalb auch den akustischen Resonanzfrequenzen der Brennkammer und liegen typischerweise jenseits der 1000Hz-Grenze. Hochfrequente Instabilitäten besitzen normalerweise das größte Gefahrenpotential. Anders als bei niederfrequenten Schwingungen sind bei hochfrequenten Instabilitäten Beschädigungen bereits nach wenigen hundert Millisekunden möglich.

Hochfrequente Verbrennungsinstabilitäten, wie sie in Raketenbrennkammern auftreten, können prinzipiell als eine Sonderform thermoakustischer Instabilitäten aufgefasst werden. Letztere beruhen allgemein auf einer resonanten Umwandlung thermischer Energie in akustische Schwingungsenergie. Im Falle von Verbrennungsinstabilitäten stellt die Verbrennung die thermische Energiequelle dar. Der (turbulente) Verbrennungsvorgang an sich ist stets mehr oder weniger großen Schwankungen unterworfen. Die damit verbundene thermische Expansion des Fluids führt unter anderem zur Entstehung von Druckstörungen, welche sich als Schallwellen innerhalb des Brennkammervolumens ausbreiten. Ein Teil dieser akustischen Energie geht anschließend über Systemgrenzen sowie aufgrund verschiedener Dissipationsprozesse verloren. Der verbliebene Rest ist hingegen in der Lage, die Verbrennung auf unterschiedliche Art und Weise zu beeinflussen. Steht die anschließende Reaktion der Verbrennung in einer ungünstigen Phasenlage zur ursächlichen Druckschwankung, so besteht die Gefahr einer positiven Rückkopplung. Die Konsequenz ist eine exponentiell anwachsende Schwankungsamplitude, die erst durch das Einsetzen nichtlinearer Effekte begrenzt wird.

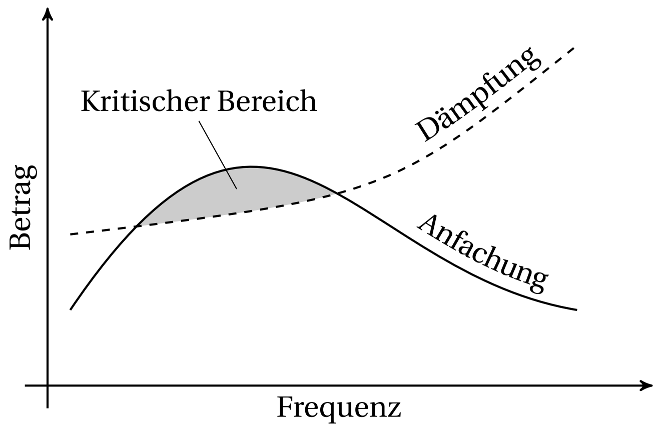


Abbildung 1.1: Bewertung der thermoakustischen Stabilität durch Bilanzierung anfachender und dämpfender Effekte.

Der hier beschriebene Grundmechanismus für die Entstehung themoakustischer Instabilitäten wurde bereits sehr früh erkannt. Erste Ansätze einer theoretischen Erklärung wurden 1878 von Rayleigh [104] erbracht. Hervorzuheben ist dabei ein auf ihn zurückgehendes Kriterium, wonach für eine positive lokale Rückkopplung das Produkt aus Druckschwankung und Wärmefreisetzungsschwankung im zeitlichen Mittel einen positiven Wert annehmen muss. Das Rayleigh-Kriterium stellt dabei eine notwendige, aber keinesfalls hinreichende Bedingung für das Auftreten thermoakustischer Instabilitäten dar. Vielmehr muss die zugeführte Schwingungsenergie die Summe aller akustischen Verluste übersteigen (Abbildung 1.1).

Auf Basis dieser Zusammenhänge ergeben sich prinzipiell drei Möglichkeiten, das Auftreten von Instabilitäten zu unterbinden. Der erste Ansatz besteht darin, den Grad der positiven Rückkopplung zu reduzieren. Praktisch kann dies zum Beispiel durch eine Modifikation der Treibstoffeinspritzung erreicht werden, wodurch der Aufbereitungsprozess sowie die Durchmischung der Treibstoffe beeinflusst wird. Allerdings ist die Gestaltung der Treibstoffeinspritzung häufig mit anderen Auslegungsparametern verknüpft. Die Möglichkeiten der diesbezüglichen Einflussnahme sind somit meist relativ begrenzt. Es ist deshalb oft günstiger auf die zweite Möglichkeit zurückzugreifen. Diese sieht vor, die akustische Dämpfung zu erhöhen. Um dies zu erreichen, ist im Bereich der Schubkammerentwicklung der Einsatz akustischer Absorber relativ weit verbreitet. Dabei handelt es sich um spezielle Hohlräume innerhalb der Brennkammer (in der englischsprachigen Fachliteratur auch als *Cavities* bezeichnet), welche zu Resonanzschwingungen angeregt werden und aufgrund von Wirbelbildung und viskoser Verluste eine Zunahme der akustischen Gesamtdämpfung verursachen. Eine dritte Maßnahme basiert auf einer Beeinflussung der akustischen Resonanzfrequenzen der Brennkammer. Wie Abbildung 1.1 verdeutlicht, sind die erforderlichen Voraussetzungen für thermoakustische Instabilitäten häufig auf einen gewissen Frequenzbereich beschränkt. Es besteht daher die Möglichkeit, durch Änderung der Brennkammerabmessungen die akustischen Eigenschaften soweit zu vertrimmen, dass die Ausbildung von Resonanzen im potentiell gefährdeten Frequenzbereich nicht mehr möglich ist. Allerdings ist die Brennkammergeometrie meist sehr großen Einschränkungen unterworfen, weshalb dieser Ansatz nur sehr begrenzt eine praktische Bedeutung besitzt.

1.2 Modellierung

Aufgrund des großen Gefahrenpotentials hochfrequenter Verbrennungsinstabilitäten wurde bereits früh eine theoretische Vorhersage erwogen. Dabei zeigte sich, dass die theoretische Analyse eine große Herausforderung darstellt. Die Schwierigkeit resultiert dabei vor allem aus der großen Anzahl von Einzelprozessen, welche an der Entstehung beteiligt sind und zum Teil beträchtliche Komplexität besitzen. Dies betrifft insbesondere den Vorgang der Verbrennung flüssiger Raketentreibstoffe. Die Dynamik dieses Vorgangs wird üblicherweise durch ein Zusammenspiel unterschiedlicher Einzelprozesse wie Einspritzung, Treibstoffaufbereitung, Verdampfung, Durchmischung und chemische Reaktion bestimmt. Jeder dieser Prozesse stellt an sich einen komplexen Vorgang dar. Eine brauchbare Modellierung wird aber meist erst dann möglich, wenn alle relevanten Vorgänge mit ausreichender Genauigkeit berücksichtigt sind.

Aufgrund dieser Komplexität ist man im Rahmen einer Modellierung gezwungen, mehr oder weniger große Vereinfachungen vorzunehmen. Ein Beispiel hierfür ist der Ansatz von Crocco und Cheng [24], die Dynamik der Verbrennung durch ein einfaches Zeitverzugsmodell mit lediglich zwei Parametern zu beschreiben. Damit war es gegen Mitte der 1950er Jahre erstmals möglich, auch ohne nennenswerte Rechenkapazitäten eine qualitative Modellierung hochfrequenter Instabilitäten vorzunehmen. Auf Basis dieser und ähnlicher Vereinfachungen entstanden bis Ende der 1960er Jahre verschiedene theoretischer Ansätze [51], deren Detaillierungsgrad und Aussagekraft aufgrund der damals fehlenden Rechenkapazitäten jedoch sehr beschränkt ist. Erst mit dem Aufkommen leistungsfähiger Rechenmaschinen konnte die Komplexität der Modelle weiter erhöht werden. Darüber hinaus wurde auch zunehmend damit begonnen, das Rechengebiet zu diskretisieren und die fluidmechanischen Erhaltungsgleichungen numerisch zu lösen [46, 49, 103]. Die Entwicklung dieser Instabilitätsmodelle ist dabei eng mit dem Aufkommen der numerischen Strömungsmechanik (Computational Fluid Dynamics - CFD) verknüpft und setzt sich bis in die heutige Zeit fort [52, 126]. Allerdings ist man trotz deutlicher Fortschritte nach wie vor nicht in der Lage, die Entstehung hochfrequenter Verbrennungsschwingungen verlässlich vorherzusagen. Die erforderliche Rechenleistung zur Auflösung und Berücksichtigung aller beteiligten Effekte innerhalb einer Raketenschubkammer mit zum Teil mehreren hundert Einspritzelementen steht auch heute - insbesondere im industriellen Umfeld - noch nicht zur Verfügung. Man ist deshalb bis auf Weiteres auf vereinfachende Modelle angewiesen.

Zur effizienten Berechnung und Analyse hochfrequenter Verbrennungsinstabilitäten wird am *Lehrstuhl für Thermodynamik* der *Technischen Universität München* der Ansatz verfolgt, die Bereiche Akustik und Verbrennung getrennt voneinander zu untersuchen [115]. Dies sieht vor, die Dynamik der Verbrennung zunächst mithilfe konventioneller CFD-Verfahren zu analysieren und die Ergebnisse zur Ableitung eines Rückkopplungsmodells zu verwenden. Letzteres stellt einen funktionalen Zusammenhang zwischen der Reaktion der Verbrennung und den ursächlichen Schwankungsgrößen des Fluids her. Das gewonnene Rückkopplungsmodell wird anschließend in ein akustisches Simulationsverfahren eingebunden, mit dem Ziel, die thermoakustische Stabilität des betrachteten Systems zu bewerten. Grundlage für das akustische Simulationsverfahren bildet dabei der Zeitbereichsakustiklöser PIANO[1]. Die Verwendung des Zeitbereichs besitzt hier unter anderem den Vorteil, dass auch sehr anspruchsvolle Problemstellungen mit hoher Gitterknotenanzahl effizient analysiert werden können[2]. Wie später gezeigt wird, bringt eine Simulation im Zeitbereich aber auch spezielle Probleme mit sich.

1.3 Inhalt und Zielsetzung der Arbeit

Das akustische Simulationsverfahren PIANO stellt eine Entwicklung des *Instituts für Aerodynamik und Strömungstechnik* des *Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt* dar [28]. Der Anwendungsbereich des Lösers erstreckte sich ursprünglich auf die Ausbreitung aerodynamisch erzeugten Lärms (Aeroakustik). Pieringer [101] konnte jedoch zeigen, dass das Verfahren im Wesentlichen auch zur Analyse der akustischen Wellenausbreitung in Raketenschubkammern geeignet ist. Die vorliegende Arbeit knüpft an die Ergebnisse von Pieringer

[1] **P**erturbation **I**nvestigation of **A**erodynamic **NO**ise

[2] Im Gegensatz dazu sind Lösungsverfahren im Frequenzbereich hinsichtlich der maximalen Problemgröße meist stark limitiert. Die Ursache hierfür liegt im Speicherbedarf, welcher mit zunehmender Problemgröße enorm anwächst [2].

an. Der Schwerpunkt liegt dabei auf einer Weiterentwicklung des akustischen Zeitbereichsverfahrens mit dem Ziel einer quantitativ richtigen Modellierung der akustischen Dämpfung. Wie im vorherigen Abschnitt erläutert wurde, ist dies eine entscheidende Voraussetzung für eine aussagekräftige Analyse hochfrequenter Verbrennungsinstabilitäten.

Dabei muss zunächst das Problem der numerischen Dissipation angegangen werden. Ohne eine Optimierung des Lösungsverfahrens würde die thermoakustische Stabilität überschätzt bzw. verfälscht werden. PIANO basiert zwar auf einem Ansatz hoher Ordnung. Dennoch zeigen die Ergebnisse von Pieringer im Allgemeinen eine deutliche Überschätzung der Dämpfungseigenschaften. Um das Verfahren auch für eine quantitative Stabilitätsanalyse nutzbar zu machen, soll deshalb zunächst der Einfluss der numerischen Dämpfung dahingehend reduziert werden.

Im Zentrum der Arbeit steht allerdings die Verwendung sogenannter *nichtlinearer Störungsgleichungen*. Wie im Rahmen der nachfolgenden Ausführungen gezeigt wird, ist dieser Modellgleichungstyp in der Lage, die akustische Wellenausbreitung auch unter stark inhomogenen Strömungsverhältnissen präzise und numerisch stabil im Zeitbereich abzubilden. Darüber hinaus entsteht zusätzlich die Möglichkeit, auch Effekte nichtlinearer Wellendynamik zu erfassen. Damit ersetzen die nichtlinearen Störungsgleichungen die ursprünglich von Pieringer verwendeten *akustischen Störungsgleichungen* [101]. Letztere können zwar ebenfalls problemlos in hydrodynamisch instabilen Strömungen eingesetzt werden. Wie Morgenweck unter anderem zeigen konnte, ist die Verwendung aus numerischen Gründen jedoch nur im subsonischen Bereich möglich, wodurch eine breite Anwendung in Raketenschubkammen somit ausscheidet [88].

Um die Dämpfung realer Brennkammergeometrien richtig zu erfassen, ist mitunter die Modellierung komplexer Baugruppen wie Einspritzplatten oder Mischgitter erforderlich. Eine direkte Vernetzung dieser Komponenten ist jedoch aufgrund der geometrischen Komplexität praktisch nicht möglich. Um diese Einbauten dennoch zu berücksichtigen, wird eine spezielle Verlustmodellierung vorgestellt. Der verfolgte Ansatz erlaubt auch hier die Berücksichtigung nichtlinearen Verhaltens und ist damit konsistent mit der Verwendung nichtlinearer Störungsgleichungen.

Die nachfolgenden Ausführungen sind wie folgt untergliedert: Zunächst werden in *Kapitel 2* die theoretischen Grundlagen der akustischen Wellenausbreitung in Raketenschubkammern diskutiert. Den Ausgangspunkt bilden hierfür die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie. Darauf aufbauend wird die Ausbreitung der unterschiedlichen Lösungsbestandteile besprochen und die Grundlagen der akustischen Energieerhaltung skizziert. Abschließend wird eine akustische Analogiebetrachtung vorgestellt. Letztere ermöglicht eine ganzheitliche Betrachtung der Interaktionsprozesse zwischen den akustischen Störungen und der Grundströmung. *Kapitel 3* beschäftigt sich mit der Numerik des verwendeten Simulationsverfahrens. Im Zuge dessen werden die Punkte Diskretisierung, Zeitintegration, numerische Stabilisierung und verfügbare Randbedigungen betrachtet. *Kapitel 4* enthält die theoretischen Grundlagen zur Einbindung der thermoakustischen Rückkopplung. Außerdem wird die bereits erwähnte Verlustmodellierung vorgestellt. In *Kapitel 5* steht das Problem hydrodynamischer Instabilitäten im Zentrum der Diskussion. Die Validierung der nichtlinearen Störungsgleichungen findet in *Kapitel 6* statt. Demonstriert wird das Verfahren am Beispiel einer turbulent durchströmten Querschnittserweiterung, welche im Rahmen der Untersuchung akustisch charakterisiert wird. In *Kapitel 7* wird der Übergang zur Brennkammeranwendung vollzogen. Im Fokus steht dabei ein von Kathan [68] durchgeführtes Experiment zur akustischen Dämpfung in Raketenbrennkammern. Es wird versucht, den experimentellen Aufbau erstmals vollständig in PIANO ohne Zuhilfenahme externer Messdaten zu modellieren. *Kapitel 8* gibt schließlich einen kurzen Ausblick auf die Möglichkeiten des Lösungsverfahrens im Bereich großer Störungsamplituden, bevor in *Kapitel 9* die Ergebnisse zusammengefasst und Vorschläge für die zukünftige Weiterentwicklung aufgezeigt werden.

2 Grundlagen der akustischen Wellenausbreitung in Raketenbrennkammern

Die Berechnung und Simulation hochfrequenter Verbrennungsinstabilitäten in Flüssigkeitsraketenantrieben erfordert eine detaillierte Beschreibung der wellendynamischen Vorgänge innerhalb der Brennkammer. In diesem Kapitel sollen die dafür erforderlichen Grundlagen vorgestellt und diskutiert werden. Dabei werden zunächst unterschiedliche Modellgleichungen als Ausgangspunkt für das in dieser Arbeit verwendete Simulationsverfahren diskutiert. Besonderes Augenmerk wird auf die zu erwartenden charakteristischen Lösungsbestandteile und die damit verbundenen Konsequenzen gelegt. Als Basis für das Verständnis der akustischen Wellenausbreitung in Raketenschubkammern wird das harmonische Lösungsfeld einer Zylindergeometrie betrachtet. Im Zuge der anschließenden Diskussion akustischer Randbedingungen, werden darüber hinaus die Grundlagen der akustischen Energiebetrachtung skizziert. Abschließend wird eine akustische Analogiebetrachtung vorgestellt, die eine geschlossene Betrachtung der Interaktionsprozesse zwischen den akustischen Störungen, den Quelltermen sowie der Grundströmung ermöglicht.

2.1 Modellgleichungen

Ausgangsbasis zur theoretischen Beschreibung instabiler Verbrennungsvorgänge ist eine Bilanzierung von Masse, Impuls und Energie. Das Fluid innerhalb einer Flüssigkeitsraketenbrennkammer besteht im Allgemeinen aus einer Gasphase sowie aus einer oder mehreren dispersen Phasen. Für die Gasphase ergeben sich dabei folgende instantane Erhaltungsgleichungen:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varrho u_j\right) = S_\varrho \,, \tag{2.1a}$$

$$\frac{\partial \varrho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varrho u_i u_j + p\delta_{ij} - \tau_{ij}\right) = S_i + u_i S_\varrho \,, \tag{2.1b}$$

$$\frac{\partial \varrho e_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varrho u_j e_t + u_j p + q_j - u_i \tau_{ij}\right) = S_e + u_i S_i + u_i u_i S_\varrho \,, \tag{2.1c}$$

wobei es sich bei den Größen S_ϱ, S_i und S_e um allgemeine, an dieser Stelle nicht näher spezifizierte Massen-, Impuls- und Energiequellterme aufgrund der Stoffübergangs- und Verbrennungsprozesse innerhalb der Brennkammer handelt und ρ die Dichte, p den Druck, u_i den Vektor der Strömungsgeschwindigkeit und $e_t = e + u_k u_k/2$ die spezifische totale innere Energie der Gasphase bezeichnet. Darüber hinaus kennzeichnet δ_{ij} den Einheitstensor und τ_{ij}

den viskosen Schubspannungstensor. Für ein Newtonsches Fluid mit der dynamischen Viskosität μ gilt:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) . \tag{2.2}$$

Darüber hinaus kann über das Fouriersche Gesetz

$$q_j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial x_j} \tag{2.3}$$

der Vektor der konduktiven Wärmestromdichte q_j in Abhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit κ und des lokalen Temperaturgradienten dargestellt werden.

Zur Schließung des Gleichungssystems 2.1 ist eine Beschreibung des thermodynamischen Zustands der Gasphase erforderlich. Dabei wird der Zusammenhang zwischen Druck, Dichte und Temperatur durch eine thermische Zustandsgleichung beschrieben. Für die Verhältnisse in einer Flüssigkeitsraketenbrennkammer gilt hier allgemein der Zusammenhang

$$\frac{p}{\varrho R T} = z_R , \tag{2.4}$$

wobei R die spezifische Gaskonstante bezeichnet und der dimensionslose Realgas- bzw. Kompressibilitätsfaktor z_R die Abweichung des Verhaltens von dem eines idealen Gases mit $z_R = 1$ beschreibt. Innerhalb einer Flüssigkeitsraketenbrennkammer ist der Realgasfaktor üblicherweise deutlichen Variationen unterworfen. So ergeben sich vor allem im Bereich der Einspritz- und Treibstoffaufbereitungszone meist deutliche Abweichungen vom Idealgasverhalten.

Die spezifische innere Energie der Gasphase e wird durch eine kalorische Zustandsgleichung charakterisiert. Für die hier betrachtete Gasphase[3] ist e im Allgemeinen eine Funktion der Temperatur T sowie des spezifischen Volumens v, d.h. $e = e(T, v)$. Unter Berücksichtigung dieser Abhängigkeit gilt für das totale Differential der inneren Energie der Ausdruck:

$$\begin{aligned} de &= \left(\frac{\partial e}{\partial T} \right)_v dT + \left(\frac{\partial e}{\partial v} \right)_T dv \\ &= c_v(T, v) dT - \left[p - T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v \right] dv . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dabei bezeichnet $c_v(T, v) = (\partial e / \partial T)_v$ die spezifische Wärmekapazität der Gasphase bei konstantem Volumen. Die partielle Ableitung $(\partial p / \partial T)_v$ wiederum lässt sich aus der thermischen Zustandsgleichung gewinnen, d.h $(\partial p / \partial T)_v = \varrho R z_R + \varrho R T (\partial z_R / \partial T)_v$. Unter der Annahme $(\partial z_R / \partial T)_v = 0$ lässt sich der zweite Term auf der rechten Seite von Gleichung 2.5 eliminieren.

[3] Die innere Energie reaktiver Mehrstoffsysteme ist im Allgemeinen auch eine Funktion der Stoffzusammensetzung. Im hier vorliegenden Fall wird die Wirkung chemischer Reaktionen jedoch durch den Energiequellterm S_e abgebildet, wodurch eine Berücksichtigung der chemischen Energie in Gleichung 2.5 entfällt.

Wird darüber hinaus die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärmekapazität c_v vernachlässigt, so gilt für die innere Energie der Gasphase $e = c_v T$ bzw. unter Berücksichtigung der thermischen Zustandsgleichung 2.4

$$\varrho e = \frac{p}{\gamma - 1} \ , \tag{2.6}$$

wobei $\gamma = 1 + R z_R / c_v$. An dieser Stelle sei erwähnt, dass die hier getroffenen Vereinfachungen nicht zwangsläufig $z_R = const.$ bzw. $c_v = const.$ bedeuten. Die Modellierung erlaubt beispielsweise weiterhin eine räumliche Variation der genannten Größen.

2.1.1 Nichtlineare Störungsgleichungen

Für eine Modellierung der dynamischen Vorgänge ist es von Vorteil, die Vorgänge in der Gasphase in einen quasistationären Anteil $\bar{(\cdot)}$ sowie einen diesbezüglichen Störungsanteil $(\cdot)'$ aufzuspalten. Demnach ergibt sich für eine generische Variable ϕ die Zerlegung:

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \ , \tag{2.7}$$

wobei an die Größenordnung der Störungen an dieser Stelle keine weiteren Anforderungen gestellt werden. Angewandt auf die instantanen Größen des Gleichungssystems 2.1 erhält man unter Berücksichtigung von $\partial \bar{\phi} / \partial t = 0$ ein System nichtlinearer Störungsgleichungen, welche nach Morris et al. [89] auch als *Nonlinear Disturbance Equations* (NLDE bzw. NDE) bezeichnet werden:

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\varrho} u_j' + \varrho' u_j\right) = H_\varrho + S_\varrho' \ , \tag{2.8a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho u_i\right)' + \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\bar{\varrho}\bar{u}_i u_j' + \bar{\varrho} u_i' u_j + \varrho' u_i u_j \\ + p'\delta_{ij} - \tau_{ij}'\Big) = H_i + S_i' + u_i S_\varrho' + u_i' \bar{S}_\varrho \ , \end{aligned} \tag{2.8b}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho e_t\right)' + \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(\bar{\varrho}\bar{u}_j e_t' + \bar{\varrho} u_j' e_t + \varrho' u_j e_t \\ + \bar{u}_j p' + u_j' p + q_j' - \bar{u}_i \tau_{ij}' - u_i' \tau_{ij}\Big) = H_e + S_e' + u_i S_i' + u_i' \bar{S}_i + \bar{u}_i \bar{u}_i S_\varrho' \\ + \bar{u}_i u_i' S_\varrho + u_i' u_i S_\varrho \ , \end{aligned} \tag{2.8c}$$

mit

$$H_\varrho = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\varrho}\bar{u}_j\right) + \bar{S}_\varrho \ , \tag{2.9a}$$

$$H_i = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\varrho}\bar{u}_i\bar{u}_j + \bar{p}\delta_{ij} - \bar{\tau}_{ij}\right) + \bar{S}_i + \bar{u}_i \bar{S}_\varrho \ , \tag{2.9b}$$

$$H_e = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\bar{\varrho}\bar{u}_j e_t + \bar{u}_j \bar{p} + \bar{q}_j - \bar{u}_i \bar{\tau}_{ij}\right) + \bar{S}_e + \bar{u}_i \bar{S}_i + \bar{u}_i \bar{u}_i \bar{S}_\varrho \ , \tag{2.9c}$$

sowie dem Störungsanteil der Erhaltungsgrößen,

$$(\varrho u_i)' = \bar{\varrho} u_i' + \varrho' u_i \ , \qquad (\varrho e_t)' = \bar{\varrho} e_t' + \varrho' e_t \ . \tag{2.10}$$

Gegenüber der instantanen Form der Erhaltungsgleichungen besitzt das NLDE-System keinerlei Vereinfachungen und es gelten bzgl. einer Anwendung in Raketenbrennkammern die gleichen Vorraussetzungen wie für die Erhaltungsgleichungen 2.1. Darüber hinaus werden an das verwendete quasi-stationäre Strömungsfeld zunächst keine weiteren Bedingungen gestellt. Es ist somit prinzipiell frei wählbar. Einen Sonderfall erhält man für ein Strömungsfeld, das aus einer zeitlichen Mittelung der instantanen Größen resultiert

$$\bar{\phi} = \lim_{T_a \to \infty} \frac{1}{T_a} \int_0^{T_a} \phi(t)\, dt \ . \tag{2.11}$$

In diesem Fall besitzt die Lösung der Störungsgleichungen keinen Gleichanteil, d.h das zeitliche Mittel des Störungsanteils verschwindet [75]. Allerdings ist dieser Sonderfall nicht weiter von Bedeutung, da zur Ableitung eines mittleren Strömungsfelds, entsprechend Gleichung 2.11, die Lösung des Problems bereits im Vorfeld bekannt sein müsste. Wird stattdessen z.B. ein mittleres Strömungsfeld auf Basis einer separaten Lösung der *Reynolds-gemittelten Navier-Stokes-Gleichungen* (RANS) herangezogen, so enthält die Lösung der Störungsgleichungen unter Umständen einen mehr oder weniger stark ausgeprägten stationären Anteil [22,75]. Die Ursache für dieses Verhalten kann auf eine unterschiedliche Berücksichtigung der turbulenten Flüsse zurückgeführt werden, welche im Rahmen einer RANS-Modellierung durch Turbulenzmodelle abgebildet werden. Da aber die turbulenten Flüsse der Störungsgleichungen im Allgemeinen nicht mit den turbulenten Flüssen der RANS-Lösung übereinstimmen, werden dahingehende Unterschiede durch einen zusätzlichen Gleichanteil in den Störungsgrößen ausgeglichen. Wird dieser Gleichanteil zu dem verwendeten quasistationären Strömungsfeld addiert, so ergibt sich eine stationäre Lösung, die mit einer zeitlich gemittelten Lösung des Gleichungssystems 2.1 identisch ist. In dieser Hinsicht ist die Lösung des NLDE-Systems unabhängig bzgl. des verwendeten quasistationären Strömungsfelds [22].

Gleichungssysteme auf NLDE-Basis wurden bisher für verschiedene Anwendungen im Bereich der numerischen Strömungsmechanik (CFD) und der numerischen Aeroakustik (Computational Aeroacoustics - CAA) eingesetzt. Besonders hervorzuheben ist hier die Simulation akustischer Schallausbreitung [79, 105, 107] und Schallentstehung in turbulenten Strömungen [33, 89, 90]. Ferner gibt es Anwendungen im Rahmen einer Kombination von RANS und LES (Large Eddy Simulation) - auch als hybride RANS-LES Verfahren bezeichnet [75,123]. Hier ermöglicht der NLDE-Gleichungstyp eine lokal begrenzte Rekonstruktion des instationären Strömungsfelds auf Grundlage einer zuvor durchgeführten RANS-Simulation.

Mit der Fokusierung auf eine Berechnung akustischer Störungsausbreitung wird im Folgenden vereinfachend davon ausgegangen, dass das quasistationäre Strömungsfeld die Bedingung $H_\varrho = 0, H_i = 0, H_e = 0$ erfüllt[4]. Darüber hinaus wird auf Grundlage der Beziehung 2.6

[4] Für laminare Strömungen ist diese Bedingung ohne Einschränkungen erfüllt. Für turbulente Strömungsverhältnisse entspricht diese Annahme einer Vernachlässigung der turbulenten Viskosität [89].

die innere Energie aus Gleichung 2.8c eliminiert und der Einfluss der molekularen Viskosität sowie der Wärmeleitung vernachlässigt[5]. Auf Basis dieser Vereinfachungen können die NLDE in ein System nichtlinearer Störungsgleichungen überführt werden (siehe dazu auch Anhang A), welches nach Long [80] auch als *Perturbed Nonconservative Nonlinear Euler* (PENNE) bezeichnet wird:

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varrho'}{\partial x_i} + u_i' \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x_i} + \varrho \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} + \varrho' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = S_\varrho' \,, \tag{2.12a}$$

$$\frac{\partial u_j'}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} + u_i' \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial p'}{\partial x_j} - \frac{\varrho'}{\bar{\varrho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j}\right) + \frac{1}{\varrho} S_i' \,, \tag{2.12b}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + u_i \frac{\partial p'}{\partial x_i} + u_i' \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \gamma p \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} + \gamma p' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\gamma - 1}\left(\bar{p}\, u_i' \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + p' u_i \frac{\partial \gamma}{\partial x_i}\right) + (\gamma - 1) S_e' \,. \tag{2.12c}$$

Wie bereits das Gleichungssystem 2.8 enthält auch dieser Modellgleichungssatz eine Reihe instantaner Größen, die sich entsprechend der Beziehung 2.7 aus dem quasistationären Anteil der Grundströmung und einem zugehörigen Störungsanteil bestimmen lassen. Gegenüber den NLDE sind anstelle der Erhaltungsgrößen ϱu_i (Impulsdichte) und ϱe_t (innere Totalenergiedichte) nun die primitiven Variablen Druck p und Geschwindigkeit u_i getreten. Zusätzlich wurden die konvektiven Terme durch Anwendung der Produktregel in mathematisch äquivalente Ausdrücke überführt. Die daraus resultierende nichtkonservative Form ist im Bereich stetiger Lösungen mathematisch äquivalent zur ursprünglich konservativen Formulerung der NLDE. Unstetige Lösungen, wie sie beispielsweise Stosswellen enthalten, können allerdings ausschließlich auf Grundlage einer konservativen Formulierung erfasst werden. Eine nichtkonservative Form führt im Rahmen einer Diskretisierung allgemein zu nichtkonsistenten Darstellungen. Diese gewährleisten die Erhaltungseigenschaft der Differentialgleichung lediglich bis zu einer Genauigkeit, die dem Abbruchfehler der Diskretisierung entspricht. Im Bereich von Unstetigkeiten wird die Erhaltungseigenschaft meist intolerabel verletzt, was beispielsweise mit falschen Stossgeschwindigkeiten bzw. falschen Sprungbedingungen einhergeht. Eine konservative Formulierung hingegen ist dieser Problematik nicht unterworfen. Dennoch besitzt eine nichtkonservative Formulierung aber auch gewisse Vorzüge. So erleichtert insbesondere der Übergang zur primitiven Variable p die Anbindung akus-

[5]Betrachtet man die Ausbreitung einer ebenen Welle $u'(x,t) \sim \exp(ikx - i\omega t)$, wobei $i = \sqrt{-1}$ und $k = \omega/c$ die Wellenzahl bezeichnet, so gilt für das Verhältnis von Trägheits- zu Zähigkeitskräften [110]:

$$\left|\varrho \frac{\partial u'}{\partial t}\right| \left|\mu \frac{\partial^2 u'}{\partial x^2}\right|^{-1} \sim \frac{\varrho c \lambda}{\mu} \,.$$

Mit der Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$ als charakteristisches Längenmaß kann der Ausdruck $\varrho c\lambda/\mu$ als Reynoldszahl Re aufgefasst werden. Unter Verwendung typischer Eigenschaften der Gasphase ergeben sich für Re Werte in der Größenordnung $\mathcal{O}(10^7)$, wodurch die Zähigkeitskräfte gegenüber den Trägheitskräften als verschwindend gering einzuschätzen sind. Im Rahmen einer Simulation akustischer Wellausbreitungseffekte kann damit der Einfluss der Viskosität in guter Näherung vernachlässigt werden.

tischer Randbedingungen. Überdies ergeben sich meist effizientere numerische Lösungsmethoden, da eine Rekonstruktion der primitiven Variablen aus den konservativen Erhaltungsgrößen entfällt.

Im Rahmen einer Diskussion der NLDE wurde darauf hingewiesen, dass prinzipiell ein beliebiges Grundströmungsfeld innerhalb des Gleichungssystems 2.8 verwendet werden kann. Zur Ableitung der PENNE Modellgleichungen wird jedoch die Annahme $H_\varrho = 0, H_i = 0, H_e = 0$ getroffen. Neben einer Beschränkung auf stetige Lösungen stellt das PENNE System demnach auch Anforderungen an das verwendete Grundströmungsfeld und ist damit im Gegensatz zu den NLDE nicht mehr frei wählbar.

2.1.2 Lineare Störungsgleichungen

Betrachtet man lediglich kleine Störungen des mittlere Zustands, d.h. $\phi'/\bar{\phi} \ll 1$, so können Produkte aus mehreren Störungsgrößen in erster Näherung als verschwindend klein angesehen werden. Beschränkt man sich darüber hinaus auf den Bereich kleiner Wellenzahlen, können außerdem Produkte aus Störungsgrößen und räumlichen Ableitungen von Störungsgrößen vernachlässigt werden. Unter diesen Umständen ist es möglich, das Gleichungssystem 2.12 nochmals zu vereinfachen:

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \varrho'}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x_i} + \bar{\varrho} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} + \varrho' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = S'_\varrho \, , \tag{2.13a}$$

$$\frac{\partial u'_j}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} = -\frac{1}{\bar{\varrho}} \left(\frac{\partial p'}{\partial x_j} - \frac{\varrho'}{\bar{\varrho}} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{\bar{\varrho}} S'_i \, , \tag{2.13b}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial p'}{\partial x_i} + u'_i \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \gamma \bar{p} \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} + \gamma p' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = {} & \frac{1}{\gamma - 1} \left(\bar{p}\, u'_i \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} + p' \bar{u}_i \frac{\partial \gamma}{\partial x_i} \right) \\ & + (\gamma - 1) S'_e \, . \end{aligned} \tag{2.13c}$$

Gegenüber den nichtlinearen PENNE besitzt das Gleichungssystem 2.13 keine instantanen Größen mehr. Die resultierenden Gleichungen enthalten nunmehr ausschließlich lineare Störungsterme und werden deshalb allgemein als *linearisierte Eulergleichungen* bzw. englisch als *Linearized Euler Equations* - LEE bezeichnet.

Im Gegensatz zu den PENNE zeigen die LEE aufgrund ihres linearen Charakters grundsätzlich keine Amplitudenabhängigkeit, d.h. die Lösung der LEE wird durch den Betrag der Störungsamplituden nicht beeinflusst. Darüber hinaus ist die Gültigkeit der linearisierten Eulergleichungen lediglich auf kleine Störungsamplituden beschränkt. Wellenausbreitungseffekte im Bereich erhöhter Störungsamplituden können somit nicht erfasst werden. Dies ist vor allem im Anwendungsbereich chemischer Raketenantriebe ein bedeutender Nachteil, da die hier beobachteten Verbrennungsinstabilitäten häufig auf beträchtliche Amplituden anwachsen und deutliche Anzeichen einer nichtlinearen bzw. amplitudenabhängigen Wellenausbreitung zeigen.

Wie bereits das PENNE-System ist auch der Gleichungssatz 2.13 in nichtkonservativer Form geschrieben. Im Gegensatz zu nichtlinearen Störungsgleichungen sind linearisierte Modellansätze jedoch grundsätzlich nicht in der Lage, unstetige Lösungen aus einem zunächst stetigen Anfangszustand auszubilden. Die Erhaltungseigenschaft des Gleichungssystems 2.13 ist damit trotz nichtkonservativer Form zu jeder Zeit sichergestellt und es ergeben sich keine weiteren Einschränkungen für die Anwendbarkeit der Modellierung.

2.2 Ausbreitung von Störungen

Zur Analyse der speziellen Eigenschaften der linearisierten Eulergleichungen werden im Folgenden einige Vereinfachungen getroffen. Zunächst wird von einem parallelen Grundströmungsfeld $\bar{u}_i = (U,0,0)^T$ mit $U = const.$ und $\gamma = const.$ ausgegangen. Gilt darüber hinaus $S'_\varrho = 0$, $S'_i = 0$ und $S'_e = 0$, so lässt sich die Ausbreitung der Störungen mit Hilfe des folgenden Gleichungssystems beschreiben:

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + U\frac{\partial \varrho'}{\partial x} + \bar{\varrho}\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \ , \tag{2.14a}$$

$$\frac{\partial u'_j}{\partial t} + U\frac{\partial u'_j}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\varrho}}\frac{\partial p'}{\partial x_j} \ , \tag{2.14b}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + U\frac{\partial p'}{\partial x} + \gamma\,\bar{p}\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = 0 \ . \tag{2.14c}$$

Im Weiteren wird analog zum Vorgehen von Ewert et al. [37] bzw. Pankiewitz [98] die Dichteschwankung ϱ in einen isentropen Anteil ϱ^p sowie einen Restanteil ϱ^s aufgespalten:

$$\varrho' = \varrho^p + \varrho^s \ , \tag{2.15}$$

wobei der isentrope Anteil der Dichteschwankung über die Schallgeschwindigkeit $\bar{c}$ an die Druckschwankung $p' = \bar{c}^2\varrho^p$ gekoppelt ist. Für die Geschwindigkeitschwankungen wird eine sogenannte Helmholtz-Zerlegung durchgeführt [37,98]. Dabei lässt sich allgemein u'_i in einen rotationsfreien Anteil u_i^p sowie einen divergenzfreien Anteil u_i^ω aufspalten:

$$u'_i = u_i^p + u_i^\omega \ . \tag{2.16}$$

Ferner ist es zweckmäßig, den rotationsfreien Anteil der Geschwindigkeitsschwankung als Gradient eines Potentials φ auszudrücken:

$$u_i^p = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \ . \tag{2.17}$$

Mit der Definition der Druckschwankung p' auf Basis der substantiellen Ableitung des Potentials [98], d.h.

$$p' = -\bar{\varrho}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + U\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) \ , \tag{2.18}$$

ergeben sich nach Einsetzen der Ausdrücke 2.15 bis 2.18 in das Gleichungssystem 2.14 schließlich drei von einander entkoppelte partielle Differentialgleichungen für die Ausbreitung der Störungen ϱ^s, u_i^ω und φ:

$$\frac{\partial \varrho^s}{\partial t} + U \, \frac{\partial \varrho^s}{\partial x} = 0 \, , \tag{2.19a}$$

$$\frac{\partial u_i^\omega}{\partial t} + U \, \frac{\partial u_i^\omega}{\partial x} = 0 \, , \tag{2.19b}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \varphi - \bar{c}^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0 \, . \tag{2.19c}$$

Betrachtet man das Ergebnis, so fällt sofort auf, dass es sich bei Gleichung 2.19a und Gleichung 2.19b jeweils um eine einfache lineare Transportgleichung, genauer gesagt um eine lineare Advektionsgleichung mit konstanten Koeffizienten handelt. Die allgemeine Lösung dieser partiellen Differentialgleichung 1. Ordnung lautet jeweils:

$$\varrho^s = \varrho^0 \left(t - \frac{x}{U}\right) \; , \quad u_i^\omega = u_i^0 \left(t - \frac{x}{U}\right) \; . \tag{2.20}$$

Man kann diese Lösung als Störungen der Form ϱ^0 bzw. u_i^0 auffassen, die sich mit der konstanten Strömungsgeschwindigkeit U in positive x-Richtung ausbreiten. Die Form der Störungen bleibt dabei während des Transports unverändert. Eine besondere Bedeutung besitzen in diesem Zusammenhang Geraden, welche durch die Bestimmungsgleichung $x - Ut = const.$ definiert sind. Man spricht hier von den sogenannten Charakteristiken, da die Lösung längs dieser Geraden konstant ist.

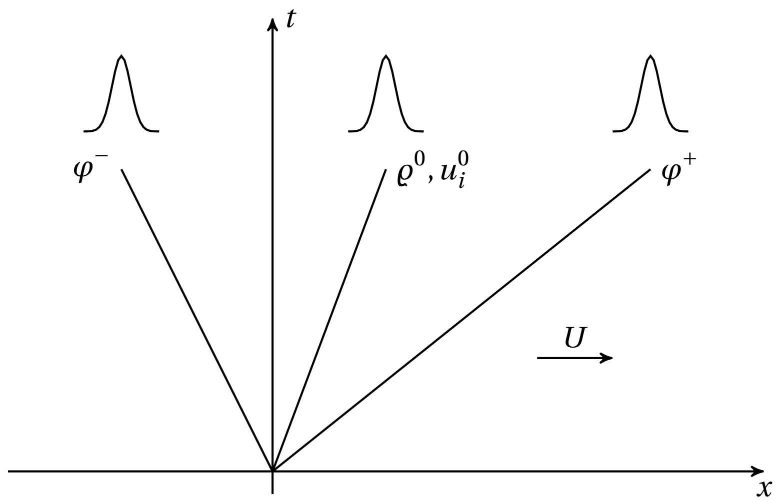


Abbildung 2.1: Ausbreitung der charakteristischen Lösungsbestandteile der linearisierten Eulergleichungen in einem parallelen, gradientenfreien Grundströmungsfeld.

Gleichung 2.19c wiederum stellt eine konvektive Wellengleichung für das Potential φ dar. Für Störungen, welche sich parallel zur mittleren Strömung ausbreiten, ergibt sich folgende allgemeine Lösung:

$$\varphi = \varphi^{+}\left(t - \frac{x}{\bar{c}+U}\right) + \varphi^{-}\left(t + \frac{x}{\bar{c}-U}\right) \ . \tag{2.21}$$

Gleichung 2.21 lässt sich als Überlagerung zweier Störungen φ^{+} und φ^{-} interpretieren, wobei erstere die Ausbreitungsgeschwindigkeit $\bar{c}+U$ besitzt und in positive x-Richtung fortschreitet. φ^{-} hingegen breitet sich mit der Geschwindigkeit $\bar{c}-U$ in die entgegengesetzte Richtung aus. Die Charakteristiken dieser Störungsausbreitung sind somit durch die Geradengleichungen $x-(\bar{c}+U)t = const.$ bzw. $x+(\bar{c}-U)t = const.$ definiert (Abbildung 2.1). Damit wird deutlich, dass das Gleichungssystem 2.14 insgesamt drei charakteristische Lösungen enthält, welche auch als sogenannte Moden bezeichnet werden. Diese besitzen demnach die folgenden grundlegenden Eigenschaften [21]:

- Die Entropiemode ist durch nicht-isentrope Dichtestörungen ϱ^{s} charakterisiert. Diese breiten sich konvektiv mit der Grundströmung U aus.

- Die Wirbelmode beschreibt die Ausbreitung bzw. den Transport divergenzfreier, also quellfreier Geschwindigkeitsstörungen u_i^{ω} in bis zu drei Raumrichtungen. Ebenso wie die Entropiemode wird auch die Wirbelmode mit der Grundströmung U konvektiv transportiert.

- Die Akustikmode schließlich lässt sich auf ein Potential φ zurückführen, welches deshalb auch akustisches Potential genannt wird. Mit ihr sind zum einen Druckstörungen p', aber auch isentrope Dichteschwankungen ϱ^{p} sowie rotationsfreie Geschwindigkeitsstörungen u_i^{p} verbunden.

Diese Ergebnisse lassen sich grundsätzlich auch auf das vollständige Gleichungssystem 2.13 übertragen. Hier ist allerdings zu berücksichtigen, dass sich lediglich für den untersuchten Spezialfall einer parallelen Grundströmung ohne Gradienten vollständig entkoppelte Moden ergeben. Für ein inhomogenes Strömungsfeld tritt im Allgemeinen eine Wechselwirkung zwischen den einzelnen Moden bzw. eine Interaktion mit dem Grundströmungsfeld auf [37, 98]. Damit verbunden ist auch ein gegenseitiger Energieaustausch zwischen den einzelnen Lösungsbestandteilen. Im Hinblick auf thermoakustische Instabilitäten sind insbesondere die Energieaustauschprozesse zwischen der akustischen Mode und den beiden konvektiven Moden von Bedeutung. Um diese Zusammenhänge näher zu beleuchten, wird in Abschnitt 2.6 eine akustische Analogiebetrachtung vorgestellt. Darüber hinaus ergeben sich auch Auswirkungen auf die Stabilität des numerischen Zeitbereichsverfahrens. Dahingehende Details werden später in Kapitel 5 behandelt.

2.3 Analytische Lösung in Zylindergeometrien

Die Ausbreitung akustischer Störungen innerhalb einer Flüssigkeitsraketenbrennkammer ist grundsätzlich in alle drei Raumrichtungen möglich. Eine eindimensionale Betrachtung entsprechend Gleichung 2.21 ist für eine klassische Raketenschubkammer, bestehend aus einem zylinderförmigen Brennkammersegment und einer anschließender Lavaldüse, jedoch meist nicht ausreichend. Um ein grundlegendes Verständnis über die akustische Störungsausbreitung in Raketenschubkammern zu erlangen, wird nachfolgend die dreidimensionale Akustik einer einfachen Zylindergeometrie betrachtet.

Im letzten Abschnitt wurde gezeigt, dass sich die Ausbreitung akustischer Störungen in einem homogenen Strömungsfeld durch eine konvektive Wellengleichung für das Potential φ beschreiben lässt. Unter Verwendung von Gleichung 2.18 sowie einer erneuten Anwendung der substantiellen Ableitung lässt sich das Potential φ eliminieren und durch die Druckstörung p' ersetzen:

$$\frac{1}{\bar{c}^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 p' - \frac{\partial^2 p'}{\partial x_i^2} = 0 \; . \tag{2.22}$$

Für die effiziente Betrachtung der Wellenausbreitung in eimem zylindrischen Brennkammervolumen ist es angebracht, Zylinderkoordinaten (r, ϑ, x) einzuführen. Auf Grundlage der Beziehungen

$$y = r\cos\vartheta\,,\;\; z = r\sin\vartheta \tag{2.23}$$

lässt sich der Laplace-Operator in Gleichung 2.22 in eine Zylinderkoordinatendarstellung überführen [32]. Damit gilt:

$$\frac{1}{\bar{c}^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 p' - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial p'}{\partial r}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 p'}{\partial \vartheta^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0 \; , \tag{2.24}$$

wobei r den radialen Abstand von der x-Achse und ϑ den Polarwinkel bezeichnet. Unter der Annahme harmonischer Zeitabhängigkeit lässt sich eine analytische Lösung der Form

$$p' \sim \hat{p}_r(r)\,\hat{p}_\vartheta(\vartheta)\,\hat{p}_x(x)\,\exp(i\omega t) \tag{2.25}$$

finden [26, 32, 110]. Dabei bezeichnen $\hat{p}_r(r)$, $\hat{p}_\vartheta(\vartheta)$ und $\hat{p}_x(x)$ allgemeine Ansatzfunktionen zur Beschreibung der Lösungsabhängigkeit in der jeweiligen Koordinatenrichtung. Die Ansatzfunktion in Umfangsrichtung $\hat{p}_\vartheta(\vartheta)$ besitzt unter Einbeziehung der Konsistenzbedingung $\hat{p}_\vartheta(\vartheta) = \hat{p}_\vartheta(\vartheta + 2\pi)$ die allgemeine Form [32]:

$$\hat{p}_\vartheta = \hat{F}_\vartheta \exp(-im\vartheta) + \hat{G}_\vartheta \exp(im\vartheta) \; , \tag{2.26}$$

wobei $m \in \mathbb{Z}$. Das Ergebnis kann als Überlagerung zweier gegenläufiger Lösungsbestandteile interpretiert werden. Durch Anpassung der beiden Konstanten $\hat{F}_\vartheta$ und $\hat{G}_\vartheta$ ist es unter anderem möglich, das zeitliche Verhalten der Lösung entscheidend zu beeinflussen. Für $\hat{F}_\vartheta = 0$,

$\hat{G}_\vartheta \neq 0$ bzw. $\hat{F}_\vartheta \neq 0$, $\hat{G}_\vartheta = 0$ rotiert die Druckverteilung bei gleichbleibender Amplitude mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $d\vartheta/dt = \pm\omega/m$ in positive bzw. negative ϑ-Richtung. Man spricht hier von einer reinen Rotationsmode. Für $\hat{F}_\vartheta = \hat{G}_\vartheta \neq 0$ hingegen erhält man eine Überlagerung zweier Lösungsbestandteile mit identischer Amplitude. Daraus resultiert eine Druckverteilung, welche zwar zeitlich schwankt, sich dabei aber nicht dreht. Man spricht dann von einer (in Umfangsrichtung) stehenden Mode. Folgerichtig erhält man mit $\hat{F}_\vartheta \neq 0$, $\hat{G}_\vartheta \neq 0$ und $\hat{F}_\vartheta \neq \hat{G}_\vartheta$ eine Kombination aus rotierender und stehender Mode.

Die Bestimmung der Ansatzfunktion $\hat{p}_r(r)$ führt im Rahmen einer Separation der Variablen auf eine Besselsche Differentialgleichung der Ordnung m. Diese besitzt die allgemeine Lösung [32]:

$$\hat{p}_r = C_1 J_m(\alpha r) + C_2 Y_m(\alpha r) \tag{2.27}$$

mit den Konstanten α sowie C_1 und C_2. Bei J_m und Y_m handelt es sich um Besselfunktionen erster bzw. zweiter Art. Letztere werden auch als Neumann- bzw. Weberfunktionen bezeichnet. Da $Y_m(0) = -\infty$ kann für ein physikalisch korrektes Verhalten nur $C_2 = 0$ gelten. Darüber hinaus muss unter der Annahme schallharter Wände der radiale Anteil der akustischen Geschwindigkeitfluktuation am Ort $r = D_c/2$ verschwinden. Dies ist gleichbedeutend mit $\partial p'/\partial r(r = D_c/2) = 0$ bzw. $dJ_m(\alpha r)/dr(r = D_c/2) = 0$. Um diese Randbedingung zu erfüllen, muss für die Konstante α als Bestandteil der allgemeinen Lösung die Bedingung

$$\alpha = \frac{2\eta_{mn}}{D_c} \tag{2.28}$$

gelten. Dabei bezeichnet η_{mn} die n-te Nullstelle der ersten Ableitung der Besselfunktion m-ter Ordnung, d.h. $dJ_m(\eta_{mn})/dr = 0$. Eine Auflistung der Nullstellen η_{mn} bis zur Ordnung $m = 0$, $n = 2$ ist in Tabelle 2.1 enthalten.

m	n	η_{mn}	Bezeichnung
1	0	1.8413	T1
2	0	3.0543	T2
0	1	3.8317	R1
3	0	4.2012	T3
4	0	5.3175	T4
1	1	5.3313	T1R1
5	0	6.4154	T5
2	1	6.7060	T2R1
0	2	7.0156	R2

Tabelle 2.1: Nullstellen der ersten Ableitung der Besselfunktion J_m, d.h. $dJ_m(\eta_{mn})/dr = 0$ und zugehörige Modenbezeichnungen.

Mit den getroffenen Einschränkungen und Randbedingungen erhält man schließlich für die Lösung in radialer Richtung den Ausdruck

$$\hat{p}_r = C_1 J_m \left(\frac{2\eta_{mn} r}{D_c} \right) . \tag{2.29}$$

An die Konstante C_1 werden keine weiteren Einschränkungen gestellt. Sie ist somit frei wählbar und ermöglicht lediglich eine Skalierung der Amplitude. Mit den Ausdrücken 2.26 und 2.29 ist die Lösung in Umfangs- und radialer Richtung bestimmt. Abbildung 2.2 zeigt die momentane Druckverteilung in einer Querschnittebene für unterschiedliche Moden. Zur Kennzeichnung der Moden wird die im Bereich der Akustik übliche Notation T(m)R(n) verwendet. Demnach besitzt z.B. der Schwingungszustand mit $m = 1$ und $n = 0$ die Bezeichnung T1R0 oder kurz T1.

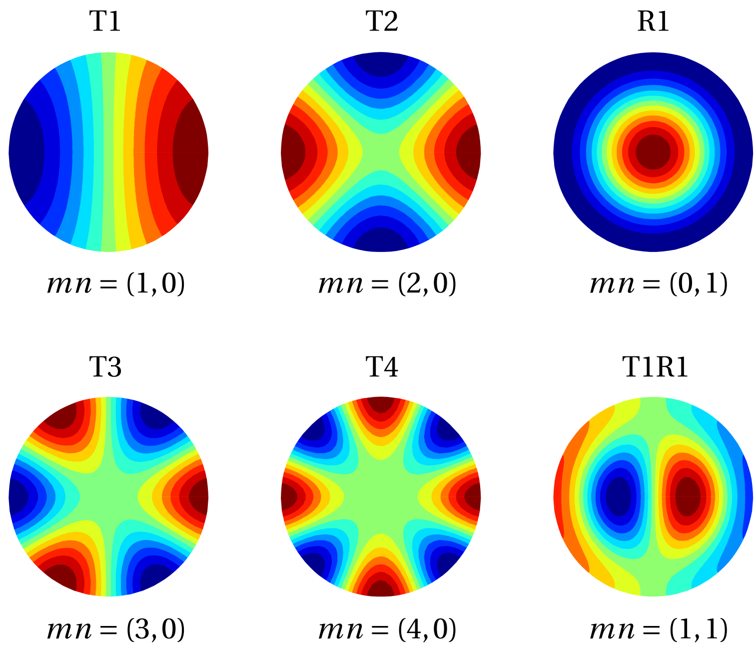


Abbildung 2.2: Momentane Druckverteilung in einer Querschnittebene für unterschiedliche Zylindermoden. Die Farben rot und blau kennzeichnen Bereiche erhöhten bzw. verminderten akustischen Drucks.

Bisher wurde lediglich die Lösung der Wellenausbreitung in der Querschnittsebene bestimmt. Für die Ansatzfunktion in axialer Richtung $\hat{p}_x(x)$ erhält man nach [32, 110] den folgenden Zusammenhang

$$\hat{p}_x = \hat{F}_x \exp(-i k^+_{mn} x) + \hat{G}_x \exp(-i k^-_{mn} x) \tag{2.30}$$

wobei

$$k_{mn}^{\pm} = \frac{-Mk \pm \sqrt{k^2 - (2\eta_{mn}/D_c)^2(1-M^2)}}{1-M^2} \tag{2.31}$$

mit $k = \omega/\bar{c}$ sowie der Machzahl $M = U/\bar{c}$. Analog zur Ansatzfunktion in Umfangsrichtung handelt es sich auch hier um eine Überlagerung zweier gegenläufiger Teillösungen[6]. Interpretiert man diese Teillösungen als Wellen, so bezeichnet $k_{mn}^{\pm}$ die Wellenzahl der stromab bzw. stromauf laufenden Welle mit zugehöriger Amplitude $\hat{F}_x$ bzw. $\hat{G}_x$. Verglichen mit den Konstanten der Ansatzfunktion $\hat{p}_\vartheta$ bestimmen $\hat{F}_x$ und $\hat{G}_x$ in analoger Weise das zeitliche Verhalten der Lösung. So erhält man beispielsweise unter der Annahme $\hat{G}_x = 0$ und $\hat{F}_x \neq 0$ eine Druckverteilung, welche sich bei gleichbleibender Amplitude mit der Geschwindigkeit $dx/dt = \omega/k_{mn}^{+}$ in positive x-Richtung bewegt. Für $\hat{F}_x = 0$ und $\hat{G}_x \neq 0$ hingegen verschiebt sich die Druckverteilung mit $dx/dt = \omega/k_{mn}^{-}$ in negative x-Richtung. In beiden Fällen bleibt die Form der Druckverteilung während der Ausbreitung unverändert. Mit $\hat{F}_x = \hat{G}_x \neq 0$ und $k_{mn}^{+} = k_{mn}^{-}$ ergibt sich wiederum eine Überlagerung zweier gegenläufiger Wellen, wodurch eine stehende Welle resultiert.

Abschließend soll noch auf die Bedeutung von Gleichung 2.31 näher eingegangen werden. Diese, auch als Dispersionsrelation bekannte Beziehung, stellt einen Zusammenhang zwischen den axialen Wellenzahlen $k_{mn}^{\pm}$, der Konstanten $\alpha = 2\eta_{mn}/D_c$, die auch als radiale Wellenzahl bezeichnet werden kann, sowie der Gesamtwellenzahl $k = \omega/\bar{c}$ und der Machzahl $M = U/\bar{c}$ her. Wie aus Gleichung 2.31 hervorgeht, sind für $M = 0$ die axialen Wellenzahlen $k_{mn}^{\pm}$ vom Betrag her identisch. Mit steigender Machzahl tritt allerdings eine zunehmende Asymmetrie in Erscheinung. Demnach nimmt der Betrag der Wellenzahl in Strömungsrichtung zu, die entgegen der Strömung gerichtete Wellenzahl betragsmäßig hingegen ab. Darüber hinaus ergeben sich für

$$\omega < \omega_{mn}^{c} = \bar{c}\,\frac{2\eta_{mn}}{D_c}\sqrt{1-M^2} \tag{2.32}$$

komplexe axiale Wellenzahlen, wodurch die Amplitude der Druckverteilung in ihrer axialen Ausbreitungsrichtung exponentiell abgeschwächt wird, d.h. $\hat{p}_x \sim \exp[\Im(k_{mn}^{\pm})x]$. Erst mit dem Erreichen der sogenannten Cut-On-Winkelgeschwindigkeit ω_{mn}^{c} ist somit eine ungehemmte Ausbreitung möglich. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer regulären Wellenausbreitung [32]. Aufgrund des exponentiellen Abklingverhaltens sind Moden unterhalb

[6] Prinzipiell lässt sich auch die Lösung in radialer Richtung als Überlagerung gegenläufiger Teillösungen interpretieren [32]. Dazu wählt man eine zu Gleichung 2.29 identische Formulierung auf Basis der Hankelfunktionen erster und zweiter Art

$$\hat{p}_r = \hat{F}_r H_m^{(2)}(\alpha r) + \hat{G}_r H_m^{(1)}(\alpha r)\ ,$$

wobei für $\alpha r \gg m$ näherungsweise $H_m^{(1)} \sim \exp(i\alpha r)/\sqrt{\pi\alpha r}$ und $H_m^{(2)} \sim \exp(-i\alpha r)/\sqrt{\pi\alpha r}$. Damit beschreibt $H_m^{(1)}$ eine konvergierende, d.h. entgegen der r-Richtung nach innen laufende Welle. $H_m^{(2)}$ hingegen beschreibt eine divergierende, also nach außen laufende Welle.

der Cut-On-Bedingung im Allgemeinen nicht ausbreitungsfähig. Sie besitzen deshalb praktisch keine Bedeutung. Eine besondere Rolle nehmen jedoch rein longitudinale Moden ein. Da hier $\eta_{mn} = 0$ ist, gilt $\omega^c_{mn} = 0$. Somit besteht für longitudinale Moden keine Ausbreitungsbeschränkung.

2.4 Impedanz, Admittanz, Reflexionsfaktor

Im vorangegangenen Abschnitt wurde zur Diskussion der Wellenausbreitung in Zylindergeometrien bereits kurz auf das akustische Verhalten an schallharten Wänden eingegangen. Dabei wurde lediglich ein Sonderfall behandelt. Im Folgenden sollen zur allgemeinen Beschreibung akustischer Randbedingungen die Begriffe Impedanz, Admittanz und Reflexionsfaktor eingeführt sowie deren Bedeutung näher erläutert werden.

Die akustische Impedanz $\hat{Z}$ ist eine im Bereich der klassischen Akustik weit verbreitete Größe. Sie ist definiert als das lokale Verhältnis aus akustischer Druck- und Geschwindigkeitsstörung, wobei lediglich der Normalenanteil der Geschwindigkeitsstörung zur Bezugsfläche in die Definition miteinfließt:

$$\hat{Z} = \frac{\hat{p}}{\hat{u}_i n_i} \ . \tag{2.33}$$

Die akustische Impedanz ist im Allgemeinen eine komplexe Größe. Der Realteil $\Re(\hat{Z})$ wird üblicherweise als Resistanz, der Imaginärteil $\Im(\hat{Z})$ als Reaktanz bezeichnet. Für den Kehrwert der akustischen Impedanz hingegen ist die Bezeichnung akustische Admittanz $\hat{Y}$ geläufig. Es gilt die Definition:

$$\hat{Y} = \frac{\hat{u}_i n_i}{\hat{p}} \ , \tag{2.34}$$

wobei sich die akustische Admittanz aus der Konduktanz $\Re(\hat{Y})$ sowie der Suszeptanz $\Im(\hat{Y})$ zusammensetzt. Das Produkt aus mittlerer Dichte $\bar{\varrho}$ und zugehöriger Schallgeschwindigkeit $\bar{c}$ wird als spezifische akustische Impedanz bzw. auch als Wellenwiderstand eines Fluids bezeichnet. Diese charakteristische Größe lässt sich nutzen, um eine dimensionslose Darstellung der akustischen Impedanz bzw. Admittanz zu erhalten:

$$\hat{Z}^* = \frac{1}{\bar{\varrho}\bar{c}} \frac{\hat{p}}{\hat{u}_i n_i} \ , \quad \hat{Y}^* = \bar{\varrho}\bar{c} \frac{\hat{u}_i n_i}{\hat{p}} \ . \tag{2.35}$$

Mit Hilfe der akustischen Impedanz bzw. Admittanz ist es möglich, das lokale akustische Verhalten an Berandungen und Grenzflächen eindeutig zu charakterisieren. Dennoch handelt es sich bei diesen Größen um relativ abstrakte Formulierungen. Eine anschaulichere Beschreibung akustischer Randbedingungen ist anhand von Reflexionsfaktoren möglich. Wie die Bezeichnung bereits erkennen lässt, handelt es sich hier um das Amplitudenverhältnis aus reflektierter und einlaufender Welle. Mathematisch ausdrücken lässt sich dieser Zusammenhang als

$$\hat{R} = \frac{\hat{g}}{\hat{f}} \tag{2.36}$$

mit $\hat{f}$ als der in Normalenrichtung einlaufenden Welle und $\hat{g}$ als der sich entgegensetzt ausbreitenden reflektierten Welle. $\hat{f}$ und $\hat{g}$ sind über die Beziehungen

$$\hat{f} = \frac{\hat{p}}{\bar{\varrho}\bar{c}} + \hat{u}_i n_i \ , \quad \hat{g} = \frac{\hat{p}}{\bar{\varrho}\bar{c}} - \hat{u}_i n_i \tag{2.37}$$

mit der lokalen akustischen Druckstörung sowie der zugehörigen akustischen Schnelle verknüpft. Ebenso wie die akustische Impedanz bzw. Admittanz ist auch der Reflektionsfaktor im Allgemeinen eine komplexe Größe, wodurch nicht nur eine Skalierung der Amplitude, sondern auch eine Änderung der Phasenlage zwischen einlaufender und reflektierter Welle beschrieben werden kann. Abgesehen davon sind Reflektionsfaktoren per Definition dimensionslos.

Unter Verwendung der Beziehungen 2.35 - 2.37 lassen sich akustische Impedanz, akustische Admittanz und Reflektionsfaktor direkt ineinander überführen. Demnach gilt u.a.

$$\hat{R} = \frac{\hat{Z}^* - 1}{\hat{Z}^* + 1} = \frac{1 - \hat{Y}^*}{1 + \hat{Y}^*} \ . \tag{2.38}$$

2.5 Energiebetrachtung

Im Rahmen der nachfolgenden Abschnitte soll die Erhaltung der thermoakustischen Störungsenergie näher betrachtet werden. Die dabei gewonnenen Erkenntnisse über die Wirkung von Quelltermen und den Transport von thermoakustischer Energie bilden die Grundlage für das Verständnis von Anfachung und Dämpfung. Letztere stellt einen wesentlichen Diskussionspunkt der verfassten Arbeit dar.

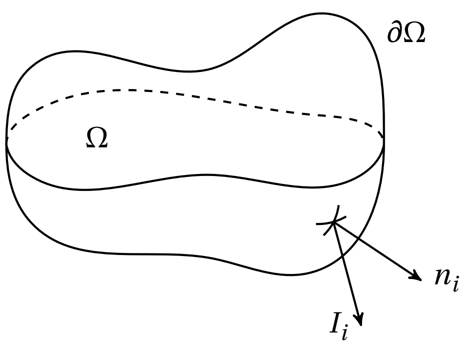


Abbildung 2.3: Kontrollvolumen Ω zur Bilanzierung der Störungsenergie

Zur Diskussion der thermoakustischen Energiebilanz wird ein Kontrollvolumen entsprechend Abbildung 2.3 betrachtet. Bezeichnet E die volumenspezifische Energiedichte der Störungen im Kontrollvolumen Ω, so lässt sich allgemein ein Erhaltungsgesetz der Form

$$\frac{d}{dt}\iiint_{\Omega} E\,dV + \iint_{\partial\Omega} n_i I_i\,dA = \iiint_{\Omega} D\,dV \tag{2.39}$$

aufstellen. Dabei bezeichnet I_i den Vektor der Flussdichte an den Berandungsflächen $\partial\Omega$, n_i den zugehörigen nach außen gerichteten Flächennormalenvektor und D die Quellen- bzw. Senkendichte im Kontrollvolumen. Gleichung 2.39 besagt, dass sich die zeitliche Änderung der Gesamtenergie des Störungsfelds aus einer Bilanzierung der Flüsse an den Berandungsflächen und Quellen bzw. Senken im Kontrollvolumen ergibt. Betrachtet man über ein charakteristisches Zeitmaß T_a gemittelte Größen, so lässt sich ein allgemeines Stabilitätskriterium definieren:

$$\text{STABILITÄT} \quad \Leftrightarrow \quad \iiint_{\Omega} \langle D\rangle\,dV - \iint_{\partial\Omega} \langle n_i I_i\rangle\,dA < 0 \tag{2.40}$$

wobei

$$\langle\cdot\rangle = \frac{1}{T_a}\int_0^{T_a} (\cdot)\,dt\ . \tag{2.41}$$

Gleichung 2.39 beschreibt die Erhaltung der volumenspezifischen Energiedichte in integraler Form. Durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes kann das Oberflächenintegral in Gleichung 2.39 in ein entsprechendes Volumenintegral überführt werden. Damit erhält man ein äquivalentes Erhaltungsgesetz in differentieller Form

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial I_i}{\partial x_i} = D\ . \tag{2.42}$$

Um obige Ansätze zur Beurteilung bzw. zur Analyse thermoakustischer Problemstellungen heranziehen zu können, ist eine Definition der Größen E, I_i sowie D erforderlich. Dazu wird üblicherweise auf die klassischen Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie zurückgegriffen. Für einfache Strömungsverhältnisse ist man in der Lage, durch entsprechende Umformungen ein Erhaltungsgestz der Form 2.39 bzw. 2.42 abzuleiten. Für komplexe Strömungen hingegen ist eine eindeutige Definition meist nicht mehr möglich[7]. Eine Energiebetrachtung ist unter diesen Bedingungen somit deutlich erschwert [16, 43, 64].

[7] Zur Verdeutlichung dieser Tatsache betrachtet man den folgenden Zusammenhang, wobei f_i eine allgemeine differenzierbare Vektorfunktion bezeichnet [39]:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(E + \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(I_i - \frac{\partial f_i}{\partial t}\right) = \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial I_i}{\partial x_i} = D\ .$$

Demnach wird das Erhaltungsgesetz 2.42 ebenso durch den Ausdruck $E + \partial f_i/\partial x_i$ für die Energiedichte sowie den Ausdruck $I_i - \partial f_i/\partial t$ für den Fluss erfüllt.

2.5.1 Energiebetrachtung im ruhenden Medium

Eine relativ problemlose Bilanzierung der Störungsenergie, basierend auf einem Erhaltungsgesetz der Form 2.42 bzw. 2.39, lässt sich unter der Annahme eines verschwindenden mittleren Strömungsfelds erzielen. Ausgangspunkt für eine Herleitung sind die linearisierte Impuls- bzw. Energiegleichung. Unter der Annahme von $\bar{u}_i = 0$ sowie $\bar{S}_\varrho = 0$, $\bar{S}_i = 0$, $\bar{S}_e = 0$ reduzieren sich die Gleichungen 2.13b und 2.13b auf

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} = -\frac{1}{\bar{\varrho}}\frac{\partial p'}{\partial x_i} + \frac{1}{\bar{\varrho}} S_i' \ , \tag{2.43}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \gamma \bar{p} \frac{\partial u_j'}{\partial x_j} = (\gamma - 1) S_e' \ . \tag{2.44}$$

Im Folgenden wird zunächst Gleichung 2.43 mit $\bar{\varrho} u_i'$ und Gleichung 2.44 mit $p'/\bar{\varrho}\bar{c}^2$ multipliziert. Anschließend werden die sich ergebenden Gleichungen addiert, wodurch sich folgender Zusammenhang ergibt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p'^2}{2\bar{\varrho}\bar{c}^2} + \frac{\bar{\varrho} u_i' u_i'}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(p' u_i'\right) = \frac{\gamma - 1}{\bar{\varrho}\bar{c}^2} p' S_e' + u_i' S_i' \ . \tag{2.45}$$

Betrachtet man das Ergebnis, so wird klar, dass Gleichung 2.45 ein Erhaltungsgesetz der Form 2.42 darstellt, wobei sich für die Störungsenergie E, die Flussdichte I_i sowie den Quellterm D folgende Definitionen ergeben:

$$E = \frac{p'^2}{2\bar{\varrho}\bar{c}^2} + \frac{\bar{\varrho} u_i' u_i'}{2} \ , \tag{2.46}$$

$$I_i = p' u_i' \ , \tag{2.47}$$

$$D = \frac{\gamma - 1}{\bar{\varrho}\bar{c}^2} p' S_e' + u_i' S_i' \ . \tag{2.48}$$

Wie aus 2.46 hervorgeht, setzt sich die Energiedichte E aus zwei Termen zusammen, wobei ersterer als potentieller Anteil und letzterer als kinetischer Anteil der Störungen interpretiert werden kann. Die Flussdichte I_i wiederum ist gemäß 2.47 durch das Produkt aus Druck- und Geschwindigkeitsstörung gegeben.

Der Quellterm D besitzt unter anderem einen Term proportional zum Produkt aus p' und S_e'. Je nachdem welche Phasenbeziehung zwischen der akustischen Druckschwankung p' und der Störung der Energiezufuhr S_e' vorliegt, ergibt sich dadurch ein anfachender oder ein dämpfender Beitrag zur Gesamtenergiebilanz. Dies bedeutet, dass einer thermoakustischen Schwingung für

$$\iiint_\Omega \langle p' S_e' \rangle \, dV > 0 \tag{2.49}$$

weitere Energie zugeführt wird. Gleichung 2.49 besagt also, dass zur Produktion von akustischer Energie das Produkt aus Druckschwankung und Energiezufuhrschwankung gemittelt über das charakteristische Zeitmaß sowie integriert über das Kontrollvolumen einen positiven Wert annehmen muss. Damit entspricht diese Aussage dem von Rayleigh [104] erstmals 1878 formulierten Kriterium zur Entstehung selbsterregter thermoakustischer Schwingungen. Wie bereits zu Beginn dieser Arbeit erwähnt wurde, ist das Rayleigh Kriterium lediglich als notwendige aber nicht hinreichende Bedingung für thermoakustisch instabiles Verhalten aufzufassen. Gemäß Gleichung 2.40 ergibt sich die Stabilität eines thermakustischen Systems aus einer Bilanzierung der Störungsenergie. Dies bedeutet, dass zur Ausbildung einer selbsterregten Schwingung infolge eines positiven Rayleigh-Integrals die zugeführte Energie die Energieverluste übersteigen muss.

Ebenso wie die Fluktuation der Energiezufuhr S'_e besitzt auch eine zeitlich schwankende Impulsquelle S'_i das Potential, einer thermoakustischen Schwingung weitere Energie zuzuführen bzw. zu entziehen. Auch hier kommt der Phasenbeziehung zwischen u'_i und S'_i eine große Bedeutung zu. Da es sich bei u'_i und S'_i um vektorielle Größen handelt, spielen hier aber auch die Richtungsverhältnisse eine entscheidende Rolle.

Formal besitzen die Energiedichte E sowie die Flussdichte I_i gemäß 2.46 bzw. 2.47 die selbe Definition wie die erstmals von Kirchhoff [99] eingeführte akustische Energiedichte. Kirchhoff geht dabei ebenfalls von einem ruhenden Medium aus, ohne aber den Einfluss von Quelltermen zu berücksichtigen. Dadurch besitzt das Störungsfeld ausschließlich akustischen Charakter, d.h. $u'_i = u^p_i$. Der Ausdruck akustische Energiedichte ist hier somit gerechtfertigt. Demgegenüber gilt unter Quelltermeinfluss im Allgemeinen $u'_i = u^p_i + u^\omega_i$, wodurch in diesem Fall lediglich von Störungsenergie[8] gesprochen werden kann. Zur besseren Verdeutlichung dieses Sachverhalts betrachtet man die Wirbelstärkegleichung, die man durch Anwendung des Rotationsoperators $\mathrm{rot}(\,\cdot\,)_i := \epsilon_{ijk}\partial(\,\cdot\,)_k/\partial x_j$ auf die Impulsgleichung 2.43 erhält:

$$\frac{\partial \omega'_i}{\partial t} = \frac{1}{\bar{\varrho}} \mathrm{rot}\, S'_i \; , \tag{2.50}$$

wobei $\omega'_i = \mathrm{rot}\, u'_i$ die Störung der Wirbelstärke bezeichnet. Aus Gleichung 2.50 geht hervor, dass ein rotationsbehaftetes Impulsquellenfeld zur Anfachung nicht-akustischer Geschwindigkeitsstörungen führt. Aus thermoakustischer Sicht ist jedoch nur die Anregung rotationsfreier Geschwindigkeitsstörungen von Bedeutung. Dennoch würde ein Anwachsen dieser Geschwindigkeitsstörungen zu einer Zunahme der Energiedichte gemäß der Definition 2.46 führen. Dies verdeutlicht nochmals die bereits in Abschnitt 2.5 angesprochene Problematik einer (akustischen) Energiebilanz in komplexen Strömungsverhältnissen.

[8] Soll die gesamte Störungsenergie betrachtet werden, so ist nach Nicoud und Poinsot [92] eine Definition der Energiedichte entsprechend 2.46 nicht mehr ausreichend, da hier lediglich der Einfluss von akustischen Störungen und Wirbelstärkefluktuationen berücksichtigt ist. Der Einfluss von Entropiemoden fehlt hingegen. Um Letztere zu berücksichtigen, schlagen Nicoud und Poinsot auf Grundlage der Arbeiten von Chu [20] die Erweiterung von E um den Term $\bar{\varrho}\bar{T}s'^2/(2c_p)$ vor, wobei s' die Störung der spezifischen Entropie bezeichnet. Für eine tiefergehende Diskussion dieser Energiedefinition und der damit verbundenen Konsequenzen sei an dieser Stelle auf [92], [43] und [16] verwiesen.

2.5.2 Konvektiver Energietransport

Im vorangegangenen Abschnitt wurde davon ausgegangen, dass sich innerhalb des betrachteten Kontrollvolumens ein im zeitlichen Mittel ruhendes, gradientenfreies Medium befindet. Bezüglich einer Anwendung in Raketenbrennkammern ist diese Vereinfachung spätestens im Einflussbereich der Düse nicht mehr gerechtfertigt. Die Beschränkung auf ein ruhendes Medium wird im Rahmen dieses Abschnitts fallen gelassen. Um allerdings eine Diskussion über die Bedeutung unterschiedlicher, d.h. akustischer bzw. hydrodynamischer Störgrößen von vornherein ausschließen zu können, wird stattdessen der Einfluss sämtlicher Quellterme vernachlässigt und ein homentropes Grundströmungsfeld betrachtet. Unter diesen Vorraussetzungen lässt sich auf Grundlage der Arbeiten von Morfey [87] die volumenspezifische Energiedichte und der dazugehörige Fluss wie folgt definieren:

$$E = \frac{p'^2}{2\bar{\varrho}\bar{c}^2} + \frac{\bar{\varrho} u_i' u_i'}{2} + \frac{p'}{\bar{c}^2} \bar{u}_i u_i' \ , \tag{2.51}$$

$$I_i = p' u_i' + \bar{\varrho} u_i' \bar{u}_j u_j' + \frac{p'}{\bar{c}^2} \bar{u}_i \bar{u}_j u_j' + \bar{u}_i \frac{p'^2}{\bar{\varrho}\bar{c}^2} \ , \tag{2.52}$$

wobei der Quellen- bzw. Senkenterm $D = 0$. Mit der Beschränkung auf isentrope Potentialströmungen wird davon ausgegangen, dass das Strömungsfeld ausschließlich von akustischen Störungen überlagert ist. In diesem Fall ist E als akustische Energie und I_i als zugehöriger akustischer Fluss aufzufassen.

Vergleicht man die akustische Energie bzw. Flussdichte gemäß 2.51 bzw. 2.52 mit den entsprechenden Definitionen im ruhenden Medium, so stellt man fest, dass sich insbesondere für die Flussdichte mehrere Zusatzterme ergeben. Zur besseren Interpretation schlägt Morgenweck [88] vor, Gleichung 2.52 wie folgt zu faktorisieren:

$$I_i = \left(\bar{\varrho} u_i' + \frac{p'}{\bar{c}^2} \bar{u}_i\right) \left(\frac{p'}{\bar{\varrho}} + \bar{u}_j u_j'\right) = m_i' h_t' \ . \tag{2.53}$$

Dabei bezeichnen m_i' und h_t' die bis zur ersten Ordnung genauen Schwankungen der Massenstromdichte bzw. der spezifischen Totalenthalpie für jeweils isentrope Störungen [87,91]. Die Flussdichte I_i lässt sich demnach allgemein als Schwankung der Totalenthalpiestromdichte auffassen. Durch die Anwesenheit einer mittleren Strömung wird sowohl die Schwankung der Massenstromdichte, als auch der Totalenthalpie beeinflusst, was letztendlich in drei Zusatztermen für die Definition der Flussdichte resultiert.

Zur Beurteilung des energetischen Verhaltens akustischer Randbedingungen ist es von Vorteil, den Zusammenhang zwischen der zeitlich gemittelten Flussdichte $\langle n_i I_i \rangle$ und der akustischen Impedanz bzw. Admittanz näher zu betrachten. Unter der Annahme einer konstanten mittleren Strömung in Normalenrichtung n_i lässt sich Gleichung 2.52 auf die Gestalt

$$n_i I_i = \left(1 + M^2\right) p' n_i u_i' + M \bar{\varrho}\bar{c} \left(n_i u_i'\right)^2 + M \frac{p'^2}{\bar{\varrho}\bar{c}} \tag{2.54}$$

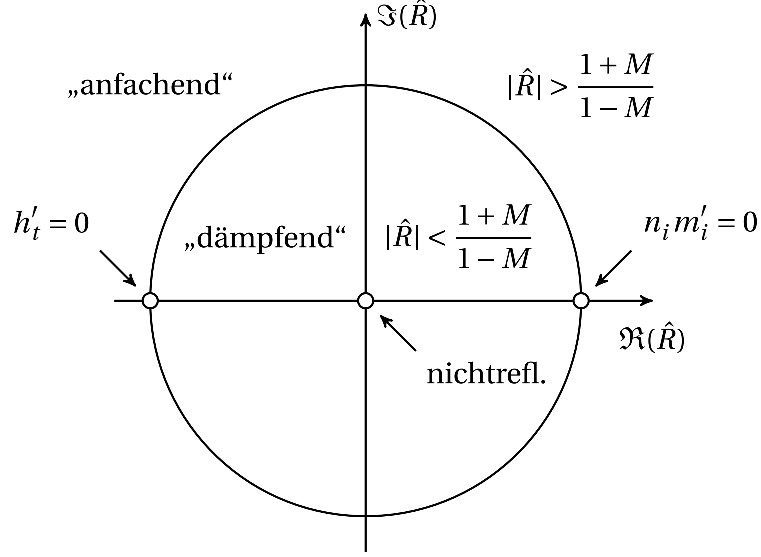


Abbildung 2.4: Darstellung des Reflexionsfaktors $\hat{R}$ in der komplexen Ebene.

bringen. M bezeichnet dabei die Machzahl der mittleren Strömung in Normalenrichtung. Um eine Verbindung mit den komplexen Größen Impedanz und Admittanz herzustellen, wird üblicherweise ein harmonischer Ansatz für die Druckschwankung p' und die Geschwindigkeitsschwankung in Normalenrichtung $n_i u_i'$ getroffen:

$$p' = \Re[\hat{p}\,\exp(i\omega t)] \ , \qquad n_i u_i' = \Re[n_i \hat{u}_i \exp(i\omega t)] \ . \tag{2.55}$$

Durch Einsetzen in Gleichung 2.54 und anschließender Anwendung des Mittelungsoperators 2.41 gelangt man schließlich auf folgende Beziehung zwischen der dimensionslosen Admittanz $\hat{Y}^*$ und der zeitlich gemittelten Flussdichte [18]:

$$\langle n_i I_i \rangle = \frac{1}{2\bar{\varrho}\bar{c}} |\hat{p}|^2 \left[\left(1 + M^2\right) \Re(\hat{Y}^*) + M |\hat{Y}^*|^2 + M \right] \ . \tag{2.56}$$

Analog erhält man eine gleichwertige Beziehung für die dimensionslose Impedanz $\hat{Z}^*$:

$$\langle n_i I_i \rangle = \frac{1}{2} \bar{\varrho}\bar{c}\, |\hat{u}|^2 \left[\left(1 + M^2\right) \Re(\hat{Z}^*) + M |\hat{Z}^*|^2 + M \right] \ . \tag{2.57}$$

Gleichung 2.56 bzw. 2.57 lässt sich u.a. dazu nutzen, um eine energieneutrale Randbedingung, d.h. $\langle n_i I_i \rangle = 0$ zu definieren. Mit der Einschränkung $\Im(\hat{Y}^*) = 0$ erhält man beispielsweise für die Admittanz die Bedingungen $\hat{Y}^* = -M$ sowie $\hat{Y}^* = -1/M$. Dabei entspricht erstere einer verschwindenden Massenstromdichtenschwankung $n_i m_i' = 0$ und letztere einer verschwindenden Störung der spezifischen Totalenthalpie $h_t' = 0$. Verwendet man den Reflexionsfaktor $\hat{R}$, so lassen sich die Verhältnisse in der komplexen Ebene besonders anschaulich darstellen. Hier gilt für energetisch neutrales Verhalten allgemein die Bedingung $|\hat{R}| = (1+M)/(1-M)$. In der komplexen Ebene entspricht dies einem Kreis um den Ursprung. Für $|\hat{R}| < (1+M)/(1-M)$

gilt im Allgemeinen $\langle n_i I_i \rangle > 0$. Der akustische Fluss ist somit nach außen gerichtet und das System verliert Energie („dämpfende“ Wirkung). Für $|\hat{R}| > (1+M)/(1-M)$ hingegen ist $\langle n_i I_i \rangle$ nach innen gerichtet, dem System wird also akustische Energie zugeführt („anfachende“ Wirkung). Die bereits angesprochenen Sonderfälle $n_i m_i' = 0$ bzw. $h_t' = 0$ ergeben sich als Schnittpunkte des energieneutralen Zustands mit der reellen Achse.

2.6 Akustische Analogie

Wie bereits erwähnt, wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit eine quantitativ richtige Simulation der akustischen Dämpfung einer Raketenschubkammer angestrebt. Dazu ist ein grundlegendes Verständnis über die zu erwartenden Verlustmechanismen erforderlich. In Abschnitt 2.5.1 wurde die anfachende bzw. dämpfende Wirkung allgemeiner Quellterme auf Basis einer Energiebetrachtung diskutiert. Aufgrund der Überlagerung akustischer und nichtakustischer Störungsanteile sowie der generellen Schwierigkeit eine geeignete Definition für die Größen E, I_i sowie D zu finden (Abschnitt 2.5), ist eine Energiebetrachtung nur bedingt dazu geeignet akustische Dämpfungsmechanismen in einer Raketenschubkammer zu identifizieren.

Einen Ausweg bietet die Betrachtung einer akustischen Analogie. Dabei wird, ausgehend von den bekannten Erhaltungsgleichungen, versucht, durch entsprechende Umformungen bzw. Vereinfachungen zu einer Formulierung zu gelangen, die den Charakter einer inhomogenen akustischen Wellengleichung besitzt. Innerhalb dieser beschreibt die rechte Seite die zu identifizierenden akustischen Quellen bzw. Senken. Im Folgenden wird ein Ansatz zur Identifikation potentieller Verlustmechanismen vorgestellt. Ziel ist es, eine theoretische Grundlage für die in dieser Arbeit beobachteten Dämpfungsprozesse zu legen.

Um eine für thermoakustische Instabilitäten geeignete Form einer akustischen Analogie herzuleiten[9], werden zunächst die instantanen Erhaltungsgleichungen für Impuls und Energie herangezogen. Nach Erweiterung der Impulserhaltung mit $c^2/(\gamma p)\,\partial p/\partial x_i$ und unter Verwendung des allgemeinen Zusammenhangs $d\ln(x)/dx = 1/x$ gilt:

$$\frac{Du_i}{Dt} + \frac{c^2}{\gamma}\frac{\partial \ln(p)}{\partial x_i} = \frac{1}{\varrho}S_i + \left(\frac{c^2}{\gamma p} - \frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial x_i}\ , \tag{2.58}$$

$$\frac{1}{\gamma}\frac{D\ln(p)}{Dt} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{\gamma - 1}u_j\frac{\partial \ln(\gamma)}{\partial x_j} + \frac{\gamma - 1}{\gamma p}S_e\ , \tag{2.59}$$

wobei hier $D(\,\cdot\,)/Dt = \partial(\,\cdot\,)/\partial t + u_i\partial(\,\cdot\,)/\partial x_i$ den Operator der substantiellen Ableitung bezeichnet. Anschließend wird $\partial(\cdot)/\partial x_i$ auf 2.58 und $D(\cdot)/Dt$ auf 2.59 angewandt und die sich

[9] Eine ausführliche Herleitung findet sich im Anhang B.

ergebenden Gleichungen voneinander subtrahiert, wodurch schließlich

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{c^2}{\gamma}\frac{\partial \ln(p)}{\partial x_i}\right)-\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{D\ln(p)}{Dt}\right)=$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\varrho}S_i\right)+\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{c^2}{\gamma p}-\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial x_i}\right]$$

$$-\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\gamma-1}u_j\frac{\partial \ln(\gamma)}{\partial x_j}+\frac{\gamma-1}{\gamma p}S_e\right)-\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{2.60}$$

resultiert. Betrachtet man Gleichung 2.60, so lässt sich die linke Seite formal als eine konvektive Wellengleichung für die Variable $\ln(p)$ auffassen [102]. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Wellen c ist dabei räumlich variabel. Die rechte Seite beschreibt den Einfluss verschiedener Interaktionsmechanismen auf die Wellenausbreitung. Wie bereits im Rahmen einer Energiebetrachtung gezeigt wurde, ist die akustische Störungsausbreitung durch Energie- und Impulsquellen beeinflusst. Dieses Ergebnis wird hier ebenso bestätigt. Gleichung 2.60 erlaubt aber auch darüber hinaus gehende Aussagen. So beschreibt der zweite Term der rechten Seite einen Quellenmechanismus, basierend auf einer Interaktion zwischen nicht-isentropen Dichtestörungen bzw. Entropiemoden und räumlichen Druckgradienten. In einer Raketenschubkammer ist dieser Term vor allem im Einflussbereich der Düse von Bedeutung. Entropiemoden, welche durch turbulente Verbrennungsprozesse generiert werden, erfahren hier (infolge des Druckgradienten) eine starke Beschleunigung, wodurch eine Kopplung und somit ein Energieaustausch mit den akustischen Störungen einhergeht. Akustische Energie, welche auf diese Weise generiert wird, wird üblicherweise als indirekter Verbrennungslärm, Entropielärm oder auch als sogenannte „akustische Bremsstrahlung“[10] [40] bezeichnet.

Gleichung 2.60 wurde bisher nicht linearisiert. Für kleine Druckstörungen, d.h. $p'/\bar{p} \ll 1$ lässt sich $\ln(p)$ in eine Taylorreihe um $\bar{p}$ entwickeln, welche nach dem ersten Reihenglied abgebrochen wird. Beschränkt man sich darüber hinaus auf den Bereich kleiner Machzahlen (wie beispielsweise innerhalb der Einpritz- und Verbrennungszone), so kann in erster Näherung $D(\cdot)/Dt$ durch $\partial(\cdot)/\partial t$ approximiert und $\bar{p}$ als konstant betrachtet werden [102]. Unter der Annahme $\gamma = const.$ reduziert sich damit die linke Seite von Gleichung 2.60 auf die klassische Form der Wellengleichung mit örtlich variabler Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}=\gamma\bar{p}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\varrho}S_i\right)$$

$$-(\gamma-1)\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(1-\frac{p'}{\bar{p}}\right)S_e\right]-\gamma\bar{p}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\ . \tag{2.61}$$

[10] In Analogie zur (elektromagnetischen) Bremsstrahlung, die durch Impulsänderung (Beschleunigung bzw. Verzögerung) geladener Teilchen entsteht.

Zum besseren Verständnis ist es von Vorteil, den letzten Term auf der rechten Seite von Gleichung 2.61 weiter aufzuspalten. Es gilt:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\vec{\omega} \times \vec{u})_i + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}|\vec{u}|^2\right)\right] - u_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\right) . \tag{2.62}$$

Für kleine Mach- bzw. Helmholtzzahlen dominiert vor allem der erste Term auf der rechten Seite von 2.62. Vergleicht man Gleichung 2.62 mit 2.61, so lässt sich der dominierende Term als äquivalente Impulsquelle der Form

$$S_i^{\omega} = -\varrho\,(\vec{\omega} \times \vec{u})_i \tag{2.63}$$

ausdrücken. Damit äußert sich die primäre Wirkung des letzten Terms auf der rechten Seite von Gleichung 2.61 durch ein Coriolis-Kraftdichtefeld, welches durch Rotation des Fluids entsteht.

Gleichung 2.63 lässt sich nutzen, um die akustische Quellen- bzw. Senkenleistung des Coriolis-Kraftdichtefelds in einem Kontrollvolumen Ω zu bestimmen. Aus Abschnitt 2.5.1 ist bekannt, dass das Produkt aus Impulsquelle (in diesem Falle S_i^{ω}) und akustischer Schnelle u_i^p eine Quelle bzw. Senke akustischer Energie darstellt. Somit gilt unter der Annahme $\varrho \simeq \bar{\varrho}$ für die im zeitlichen Mittel umgesetzte akustische Leistungsdichte:

$$\langle D^{\omega} \rangle = -\bar{\varrho} \langle (\vec{\omega} \times \vec{u})_i \, u_i^p \rangle . \tag{2.64}$$

Gleichung 2.64 entspricht in dieser Form dem von Howe [55–57] formulierten Ausdruck zur Bestimmung der akustischen Dissipation in rotationsbehafteten Strömungen. Es sei darauf hingewiesen, dass die Interaktion zwischen akustischen Störungen und Wirbelstärkeschwankungen nicht zwangsläufig dissipativen Charakter besitzen muss. Wie in Abschnitt 2.5.1 allgemein für Impulsquellen diskutiert wurde, spielen hier sowohl die Phasenbeziehung, als auch die Richtungsverhältnisse zwischen dem Coriolis-Kraftdichtefeld und der akustischen Schnelle eine entscheidende Rolle. Im Falle von $\langle D^{\omega} \rangle > 0$ führt die Interaktion zwischen akustischen und hydrodynamischen Fluktuationen zur Produktion zusätzlicher akustischer Energie. Man spricht in diesem Fall auch von sogenanntem Wirbelschall [57, 110].

Betrachtet man die Verhältnisse in einer Flüssigkeitsraketenschubkammer, so kann davon ausgegangen werden, dass eine dissipative Wechselwirkung zwischen der akustischen Schnelle und den Wirbelstärkeschwankungen vor allem in unmittelbarer Nähe zur Einspritzebene erfolgt. Um dies zu verdeutlichen, sind in Abbildung 2.5a und 2.5b die Verhältnisse in Injektornähe graphisch dargestellt. Dabei wird davon ausgegangen, dass eine Interaktion zwischen der Akustik der Brennkammer und der Akustik der Injektoren besteht. Während der positiven Halbwelle mit $0 < t < T_f/2$, wobei T_f die Schwingungsdauer bezeichnet, zeigt die akustische Schnelle nach außen, d.h. in positive x-Richtung (Abbildung 2.5a). Damit verbunden ist die Ablösung einzelner Wirbel, welche anschließend aufgrund der Injektorströmung in postive x-Richtung transportiert werden. Das Coriolis-Kraftdichtefeld der abgelösten Wirbel $-(\vec{\omega} \times \vec{u})_i$ ist dabei zur Symmetrieachse der Injektorbohrung hin gerichtet. Das Vektorfeld der akustischen Schnelle u_i^p hingegen besitzt in erster Näherung die Gestalt einer Potentialströmung.

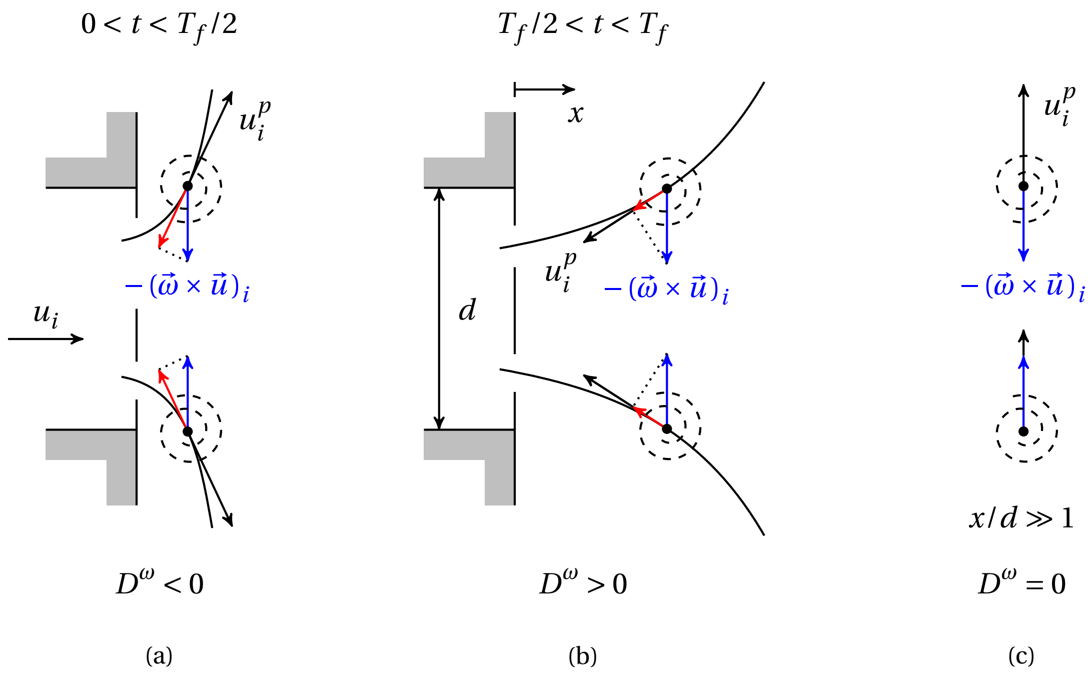


Abbildung 2.5: Interaktion zwischen der akustischer Schnelle u_i^p und dem Coriolis-Kraftdichtefeld $-(\vec{\omega} \times \vec{u})_i$: Dissipative Interaktion (a), anfachende Interaktion (b), energetisch neutrale Interaktion (c).

In unmittelbarer Nähe zur Ablösekante zeigt die akustische Schnelle annähernd singuläres Verhalten. Darüber hinaus stehen die Vektorfelder der akustischen Schnelle und des Coriolis-Kraftdichtefelds in diesem Bereich annähernd anti-parallel zueinander, wodurch sich eine maximale Dämpfungswirkung ($D^{\omega} < 0$) ergibt [54, 110]. Während der negativen Halbwelle mit $T_f/2 < t < T_f$ zeigt die akustische Schnelle nach innen, d.h. in negative x-Richtung (Abbildung 2.5b). Eine Ablösung von Wirbel ist in diesem Fall nicht zu erwarten. Wie aus Abbildung 2.5b zu entnehmen ist, besitzt die Interaktion der Wirbelstärkeschwankungen mit der akustischen Schnelle während der negativen Halbwelle eine anfachende Wirkung ($D^{\omega} > 0$). Allerdings befinden sich die zuvor ausgebildeten Wirbel für $T_f/2 < t < T_f$ deutlich weiter stromab der Einspritzebene. Die sich dabei ergebenden Richtungsverhältnisse führen deshalb meist zu einer deutlich reduzierten Interaktionswirkung, sodass die Dämpfungswirkung in der Summe deutlich überwiegt [54, 110]. Befindet man sich jedoch außerhalb des Einflussbereichs der Injektorbohrung ($x/d \gg 1$), so ist die Wirkung der Interaktion im Allgemeinen energieneutral ($D^{\omega} = 0$). Abbildung 2.5c verdeutlicht die Interaktionsverhältnisse am Beispiel einer tangentialen Brennkammerschwingung. Das Vektorfeld der akustischen Schnelle ist in ausreichender Entfernung zur Einspritzebene nicht länger durch die Akustik der Injektoren beeinflusst. Unter der Annahme $d \ll \lambda$, wobei λ die Wellenlänge der Brennkammerschwingungen bezeichnet bzw. unter der Annahme einer symmetrischen Schwingung[11] hebt sich

[11] In diesem Fall würde sich die Wirkung über die gesamte Schwingungsdauer aufheben.

deshalb die Interaktionswirkung über den gesamten Ringwirbel betrachtet vollständig auf. Dabei gilt diese Aussage nicht nur für tangentiale Schwingungsformen, sondern ebenso für longitudinale und kombinierte Brennkammermoden.

Der hier dargestellte Verlustmechanismus ermöglicht es, die später in Abschnitt 6 und 7 beobachteten Dämpfungseffekte konsistent zu erklären. Darüber hinaus ergeben sich Auswirkungen auf die Modellierung der akustischen Verluste. Da sich die Dämpfungswirkung durch Wirbelablösung nur sehr lokal äußert, erscheint somit auch eine örtlich begrenzte Abbildung der Verluste im Rahmen einer Simulation gerechtfertigt. Für eine weiterführende Diskussion zur Modellierung der akustischen Verluste wird an dieser Stelle auf die Ausführungen in Abschnitt 4.2 verwiesen.

3 Numerisches Simulationsverfahren im Zeitbereich

Im Mittelpunkt der nächsten Abschnitte steht das numerische Verfahren zur Lösung der unterschiedlichen Störungsgleichungen. Die Simulation der akustischen Wellenausbreitung erfolgt dabei im Zeitbereich. Grundlage dafür bildet der bereits zu Beginn dieser Arbeit erwähnte Akustiklöser PIANO.

Numerische Fehler sind für eine Simulation wellendynamischer Effekte im Zeitbereich besonders kritisch. Breiten sich Störungen über große Distanzen aus, so führen selbst kleine numerisch bedingte Fehler nach einer gewissen Zeit zu deutlichen Abweichungen im Simulationsergebnis. Die im Bereich der numerischen Strömungsmechanik (CFD) eingesetzten Verfahren niedriger Ordnung besitzen meist nicht die erforderliche Präzision, um damit quantitativ belastbare Analysen durchführen zu können. Um diesem Problem zu begegnen, wurden innerhalb der numerischen Aeroakustik (CAA) Lösungsverfahren entwickelt, die eine möglichst unverfälschte Ausbreitung akustischer Störungen sicherstellen. Dabei kommen vor allem numerische Methoden hoher Fehlerordnung zum Einsatz. Letztere zeichnen sich durch ein geringes Maß an künstlicher Dispersion und numerischer Dissipation aus, wodurch der Charakter der Wellenausbreitung weitestgehend erhalten bleibt.

Um den Einfluss des Lösungsverfahrens auf das Simulationsergebnis so weit wie möglich zu minimieren, werden auch in PIANO numerische Methoden mit hoher Fehlerordnung eingesetzt. In den nachfolgenden Ausführungen sollen die verwendeten Ansätze vorgestellt und diskutiert werden. Dies betrifft zunächst die Teilaspekte der Ortsdiskretisierung und Zeitintegration. Besonderes Augenmerk gilt den räumlichen Tiefpassfiltern zur Stabilisierung des Verfahrens. Dabei wird deutlich, dass vor allem die ursprünglich in PIANO eingesetzten Randfilter sehr ungünstige Eigenschaften besitzen, welche eine Modifikation bzw. Anpassung des Filterverfahrens erforderlich machen.

Die Leistungsfähigkeit des Simulationsverfahrens wird erheblich durch die Eigenschaften und die Umsetzung der verschiedenen Randbedingungen beeinflusst. Neben der Diskretisierung der Grundgleichungen soll im Rahmen des vorliegenden Kapitels deshalb auch auf die in PIANO verfügbaren Randbedingungen eingegangen werden.

3.1 Ortsdiskretisierung

Die numerische Lösung der unterschiedlichen Störungsgleichungen im Zeitbereich erfordert den Einsatz spezieller Diskretisierungsschemata hoher Ordnung. Im Folgenden soll zunächst auf die in PIANO umgesetzte Ortsdiskretisierung eingegangen werden.

3.1.1 Finite Differenzen

Räumliche Ableitungen werden in PIANO mittels expliziter finiter Differenzen approximiert. Gegenüber den gängigen Verfahren der numerischen Strömungsmechanik, wie beispielsweise dem finiten Volumen Verfahren[12], sind finite Differenzen sehr einfach auf hohe Fehlerordnung erweiterbar. Die maximal erreichbare Genauigkeit ist lediglich durch die Anzahl der diskreten Punkte bregrenzt, aus denen die Ableitung approximiert wird. Die allgemeine Formulierung dieser Approximation kann wie folgt geschrieben werden:

$$\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_i \approx \frac{1}{\Delta x}\sum_{j=-N}^{M} a_j^{NM}\phi_{i+j}\,. \tag{3.1}$$

Dabei bezeichnet ϕ eine allgemeine skalare Größe, x die Ortskoordinate nach der die Ableitung gebildet werden soll und Δx die konstante Schrittweite zwischen den diskreten Punkten. Ist die Anzahl diskreter Punkte vor und nach dem Bezugspunkt der Ableitung gleich, d.h $N = M$, so spricht man von einem symmetrischen bzw. zentralen Differenzenqotienten. Differenzenquotienten mit $N \neq M$ hingegen werden als asymmetrisch bezeichnet und überwiegend zur Bildung der räumlichen Ableitungen an Blockgrenzen eingesetzt.

Von entscheidender Bedeutung für die formale Genauigkeit des Ableitungsoperators sind die Koeffizienten a_j^{NM}, welche üblicherweise mittels einer einfachen Taylorreihenbetrachtung bestimmt werden. Um eine partielle Ableitung im Rahmen eines formalen Abbruchfehlers der Ordnung $\mathcal{O}(\Delta x)^{m+1}$ zu approximieren, gelten sukzessive folgende Bedingungen:

$$\sum_{j=-N}^{M} j^0\, a_j^{NM} = 0\,, \tag{3.2a}$$

$$\sum_{j=-N}^{M} j^1\, a_j^{NM} = 1\,, \tag{3.2b}$$

$$\sum_{j=-N}^{M} j^m a_j^{NM} = 0\,. \tag{3.2c}$$

wobei $m = 2, \ldots, N + M$.

Um die Eigenschaften des finite Differenzen Operators näher zu untersuchen, ist es zweckmäßig, Gleichung 3.1 mittels der Fouriertransformation

$$\hat{\phi}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)e^{-ikx}dx \tag{3.3}$$

[12] Prinzipiell ist es auch möglich, finite Volumen hoher Ordnung zu formulieren. Entsprechende Ansätze finden sich z.B. bei Barth [8]. Trotz hoher Flexibilität - insbesondere auf unstrukturierten Rechengittern - sind Verfahren dieser Art verhältnismäßig rechenintensiv und im Anwendungsbereich der Aeroakustik bis heute nicht sehr verbreitet.

in den Wellenzahlenbereich zu überführen. Die Transformation der linken und rechten Seite von Gleichung 3.1 ergibt somit:

$$ik\hat{\phi}(k) \approx \left(\frac{1}{\Delta x}\sum_{j=-N}^{M} a_j^{NM} e^{ijk\Delta x}\right)\hat{\phi}(k)\ . \tag{3.4}$$

Unter Einführung der numerischen Wellenzahl $k^\star$ kann diese als Funktion der physikalischen Wellenzahl k wie folgt dargestellt werden:

$$k^\star \Delta x = -i \sum_{j=-N}^{M} a_j^{NM} e^{ijk\Delta x}\ . \tag{3.5}$$

Wie aus Gleichung 3.5 hervorgeht, handelt es sich bei der numerischen Wellenzahl $k^\star$ im allgemeinen um eine komplexe Größe. Dabei bezeichnet die Differenz zur physikalischen Wellenzahl im Realteil den lokalen Phasenfehler bzw. Dispersionsfehler und der Imaginärteil der komplexen Wellenzahl den lokalen Amplituden- bzw. Dissipationsfehler.

In PIANO wird zur Bildung von Ortsableitungen das sogenannte DRP-Schema (Dispersion-Relation-Preserving) nach Tam und Webb [121] eingesetzt. Dabei wird die Fehlerordnung eines 7-Punkte Operators lediglich auf $(\Delta x)^4$ durch die Beziehungen aus 3.5 festgelegt. Auf Kosten einer höheren Fehlerordnung haben Tam et al. zur Bestimmung der Koeffizienten a_j^{NM} die Minimierung des kummulativen Fehlers im dimensionslosen Wellenzahlbereich bis $\eta = 1.1$ herangezogen:

$$\min_{a_j^{NM}} \int_{-\eta}^{\eta} |k^\star \Delta x - k\Delta x|^2 d(k\Delta x)\ . \tag{3.6}$$

Das Ergebnis dieser Optimierung ist ein im Vergleich zum nicht-optimierten Verfahren zusätzlicher Gewinn an Auflösung.

Die spektralen Eigenschaften einiger symmetrischer Differenzenschemata sind in Abbildung 3.1 dargestellt. Zunächst ist festzuhalten, dass die numerische Wellenzahl für symmetrische Verfahren eine rein reelle Größe ist, also keinen Imaginäranteil aufweist. Für symmetrische Schemata entfällt somit der Dissipationsfehler. Anders ist das Verhalten hinsichtlich der Dispersionsfehler. Idealerweise würde bis zur theoretischen Obergrenze $k\Delta x/\pi = 1$ die numerische Wellenzahl der physikalischen Wellenzahl folgen. Dass dies praktisch nicht möglich ist, wird durch Abbildung 3.1 verdeutlicht. Man erkennt, dass für alle Verfahren eine Grenze besteht, ab der die numerisch approximierte Wellenzahl vom idealen Verhalten spürbar abweicht. Diese Grenze wird üblicherweise in Form einer minimalen Anzahl an Gitterpunkten pro Wellenlänge PPW = $\lambda/\Delta x$ ausgedrückt. Definiert man einen maximal tolerierbaren Fehler $\epsilon = |k^\star \Delta x - k\Delta x|/\pi < 1 \cdot 10^{-3}$, so müssen mit einem gewöhnlichen Schema zweiter Ordnung (Central Differencing Scheme - CDS) alle relevanten Lösungsanteile mit mindestens 23.6 PPW aufgelöst werden. Für ein Standardverfahren sechster Ordnung kann bei gleichbleibenden Genauigkeitsanforderungen die Diskretisierung jedoch auf 6.9 PPW reduziert werden. Dies bedeutet für eine dreidimensionale Problemstellung eine durchschnittliche Reduktion der benötigten Gitterpunkte um den Faktor 40. Zwar muss durch die Auswertung von Differenzenquotienten hoher Ordnung ein rechentechnischer Zusatzaufwand einkalkuliert werden. Dennoch ergeben sich durch den Einsatz von Methoden hoher Ordnung üblicherweise effizientere Berechnungsverfahren [23, 77].

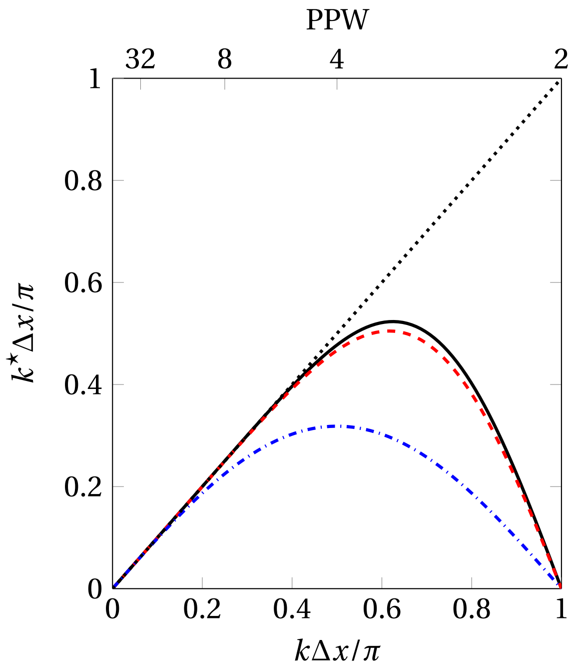


Abbildung 3.1: Vergleich der numerischen und physikalischen Wellenzahl für symmetrische Differenzenschemata: 7P-DRP nach Tam und Webb (——), 7P-Taylor (- - -), 3P-Taylor/CDS (-·-·-), ideal (······).

Abbildung 3.1 ermöglicht auch einen Vergleich zwischen dem in PIANO verwendeten DRP-Schema und einem nicht optimierten 7-Punkte Differenzenquotienten. Man erkennt, dass durch die Optimierung eine leichte Verbesserung des Auflösungsvermögens erzielt wird. Für $\epsilon < 1 \cdot 10^{-3}$ beträgt die Auflösungsobergrenze des DRP-Operators 5.6 PPW, wohingegen im nicht-optimierten Fall 6.9 PPW erforderlich sind.

Schema	Ordnung	PPW_{min}
7P-DRP (Tam und Webb [121])	$(\Delta x)^4$	5.6
7P-Taylor	$(\Delta x)^6$	6.9
3P-Taylor (CDS)	$(\Delta x)^2$	23.6

Tabelle 3.1: Theoretische Auflösungsgrenzen in PPW und formale Genauigkeit verschiedener finiter Differenzen Schemata; Fehlerkriterium $\epsilon < 1 \cdot 10^{-3}$.

Bisher wurden lediglich die spektralen Eigenschaften symmetrischer Differenzenquotienten diskutiert. Diese kommen im Inneren des Rechengebiets zum Einsatz. Am Rand hingegen ist eine direkte Verwendung symmetrischer Operatoren nicht mehr uneingeschränkt möglich. Zwar können auch in Randnähe symmetrische Differenzenquotienten niedriger Ordnung verwendet werden. Allerdings ist damit eine Reduktion der Fehlerordnung bzw. der

Genauigkeit verbunden. Spätestens am äußersten Gitterpunkt ist jedoch auch dieser Ansatz nicht mehr umsetzbar.

Um auch in Randnähe die Fehlerordnung des Verfahrens beibehalten zu können, werden in PIANO asymmetrische Differenzenquotienten hoher Ordnung verwendet. Wie bereits im symmetrischen Fall werden auch im asymmetrischen Fall jeweils sieben Stützstellen zur Approximation der räumlichen Ableitung herangezogen. Analog zum symmetrischen Schema wurde auch hier die formale Fehlerordnung durch die Beziehungen 3.2 auf $(\Delta x)^4$ festgelegt. Alle verbleibenden Freiheitsgrade sind auf eine Maximierung der spektralen Auflösung hin optimiert.

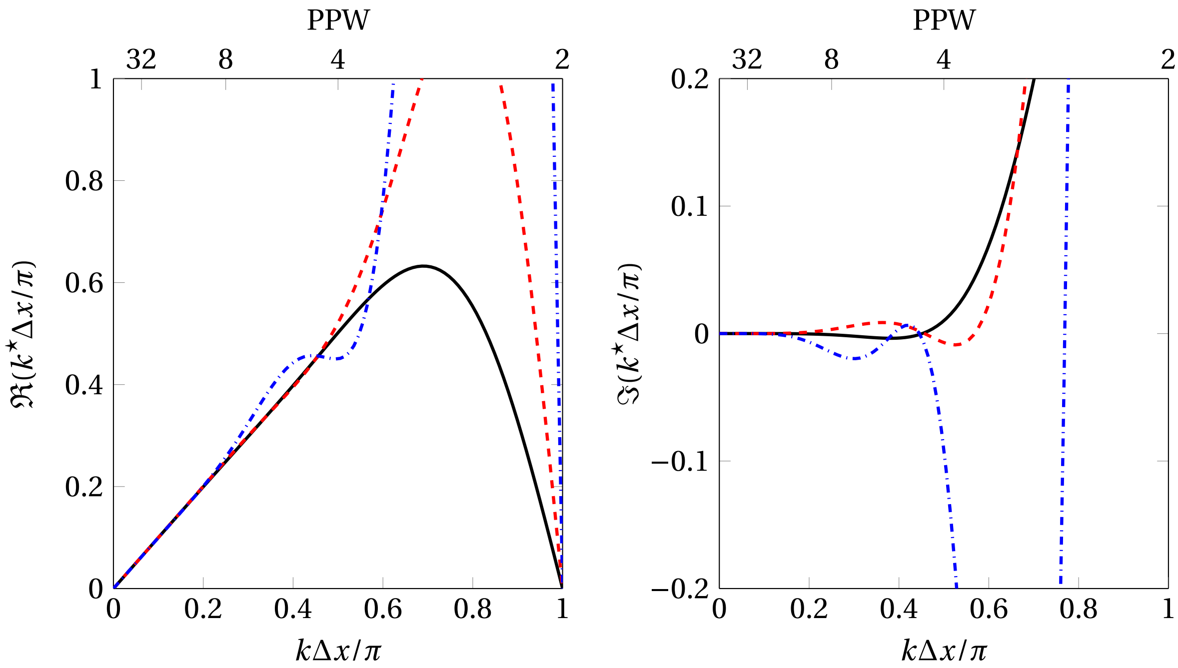


Abbildung 3.2: Vergleich der numerischen (Real- und Imaginärteil) und der physikalischen Wellenzahl für in PIANO verwendete asymmetrische Differenzenschemata: $N = 2, M = 4$ (——); $N = 1, M = 5$ (- - -); $N = 0, M = 6$ (-·-·-).

Abbildung 3.2 zeigt die spektralen Eigenschaften der in PIANO verwendeten asymmetrischen Differenzenquotienten. Anders als zuvor für symmetrische Differenzenquotienten festgestellt wurde, ist die numerische Wellenzahl im asymmetrischen Fall eine komplexe Größe. Damit besitzen asymmetrische Approximationen nicht nur Dispersionsfehler, sondern auch Dissipationsfehler. Dies hat zur Konsequenz, dass bestimmte Lösungsanteile in Wandnähe eine künstliche Anfachung bzw. Dämpfung erfahren.

Aus Abbildung 3.2 wird deutlich, dass sich die spektralen Eigenschaften der Differenzenquotienten mit zunehmender Asymmetrie immer mehr verschlechtern. Die Fähigkeit, die physikalische Wellenzahl über einen gewissen Bereich ausreichend zu approximieren, ist hier gegenüber einem symmetrischen DRP-Schema deutlich reduziert. Glücklicherweise ist dieses

Verhalten auf den randnahen Bereich begrenzt, sodass der Einfluss auf die Gesamtlösung bei ausreichender Auflösung der Gradienten häufig vernachlässigt werden kann.

3.1.2 Rechengitter und gekrümmte Koordinaten

Die Diskretisierung der Erhaltungsgleichungen erfolgt in PIANO auf strukturierten zweidimensionalen bzw. dreidimensionalen Rechengittern. Diese sind unter anderem dadurch gekennzeichnet, dass die Logik der Knotenanordnung über zwei bzw. drei Indizes $(i, j, (k))$ eindeutig festgelegt ist. Strukturierte Gitter ermöglichen meist eine sehr effiziente Implementierung fluidmechanischer Lösungsalgorithmen. Auch ist der Speicherplatzbedarf im Vergleich zu unstrukturierten Gittern deutlich reduziert.

Um auch für komplizierte Geometrien qualitativ hochwertige Rechengitter realisieren zu können, werden in PIANO körperangepasste blockstrukturierte Rechengitter verwendet. Dabei wird das Rechengebiet in geometrisch einfache, jeweils strukturiert vernetzte Blöcke zerlegt. Die Blöcke wiederum können unter Verwendung der standardisierten Kommunikationsbibliothek MPI (Message-Passing Interface [30]) auf verschiedene Prozessoren verteilt und parallel gelöst werden. Dieses Vorgehen bietet sich vor allem für große dreidimensionale Anwendungsfälle mit mehreren Millionen Gitterpunkten an.

Um eine einfache Implementierung von Randbedingungen zu ermöglichen, erfolgt die Diskretisierung innerhalb der einzelnen Blöcke auf Basis gekrümmter Koordinaten. Das DRP-Schema aus Abschnitt 3.1.1 setzt zur Approximation der zwei- bzw. dreidimensionalen Erhaltungsgleichungen allerdings ein kartesisches Rechengitter mit konstanter Schrittweite voraus. Um diesen Konflikt aufzulösen, wird eine Transformation eingeführt, welche die Knoten des gekrümmten Rechengitters aus dem physikalischen Raum auf ein regelmäßiges kartesisches Ersatzgitter im sogenannten numerischen Raum abbildet (Abbildung 3.3). Der Zusammenhang zwischen physikalischen Raum und numerischen Raum kann allgemein formuliert werden als:

$$x_i = x_i(\xi_j) \ , \tag{3.7}$$

wobei x_i die Koordinaten im physikalischen Raum und ξ_j die zugehörigen Koordinaten im numerischen Raum bezeichnet. Die Schrittweite des kartesischen Ersatzgitters ist im Prinzip frei wählbar. Üblicherweise wird $\Delta\xi_j = 1$ verwendet. Dadurch entsprechen die Koordinaten des numerischen Raums exakt den Knotenindizes $(i, j, (k))$.
Unter Anwendung der Kettenregel gilt für die partielle Ableitung einer allgemeinen Feldvariable ϕ im physikalischen Raum:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = \frac{\partial\phi}{\partial\xi_j}\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i} \ . \tag{3.8}$$

Der numerische Raum erfüllt alle Voraussetzungen zur Anwendung des DRP-Schemas. Eine Ableitung im numerischen Raum, wie beispielsweise $\partial\phi/\partial\xi_j$, kann somit ohne Probleme

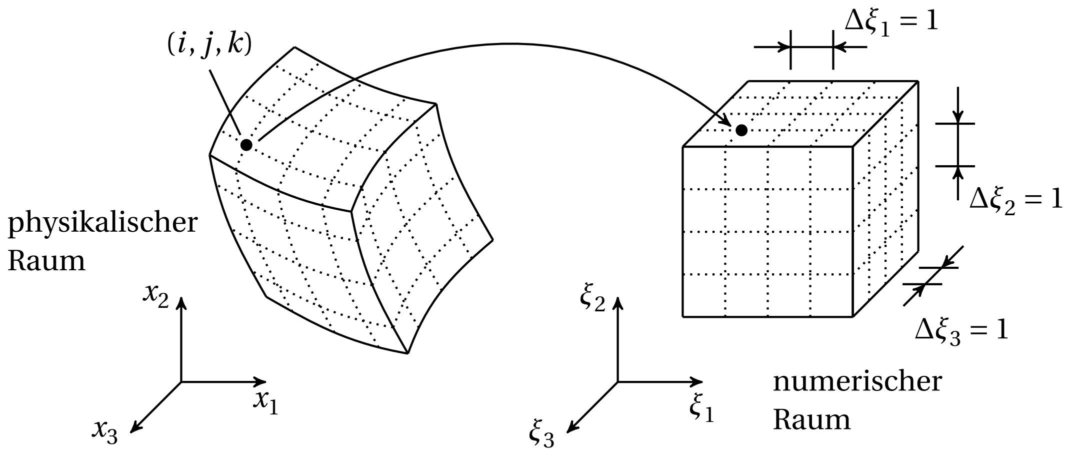


Abbildung 3.3: Abbildung des gekrümmten Rechengitters im physikalischen Raum auf ein normiertes Ersatzgitter im numerischen Raum.

bestimmt werden. Um eine Ableitung im physikalischen Raum zu erhalten, ist gemäß Gleichung 3.9 eine Multiplikation mit der Jakobi-Matrix $\partial\xi_j/\partial x_i$ erforderlich. Diese wiederum kann durch eine Inversion der Matrix $\partial x_i/\partial\xi_j$ berechnet werden, d.h:

$$\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial x_i}{\partial\xi_j}\right)^{-1} . \tag{3.9}$$

Die Bildung von $\partial x_i/\partial\xi_j$ erfolgt dabei erneut durch Anwendung des DRP-Schemas. Zur Inversion der 2×2 bzw. 3×3 Matrizen werden bekannte analytische Ausdrücke, wie sie z.B. einer gängigen mathematischen Formelsammlung [130] entnehmbar sind, herangezogen.

3.2 Zeitintegration

Zur Diskretisierung zeitlicher Ableitungen werden im Bereich der numerischen Akustiksimulation ebenfalls häufig Verfahren hoher Ordnung verwendet. Dies ist erforderlich, um die hohen Anforderungen hinsichtlich numerischer Dispersions- und Dissipationsfehler erfüllen zu können. Besonders verbreitet sind hier explizite Runge-Kutta Verfahren. Diese besitzen eine relativ hohe Stabilitätsgrenze und sind gewöhnlich einfach zu handhaben. Besonders hervorzuheben ist hier die Eigenschaft, für einen Integrationsschritt immer nur den unmittelbar vorangehenden Zustand zu benötigen. Dadurch sind Runge-Kutta Verfahren generell selbststartend.

Die Integration der Erhaltungsgleichungen erfolgt in PIANO ebenfalls durch verschiedene Runge-Kutta Verfahren. Betrachtet man die allgemeine Differentialgleichung

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + R(\phi) = 0 , \tag{3.10}$$

so lassen sich Runge-Kutta Verfahren auf die Form

$$y_i = \phi^n - \beta_i \, \Delta t \, R(y_{i-1}) \qquad i = 1, \ldots, p \tag{3.11}$$

bringen [13], wobei $y_0 = \phi^n$ den Wert der Variable ϕ zum Zeitpunkt $t = n\,\Delta t$ und $y_p = \phi^{n+1}$ den entsprechenden Wert zum Zeitpunkt $t = (n+1)\,\Delta t$ bezeichnet. Die spezifischen Eigenschaften der Zeitintegration werden in hohem Maße durch die Anzahl der Zwischenschritte p, sowie durch die Wahl der Koeffizienten β_i bestimmt.

β_1	β_2	β_3	β_4
1/4	1/3	1/2	1

Tabelle 3.2: β_i-Koeffizienten des klassischen Runge-Kutta Verfahrens (RK4)

PIANO erlaubt hier die Wahl zwischen einem klassischen vierstufigen (RK4) und einem klassischen sechsstufigen Verfahren (RK6). Darüber hinaus ist auch die Verwendung sogenannter LDDRK-Varianten (Low-Dissipation and Low-Dispersion Runge-Kutta) möglich. Dabei handelt es sich um optimierte Formulierungen mit reduzierter numerischer Dissipation bzw. Dispersion. Untersuchungen von Pieringer [101] haben allerdings ergeben, dass die Unterschiede zwischen den einzelnen Verfahren meist sehr gering sind. Zur Berechnung der Wellenausbreitung in Raketenschubkammern ist es üblicherweise ausreichend, mit dem klassischen Runge-Kutta Schema (RK4) zu arbeiten. Die Koeffizienten für dieses Schema sind in Tabelle 3.2 zusammengefasst.

3.3 Numerische Stabilisierung

Trotz einer Optimierung der spektralen Eigenschaften zeigt das in PIANO eingesetzte DRP-Schema für erhöhte Wellenzahlen deutliche Abweichungen vom idealen Verhalten. Damit einher gehen Amplituden- und Phasenfehler, wodurch die Genauigkeit der Berechnungsmethode für Lösungsanteile im oberen Wellenzahlbereich spürbar abnimmt. Weitaus gravierender ist allerdings der Einfluss dieser Fehler auf die numerische Stabilität des Verfahrens. Ohne zusätzliche Maßnahmen würde es bei einer Anwendung des DRP-Schemas sehr schnell zu einer Überlagerung des Rechengebiets mit unphysikalischen Störungen kommen. Der Wellenzahlbereich dieser Störungen liegt dabei jenseits der Auflösungsgrenze des numerischen Verfahrens; die Ausbreitung erfolgt zum Teil mit mehrfacher Schallgeschwindigkeit [120]. In der englischsprachigen Fachliteratur werden diese unerwünschten Lösungsbestandteile meist als sogenannte *spurious waves* bezeichnet. Im deutschsprachigen Raum ist in diesem Zusammenhang oft von Gitterschwingungen die Rede.

Das Verhalten, instabile Lösungsbestandteile im nicht- bzw unzureichend aufgelösten Wellenzahlbereich auszubilden, betrifft prinzipiell alle finite Differenzenverfahren hoher Ordnung [120]. Um dem zu begegnen, haben sich in den letzten Jahren im Wesentlichen zwei unterschiedliche Methoden etabliert.

Zunächst wurde von Tam et al. [120] ein Verfahren auf Basis einer künstlichen selektiven Dämpfung (englisch *Artificial Selective Damping* - ASD) vorgeschlagen. Dabei werden die physikalischen Grundgleichungen durch zusätzliche Dämpfungsterme modifiziert, dessen Wirkung sich insbesondere im nichtaufgelösten Wellenzahlbereich äußert. Es hat sich allerdings herausgestellt, dass die Dämpfung des von Tam et al. entwickelten Quellterms auf den simulationsrelevanten Wellenzahlbereich oft übermäßig starken Einfluss besitzt [108].

Ein alternativer Ansatz, welcher auch in PIANO Verwendung findet, ist der Einsatz spezieller räumlicher Glättungs- bzw. Tiefpassfilter. Die Grundidee dieser Methode lässt sich als Korrektur $\Delta\phi_i$ der allgemeinen Feldvariable ϕ_i darstellen:

$$\tilde{\phi}_i = \phi_i + \sigma\Delta\phi_i \ , \tag{3.12}$$

wobei $\tilde{\phi}_i$ die tiefpassgefilterte Feldvariable und σ einen Relaxationsparameter zur Anpassung der Filterwirkung bezeichnet. Damit ist dieses Verfahren, anders als die künstliche selektive Dämpfung, von den Grundgleichungen entkoppelt. Die Korrektur $\Delta\phi_i$ wird im Allgemeinen aus den Feldgrößen im Einflussbereich des Filters bestimmt. Beschränkt man sich auf explizite Verfahren,[13] so berechnet sich $\Delta\phi_i$ wie folgt:

$$\Delta\phi_i = \sum_{j=-N}^{M} d_j^{NM} \phi_{i+j} \ . \tag{3.13}$$

Darin bezeichnen N und M analog zu Gleichung 3.1 die Anzahl der beteiligten Stützstellen vor und nach dem Bezugspunkt. Entscheidend für das Filterverhalten sind die Koeffizienten d_j^{NM}. Filter werden üblicherweise im Spektralbereich charakterisiert. Durch Anwendung der Fouriertransformation entsprechend Gleichung 3.3 lässt sich die Übertragungsfunktion $\hat{D}(k\Delta x) = 1 + \sigma\Delta\hat{\phi}/\hat{\phi}$ bestimmen:

$$\hat{D} = 1 + \sigma \sum_{j=-N}^{M} d_j^{NM} e^{ijk\Delta x} \ . \tag{3.14}$$

An das Übertragungsverhalten des Tiefpassfilters können zunächst zwei grundlegende Bedingungen gestellt werden. Sollen höchste Wellenzahlanteile unterdrückt werden, so muss $\hat{D}(k\Delta x = \pi) = 1 - \sigma$ gelten. Für die Filterkoeffizienten d_j^{NM} folgt daraus die Bedingung

$$\sum_{j=-N}^{M} d_j^{NM} (-1)^j = -1 \ . \tag{3.15}$$

Andererseits soll für $k\Delta x = 0$ der Dämpfungseinfluss verschwinden. Auf Basis einer Taylorreihenentwicklung lässt sich dieses Verhalten auf den Bereich kleiner Wellenzahlen ausdehnen.

[13] Prinzipiell ist auch der Einsatz impliziter Filter in PIANO möglich. Nähere Informationen sind der Arbeit von Morgenweck [88] zu entnehmen. Allerdings besitzen implizite Verfahren die negative Eigenschaft, das ungünstige Filterverhalten asymmetrischer Randfilter ins Feldinnere hineinzutragen. Darüber hinaus ist eine Optimierung des Filterverfahrens aufgrund der auftretenden Kopplung, vor allem in Randnähe, deutlich erschwert [63]. Aus diesen Gründen wurde letztendlich auf eine Verwendung impliziter Filtermethoden verzichtet.

Durch die Forderung $\hat{D}(k\Delta x \to 0) = 1 + \mathcal{O}(k\Delta x^{m+1})$ erhält man $m+1$ zusätzliche Bedingungen zur Bestimmung der Koeffizienten d_j^{NM} (siehe dazu auch Anhang C):

$$\sum_{j=-N}^{M} j^n d_j^{NM} = 0 \;, \qquad n = 0, \ldots, m \;. \tag{3.16}$$

Unter Einbeziehung von Gleichung 3.15 erhält man für $m = N + M - 1$ schließlich ein Gleichungssystem, welches eine vollständige Bestimmung der Filterkoeffizienten d_j^{NM} ermöglicht. Die sich daraus ergebenden Filter werden meist als sogenannte Taylorfilter bezeichnet. Im Inneren des Rechengebiets stehen üblicherweise ausreichend Stützstellen zur Verfügung. Hier kommt in PIANO ein symmetrischer Taylorfilter zum Einsatz. Die Anzahl der einfließenden Stützstellen ist analog zum verwendeten DRP-Schema auf sieben Punkte festgelegt, d.h. $N = M = 3$. Der Filter besitzt somit für $k\Delta x \to 0$ eine formale Genauigkeit der Ordnung $\mathcal{O}(k\Delta x^6)$. Abbildung 3.4 zeigt das Dämpfungsmaß des verwendeten symmetrischen

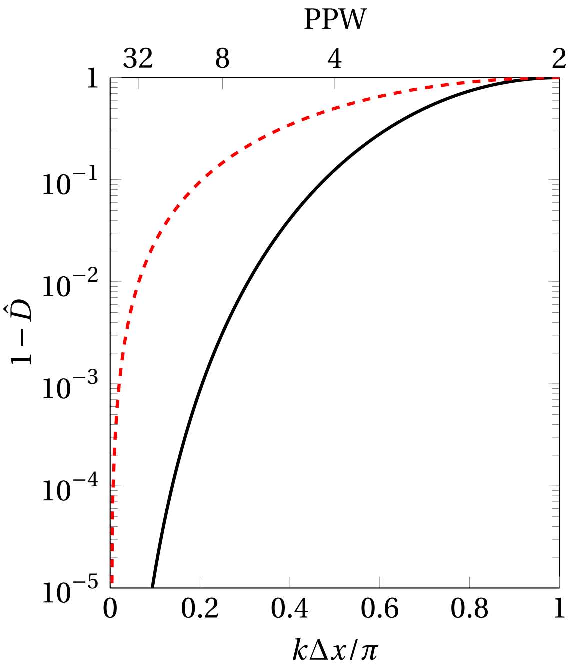


Abbildung 3.4: Vergleich der Dämpfungseigenschaften unterschiedlicher symmetrischer Glättungsfilter für $\sigma = 1$: Taylorfilter sechster Ordnung (——), Taylorfilter zweiter Ordnung (- - -)

Glättungsfilters für $\sigma = 1$ als Funktion der dimensionslosen Wellenzahl $k\Delta x$. Es ist hervorzuheben, dass die Übertragungsfunktionen symmetrischer Filter ausschließlich reellen Charakter besitzen. Damit sind symmetrische Filteroperationen generell phasentreu.

Neben dem bereits erwähnten Glättungsfilter der Ordnung $\mathcal{O}(k\Delta x^6)$ ist in Abbildung 3.4 auch ein symmetrischer Taylorfilter der Ordnung $\mathcal{O}(k\Delta x^2)$ dargestellt. Dieser Filter beinhaltet lediglich drei Stützstellen. Man erkennt, dass das Dämpfungsverhalten im Bereich kleiner Wellenzahlen deutlich erhöht ist. Eine breite Anwendung dieses Filters würde damit zu einer übermäßigen Dämpfung simulationsrelevanter Lösungsanteile führen. Allerdings besitzt dieser Filter die Eigenschaft, auch bei starken räumlichen Gradienten stabiles Verhalten zu zeigen. Wendet man hingegen Filter hoher Ordnung im Bereich starker Gradienten an, so treten zunehmend unphysikalische Oszillationen auf, die auch als Gibbs-Oszillationen bezeichnet werden. Die Stabilität des Verfahrens wäre dann nicht mehr gewährleistet. Der Einsatz eines Taylorfilters der Ordnung $\mathcal{O}(k\Delta x^2)$ ist in PIANO lediglich auf wenige Anwendungen begrenzt, wie beispielsweise im Rahmen einer Modellierung spezieller Verluste (Abschnitt 4.2). Unter normalen Bedingungen ist eine Stabilisierung durch den bereits diskutierten Filter der Ordnung $\mathcal{O}(k\Delta x^6)$ ausreichend.

Bisher wurde lediglich die Stabilisierung des Berechnungsverfahrens durch symmetrische Glättungsfilter im Inneren des Rechengebiets besprochen. In Randnähe ist eine direkte Anwendung symmetrischer Filter nicht möglich, da dazu benötigte Stützstellen fehlen. Da aber die numerischen Fehler des finite Differenzenverfahrens insbesonde in diesem Bereich erhöht sind, kann auf eine Filterung im allgemeinen nicht verzichtet werden. Eine Ausnahme stellen Stützstellen dar, welche sich direkt am Rand befinden. Die Variablen an diesen Punkten werden in hohem Maße durch die Randbedingungen beeinflusst, sodass unter Umständen auf eine Filterung verzichtet werden kann [108].

Um das Lösungsfeld auch in Randnähe zu filtern wurde in PIANO ursprünglich der Ansatz einer Spiegelung verfolgt. Das Vorgehen ist anschaulich in Abbildung 3.5 dargestellt. Die Me-

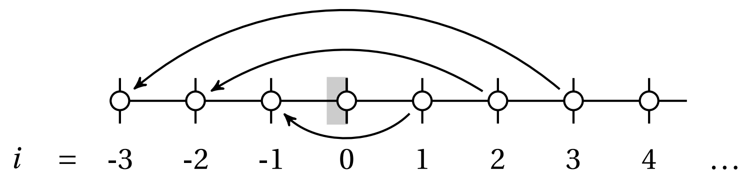


Abbildung 3.5: Methode der Spiegelung zur Ableitung numerischer Glättungsfilter für den randnahen Bereich: innere Stützstellen $i \geq 0$, virtuelle Stützstellen $i < 0$.

thode sieht vor, drei zusätzliche Stützstellen außerhalb des Rechengebiets einzuführen und die Feldgrößen der drei randnächsten Punkte innerhalb des Rechengebiets auf diese zusätzlichen Stützstellen zu spiegeln. Die Spiegelung ordnet dabei jeder zusätzlichen Stützstelle in umgekehrter Reihenfolge die entsprechenden Werte im Inneren des Rechengebiets zu. Durch diese Erweiterung ist es scheinbar möglich, auch in Randnähe symmetrische Filterschemata anzuwenden. Allerdings erfolgt die Implementierung dieser Methode üblicherweise nicht durch zusätzliche reale Stützstellen, sondern über eine Anpassung der Filterkoeffizienten. Im Zuge dessen ergeben sich aus den ursprünglich symmetrischen Filterschemata asymmetrische Modifikationen. Diese besitzen eine komplexwertige Übertragungsfunktion, d.h $\Im(\hat{D}) \neq 0$. Sie sind damit nicht phasentreu. Praktisch bedeutet dies, dass eine Welle durch Anwendung eines asymmetrischen Glättungsfilters mehr oder weniger stark räumlich verschoben wird.

Abbildung 3.6 zeigt die Dämpfungseigenschaften dieser durch Spiegelung erhaltenen asymmetrischen Modifikationen. Den dargestellten Filtern liegt der bereits erwähnte symmetrische Taylorfilter der Ordnung $\mathcal{O}(k\Delta x^6)$ zugrunde. Aus theoretischer Sicht sollte die Filtercharakteristik in Randnähe mit der Charakteristik der symmetrischen Filter im Feld übereinstim-

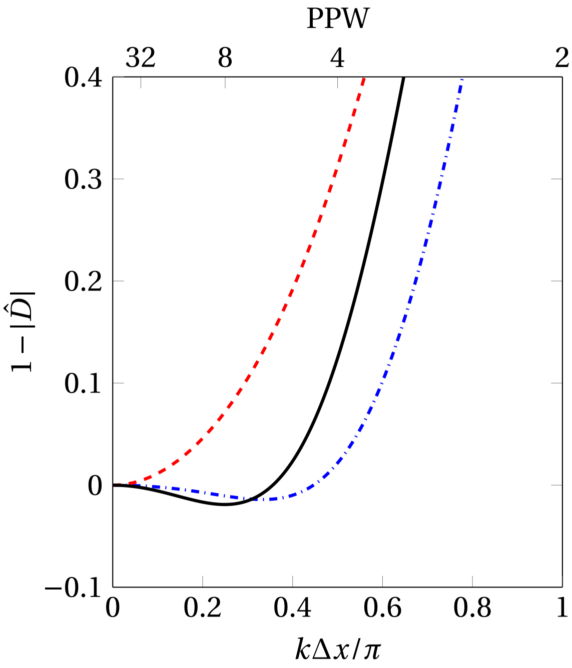


Abbildung 3.6: Dämpfungseigenschaften der auf Basis von Spiegelung erhaltenen Randfilterverfahren für $\sigma = 1$: Filterpunkt $i = 2$ (——), Filterpunkt $i = 1$ (- - -), Filterpunkt $i = 0$ (-·-·-).

men, um den Einfluss auf die Lösung möglichst gering zu halten. Wie Abbildung 3.6 erkennen lässt ist dies praktisch allerdings nicht möglich. Durch den Ansatz der Spiegelung ergibt sich im Durchlassbereich ein sehr ungünstiges Verhalten. Dies wird insbesondere dadurch deutlich, dass das Dämpfungsmaß für zwei der drei Kennlinien im Wellenzahlbereich bis $k\Delta x/\pi \approx 0.35$ bzw. $k\Delta x/\pi \approx 0.45$ negative Werte annimmt. Lösungsanteile werden in diesem Wellenzahlbereich somit künstlich verstärkt. Man spricht von instabilem Filterverhalten [11].

Aus diesen Ergebnissen wird ersichtlich, dass die Methode der Spiegelung keinen leistungsfähigen Ansatz zur Ableitung von Randfilterverfahren darstellt. Im Rahmen einer Suche nach alternativen Ansätzen ist es zunächst naheliegend, auf die bereits erläuterte Methode zur Ableitung von Taylorfilter zurückzugreifen. Formal ist dieses Verfahren auch auf asymmetrische Filter anwendbar. Allerdings besitzen asymmetrische Taylorfilter meist ähnliche Stabilitätsprobleme wie Filter auf Basis einer Spiegelung [11, 128].

Um dennoch eine zufriedenstellende Filterung der randnahen Gitterpunkte realisieren zu können, wurde im Kontext dieser Arbeit letztendlich auf die von Beland et al. [11] entwickelten Randfilterverfahren zurückgegriffen. Der Ansatz zur Ableitung letzterer sieht zunächst vor, anhand der Bedingungen $\hat{D}(k\Delta x = \pi) = 1-\sigma$ sowie $\hat{D}(k\Delta x \to 0) = 1+\mathcal{O}(k\Delta x^2)$ das grundsätzliche Verhalten für einen räumlichen Tiefpassfilter mit sieben Stützstellen festzulegen. Darüber hinaus wird ein stabiles, rein dissipatives Filterverhalten gefordert. Um dies sicherzustellen, muss $|\hat{D}(k\Delta x)| < 1$ im gesamten Wellenzahlbereich gelten. Unter Berücksichtigung dieser Bedingungen wird zur vollständigen Bestimmung der Koeffizienten d_j^{NM} das Übertragungsverhalten im Durchlassbereich optimiert. Dazu wird folgendes Minimierungsproblem herangezogen:

$$\min_{d_j^{NM}} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \left[(1-\upsilon)\left|1-\hat{D}\right| + \upsilon\left|\arg(\hat{D})\right|\right] w(k\Delta x)\, d(k\Delta x)\ , \tag{3.17}$$

wobei im konkreten Fall der Wellenzahlbereich zwischen $\eta_1 = \pi/16$ und $\eta_2 = \pi/2$ betrachtet wird. $w(k\Delta x) = 1/(k\Delta x)$ lässt sich als eine Gewichtungsfunktion auffassen, die dafür sorgt, dass dem Bereich kleiner Wellenzahlen eine größere Bedeutung zukommt. υ ist im Bereich zwischen 0 und 1 prinzipiell frei wählbar. Mit größer werdenden υ gewinnt die Optimierung des Phasengangs zunehmend an Bedeutung. Umgekehrt erhält die Optimierung des Amplitudengangs mit kleiner werdenden υ eine größere Relevanz. Berland et al. haben zur Bestimmung von d_j^{15} den Wert $\upsilon = 0.9$ gewählt. Für d_j^{24} hingegen den Wert $\upsilon = 1$. Im konkreten Fall wurde also überwiegend bzw. ausschließlich eine Optimierung des Phasengangs durchgeführt.

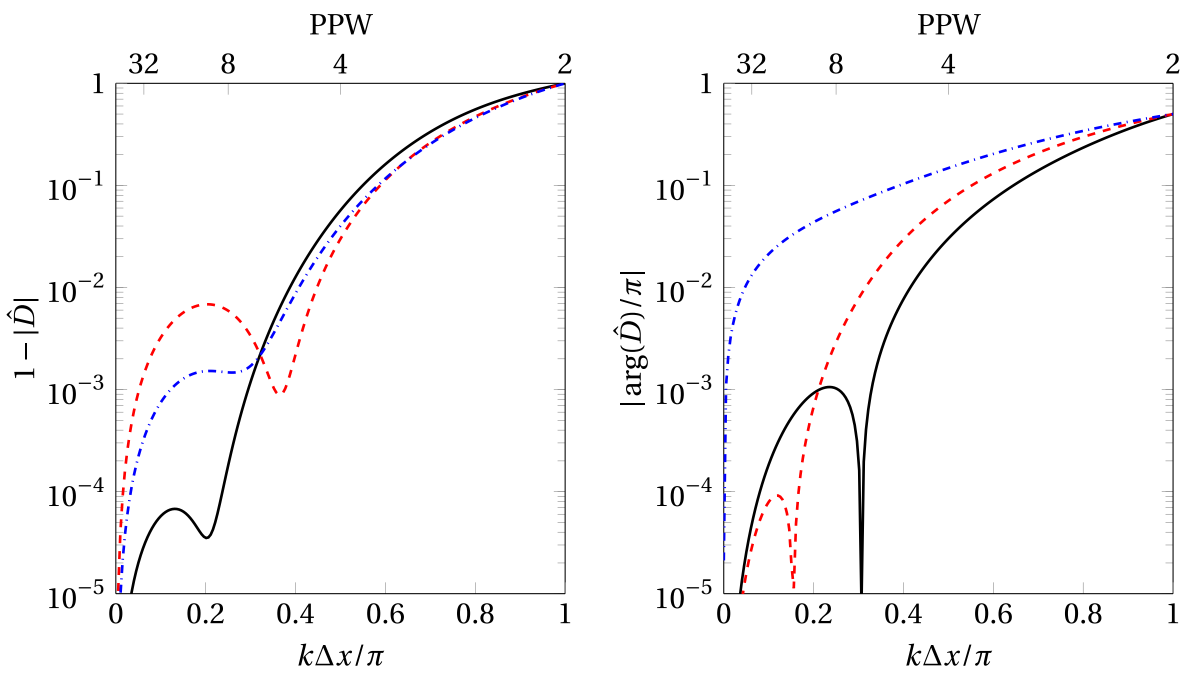


Abbildung 3.7: Übertragungseigenschaften der optimierten Randfilterverfahren für $\sigma = 1$: Filterpunkt $i = 2$ (——), Filterpunkt $i = 1$ (- - -), Filterpunkt $i = 0$ (-·-·-).

Die spektralen Eigenschaften der sich ergebenden Randfilter sind in Abbildung 3.7 gezeigt. Man erkennt, dass der Amplitudengang im Wesentlichen ein ähnliches Verhalten zeigt wie die Charakteristik des symmetrischen Filters aus Abbildung 3.4. Eine vollständige Vermeidung von Phasenabweichungen ist bei asymmetrischen Filtern nicht möglich. Dennoch geht aus Abbildung 3.7 hervor, dass letztere im Durchlassbereich meist sehr geringe Werte annehmen und damit den ursprünglichen, durch Spiegelung erhaltenen Randfilterverfahren deutlich überlegen sind.

Abschließend soll noch kurz auf den Relaxationsparameter σ aus Gleichung 3.12 zur Anpassung der Filterwirkung eingegangen werden. Sämtliche hier diskutierten Filter sind so entworfen, dass für $\sigma = 1$ eine vollständige Unterdrückung der Wellenzahl $k\Delta x = \pi$ innerhalb einer Filteroperation erreicht wird. Im praktischen Einsatz hat sich allerdings herausgestellt, dass dies zur Sicherstellung der numerischen Stabilität oft nicht erforderlich ist. Dabei ist zu beachten, dass mit kleiner werdenden σ auch der Einfluss des Filters im Durchlassbereich abnimmt. Man ist deshalb bestrebt, den Relaxationsparameter möglichst klein zu wählen, um unnötige Einflüsse im Durchlassbereich zu reduzieren. Für eine Anwendung in PIANO hat sich ein Wert von $\sigma = 0.2$ für Gitterpunkte im Feld und $\sigma = 0.02$ für Gitterpunkte direkt am Rand bewährt [11]. Mit kleineren Werten steigt die Tendenz zu numerisch instabilem Verhalten signifikant an.

3.4 Bewertung der Numerik

Die Grundbausteine des numerischen Verfahrens wurden bereits in den vorherigen Abschnitten im Detail diskutiert. Dabei stellte sich heraus, dass alle Komponenten mehr oder weniger stark ausgeprägte Abweichungen vom idealen Verhalten zeigen. Um eine Aussage über die zu erwartende Genauigkeit des gesamten Verfahrens treffen zu können, wird nachfolgend eine sogenannte von Neumann Analyse durchgeführt. Ziel ist es, die Dämpfungs- und Dispersionseigenschaften des in PIANO realisierten numerischen Verfahrens abzuschätzen. Ausgangspunkt für die weitere Analyse ist die bereits aus Abschnitt 2.2 bekannte lineare Advektionsgleichung $\partial\phi/\partial t + R(\phi) = 0$ mit $R(\phi) = c\,\partial\phi/\partial x$. Diese wird vereinfachend als Modellgleichung betrachtet.

Für die lineare Advektionsgleichung lässt sich die Ausbreitung einer einzelnen Fourier Mode mit Wellenzahl k allgemein durch $\phi(x,t) = \hat{\phi}(t)\exp(ikx)$ ausdrücken. $\hat{\phi}$ beschreibt dabei die zeitliche Entwicklung der Lösung. Wird darauf aufbauend $R(\phi)$ durch ein numerisches Verfahren approximiert, so gilt im Wellenzahlbereich:

$$\hat{R}(\hat{\phi}) = ik^{\star}\Delta x \frac{c}{\Delta x}\hat{\phi} \ , \tag{3.18}$$

wobei $k^{\star}\Delta x$ die dimensionslose numerische Wellenzahl der Ortsdiskretisierung bezeichnet. Durch Anwendung der Fouriertransformation kann ebenso die Zeitintegration gemäß Gleichung 3.11 in den Wellenzahlbereich überführt werden. Unter Einbeziehung von Gleichung 3.18 ergibt sich

$$\hat{\phi}^{n+1} = \hat{\phi}^{n} + \sum_{j=1}^{p} b_j \left(-ic\frac{\Delta t}{\Delta x}k^{\star}\Delta x\right)^{j}\hat{\phi}^{n} \tag{3.19}$$

mit

$$\begin{aligned} b_1 &= \beta_p\,, \\ b_2 &= \beta_p \beta_{p-1}\,, \\ &\vdots \\ b_p &= \beta_p \beta_{p-1} \dots \beta_1\,. \end{aligned} \tag{3.20}$$

Der Ausdruck $c\Delta t/\Delta x$ entspricht dabei der sogenannten Courant-Friedrich-Lewy-Zahl δ, welche auch unter der Bezeichnung CFL-Zahl bzw. Courant-Zahl bekannt ist. Auf die Bedeutung dieser dimensionslosen Größe wird später noch im Detail eingegangen.

Neben Ortsdiskretisierung und Zeitintegration soll auch der Einfluss der Glättungsfilter in eine Gesamtbewertung der Numerik einfließen. Unter Berücksichtigung der Filterübertragungsfunktion $\hat{D}(k\Delta x)$ lässt sich das Transferverhalten $\hat{G}^\star(k\Delta x) = \hat{\phi}^{n+1}/\hat{\phi}^n$ des gesamten numerischen Verfahrens durch

$$\hat{G}^\star = \hat{D}\left[1 + \sum_{j=1}^{p} b_j \left(-i\delta k^\star \Delta x\right)^j\right] \tag{3.21}$$

ausdrücken. Um die Genauigkeit des numerischen Verfahrens bewerten zu können, ist ein Vergleich mit dem exakten Transferverhalten $\hat{G}(k\Delta x)$ erforderlich. Aus Abschnitt 2.2 ist bekannt, dass die lineare Advektionsgleichung Störungen beschreibt, die sich mit konstanter Geschwindigkeit c in positive x-Richtung ausbreiten. Die Form der Störungen bleibt dabei unverändert. Im Wellenzahlbereich bedeutet dies $\phi(x,t) \sim \exp[ik(x-ct)]$. Damit gilt für das exakte Transferverhalten:

$$\hat{G} = \exp(-i\delta k\Delta x)\ . \tag{3.22}$$

Im Falle eines idealen numerischen Verfahrens würde demnach $|\hat{G}^\star(k\Delta x)| = 1$ gelten, d.h. die Lösung wird im gesamten Wellenzahlbereich weder angefacht noch gedämpft. Abbildung 3.8 zeigt den Betrag der Übertragungsfunktion $|\hat{G}^\star(k\Delta x)|$ sowie den Phasenfehler $\arg(\hat{G}^\star) + \delta k\Delta x$ für das in PIANO umgesetzte numerische Verfahren. Man erkennt, dass das gewünschte ideale Verhalten lediglich in einem begrenzten Wellenzahlbereich realisiert wird. Für große Wellenzahlen weicht das Übertragungsverhalten der Numerik spürbar vom idealen Verhalten ab. Dabei ist zu beachten, dass dieses Verhalten spürbar durch die bereits erwähnte CFL-Zahl beeinflusst wird. Für $\delta = 0.2$ ist das Dämpfungsverhalten überwiegend durch die Charakteristik des verwendeten Glättungsfilters festgelegt. Für $\delta = 1$ hingegen wird das Auflösungsvermögen des numerischen Verfahrens deutlich durch die Eigenschaften der Zeitintegration mitbestimmt. Im Bereich linearer Dynamik ist es üblich, Dämpfung in Form einer exponentiellen Abklingrate auszudrücken. Zwischen dem Übertragungsverhalten der Numerik und der numerischen Abklingrate $\alpha^\star$ besteht dabei der allgemeine Zusammenhang $|\hat{G}^\star| = \exp(-\alpha^\star \Delta t)$. Definiert man beispielsweise für den relevanten Wellenzahlbereich eine zulässige Obergrenze $\alpha^\star \Delta t < 1 \cdot 10^{-5}$, so ist bei $\delta = 0.2$ eine Auflösung von ca. 16 PPW erforderlich. Würde man hingegen mit $\delta = 1$ arbeiten wäre die erforderliche Auflösung 20 PPW.

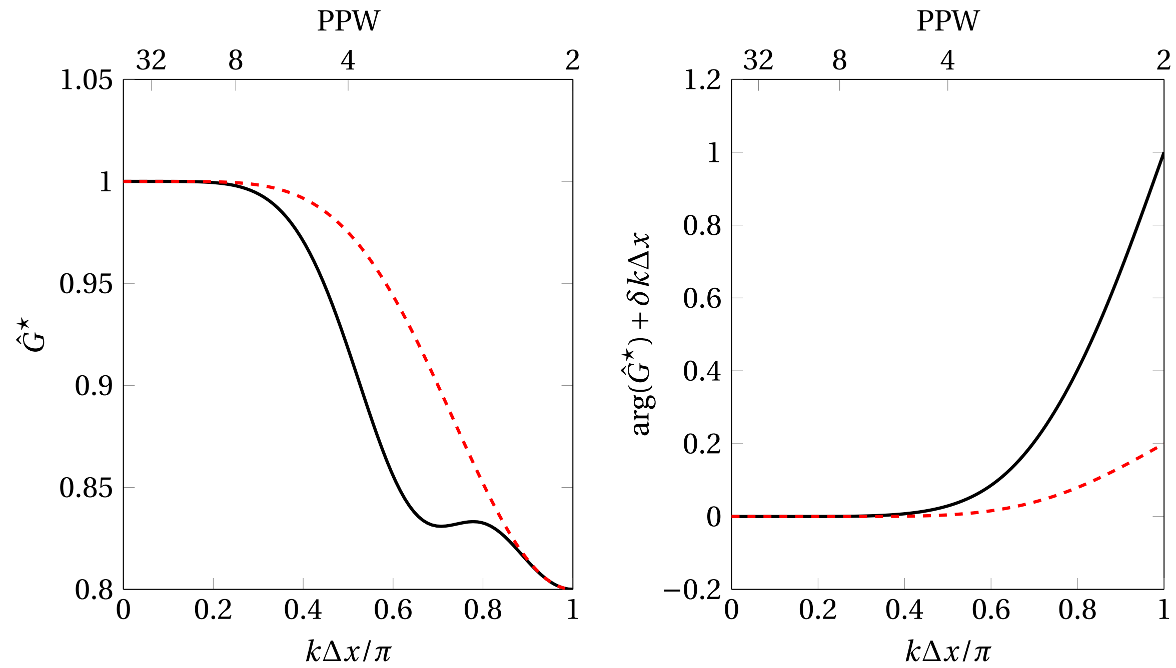


Abbildung 3.8: Dämpfungs- und Dispersionseigenschaften des in PIANO realisierten numerischen Verfahrens für unterschiedliche CFL-Zahlen: $\delta = 1$ (——), $\delta = 0.2$ (- - -).

Abschließend sei noch erwähnt, dass die hier durchgeführte von Neumann Analyse von periodischen Randbedingungen ausgeht. Das durch asymmetrische Differenzen- und Filterschemata bedingte ungünstige Verhalten der Numerik in Randnähe wird somit von vornherein ausgeklammert. Darüber hinaus liegt der Analyse durch Verwendung der linearen Advektionsgleichung ein stark vereinfachtes Modellproblem zu Grunde. Eine direkte Übertragung der Ergebnisse auf die in PIANO gelösten dreidimensionalen Störungsgleichungen (insbesondere die nichtlinearen PENNE) ist daher nur sehr eingeschränkt möglich. Nichtsdestotrotz hat sich im praktischen Einsatz des Lösers gezeigt, dass eine erforderliche Auflösung von ca. 20 PPW einen realistischen Wert darstellt, um präzise Aussagen hinsichtlich akustischer Dämpfungsvorgänge treffen zu können.

3.5 Randbedingungen

Die in Abschnitt 2.1 diskutierten Erhaltungsgleichungen zur Beschreibung der Wellenausbreitung besitzen im allgemeinen hyperbolischen Charakter. Um diese eindeutig lösen zu können, sind Randbedingungen erforderlich. Die numerische Umsetzung letzterer erfordert im Bereich der Strömungsakustik spezielle Methoden und Anpassungen. Die Schwierigkeit besteht hier darin, eine Implementierung zu finden, welche unerwünschte Einflüsse auf die Lösung (Dämpfung sowie Phasenfehler) minimiert und gleichzeitig die Ausbildung bzw. Anfachung numerischer Instabilitäten unterbindet.

3.5.1 Wandrandbedingung

Die in PIANO implementierten Erhaltungsgleichungen gehen in erster Näherung von einem reibungsfreien Fluid aus. Dies bedeutet für eine Modellierung akustisch harter Wände, dass lediglich die Störung der Geschwindigkeitskomponente in Normalenrichtung verschwinden muss:

$$n_i u_i' = 0 \ . \tag{3.23}$$

Die Geschwindigkeitskomponenten tangential zur Wand bleiben stattdessen unbeeinflusst. Eine Haftbedingung $u_i' = 0$ wird also nicht gefordert. Zur Realisierung einer Wandrandbedingung wird in PIANO auf den Implementierungsansatz von Tam und Dong [119] zurückgegriffen. Ausganspunkt der Implementierung ist die Impulsbilanz, die zunächst mit dem Wandnormalenvektor n_i multipliziert wird. Betrachtet man beispielsweise die nichtlinearen PENNE so gilt:

$$\varrho n_i \frac{\partial u_i'}{\partial t} + \varrho n_i R_i(\varrho, u_i, \ldots) = -n_i \frac{\partial p'}{\partial x_i} \ , \tag{3.24}$$

wobei $R_i(\varrho, u_i, \ldots)$ den Operator der konvektiven Impulsflüsse bezeichnet. Unter Berücksichtigung von Gleichung 3.23 verschwindet der erste Term auf der linken Seite von Gleichung 3.24, wodurch sich eine Bedingung für den wandnormalen Druckgradienten $n_i \partial p'/\partial x_i$ ergibt. Der Ansatz von Tam und Dong sieht nun vor, einen zusätzlichen fiktiven Gitterpunkt außerhalb des physischen Rechengebiets einzuführen. Die Druckstörung an diesem Gitterpunkt (in der englischsprachigen Fachliteratur auch als *ghost point* bezeichnet) wird so gewählt, dass Gleichung 3.23 am Randpunkt erfüllt ist.

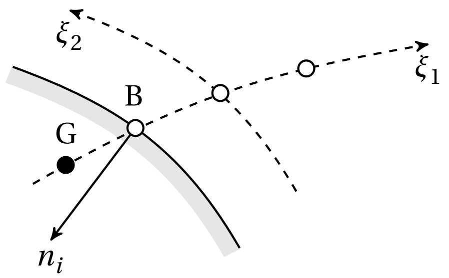


Abbildung 3.9: Realisierung der Wandrandbedingung durch fiktive Randpunkte (G).

Abbildung 3.9 zeigt die Verhältnisse am Beispiel einer $\xi_1 - \xi_2$ Ebene. Aus der bereits erwähnten Bedingung für den wandnormalen Druckgradienten lässt sich zunächst der geforderte Wert für $\partial p'/\partial \xi_1$ am Randpunkt (B) bestimmen. Es gilt:

$$\frac{\partial p'}{\partial \xi_1} = -\left[n_i \frac{\partial \xi_2}{\partial x_i} \frac{\partial p'}{\partial \xi_2} + n_i \frac{\partial \xi_3}{\partial x_i} \frac{\partial p'}{\partial \xi_3} + \varrho n_i R_i(\varrho, u_i, \ldots) \right] \left[n_i \frac{\partial \xi_1}{\partial x_i} \right]^{-1} \ . \tag{3.25}$$

Ist $\partial p'/\partial \xi_1$ bekannt, so ergibt sich aus der Berechnungsvorschrift eines asymmetrischen 7-Punkte Differenzenoperators, welcher den fiktiven Gitterpunkt (G), den Randpunkt (B) sowie fünf innere Gitterpunkte zur Approximation des Gradienten berücksichtigt, die Druckstörung am fiktiven Gitterpunkt $p'_{-1,l,m}$ gemäß:

$$p'_{-1,l,m} = \frac{1}{a_{-1}^{15}} \left(\frac{\partial p'}{\partial \xi_1} - \sum_{k=0}^{5} a_k^{15} p'_{k,l,m} \right) . \tag{3.26}$$

Durch die Einbringung der fiktiven Randpunkte wird die Berechnung der Druckgradienten in Wandnähe korrigiert. Für das 7-Punkte DRP Schema betrifft dies die drei äußersten Gitterpunkte. Letztendlich wird dadurch die Aufprägung der Wandrandbedingung über mehrere Gitterpunkte verteilt. Dies begünstigt unter anderem die numerische Stabilität der Implementierung.

3.5.2 Energieneutrale Einlassrandbedingung

Eine energieneutrale Einlassrandbedingung ist durch eine lokal verschwindende akustische Flussdichte definiert. Aus Abschnitt 2.5.2 ist bekannt, dass dies nur dann gewährleistet ist, wenn das Produkt aus Massenstromdichteschwankung m'_i und Totalenthalpieschwankung h_t den Wert Null annimmt. In der Praxis ist vor allem der Fall einer verschwindenden Massenstromdichteschwankung von Bedeutung. Dieser Zustand wird beispielsweise an kritisch durchströmten Querschnitten realisiert.

In PIANO wurde eine energieneutrale Einlassrandbedingung auf Grundlage der Bedingung $n_i m'_i = 0$ erstmals durch Pieringer [101] implementiert. Der Ansatz wurde im Zuge dieser Arbeit auf die PENNE Erhaltungsgleichungen erweitert. Die Forderung nach einer verschwindenden Massenstromdichteschwankung lautet hier:

$$\bar{\varrho} n_i u'_i + \varrho' n_i \bar{u}_i + \varrho' n_i u'_i = 0 . \tag{3.27}$$

Zur Realisierung dieser Bedingung in PIANO wird zunächst die zeitliche Ableitung von Gleichung 3.27 gebildet, wodurch folgender Zusammenhang resultiert:

$$\varrho n_i \frac{\partial u'_i}{\partial t} = -n_i u_i \frac{\partial \varrho'}{\partial t} , \tag{3.28}$$

wobei sich die zeitliche Ableitung der Dichtestörung $\partial \varrho'/\partial t$ unter Zuhilfenahme der Kontinuitätsgleichung durch örtliche Gradienten ausdrücken lässt. Das Ergebnis kann daraufhin verwendet werden, um zusammen mit Gleichung 3.24 eine Bedingung für den wandnormalen Gradienten der Druckstörung zu formulieren. Die Aufprägung dieser Bedingung erfolgt analog zur Wandrandbedingung durch Einbringung fiktiver Gitterpunkte. Damit ist die Umsetzung der energieneutralen Randbedingung weitestgehend identisch mit der bereits erläuterten Wandrandbedingung. Lediglich die Berechnung der Druckstörung am fiktiven Gitterpunkt ist durch die Forderung einer verschwindenden Massenstromdichteschwankung modifiziert.

3.5.3 Nichtreflektierende Randbedingungen

Möchte man erreichen, dass akustische Störungen sowie Störungen der Entropie bzw. der Wirbelstärke ungehindert das Rechengebiet verlassen, so ist der Einsatz spezieller nichtreflektierender Randbedingungen erforderlich. In PIANO stehen dazu bereits seit der Grundversion zwei unterschiedliche Implementierungen zu Verfügung.

Die Strahlungsrandbedingung ermöglicht ausschließlich die freie Abstrahlung akustischer Störungen. Der Verwendungszweck ist damit auf Randflächen beschränkt, die entweder nicht oder mit nach innen gerichtetem Geschwindigkeitsvektor überströmt werden. Die in PIANO ebenfalls verfügbare Ausströmrandbedingung berücksichtigt hingegen zusätzlich den konvektiven Transport von Störungen der Entropie bzw. der Wirbelstärke und wird an Berandungen mit nach außen gerichtetem Geschwindigkeitsvektor verwendet. Beide Randbedingungen gehen auf die Arbeiten von Tam und Webb [121] zurück und basieren auf einer Modifikation der linearisierten Eulergleichungen. Diese Modifikation wird anstelle der üblichen Grundgleichungen meist an den drei äußersten randnahen Gitterpunkten gelöst.

Für den speziellen Fall einer kritisch durchströmten Lavaldüse, welche im Normalfall Bestandteil einer Raketenschubkammer ist, tritt allerdings eine Besonderheit in Erscheinung. Geht man von einem reibungsfreien Fluid aus (eine Ausbreitung von Störungen entlang der Genzschicht wird damit ausgeschlossen) und erstreckt sich das Rechengebiet bis in den divergenten Bereich der Düse, so ist die Spezifikation einer Randbedingung am Auslass des Rechengebiets nicht mehr erforderlich. Eine Störung welche den Bereich $M > 1$ erreicht, ist nicht mehr in der Lage, entgegen der Strömungsrichtung in das Gebiet $M < 1$ zu propagieren. Stattdessen wird die Störung konvektiv weiter stromab transportiert. Sämtliche Charakteristiken der Störungsausbreitung am Überschallauslass sind damit nach außen gerichtet, wodurch die Definition einer Randbedingung entfällt.

Abschließend sei erwähnt, dass PIANO trotz dieser Gegebenheiten die Festlegung einer (beliebigen) Randbedingung am Überschallauslass erfordert. Untersuchungen haben allerdings gezeigt [101], dass die Wahl der Randbedingung keinerlei Einfluss auf die Lösung im subsonischen Bereich hat.

3.5.4 Impedanzrandbedingung

Wie bereits erwähnt, erfolgt die Lösung der Grundgleichungen in PIANO auf blockstrukturierten Rechengittern. Prinzipiell ermöglichen diese eine Diskretisierung fast beliebiger Geometrien. Für geometrisch komplexe Baugruppen, wie beispielsweise Absorberringe [72], ist eine direkte Vernetzung aber meist nicht praktikabel.

Um dieser Problematik zu begegnen, wurde von Morgenweck [88] eine frequenzabhängige Impedanzrandbedingung in PIANO implementiert, wodurch der Aufwand einer direkten Vernetzung oft vermieden werden kann. Unter gewissen Vorrausetzungen ist es möglich, das akustische Verhalten einzelner Komponenten durch den Einsatz einer äquivalenten Impedanzrandbedingung abzubilden. Allerdings sei erwähnt, dass dies unter anderem ein lokal reagierendes Verhalten voraussetzt. Lokal reagierend bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Antwort einer Randbedingung auf eine auftreffende Welle ausschließlich am selben Ort erfolgt. Ist dies nicht gewährleistet, so ist die Verwendung einer Impedanzmodellierung im Allgemeinen nicht zulässig.

Bei der Implementierung von Morgenweck handelt es sich um eine Impedanzmodellierung im Zeitbereich. In der englischsprachigen Fachliteratur ist dieser Randbedingungstyp auch unter dem Begriff *Time Domain Impedance Boundary Condition* (TDIBC) bekannt. Grundlage der Implementierung ist die Verwendung digitaler Filterverfahren, um die Frequenzabhängigkeit der Impedanz abbilden zu können. Morgenweck verwendet dabei sogenannte IIR-Filter mit Direktform I Struktur. Wie in Abschnitt 4.1.1 im Rahmen einer frequenzabhängigen Quelltermformulierung noch ausführlicher erläutert wird, ist diese Filterstruktur nur für einfache Frequenzabhängigkeiten numerisch stabil. Aus diesem Grund wurde die Formulierung im Kontext dieser Arbeit nochmals überarbeitet und eine wesentlich robustere Filterformulierung (SOS-Kaskadenstruktur) implementiert. Dadurch ist es möglich, auch komplexe Frequenzabhängigkeiten numerisch stabil abzubilden.

Für darüber hinausgehende Einzelheiten zur Realisierung frequenzabhängiger Impedanzrandbedingungen in PIANO sei auf die Arbeit von Morgenweck [88] verwiesen.

3.5.5 Anregungs- und Dämpfungszonen

Die in PIANO verfügbare Formulierung für künstliche Anregungs- und Dämpfungszonen geht auf einen Ansatz von Israeli und Orszag [61] zurück und ist in der Literatur unter der Bezeichnung *sponge layer* bekannt. Dabei werden in entsprechenden Bereichen des Rechengebiets zusätzliche Quellterme der Form

$$(S'_\varrho, S'_i, S'_e)^T = \sigma_d \left[(\varrho, u_i, p)^T_{ref} - (\varrho', u'_i, p')^T \right] \tag{3.29}$$

eingebracht, wobei $\sigma_d = \sigma_d(x_i)$ ein räumlich verteiltes Dämpfungsmaß und $(\varrho, u_i, p)^T_{ref}$ die Ziellösung innerhalb der Dämpfungszone bezeichnet.

Für $(\varrho, u_i, p)^T_{ref} = 0$ werden sämtliche Störungsgrößen ausschließlich gedämpft. Die Formulierung verhält sich in diesem Fall ähnlich einer nichtreflektierenden bzw. absorbierenden Randbedingung. Ist hingegen $(\varrho, u_i, p)^T_{ref} \neq 0$, so wird dem Lösungsfeld eine vorgegebene Größenverteilung aufgeprägt. Die Formulierung arbeitet in diesem Fall als Anregungszone. Häufig werden als Ziellösung analytische Modenformen verwendet. Dadurch ist es beispielsweise möglich, einzelne Schwingungszustände innerhalb des Rechengebiets gezielt anzuregen.

Eine Besonderheit der hier beschriebenen Dämpfungszonen ist das unter bestimmten Voraussetzungen auftretende Reflexionsverhalten am Übergangsbereich zwischen Rechengebiet und Dämpfungszone. Um dies soweit wie möglich zu minimieren, wird das Dämpfungsmaß durch spezielle Verteilungsfunktionen beschrieben. In PIANO gilt für das Dämpfungsmaß innerhalb der Zone der Ansatz

$$\sigma_d = A_\sigma \left[1 - \cos\left(\frac{\pi x_\sigma}{L_\sigma} \right) \right] \ , \tag{3.30}$$

wobei $A_\sigma \approx 1 \dots 10^3$ das Dämpfungsmaximum, L_σ die geometrische Ausdehnung bzw. Länge und x_σ den Abstand vom äußeren Rand der Dämpfungszone bezeichnet.

4 Quellterm- und Verlustmodellierung

In Kapitel 3 wurde das numerische Lösungsverfahren zur Diskretisierung der verschiedenen Störungsgleichungen im Detail vorgestellt. Damit ist es prinzipiell möglich, die Ausbreitung akustischer Störungen in Raketenschubkammern zu berechnen. Im Hinblick auf eine Modellierung thermoakustischer Effekte ist aber auch eine Miteinbeziehung der verbrennungsinduzierten Quellterme erforderlich. Letztere wurden bisher nicht näher betrachtet.

Zur Berücksichtigung der Quellterme wurde im Rahmen der vorliegenden Arbeit ein Ansatz auf Basis digitaler Filterverfahren implementiert. Dieser ermöglicht es, Rückkopplungseffekte infolge transienter Verbrennungsvorgänge durch eine frequenzabhängige Übertragungsfunktion im Zeitbereich abzubilden. Die Methode, welche sich auch als eine Verallgemeinerung der Impedanzrandbedingung aus Abschnitt 3.5.4 auffassen lässt, soll nachfolgend im Detail vorgestellt werden.

Im zweiten Teil des Kapitels steht die Modellierung akustischer Verluste im Zentrum der Diskussion. Es hat sich gezeigt, dass eine direkte Auflösung der dissipativen Vorgänge oftmals mit einem enormen Rechenaufwand verbunden ist. Um diesen soweit wie möglich zu begrenzen, bietet es sich an, lokale Dämpfungsprozesse in ihrer Wirkung zu modellieren. In diesem Zusammenhang wird ein möglicher Ansatz vorgestellt, der es erlaubt, den dissipativen Einfluss komplexer Bauteile ohne Berücksichtigung geometrischer Details abzubilden.

4.1 Frequenzabhängige Quelltermmodellierung

Wie bereits zu Beginn dieser Arbeit erläutert, ist der Akustiklöser PIANO Teil eines hybriden Verfahrens zur Simulation hochfrequenter Verbrennungsinstabilitäten. Dabei wird der Ansatz verfolgt, die Teilbereiche Akustik und Verbrennung getrennt voneinander zu betrachten, wobei die Verbrennung separat mithilfe von CFD Rechnungen charakterisiert wird. Das gewonnene Flammenverhalten wird anschließend durch sogenannte Flammentransferfunktionen abgebildet, welche einen kausalen Zusammenhang zwischen den fluktuierenden Quelltermen S'_ϱ, S'_i, S'_e und akustischen Störungsgrößen herstellen. Mit der Beschränkung auf lineare Dynamik kann beispielsweise die Energiefreisetzung im Frequenzbereich durch

$$\frac{\hat{S}_e(\omega, x_i)/\bar{S}_e}{\hat{\phi}/\bar{\phi}} = \mathcal{F}_\phi(\omega, x_i) \ , \tag{4.1}$$

modelliert werden, wobei ϕ eine an dieser Stelle nicht näher spezifizierte akustische Kopplungsvariable bezeichnet. $\mathcal{F}_\phi(\omega, x_i)$ kennzeichnet die bereits erwähnte Flammentransferfunktion. Betrachtet man die Verhältnisse in einer Raketenbrennkammer, so fällt auf, dass die Verbrennung im Allgemeinen eine größere Ausdehnung besitzt. Es ist deshalb davon auszugehen, dass die Dynamik der Flamme örtlichen Variationen unterworfen ist, was sich in einer ortsabhängige Flammentransferfunktion $\mathcal{F}_\phi(\omega, x_i)$ widerspiegelt.

Prinzipiell kann das instationäre Flammenverhalten durch jede der akustischen Störungsgrößen mehr oder wenig stark beeinflusst werden. In der Vergangenheit wurde jedoch meist eine ausgeprägte Empfindlichkeit gegenüber akustischen Druck- und Schnelleschwankungen in Betracht gezogen. Dabei ist zu beachten, dass im Falle einer akustischen Schnellekopplung auch die entsprechenden Richtungsverhältnisse der Störungen eine Einflussgröße darstellen. Da diese insbesondere durch die akustischen Modenformen beeinflusst werden, wäre in diesem Fall eine generelle Modenabhängigkeit zu erwarten. Die Bewertung und Diskussion der unterschiedlichen Rückkopplungsmechanismen ist allerdings nicht Teil dieser Arbeit. Auf eine weitere Auseinandersetzung mit diesem sehr umfangreichen Themengebiet wird deshalb an dieser Stelle verzichtet und stattdessen auf aktuelle Untersuchungen [113, 116] verwiesen. Um jedoch eine größtmögliche Flexibilität zu gewährleisten, kann die Kopplungsvariable in PIANO frei gewählt werden. Darüber hinaus ist auch eine Superposition mehrerer Flammentransferfunktionen möglich.

4.1.1 Digitale Filter

Gleichung 4.1 gibt den Zusammenhang zwischen der Kopplungsgröße $\hat{\phi}$ und der verbrennungsinduzierten Energiefreisetzung $\hat{S}_p$ im Frequenzbereich wieder. Um diesen Zusammenhang in PIANO nutzen zu können, wird jedoch eine Formulierung im Zeitbereich benötigt. Dazu wird analog zum Vorgehen von Pankiewitz [98] und Huber [58] auf digitale Signalfilter zurückgegriffen. Letztere lassen sich im Zeitbereich üblicherweise durch eine Differenzengleichung der Form

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) \tag{4.2}$$

darstellen, wobei $x = \phi'/\bar{\phi}$ die skalare Eingangsgröße und $y = S_e'/\bar{S}_e$ die zugehörige skalare Ausgangsgröße darstellt. Gemäß Gleichung 4.2 berechnet sich demnach die aktuelle Ausgangsgröße $y(n)$ durch eine Linearkombination der konstanten Filterkoeffizienten a_k und b_k mit zeitlich verzögerten Ein- und Ausgangsgrößen.

Für $N = 0$ hängt die Antwort des Filters lediglich von zeitlich verzögerten Eingangsgrößen ab und kann explizit aus den Eingangsgrößen berechnet werden. Da sich die Impulsantwort des Filters in diesem Fall über maximal $M+1$ Zeitschritte erstreckt, wird ein Filter dieses Typs auch als Filter mit endlicher Impulsantwort (englisch FIR-Filter - *Finite Impulse Response Filter*) bezeichnet.

Ist hingegen $N \neq 0$, so ist die Antwort des Filters auch durch die Historie der Ausgangsgrößen mitbestimmt. Der Charakter des Filters ist demnach implizit bzw. rekursiv. Darüber hinaus ist die Impulsantwort des Filters zeitlich nicht begrenzt, weshalb diese Filter auch als Filter mit unendlicher Impulsantwort (englisch IIR-Filter - *Infinite Impulse Response Filter*) bezeichnet werden.

Um das Übertragungsverhalten von Gleichung 4.2 näher zu untersuchen, muss letztere in den Spektralbereich überführt werden. Für zeitkontinuierliche Systeme wird dazu üblicherweise auf die klassische Laplace-Transformation zurückgegriffen. Für zeitdiskrete Systeme tritt an deren Stelle die z-Transformation

$$\mathcal{Z}\{x(n)\} = \hat{X}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \ . \tag{4.3}$$

Zwischen der komplexen s-Ebene der Laplace-Transformation und der komplexen z-Ebene der z-Transformation gilt allgemein der Zusammenhang

$$z = \exp(T_s\, s) \ , \tag{4.4}$$

wobei $s = \alpha + i\omega$ und T_s die konstante Abtastzeit des zeitdiskreten Systems bezeichnet. Für die z-Tranformation gelten ähnliche Rechenregeln wie für die Laplace-Transformation, wobei insbesondere die Linearität

$$\mathcal{Z}\{a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)\} = a_1 \hat{X}_1(z) + a_2 \hat{X}_2(z) \tag{4.5}$$

sowie die sog. Rechtsverschiebung

$$\mathcal{Z}\{x(n-k)\} = z^{-k} \hat{X}(z) \tag{4.6}$$

von besonderer Bedeutung für die nachfolgenden Ausführungen sind. Auf darüber hinaus gehende Erläuterungen zur z-Transformation soll an dieser Stelle verzichtet werden. Stattdessen sei auf entsprechende Fachliteratur wie beispielsweise [96] verwiesen.

Wird die z-Transformation auf beide Seiten der Differenzengleichung 4.2 angewandt, so lässt sich unter Berücksichtigung der Eigenschaften 4.5 und 4.6 schreiben:

$$\hat{Y}(z) = \hat{X}(z) \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} - \hat{Y}(z) \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k} \ . \tag{4.7}$$

Das allgemeine Übertragungsverhalten $\hat{H}(z) = \hat{Y}(z)/\hat{X}(z)$ der Differenzengleichung 4.2 besitzt im z-Bereich demnach die Form

$$\hat{H}(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}} \ . \tag{4.8}$$

Dabei handelt es sich um eine gebrochen rationale Funktion, bestehend aus einem Zähler- und einem Nennerpolynom. Aus der Lage der Nullstellen dieser Polynome lassen sich wichtige Systemeigenschaften ableiten. Insbesondere die Nullstellen des Nennerpolynoms - auch Polstellen genannt - besitzen für das dynamische Stabilitätsverhalten des Filters fundamentale Bedeutung.

Für zeitkontinuierliche Systeme ist ein stabiles Verhalten dadurch gekennzeichnet, dass sämtliche Polstellen der Übertragungsfunktion im zweiten bzw. dritten Quadranten der komplexen s-Ebene liegen (Abbildung 4.1), d.h $\alpha^{\times} < 0$, wobei $\alpha^{\times}$ den Realteil einer jeweiligen Polstelle bezeichnet. In diesem Fall ist eine zeitlich abklingende Impulsantwort sichergestellt. Aus

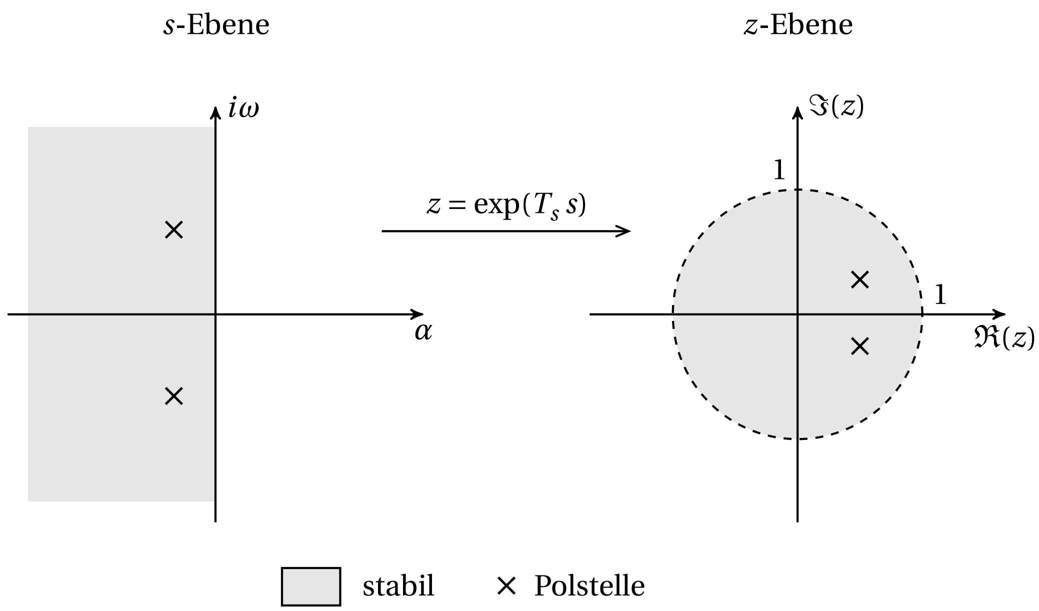


Abbildung 4.1: Bewertung der Filterstabilität durch Betrachtung der Polstellen in der komplexen s und z-Ebene.

Gleichung 4.4 lässt sich eine äquivalente Bedingung für den z-Bereich ableiten. Für stabiles Verhalten muss demnach

$$|z^{\times}| < 1 \tag{4.9}$$

gelten, wobei $z^{\times}$ die Lage aller Polstellen in der komplexen z-Ebene charakterisiert. Dies bedeutet, dass ein stabiles Filterverhalten nur dann zu erwarten ist, wenn sich sämtliche Polstellen innerhalb des Einheitskreises befinden.

In der Praxis ist der Abstand der Polstellen zur Stabilitätsgrenze meist sehr gering. Wird eine Darstellung der Übertragungsfunktion entsprechend Gleichung 4.8 gewählt (Polynomdarstellung), so ist für die Filterkoeffizienten a_k und b_k oft eine enorme Genauigkeit erforderlich, um für Filter hoher Ordnung ein stabiles Verhalten zu gewährleisten. Reale Systeme arbeiten jedoch stets mit einer begrenzten Rechengenauigkeit. Es bietet sich deshalb an, eine alternative Darstellung zu verwenden, welche wesentlich toleranter gegenüber einer Arithmetik mit begrenzter Präzision ist. Eine im Hinblick auf eine Implementierung vorteilhafte Darstellung der Übertragungsfunktion ist die sog. SOS-Form (englisch SOS - *Second Order Section*)

$$\hat{H}(z) = \prod_{k=1}^{L} \hat{H}_k(z) = \prod_{k=1}^{L} \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 + a_{1k} z^{-1} + a_{2k} z^{-2}} \ . \tag{4.10}$$

Wie der Name bereits erkennen lässt, wird hier die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems durch ein Produkt aus Übertragungsfunktionen mit maximal zweiter Ordnung gebildet. Die SOS-Form entspricht damit einer Serienschaltung einzelner Filter mit reduzierter Ordnung. Letztere zeigen ein deutlich unempfindlicheres Verhalten gegenüber Quantisierungsfehlern, wodurch letztendlich ein robustes Gesamtverhalten resultiert. Der maximale Zähler- bzw. Nennergrad einer auf Basis von Gleichung 4.10 dargestellten Übertragungsfunktion beträgt $2L$. Für ungerade Zähler- und Nennerpolynome müssen deshalb einzelne z^{-2} Koeffizienten, d.h. a_{2k} bzw. b_{2k} zu Null gesetzt werden. Damit kann im Grunde jede Übertragungsfunktion der Form 4.8 in eine äquivalente SOS-Darstellung überführt werden kann.

Die Realisierung des Filterverfahrens besitzt für die vorgestellte Quelltermmodellierung eine besondere Bedeutung. Gemäß Gleichung 4.1 ist die Modellierung des Rückkopplungsverhaltens lokal, d.h der Quellterm wird durch lokale Strömungszustände beeinflusst. Als Folge dessen muss der Wert des Quellterms für jeden einzelnen Gitterpunkt durch Auswertung eines Filters berechnet werden. Im Hinblick auf ein effizientes Simulationsverfahren ist es erforderlich, eine Implementierung zu wählen, welche den dabei erforderlichen Rechen- und Speicheraufwand so weit wie möglich in Grenzen hält.

Prinzipiell gibt es verschiedene Methoden, digitale Filter zu realisieren. Beschränkt man sich auf Filter geringer Ordnung, so sind im Wesentlichen die Direktform I und II von Bedeutung[14]. Abbildung 4.2 verdeutlicht am Beispiel von Signalflussdiagrammen die Unterschiede der beiden Filterstrukturen. Die Direktform I entspricht im Grunde einer unmittelbaren Umsetzung der Differenzengleichung 4.2. Zur Auswertung der Filters müssen die Zustände $x(n-k)$ sowie $y(n-k)$ jederzeit bekannt sein, wofür $N+M$ Speicherelemente erforderlich sind.

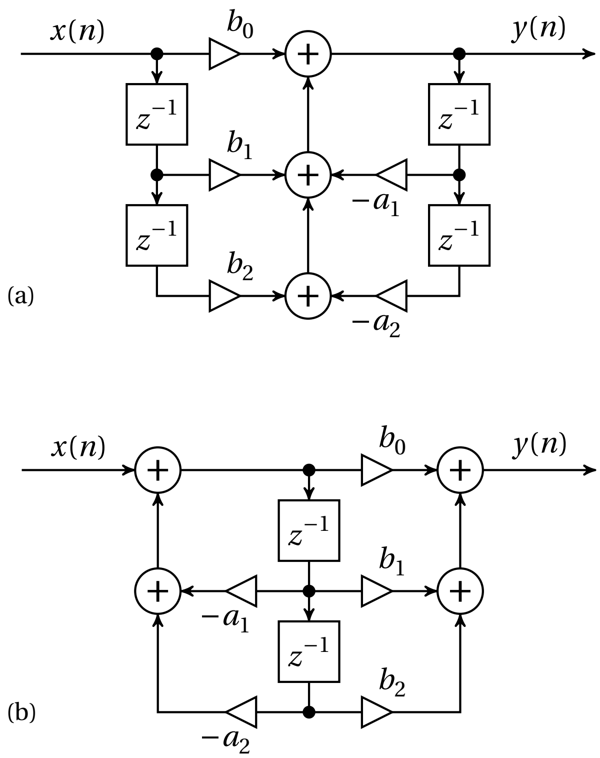


Abbildung 4.2: Blockstruktur unterschiedlicher digitaler IIR-Filter wobei $N = M = 2$: Direktform I (a), Direktform II (b).

[14] Bei einer Direktform entsprechen die Filterkoeffizienten unmittelbar also *direkt* den Koeffizienten der Übertragungsfunktion.

Um den Speicheraufwand zu reduzieren, besteht die Möglichkeit, digitale Filter auf Basis der Direktform II zu realisieren. Anstelle der Zustände $x(n-k)$ sowie $y(n-k)$ wird hier lediglich die Zeithistorie einer Zwischengröße w benötigt, wodurch der erforderliche Speicheraufwand praktisch halbiert werden kann. Das dynamische Verhalten des Filters bleibt hingegen unverändert. Die Differenzengleichung eines digitalen Filters in Direktform II lautet

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M} b_k w(n-k) \tag{4.11}$$

wobei

$$w(n) = x(n) - \sum_{k=1}^{N} a_k w(n-k) \ . \tag{4.12}$$

Die Blockstruktur bzw. das Signalflussdiagramm der Direktform II ist ebenfalls in Abbildung 4.2 gezeigt.

Prinzipiell ist es möglich, die hier beschriebenen Direktformen auch zur Realisierung von Filtern höherer Ordnung zu verwenden. Nachteilig ist aber die bereits erwähnte Koeffizientenempfindlichkeit. In der Praxis werden Direktformen deshalb meist nur bis zur Ordnung $M, N \leq 2$ eingesetzt. Um darüber hinausgehende Übertragungsverhalten realisieren zu können, wird stattdessen häufig auf eine Serienschaltung von Einzelfiltern gemäß Gleichung 4.10 zurückgegriffen. Die sich dabei ergebenden Filter werden als SOS-Filter bzw. allgemein als Kaskaden- oder Kettenfilter bezeichnet.

Zur Realisierung frequenzabhängiger Quellterme in PIANO wird ebenfalls auf eine SOS-Filterstruktur gesetzt. Abbildung 4.3 verdeutlicht die prinzipielle Blockstruktur am Beispiel einer Ausführung mit vier Einzelfiltern zweiter Ordnung. Letztere sind aus Gründen der Speicherbedarfsoptimierung als Direktform II ausgeführt. Dadurch ist es möglich, im Rahmen eines akzeptablen Rechen- und Speicheraufwands ein komplexes frequenzabhängiges Quelltermverhalten abzubilden.

Das hier beschriebene Filterverfahren kann ohne Einschränkungen auch zur Realisierung einer komplexen bzw. frequenzabhängigen Randbedingung im Zeitbereich (*Time Domain Impedance Boundary Condition* - TDIBC, Abschnitt 3.5.4) verwendet werden. Letztere wurde erstmals von Morgenweck [88] in PIANO umgesetzt. Diese ursprüngliche Implementierung beinhaltet allerdings die Verwendung einer Direktform I Filterstruktur. Aufgrund der beschriebenen Stabilitätsprobleme ist der Einsatz deshalb auf Übertragungsfunktionen mit geringer Ordnung beschränkt. Für viele praktische Problemstellungen, wie beispielsweise Absorberringe mit unterschiedlich abgestimmten Resonatoren, ist zur Abbildung der Frequenzabhängigkeit jedoch eine deutlich höhere Filterordnung erforderlich. Aufgrund dieser Einschränkungen wurde im Rahmen dieser Arbeit das ursprünglich zur Modellierung frequenzabhängiger Quellterme vorgesehene Filterverfahren auch auf die Randbedingungen übertragen. Somit können nun auch komplexe Frequenzabhängigkeiten erfasst und numerisch stabil wiedergegeben werden.

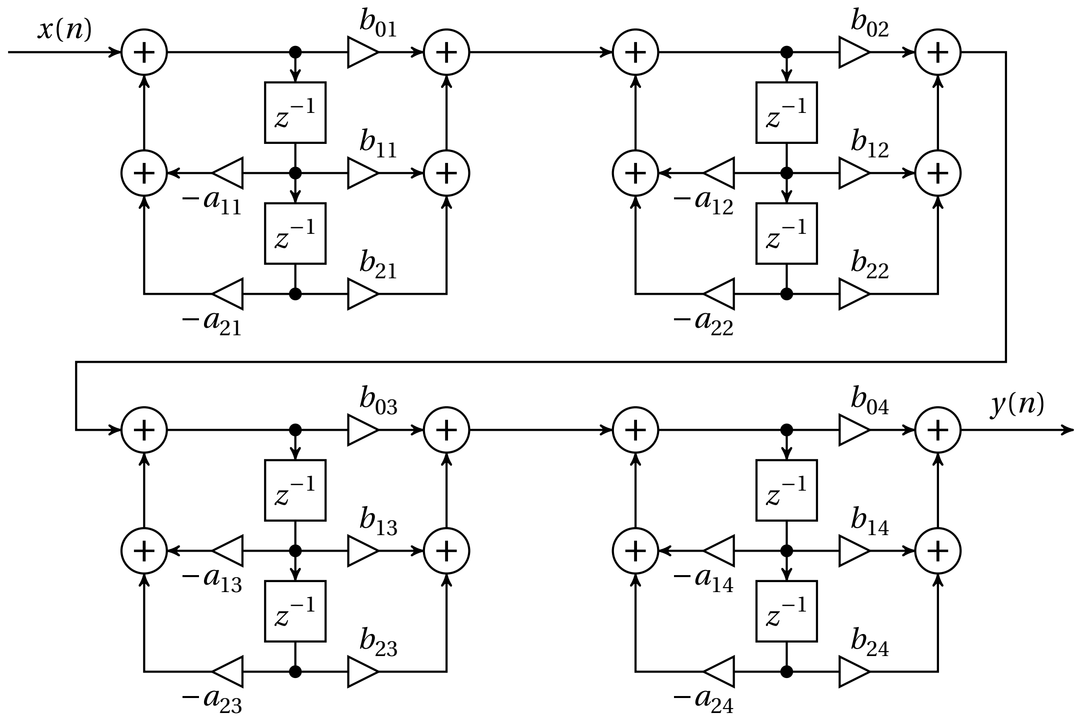


Abbildung 4.3: Prinzipielle Blockstruktur der in PIANO realisierten SOS-Filter am Beispiel einer Ausführung mit vier Einzelfiltern zweiter Ordnung.

4.1.2 Bestimmung der Filterkoeffizienten

Voraussetzung für eine Anwendung der frequenzabhängigen Quelltermmodellierung ist die Kenntnis der Filterkoeffizienten. Dabei wird davon ausgegangen, dass das Übertragungsverhalten der Verbrennung in Form einer Reihe diskreter Datenpunkte vorliegt, welche sowohl den Betrag, als auch die zugehörige Phasenlage der Flammenantwort beinhalten[15]. Die Aufgabe besteht nun darin, einen Satz Filterkoeffizienten zu bestimmen, der einerseits das durch die Datenpunkte definierte Übertragungsverhalten abbildet und andererseits ein stabiles Filterverhalten gewährleistet.

Für diese Problemstellung bietet das kommerzielle Softwarepaket MATLAB® die vorgefertigte Routine `invfreqz`. Der darin umgesetzte Algorithmus [29, 78] sieht vor, die benötigten Filterkoeffizienten durch Minimierung des Fehlers zwischen gewünschtem und approximiertem Übertragungsverhalten zu bestimmen. Allerdings hat sich gezeigt, dass dieser Ansatz oft nicht in der Lage ist, das gewünschte Übertragungsverhaltens mit zufriedenstellender Genauigkeit wiederzugeben. Die Ursache für diese Schwierigkeiten kann mitunter auf die großen Unterschiede zwischen der Bandbreite der Transferfunktion und dem aufgelösten Frequenz-

[15] Um den im Zeitbereich operierenden Akustiklöser PIANO effektiv nutzen zu können, muss die Gültigkeit der Transferfunktion $\mathcal{F}_{\phi}(\omega, x_i)$ über einen möglichst weiten Frequenzbereich sichergestellt sein. Im Idealfall sollte der gesamte Frequenzbereich bis zur numerischen Auflösungsgrenze abgedeckt sein.

bereich der Akustiksimulation zurückgeführt werden. Letzterer reicht aufgrund der erforderlichen kleinen Zeitschritte oft in den Bereich mehrerer MHz, wohingegen die Grenzfrequenz der Transferfunktion die 10kHz-Grenze meist nicht überschreitet. Um dahingehende Probleme zu überwinden, schlägt Morgenweck [88] ein sogenanntes Upsamplingverfahren vor. Dabei wird der Zeitschritt des Filters durch Einführung zusätzlicher Filterkoeffizienten an den Zeitschritt des Simulationsverfahrens angepasst. Problematisch sind hier jedoch die sich ergebenden spektralen Wiederholungen, wodurch eine unphysikalische Erweiterung des Übertragungsverhaltens hin zu höheren Frequenzen resultiert.

Im Kontext der vorliegenden Arbeit wird ein alternativer Ansatz zur Bestimmung der Filterkoeffizienten verfolgt. Dabei wird aus den verfügbaren Datenpunkten zunächst eine zeitkontinuierliche Übertragungsfunktion der Form

$$\hat{H}(s) = k\frac{\prod_{k=1}^{M}(s - s_k^{\circ})}{\prod_{k=1}^{N}(s - s_k^{\times})} \tag{4.13}$$

bestimmt, wobei k einen Vorfaktor, s_k° die Nullstellen und $s_k^{\times}$ die Polstellen der Übertragungsfunktion charakterisiert. Gleichung 4.13 wird allgemein als Pol-Nullstellen-Form (PN-Form) bezeichnet. Die PN-Form besitzt allgemein ein besonders hohes Maß an Robustheit gegenüber Quantisierungsfehlern. Dadurch ist es möglich, den Einfluss letzterer auch im Rahmen der Filterableitung so weit wie möglich zu begrenzen. Für die praktische Bestimmumg der zeitkontinuierlichen Übertragungsfunktion kann wiederum auf vorgefertigte MATLAB® Routinen (`invfreqs`) zurückgegriffen werden. Darüber hinaus hat sich in diesem Zusammenhang auch ein als *Vector Fitting* bekannter Ansatz von Gustavsen und Semlyen [47, 48] bewährt[16]. Dieser ist üblicherweise auch für komplexe Problemstellungen zuverlässig einsetzbar und ermöglicht eine präzise Approximation des gewünschten Übertragungsverhaltens[17]. Die zeitkontinuierliche Darstellung wird anschließend in eine diskrete Form überführt. Um dies zu erreichen, kann unter Anderem die bilineare Transformation

$$s = \frac{2}{T_s}\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \tag{4.14}$$

verwendet werden. Angewandt auf Gleichung 4.13 erhält man zunächst eine diskrete Übertragungsfunktion mit Pol-Nullstellen-Gestalt. Diese wird anschließend in die benötigte SOS-Form überführt, wobei für diesen finalen Schritt abermals eine vorgerfertigte MATLAB® Routine (`zp2sos`) verwendet werden kann.

Abbildung 4.4 zeigt exemplarisch die Qualität der somit erzeugten IIR-Filter. Um die Frequenzabhängigkeit der vorgegebenen Datenpunkte akkurat wiederzugeben, ist im konkreten

[16] Eine Implementierung für MATLAB® steht unter `http://www.sintef.no/projectweb/vectfit` frei zur Verfügung (abgerufen am 26.05.2016).

[17] Das Verhalten der Übertragungsfunktion außerhalb des durch Stützstellen festgelegten Bereichs ist im Allgemeinen keinen weiteren Bedingungen unterworfen. Um ein unkontrolliertes Verhalten zu vermeiden, besteht prinzipiell die Möglichkeit, $\hat{H}(s)$ vor der Überführung in eine zeitdiskrete Form mit der Übertragungsfunktion eines Tiefpassfilters zu multiplizieren.

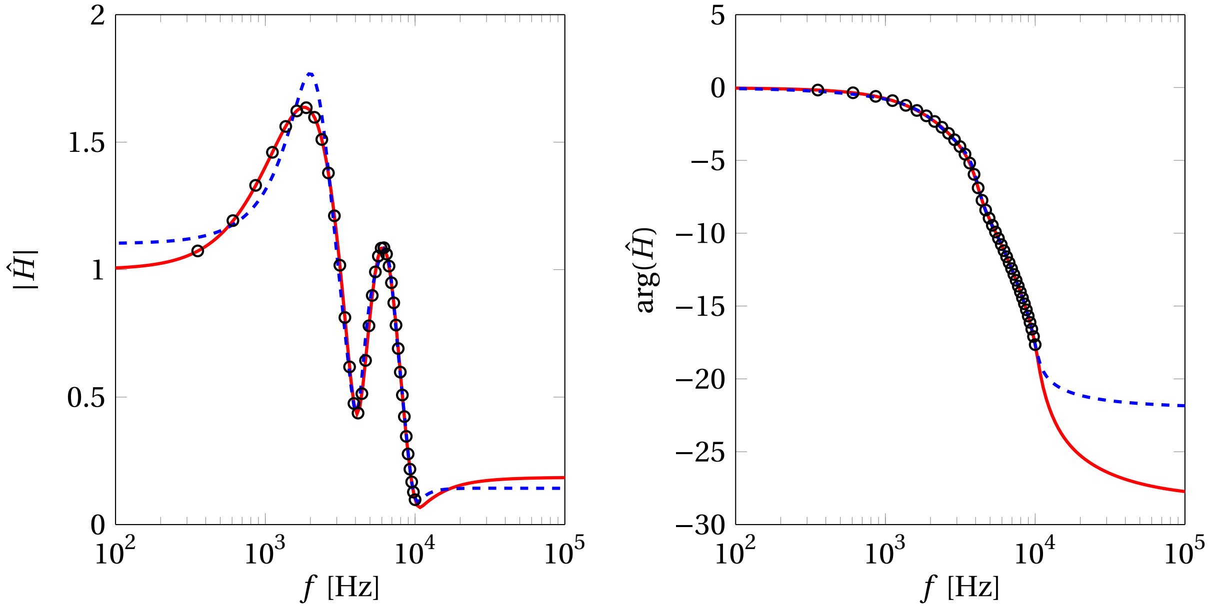


Abbildung 4.4: Qualität der Filtergenerierung: Stützstellen (○), Filterordnung $M = N = 10$ (——), Filterordnung $M = N = 8$ (- - -).

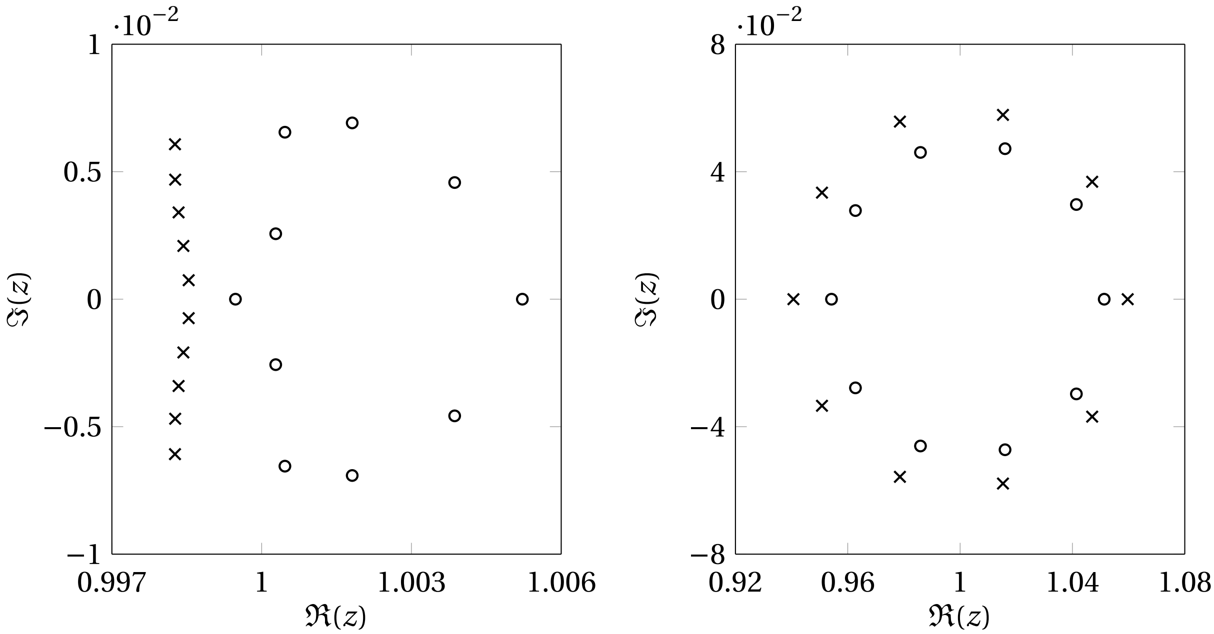


Abbildung 4.5: Lage der Pol- (×) und Nullstellen (○) in der komplexen Ebene für unterschiedliche Filterstrukturen: SOS-Struktur (links), Polynomstruktur (rechts).

Beispiel ein Filter zehnter Ordnung erforderlich. Mit einer geringeren Ordnung zeigen sich vor allem im Amplitudengang spürbare Abweichungen. Eine weitere Erhöhung der Filterordnung würde darüber hinaus keine signifikante Verbresserung mit sich bringen. Vielmehr würden aufgrund der zusätzlichen Verzögerungsglieder die Einschwingzeit sowie der Rechenaufwand zur Auswertung der Filter weiter zunehmen. Da dies im Allgemeinen jedoch eher unerwünscht ist, ist man bestrebt die Filterordnung im Rahmen der Genauigkeitsanforderungen möglichst gering zu halten.

Die Bedeutung einer SOS-Filterstruktur wird in Abbildung 4.5 deutlich. Dargestellt ist hier die Lage der Polstellen innerhalb der komplexen Ebene. Verwendet man eine Kaskadenstruktur, so ist die Stabilitätsbedingung 4.9 für sämtliche Polstellen erfüllt. Arbeitet man hingegen mit einer Polynomdarstellung (Direktform), so befinden sich mehrere Polstellen außerhalb des Stabilitätsbereichs. Ein stabiler Einsatz des Filters wäre in diesem Fall nicht möglich.

4.2 Modellierung akustischer Verluste

In Abschnitt 2.6 wurde gezeigt, dass für die Ausbreitung akustischer Störungen in gradientenbehafteten Grundströmungen verschiedene Wechselwirkungsprozesse mit hydrodynamischen Störungsanteilen existieren. Diese führen mitunter dazu, dass dem akustischen Wellenfeld signifikant Energie entzogen wird.

Wie später in Kapitel 6 gezeigt wird, sind Erhaltungsgleichungen wie die nichtlinearen PENNE Gleichungen prinzipiell in der Lage, die Interaktion akustischer Störungen mit Gradienten des mittleren Strömungsfelds richtig zu beschreiben. Allerdings ist es dabei erforderlich, Gradienten und geometrische Details direkt aufzulösen. Für einfache Problemstellungen ist dies üblicherweise mit einem noch akzeptablen Rechenaufwand möglich. Für praktisch relevante Anwendungen im Bereich der Brennkammerakustik hingegen erweist sich dieser Ansatz häufig als nicht zielführend. Die Schwierigkeit äußert sich hier in einem klassischen Skalenproblem. So besteht das Einspritzsystem einer Flüssigkeitsraketenschubkammer in der Regel aus einer Vielzahl von Injektoren, wobei das charakteristische Längenmaß der Injektoren häufig um mehrere Größenordnungen kleiner ist als die Abmessungen der Brennkammer. Ein Versuch, diese Details direkt aufzulösen, erfordert eine enorme Anzahl an Gitterknoten und übersteigt damit die derzeit verfügbaren Rechenkapazitäten. Um den Einfluss dennoch berücksichtigen zu können, ist eine alternative Herangehensweise somit unausweichlich.

4.2.1 Modellierungsansatz

Im Folgenden wird eine gesonderte Modellierung akustischer Verluste vorgestellt. Dabei wird zunächst auf ein Ergebnis aus Abschnitt 2.6 zurückgegriffen, wonach sich die angesprochenen Wechselwirkungsprozesse meist durch effektive Impulsquellterme beschreiben lassen. Wird der Fall akustischer Dissipation betrachtet, so ist der Beitrag der Impulsquellterme negativ, d.h. es tritt ein Impulsverlust innerhalb des akustischen Störungsfelds in Erscheinung, wobei dies einem lokalen Totaldruckverlust gleichkommt. Wie in Anhang E am Beispiel einer durchströmten Blende detailliert gezeigt wird, ist es demnach möglich, Wechselwirkungsverluste gleichwertig durch eine lokale Druckverlustmodellierung abzubilden.

Im Bereich der numerischen Strömungssimulation (CFD) werden Totaldruckverluste durch nichtaufgelöste bzw. für geometrisch komplexe Einbauten wie Einspritzplatten oder Mischgitter häufig durch Ansätze zur makroskopischen Beschreibung quasi-poröser Materialien modelliert [3, 4]. Die Idee besteht darin, periodische Strukturen homogenisiert durch ein poröses Modellmedium zu betrachten. Dadurch entfällt eine detaillierte Auflösung der geometrischen Details. Dieser Ansatz soll im Rahmen einer Modellierung spezieller akustischer Verluste auch auf den Anwendungsbereich der numerischen Strömungsakustik (CAA) ausgedehnt werden.

Für die Durchströmung quasi-poröser Gebiete existiert eine Reihe von Beziehungen, womit sich lokale Totaldruckverluste in Abhängigkeit makroskopischer Einflussgrößen bestimmen lassen. Ein hierfür weit verbreiteter Ansatz ist die Forchheimer Beziehung [17]

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = au + bu^2 + m_p \frac{\partial u}{\partial t} \,, \tag{4.15}$$

welche das Darcy-Gesetz in den Bereich turbulenter Strömungen hinein erweitert. a bezeichnet dabei einen viskosen, b einen kinematischen Widerstandskoeffizienten. Der Koeffizient m_p erlaubt die Berücksichtigung möglicher Trägheitseffekte. Eine in der Literatur [127] häufig anzutreffende mehrdimensionale Formulierung der Forchheimer Beziehung für anisotropes Materialverhalten besitzt die Form:

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i} = A_{ij} u_i + B_{ij} |u_{kk}| u_i + m_p \frac{\partial u_i}{\partial t} \,, \tag{4.16}$$

mit A_{ij} als viskosen und B_{ij} als kinematischen Widerstandstensor. Gleichung 4.15 bzw. 4.16 stellt einen Zusammenhang zwischen dem Druckgradienten und der lokalen Strömungsgeschwindigkeit her. Die rechte Seite besitzt dabei jeweils die Form einer volumenspezifischen Impulsquelle. Um einen geeigneten Verlust- bzw. Interaktionsquellterm für die akustischen Erhaltungsgleichungen zu formulieren, wird zunächst Gleichung 4.15 in Störung und zugehörigen Gleichanteil zerlegt, wodurch der Ausdruck

$$-\frac{\partial p'}{\partial x} = (a + 2b\bar{u})u' + bu'^2 + m_p \frac{\partial u'}{\partial t} \tag{4.17}$$

resultiert. Das Ergebnis kann anschließend in eine mehrdimensionale Formulierung analog zu Gleichung 4.16 überführt werden:

$$-S'_i = -\frac{\partial p'}{\partial x_i} = (A_{ij} + 2|\bar{u}_{kk}|B_{ij})u'_i + B_{ij}|u'_{kk}|u'_i + m_p \frac{\partial u'_i}{\partial t} \,. \tag{4.18}$$

Für die Gültigkeit der Forchheimer Beziehung wird im Allgemeinen eine inkompressible Strömung vorausgesetzt. Damit ergeben sich für die Anwendung der hier vorgestellten Modellierung gewisse Einschränkungen. Eine Strömung kann in guter Näherung als inkompressibel betrachtet werden, wenn die Bedingung $M \ll 1$ erfüllt ist. Darüber hinaus impliziert ein (annähernd) inkompressibles Verhalten, dass die Wellenlänge der Störungen groß gegenüber der geometrischen Ausdehnung des verlustbehafteten Bereichs ist. Für ein quantitativ brauchbares Verhalten muss demnach $M \ll 1$ sowie $He \ll 1$ gelten. Betrachtet man die Strömungsverhältnisse innerhalb einer Raketenschubkammer, so ist im Bereich der Einspritz- und Verbrennungszone üblicherweise mit $M < 0.3$ zu rechnen. Wird die Modellierung in diesem Bereich der Brennkammer eingesetzt, so ist die Forderung $M \ll 1$ in der Regel erfüllt. Zur Einordnung der erwarteten Helmholtzzahlen müssen zunächst die charakteristischen Abmessungen der verlustbehafteten Bereiche abgeschätzt werden. Die relevante Ausdehnung vieler Einbauten, wie Einspritzplatten oder Mischgitter, liegt üblicherweise in der Größenordnung weniger Zentimeter (wobei die charakteristische Abmessung nicht nur die durchströmte geometrische Länge, sondern auch den relevanten Interaktionsbereich der Störungen stromab der Einbauten miteinschließen muss). Die Größenordnung der akustischen Wellenlänge entspricht hingegen den charakteristischen Abmessungen der Brennkammer, wobei hier meist der Brennkammerdurchmesser relevant ist. Unter Verwendung typischer Abmessungen ergibt sich für das Verhältnis der charakteristischen Längen und damit für die Größenordnung der Helmholtzzahl $He \sim \mathcal{O}(10^{-2} \ldots 10^{-1})$. Die Forderung kleiner Helmholtzzahlen ist somit für viele Anwendungsfälle weitestgehend erfüllt.

Auch wenn diese Betrachtungen eine breite Anwendbarkeit der Modellierung vermuten lassen, so besteht doch die Möglichkeit, dass die erforderlichen Voraussetzungen $M \ll 1$ sowie $He \ll 1$ für gewisse Anwendungen nicht erfüllt sind. In diesem Fall muss unter anderem mit einer über die Modellierung hinausgehenden Frequenzabhängigkeit der Verluste gerechnet werden. Ein Ansatz, die Modellierung in diesen Bereich zu erweitern, könnte auf einer Verwendung frequenzabhängiger Widerstandskoeffizienten beruhen. Die Umsetzung würde dabei entsprechend der Ansätze aus Abschnitt 4.1 erfolgen. Allerdings ist diese Erweiterung für die in dieser Arbeit untersuchten Anwendungsfälle nicht erforderlich. Auf eine Implementierung wird aus diesem Grund verzichtet.

4.2.2 Ermittlung der Verlustparameter

Bisher wurden die verwendeten Verlustparameter nicht näher definiert. Befindet man sich im Bereich sehr niedriger Geschwindigkeiten, so sind etwaige Strömungsverluste überwiegend auf viskose Reibung zurückzuführen. Ein Beispiel liefert hier die analytische Lösung von Hagen-Poiseuille, die den Druckverlust bzw. den Druckgradienten in einer laminaren Rohrströmung wiedergibt:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{32\mu}{D^2} u \,, \tag{4.19}$$

wobei μ die dynamische Viskosität und D den Durchmesser des Rohrs bezeichnet. Gemäß Gleichung 4.19 besitzt der Zusammenhang zwischen Druckgradient und Strömunggeschwindigkeit ausschließlich viskosen Charakter, d.h. $a = 32\mu/D^2$ und $b = 0$. Der kinematische Widerstandstkoeffizient b verschwindet hingegen. Der Fall einer verschwindenden bzw. laminaren Durchströmung ist aber für viele technische Anwendungen im Bereich der Brennkammerakustik von eher untergeordneter Bedeutung. Typische für eine Modellierung der Verluste in Frage kommende Einbauten, wie Injektorplatten oder Mischgitter, sind in der Regel turbulent durchströmt. Zur Charakterisierung der Strömungsverluste dieser Komponenten wird üblicherweise ein sogenannter Druckverlustbeiwert

$$\zeta_u = \frac{2\,\Delta p}{\varrho u^2} \,, \tag{4.20}$$

verwendet. Mit der Approximation $\partial p/\partial x \approx \Delta p/L_p$, wobei L_p die durchströmte Länge bezeichnet, ergibt sich für den kinematischen Widerstandskoeffizienten der Zusammenhang

$$b = \frac{\varrho\,\zeta_u}{2\,L_p} \,. \tag{4.21}$$

Der viskose Widerstandskoeffizient verschwindet hingegen, d.h $a = 0$. Damit beinhaltet der Druckverlustbeiwert ausschließlich turbulente Strömungsverluste. Der viskose Anteil ist für turbulente Zustände allgemein gering und wird deshalb vernachlässigt.

Abschließend wird noch kurz auf die Bestimmung des Druckverlustbeiwerts eingegangen. Dies stellt ein klassisches Problem der Strömungsmechanik dar. Abgesehen von analytisch exakten Speziallösungen, wie beispielsweise dem sogenannten Borda-Carnot Stossverlust einer unstetigen Querschnittserweiterung, existieren für verschiedene Formteile zahlreiche empirische Korrelationen. Diese ermöglichen in der Regel eine erste Abschätzung des Druckverlustbeiwerts [59]. Für eine höherwertige Bestimmung wird üblicherweise auf eine numerische Detailmodellierung zurückgegriffen. Darüber hinaus kann der Verlustbeiwert im Bedarfsfall auch experimentell ermittelt werden.

4.2.3 Anisotropes Verlustverhalten

Die Durchströmung technischer Einbauten wie Einspritzplatten oder Mischgitter ist aufgrund ihrer konstruktiven Gestaltung meist nur entlang einer Vorzugsrichtung möglich. Um diesem Verhalten im Rahmen einer Modellierung gerecht zu werden, wird üblicherweise ein poröses Modellmedium mit anisotropen Eigenschaften verwendet. Die Abbildung des anisotropen Verhaltens erfolgt wie bereits in Gleichung 4.16 und 4.18 geschehen, durch Einführung spezieller Widerstandstensoren. Letztere sind von symmetrischer Gestalt, d.h. $A_{ij} = A_{ji}$ bzw. $B_{ij} = B_{ji}$. Damit besitzt jeder Widerstandstensor im dreidimensionalen Fall sechs unbekannte Elemente. Wie jeder symmetrische Tensor sind auch die Widerstandstensoren hauptachsentransformierbar. Dabei werden die Tensoren durch eine orthogonale Transformationsmatrix T_{ij} in eine Diagonalform $(\cdot)^d$ überführt, sodass lediglich die Elemente der Hauptdiagonalen ungleich Null sind und alle übrigen Komponenten verschwinden.

Für viele Anwendungsfälle ist es in der Regel ausreichend, den Strömungsverlust durch eine Aufteilung in Längs- $(\cdot)_s$ und Querrichtung $(\cdot)_t$ zu charakterisieren. Unter diesen Voraussetzungen ergibt sich für die Widerstandstensoren im dreidimensionalen Hauptachsensystem die allgemeine Darstellung

$$A^d_{ij} = \begin{pmatrix} a_s & 0 & 0 \\ 0 & a_t & 0 \\ 0 & 0 & a_t \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

bzw.

$$B^d_{ij} = \begin{pmatrix} b_s & 0 & 0 \\ 0 & b_t & 0 \\ 0 & 0 & b_t \end{pmatrix} . \tag{4.23}$$

Entsprechen die Hauptachsen der Widerstandstensoren nicht den globalen Koordinatenachsen, so ist ein Basiswechsel erforderlich, wodurch die Hauptachsendarstellung gemäß Gleichung 4.22 bzw. 4.23 in das globale Koordinatensystem überführt wird. Die dazu erforderliche Transformation besitzt die Form:

$$A_{ij} = T_{mi} T_{nj} A^d_{mn} \tag{4.24}$$

bzw.

$$B_{ij} = T_{mi} T_{nj} B^d_{mn} . \tag{4.25}$$

Die Transformationsmatrix T_{ij} lässt sich durch eine dreidimensionale Drehung um einen Vektor eindeutig festlegen. Grundlage hierfür ist die sogenannte Rodrigues-Formel

$$T_{ij} = \delta_{ij} \cos\beta + (1 - \cos\beta) n_i n_j - \epsilon_{ijk} n_k \sin\beta , \tag{4.26}$$

wobei n_i den Einheitsvektor der Drehachse und β den Drehwinkel bezeichnet. Darüber hinaus ist δ_{ij} das Kronecker-Delta und ϵ_{ijk} das Levi-Civita Symbol. Bezeichnet s_i den Vektor der Längsrichtung im globalen Koordinatensystem, so wird der zur Transformation erforderliche Einheitsvektor der Drehachse n_i sowie der dazugehörige Drehwinkel β durch

$$n_i = \frac{1}{(s_j s_j)^{1/2}} \begin{pmatrix} 0 \\ s_3 \\ -s_2 \end{pmatrix} \tag{4.27}$$

sowie

$$\cos\beta = \frac{s_1}{(s_i s_i)^{1/2}} \tag{4.28}$$

festgelegt.[18] Damit ist eine anschauliche Definition der Widerstandstensoren durch Angabe der Hauptachsenkomponenten, sowie deren Orientierung innerhalb des globalen Koordinatensystems möglich, d.h. $A_{ij} = A_{ij}(a_s, a_t, s_i)$ bzw. $B_{ij} = B_{ij}(b_s, b_t, s_i)$.

[18] Der Einheitsvektor der Drehachse n_i gemäß Gleichung 4.27 ergibt sich dabei durch das Kreuzprodukt aus $s_i/(s_j s_j)^{1/2}$ und $e_1 = (1,0,0)^T$. Die Beziehung für den Drehwinkel β basiert hingegen auf dem Skalarprodukt der beiden Vektoren.

4.2.4 Numerische Umsetzung

Die Implementierung der vorgestellten Verlustmodellierung in PIANO ist an sich ohne größere Schwierigkeiten möglich. Allerdings ergeben sich aufgrund des verwendeten Diskretisierungsverfahrens hoher Ordnung vereinzelt Stabilitätsprobleme, wodurch eine Anpassung der Numerik erforderlich wird.

Um die Ausbreitung von Störungen in einer bestimmten Raumrichtung vollständig zu unterdrücken[19], muss der entsprechende Widerstandskoeffizient theoretisch unendlich groß gewählt werden. Zwar ist es in der Regel ausreichend, wenn ein als unendlich groß geltender Widerstandskoeffizient den Koeffizienten in Hauptströmungsrichtung um einen Faktor $10^1 \ldots 10^2$ übertrifft [3]. Nichtsdestotrotz kommt es aber auch in diesem Fall zu teils erheblichen Gradienten im Lösungsfeld. Letztere überschreiten dabei mitunter das Auflösungsvermögen des Diskretisierungsverfahrens, wodurch in letzter Konsequenz ein instabiles Verhalten resultiert.

Um dies zu verhindern, wird im Übergangsbereich zwischen verlustbehafteten und verlustfreien Gebieten (Abbildung 4.6) die Ordnung der räumlichen Tiefpassfilter von sechster (F6) auf zweiter Ordnung (F2) reduziert. Wie bereits in Abschnitt 3.3 erläutert, ist ein Filter zweiter Ordnung in der Lage, auch im Bereich starker Gradienten ein numerisch stabiles Dämpfungsverhalten ohne Gibbs-Oszillationen zu zeigen. Damit ist es möglich, die Gradienten auf ein vertretbares Maß zu begrenzen. Prinzipiell entspricht dieses Vorgehen einigen bekannten Ansätzen zur numerischen Behandlung von Stoßlösungen[20] [15, 129]. Durch den lokalen Einsatz numerischer Tiefpassfilter mit reduzierter Ordnung wird auch hier die Entstehung unzulässiger Gradienten verhindert und die Differenzierbarkeit der Feldvariablen sichergestellt.

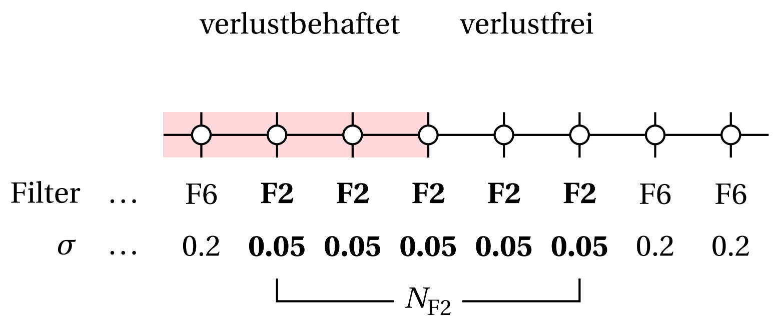


Abbildung 4.6: Anpassung des räumlichen Filterverfahrens am Übergang zwischen verlustfreien und verlustbehafteteten Bereichen.

[19] Die Modellierung geht in diesem Fall teilweise in ein sog. Immersed Boundary Verfahren (genauer gesagt handelt es sich hier um eine Direct Forcing/Penalty Methode) über. Dabei wird versucht, Randbedingungen durch künstliche Quellterme zu modellieren, wodurch auf eine geometrieangepasste Gittergenerierung mitunter verzichtet werden kann.

[20] In der Literatur werden diese Ansätze auch als Shock-Capturing-Verfahren bezeichnet.

Gegenüber den in PIANO standardmäßig verwendeten Filtern zeigt ein Filter zweiter Ordnung ein deutlich erhöhtes Maß an numerischer Dämpfung. Um letztere so weit wie möglich zu minimieren, wird der Einsatz des reduzierten Filters auf möglichst wenige Punkte beschränkt. Untersuchungen haben gezeigt, dass eine Anwendung über fünf Gitterpunkte hinweg ($N_{F2} = 5$, Abbildung 4.6) in der Regel genügt, um eine ausreichende Stabilisierung zu erzielen. Darüber hinaus kann die Filterwirkung meist auf einen sehr kleinen Wert begrenzt werden. In der praktischen Anwendung hat sich hier ein Relaxationsparameter $\sigma = 0.05$ bewährt.

Abgesehen von Stabilitätsproblemen soll aber noch auf eine weitere numerische Besonderheit hingewiesen werden: Durch die Einführung des Verlustquellterms zeigt die Impulsgleichung für große Widerstandskoeffizienten ein zunehmend steifes Verhalten. Als Folge davon wird der Stabilitätsbereich des expliziten Zeitintegrationsverfahrens immer mehr eingeengt und die Bedingungen für den Zeitschritt deutlich verschärft. Die Zeitintegration wird dadurch mitunter sehr aufwändig. Um dies zu vermeiden, besteht prinzipiell die Möglichkeit, den Impulsquellterm implizit zu behandeln. Entsprechende Ansätze dazu finden sich z.B in [6]. Eine Umsetzung dieser potentiellen Weiterentwicklung wurde allerdings im Rahmen dieser Arbeit nicht mehr in Angriff genommen.

5 Behandlung hydrodynamischer Instabilitäten im Zeitbereich

Ausgangspunkt einer jeden fluidmechanischen Modellierung sind Grundgleichungen, welche die vorherrschenden Prozesse mit ausreichender Genauigkeit beschreiben. Die wesentlichen für eine Modellierung der akustischen Wellenausbreitung infrage kommenden Grundgleichungen wurden bereits in Kapitel 2 besprochen. Beschränkt man sich demnach auf kleine Störungen um einen mittleren Strömungszustand, so ist eine Beschreibung der dynamischen Vorgänge auf Basis der linearisierten Eulergleichungen (LEE) im Allgemeinen ausreichend. Unter Verwendung des numerischen Lösungsverfahrens aus Kapitel 3, ist es damit prinzipiell möglich, die akustische Wellenausbreitung innerhalb von Potentialströmungen ohne größere Probleme zu berechnen.

Die Strömungsverhältnisse innerhalb chemischer Raketenantriebssysteme können meist nur sehr eingeschränkt durch Potentialströmungen abgebildet werden. Wie in Abschnitt 2.6 erläutert, spielen rotationsbehaftete Strömungen aber auch im Hinblick auf die Dissipation akustischer Energie eine wichtige Rolle. Zwar sind die linearisierten Eulergleichungen prinzipiell in der Lage, die akustische Wellenausbreitung in rotationsbehafteten Grundströmungsfeldern richtig zu beschreiben, eine Lösung dahingehender Problemstellungen führt im Zeitbereich jedoch sehr häufig zu massiven Problemen. Letztere äußern sich vor allem durch ein rasches Anwachsen lokaler Lösungsbestandteile, welche das Lösungsfeld zunächst überlagern und schließlich zu einem vorzeitigen bzw. ungewollten Abbruch der Simulation führen können.

Um den Ursprung dieser Probleme besser zu verstehen, soll im Rahmen dieses Kapitels die Stabilität hydrodynamischer Strömungen am Beispiel einer freien Scherschicht näher betrachtet werden. Anschließend werden mögliche Ansätze zur Vermeidung der angesprochenen Probleme im Detail diskutiert.

5.1 Hydrodynamische Stabilität

Zur Analyse der speziellen Lösungsbestandteile der linearisierten Eulergleichungen wurde in Abschnitt 2.2 eine parallele Grundströmung $\bar{u}_i = (U,0,0)^T$ ohne Gradienten vorausgesetzt. Die Beschränkung auf Gradientenfreiheit wird nun fallen gelassen. Stattdessen wird ein ebenes Geschwindigkeitsprofil $U = U(y)$ ohne Druckgradienten $\partial\bar{p}/\partial x_i = 0$ und mit konstanter Dichte $\varrho = const.$ betrachtet (Abbildung 5.1). Durch die Vorgabe einer konstanten Dichte werden akustische Störungen sowie Schwankungen der Entropie (Entropiemoden) von vornherein ausgeschlossen. Die hier formulierte Problemstellung betrachtet damit ausschließlich die Dynamik hydrodynamischer Geschwindigkeitsschwankungen der Wirbelmode.

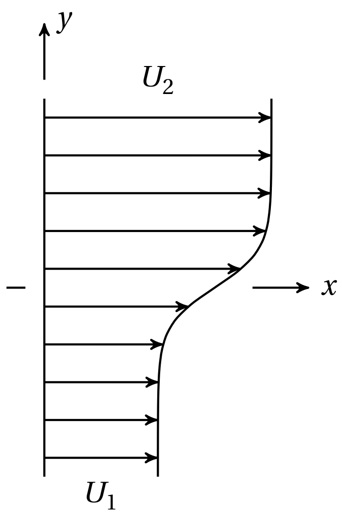


Abbildung 5.1: Geschwindigkeitsprofil $U(y)$ in Form einer freien Scherschicht

Setzt man im Folgenden ebene, d.h. zweidimensionale sowie divergenzfreie Geschwindigkeitsstörungen voraus, so lässt sich eine skalare Stromfunktion ψ mit der Eigenschaft

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial y} \; , \quad v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{5.1}$$

definieren. Für diese Stromfunktion wiederum ist es im Rahmen der nachfolgenden Untersuchungen zweckmäßig, von einem harmonischen Ansatz [94] entsprechend

$$\psi(x_i, t) = \hat{\psi}(y) \exp(ikx - i\hat{\omega}t) \tag{5.2}$$

auszugehen. Wie aus Gleichung 5.2 hervorgeht, wird darin ein periodisches bzw. harmonisches Verhalten in Abhängigkeit der Ortskoordinate x, sowie der Zeit t angenommen. $\hat{\psi}$ bezeichnet die komplexe Amplitude der Stromfunktion ψ, k die Wellenzahl in x-Richtung und $\hat{\omega}$ die komplexe Winkelgeschwindigkeit[21] der Störungen. Unter Berücksichtigung der getroffenen Annahmen und unter Verwendung der Zusammenhänge 5.1 und 5.2 erhält man schließlich aus der Impulsgleichung 2.13b eine einzelne Gleichung für die Amplitude der Stromfunktion:

$$\left(U - \frac{\hat{\omega}}{k}\right)\left(\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} - k^2 \hat{\psi}\right) - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \hat{\psi} = 0 \; . \tag{5.3}$$

Gleichung 5.3 lässt sich als allgemeines Eigenwertproblem der Form

$$\left[A_\psi(k) - \frac{\hat{\omega}}{k} B_\psi(k) \right] \hat{\psi} = 0 \tag{5.4}$$

[21] Die komplexe Winkelgeschwindigkeit wurde in Abschnitt 4.1.1 durch s ausgedrückt. Im Bereich der hydrodynamischen Stabilitätsanalyse ist allerdings eine Notation entsprechend Gleichung 5.2 üblich, weshalb an dieser Stelle auf eine Verwendung von s verzichtet wird.

auffassen[22]. Dabei bezeichnen

$$A_\psi(k) = U\left[\frac{\partial^2(\,\cdot\,)}{\partial y^2} - k^2(\,\cdot\,)\right] - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}(\,\cdot\,)\ , \tag{5.5}$$

$$B_\psi(k) = \frac{\partial^2(\,\cdot\,)}{\partial y^2} - k^2(\,\cdot\,)\ , \tag{5.6}$$

zwei lineare Operatoren mit zugehörigen Eigenwerten $\hat{\omega}$. Die Eigenwerte beschreiben dabei das dynamische Verhalten der charakteristischen Lösungsformen (Moden). Der Amplitudenverlauf $\hat{\psi}$ dieser Moden ist durch die zugehörigen Eigenvektoren gegeben. Bei den Eigenwerten handelt es ich im Allgemeinen um komplexe Größen. Ist der Imaginäranteil $\Im(\hat{\omega})$ größer als Null, so wachsen kleine Störungen mit der Zeit exponentiell an. Man spricht dann von einem hydrodynamisch instabilen Grundströmungsfeld. Für $\Im(\hat{\omega}) < 0$ hingegen klingen eingebrachte Störungen exponentiell mit der Zeit ab und das Grundströmungsfeld ist hydrodynamisch stabil.

Ein im Bezug auf hydrodynamische Stabilität häufig untersuchtes Modellproblem stellt eine sogenannte freie Scherschicht auf Grundlage eines tanh-Geschwindigkeitsprofils dar:

$$U(y) = U_m\left[1 + R_u \tanh\left(\frac{y}{2\delta_u}\right)\right] \tag{5.7}$$

mit $U_m = (U_1 + U_2)/2$, $R_u = 0.5(U_2 - U_1)/U_m$, der Momentendicke δ_u sowie den zugehörigen Randbedingungen $\hat{\psi}(\pm\infty) = 0$. Die Lösung des Modellproblems entsprechend Gleichung 5.4 erfolgt numerisch. Dabei muss beachtet werden, dass es sich bei den erwarteten Eigenwerten allgemein um kleine Zahlen handelt [95]. Um numerische Fehler gering zu halten, ist es deshalb erforderlich, Verfahren mit sehr hoher Genauigkeit wie z.B. Spektralmethoden zu verwenden[23].

Abbildung 5.2 zeigt den Verlauf der Wachstumsrate $\Im(\hat{\omega})$ als Funktion der Wellenzahl k, wobei $U_m = 0.5\,\mathrm{m/s}$ und $R_u = 1$ ist. Wie aus den Ergebnissen hervorgeht, erhält man für die Stabilitätsgleichung 5.3 innerhalb eines begrenzten Wellenzahlbereichs positive Wachstumsraten. Kleine Störungen wachsen innerhalb dieses Wellenzahlbereichs also exponentiell mit der Zeit an, womit das verwendete Grundströmungsfeld gemäß Gleichung 5.7 als hydrodynamisch instabil bezeichnet werden kann.

Das Verhalten, instabile Lösungen auszubilden, stellt ein entscheidendes Problem der linearisierten Eulergleichungen dar. Je nachdem, welches mittlere Strömungsfeld einer Simulation zu Grunde liegt, besteht die Möglichkeit, dass hydrodynamische Schwankungsgrößen rasch

[22] Im Rahmen der nachfolgenden Ausführungen wird das zeitliche Verhalten der Störungen untersucht. Dabei ist die Winkelgeschwindigkeit eine komplexe Größe und die Wellenzahl ein reeller Parameter. Ist man am räumlichen Verhalten der Störungen interessiert, so wird üblicherweise ein sog. *räumlicher Ansatz* [94] mit komplexer Wellenzahl und reeller Winkelgeschwindigkeit als freie Parameter gewählt.

[23] Unter Berücksichtigung dieser Einschränkungen wird im Rahmen dieser Arbeit auf spektrale Chebyshev Ableitungsmatrizen [124] sowie auf die von MATLAB® bereitgestellte Routine `eig` zur Lösung des Eigenwertproblems zurückgegriffen.

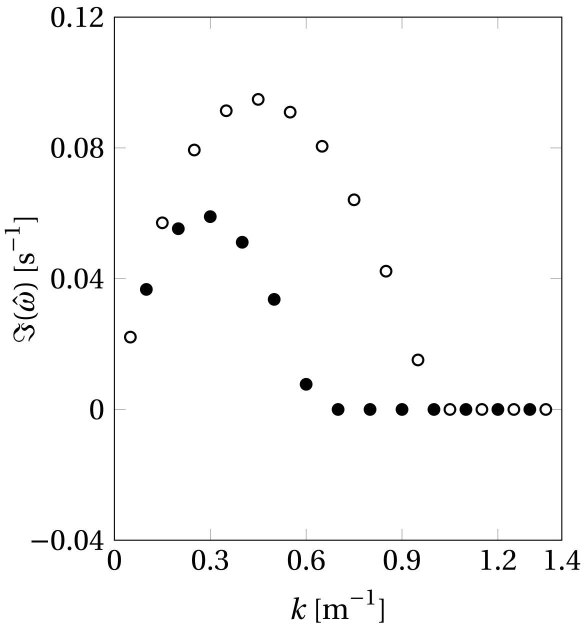


Abbildung 5.2: Wachstumsrate $\Im(\hat{\omega})$ der hydrodynamischen Geschwindigkeitsstörungen in Abhängigkeit der Momentendicke δ_u sowie der Wellenzahl k: $\delta_u = 0.5$m (○), $\delta_u = 0.8$m (●)

anwachsen. Dies führt dazu, dass die akustischen Lösungsbestandteile, meist das eigentliche Ziel einer Simulation, von Lösungsbestandteilen hydrodynamischen Ursprungs überlagert werden. Erfolgt die Simulation im Zeitbereich, werden im ungünstigen Fall die hydrodynamischen Störungen mit fortschreitender Simulationsdauer immer mehr dominieren. Letztendlich ist ein vorzeitiger Abbruch aufgrund des exponentiellen Wachstums unausweichlich.

Abschließend sei noch erwähnt, dass Gleichung 5.3, welche auch als Rayleigh-Gleichung [104] bezeichnet wird, eine fundamentale Bedeutung innerhalb der strömungsmechanischen Stabilitätstheorie erlangt hat. Die Tatsache, dass sich diese Gleichung aus den linearisierten Eulergleichungen ergibt, verdeutlicht, dass die Lösung der LEE immer auch eine lineare Stabilitätsanalyse des Grundströmungsfelds mit einschließt.

5.2 Methoden der Stabilisierung im Zeitbereich

Wie im vorangegangenen Abschnitt gezeigt wurde, besitzen die LEE das Potential hydrodynamische Instabilitäten auszubilden. Erfolgt eine Lösung im Frequenzbereich, so ist diese Besonderheit ohne größere Konsequenzen - vorausgesetzt man verzichtet auf die Verwendung einer progressiven Zeitvariablen innerhalb des Lösungsverfahrens [1,5]. Im Zeitbereich hingegen besteht die Gefahr eines ungewollten vorzeitigen Abbruchs der Simulation. Um diesem Problem zu begegnen, wurden in den letzten Jahren unterschiedliche Ansätze entwickelt, welche nachfolgend im Detail besprochen werden.

5.2.1 Glättung der Grundströmung

Betrachtet man Abbildung 5.2, so wird deutlich, dass die Wachstumsraten der hydrodynamischen Störungen insbesondere von der Intensität der mittleren Gradienten beeinflusst werden. Aufbauend auf dieser Erkenntnis, schlagen Richter et al. [109] eine Glättung des Grundströmungsfelds zur Stabilisierung der hydrodynamischen Moden vor. Ziel dieses Vorgehens ist es, die Wachstumsraten so weit zu reduzieren, dass instabile Lösungsbestandteile innerhalb der angestrebten Simulationsdauer keine nennenswerten Amplituden mehr erreichen bzw. infolge numerischer Dämpfung sogar abklingen. Die Schwierigkeit, die sich dabei ergibt, liegt in der zuverlässigen Bestimmung einer ausreichenden Glättung, welche zum einen die Stabilität der Simulation sicherstellt und zum anderen die Auswirkungen auf die Störungsausbreitung möglichst minimiert.

Die prinzipielle Brauchbarkeit dieses Vorgehens konnte zuletzt auch von Morgenweck am Beispiel eines turbulent durchströmten Impedanzkanals demonstriert werden [88]. Nichtsdetotrotz handelt es sich bei dieser Methode aber nur sehr eingeschränkt um einen generellen Ansatz zur Vermeidung hydrodynamischer Stabilitätsprobleme. Besonders für Anwendungsfälle mit starken Strömungsradienten ist zum Teil eine massive Glättung erforderlich. Hier besteht zwangsläufig die Gefahr einer signifikanten Beeinflussung der akustischen Simulationsergebnisse.

5.2.2 Dämpfung hydrodynamischer Lösungsanteile

Neben einer Reduzierung der Wachstumsraten durch die Verwendung geglätteter Grundströmungsfelder ist auch eine Stabilisierung auf Grundlage erhöhter numerischer Dissipation denkbar [88, 108].

Vergleicht man die Wellenlänge hydrodynamischer und akustischer Störungen bei gleicher Frequenz, so stellt man fest, dass insbesondere für kleine Machzahlen ein deutlicher Skalenunterschied besteht. Für Raketenschubkammern liegt das charakteristische Maß der Akustik üblicherweise in der Größenordnung der Brennkammergeometrie, das charakteristische Längenmaß der hydrodynamischen Störungen in der Größenordnung der Injektoren. Unter Verwendung typischer Abmessungen ergeben sich für das Verhältnis der charakteristischen Längen Werte in der Größenordnung $\mathcal{O}(10^2)$.

Diese Besonderheit lässt sich nutzen, um hydrodynamische Störungen im Verhältniss zu akustischen Störungen überproportional zu dämpfen. Im einfachsten Fall kann dies durch die Verwendung grober Rechengitter erreicht werden. Nichtakustische Störungen werden dann nur noch unzureichend aufgelöst und sind somit stark gedämpft. Ein ähnlicher Effekt ergibt sich durch einen verstärkten Einsatz numerischer Tiefpassfilter (siehe Abschnitt 3.3). Hier werden kleinskalige Störungen gezielt gedämpft, wodurch sich das unkontrollierte Wachstum hydrodynamisch instabiler Moden zunehmend unterdrücken lässt.

Der praktische Einsatz dieser Methode hat allerdings gezeigt, dass der forcierte Einsatz numerischer Dissipation auch zu einer signifikanten Dämpfung der akustischen Lösungsbestandteile führt. Darüber hinaus besteht auch hier das Problem a priori ein geeignetes Maß an numerischer Dissipation zu bestimmen, welches die Stabilität der Simulation sicherstellt und gleichzeitig die Auswirkungen auf die akustische Störungsausbreitung auf ein Minimum begrenzt.

5.2.3 Modifikation der linearisierten Eulergleichungen

Alle bisher betrachteten Ansätze zur Stabilisierung verwenden als akustische Grundgleichungen die LEE in unveränderter Form. Darüber hinaus wurden aber auch Ansätze entwickelt, die auf einer Modifikation der LEE beruhen. Verschiedene Autoren konnten zeigen, dass eine Vernachlässigung bestimmter Terme zu einer spürbaren Stabilisierung der LEE in hydrodynamisch instabilen Anwendungsfällen führt. Ewert schlägt beispielsweise folgenden modifizierter Grundgleichungssatz vor [34]:

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \varrho'}{\partial x_i} + \quad \bar{\varrho} \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = \quad S_\varrho' \; , \tag{5.8a}$$

$$\frac{\partial u_j'}{\partial t} + \quad \bar{u}_i \frac{\partial u_j'}{\partial x_i} = -\frac{1}{\bar{\varrho}} \frac{\partial p'}{\partial x_j} + \frac{1}{\bar{\varrho}} S_j' \; , \tag{5.8b}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \gamma \, \bar{p} \, \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} = \quad (\gamma - 1) S_e' \; . \tag{5.8c}$$

Hier wurden gegenüber dem Gleichungssystem 2.13 aus Abschnitt 2.1.2 sämtliche Gradiententerme des mittleren Strömungsfelds vernachlässigt. Bogey et al. stellen in [14] einen ähnlichen Ansatz vor. Im Gegensatz zum Gleichungssystem 5.8 bleibt dabei allerdings die Kontinuitätsgleichung unverändert.

Angewandt auf das Modellproblem aus Abschnitt 5.1 erhält man für das Gleichungssystem 5.8 eine neue Stabilitätsgleichung. Unter Berücksichtigung der Annahmen und Einschränkungen aus Abschnitt 5.1 besitzt diese die Form

$$\left(U - \frac{\hat{\omega}}{k} \right) \left(\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial y^2} - k^2 \hat{\psi} \right) - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial y} = 0 \; . \tag{5.9}$$

Abbildung 5.3 verdeutlicht die Eigenschaften des modifizierten Gleichungssystems 5.8 hinsichtlich einer Anwendung in hydrodynamisch instabilen Grundströmungen. Man erkennt, dass sich für die neue Stabilitätsgleichung 5.9 Wachstumsraten ergeben, die unter Berücksichtigung der Genauigkeit des numerischen Lösungsverfahrens als verschwindend klein bzw. null angenommen werden können. Durch die Verwendung des modifizierten Grundgleichungssystems wird also eine weitestgehende Stabilisierung erreicht. Zwar gilt diese Aussage lediglich für das untersuchte Modellproblem, nichtsdestotrotz legen die im Rahmen dieser Arbeit bzw. von anderen Autoren [14,34] gewonnene Erkenntnisse nahe, dass sich diese Schlussfolgerung auch auf allgemeine 2D- bzw. 3D-Problemstellungen im Bereich der CAA übertragen lässt.

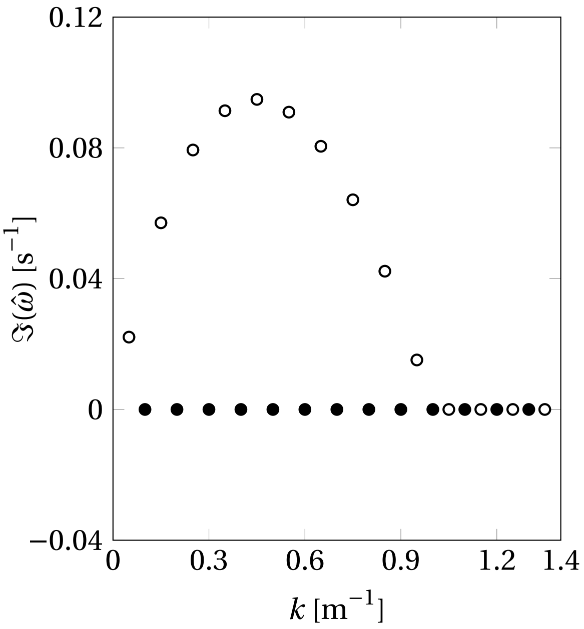


Abbildung 5.3: Wachstumsrate $\Im(\hat{\omega})$ der Geschwindigkeitsstörungen in Abhängigkeit der Wellenzahl k für $U_m = 0.5\,\mathrm{m/s}$, $R_u = 1$ sowie $\delta_u = 0.5\,\mathrm{m}$: Stabilitätsgleichung 5.3 (○), Stabilitätsgleichung 5.9 (●)

Abgesehen davon stellt sich noch die Frage, inwieweit eine Vernachlässigung der besagten Terme in den LEE zu einer Verfälschung der akustischen Wellenausbreitung führt. Sowohl Bogey et al. [14] als auch Ewert [34, 38] kommen zu dem Schluss, dass die Gültigkeit der modifizierten Grundgleichungen insbesondere im Bereich hoher Frequenzen erfüllt ist. Ewert definiert dazu eine kritische Strouhal-Zahl

$$St = \frac{f\delta_u}{\Delta U}\,, \tag{5.10}$$

wobei $\Delta U = |U_2 - U_1|$ die maximale Geschwindigkeitsdifferenz der vorherrschenden Scherschichten bezeichnet und f die Oszillationsfrequenz der akustischen Wellen charakterisiert. Ewert stellt fest, dass für den Bereich $St < \mathcal{O}(10^{-1})$ die Ausbreitung der akustischen Wellen „signifikant“ verfälscht wird. Betrachtet man die typischen Verhältnisse innerhalb einer Raketenbrennkammer, so ist im Bereich der Einspritzzone mit Strouhal-Zahlen $St \sim \mathcal{O}(10^{-1})$ zu rechnen. Folglich befindet man sich hier im Grenzbereich des von Ewert definierten Anwendungsbereichs.

5.2.4 Akustische Störungsgleichungen

Neben einer Modifikation der linearisierten Eulergleichungen durch Vernachlässigung spezieller Terme stellen Ewert et al. im Zuge mehrerer Publikationen [35–37] ein weiteres linearisiertes Grundgleichungssystem zur Beschreibung akustischer Wellenausbreitung in stratifizierten Strömungen vor. Die zugehörigen Gleichungen werden in der Literatur als *akustische Störungsgleichungen* bzw. englisch als *Acoustic Perturbation Equations* - APE bezeichnet und besitzen die allgemeine Darstellung[24] [36]:

$$\frac{\partial \varrho'}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \varrho'}{\partial x_i} + u_i' \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x_i} + \bar{\varrho} \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} + \varrho' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = S_\varrho' + Q_\varrho^{\mathrm{APE}} , \tag{5.11a}$$

$$\frac{\partial u_j'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i u_i') = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{p'}{\bar{\varrho}}\right) + \frac{1}{\bar{\varrho}} S_j' + Q_j^{\mathrm{APE}} , \tag{5.11b}$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} - \bar{c}^2 \frac{\partial \varrho'}{\partial t} = (\gamma - 1) S_e' + Q_e^{\mathrm{APE}} , \tag{5.11c}$$

wobei $\bar{c}^2 = \gamma \bar{p}/\bar{\varrho}$. Formal ist das Gleichungssystem 5.11 mit den LEE aus Abschnitt 2.1.2 identisch und stellt lediglich eine geschickte Umformulierung dar. Durch diese Umformulierung ergeben sich jedoch Quellterme $(Q_\varrho^{\mathrm{APE}}, Q_i^{\mathrm{APE}}, Q_e^{\mathrm{APE}})^T$, welche ausschließlich die Wirkung der hydrodynamischen Quellen beinhalten. Werden diese zu Null gesetzt, so spricht man von einem homogenen APE System. Ewert kann zeigen, dass in diesem Fall die hydrodynamische Stabilität der Lösung sichergestellt ist.

Zum Verständnis dieser besonderen Eigenschaft der akustischen Störungsgleichungen ist es zweckmäßig, die zugehörige Transportgleichung der Wirbelstärkefluktuationen ω_i' zu betrachten [37]. Diese ergibt sich indem man den Rotationsoperator $\mathrm{rot}(\,\cdot\,)_i := \epsilon_{ijk}\partial(\,\cdot\,)_k/\partial x_j$ auf Gleichung 5.11b anwendet. Mit $\omega_i' = \mathrm{rot}\, u_i'$ und unter Vernachlässigung des Impulsquellterms $S_i' = 0$ erhält man demnach

$$\frac{\partial \omega_i'}{\partial t} = 0 . \tag{5.12}$$

Gemäß diesem Ergebnis bleibt die Störung der Wirbelstärke ω_i' für das homogene APE-System zeitlich unverändert. Wirbelstärkemoden können also in Abwesenheit von Quelltermen weder auf- noch abklingen, wodurch die Stabilität des Gleichungssystems für beliebige Grundströmungsfelder sichergestellt ist [37]. Trotz dieser positiven Eigenschaft wird aber auch bei den APE letztendlich die Physik der akustischen Wellenausbreitung im Rahmen der Stabilisierungsmaßnahmen verletzt. Durch die gewählte Formulierung wird die Dynamik der Wirbelstärkestörungen verändert. Eine physikalisch korrekte Interaktion letzterer mit der Akustik ist somit nicht mehr möglich.

[24] Gleichung 5.11 stellt die allgemeine Form des APE-Systems dar und beinhaltet Quellterme für Masse, Impuls und Energie. Wird lediglich der Einfluss des Energiequellterms berücksichtigt und die Dichteschwankung ϱ' über die Beziehung $p' = \bar{c}^2 \varrho'$ an die Druckschwankung gekoppelt, so kann auf die Lösung einer Dichtegleichung verzichtet werden und man erhält die von Pieringer [100, 101] verwendete Form:

$$\frac{\partial u_j'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\bar{u}_i u_i') = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{p'}{\bar{\varrho}}\right) ,$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} + \bar{c}^2 u_i' \frac{\partial \bar{\varrho}}{\partial x_i} + \bar{c}^2 \bar{\varrho} \frac{\partial u_i'}{\partial x_i} + p' \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} + \bar{c}^2 \bar{u}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p'}{\bar{c}^2}\right) = (\gamma - 1) S_e' .$$

Vollständigkeitshalber sei noch darauf verwiesen, dass nicht nur für das homogene APE-System $\partial\omega_i'/\partial t = 0$ gilt. So zeigen die von Seo und Moon [117, 118] vorgeschlagenen *Linearized Perturbed Compressible Equations* (LPCE) ebenfalls diese Eigenschaft. Allerdings besitzen die LPCE große Ähnlichkeit mit den APE. Es ergeben sich keine besonderen Vorzüge gegenüber den APE, weshalb auf eine tiefer gehende Diskussion bzw. Untersuchung im Rahmen dieser Arbeit verzichtet wird.

5.2.5 Nichtlineare Störungsgleichungen

Wie bereits erwähnt, besitzen die linearisierten Eulergleichungen die Eigenschaft, hydrodynamische Störungsgrößen bei entsprechenden Verhältnissen rasch anwachsen zu lassen. Dabei ist dieses Verhalten im Bereich kleiner Störungsamplituden keineswegs unphysikalisch. Betrachtet man die real ablaufenden Vorgänge, so stellt man fest, dass ein anfängliches Wachstum zunächst gerechtfertigt ist. Aufgrund der Linearisierung ist das Wachstumsverhalten für die LEE allerdings nicht begrenzt. Dies steht in klarem Widerspruch zu den Vorgängen in einer realen Strömung, wo letztendlich Sättigungseffekte das anfängliche Wachstum begrenzen. Verantwortlich für dieses Verhalten sind nichtlineare Mechanismen, die jedoch in den LEE fehlen.

Aufbauend auf diesen Erkenntnissen wurde von unterschiedlichen Autoren die Verwendung nichtlinearer Störungsgleichungen vorgeschlagen. Ein wichtiger Beitrag wurde dabei durch die Gruppe um die Autoren Morris und Long erbracht. Im Rahmen dieser Arbeiten konnte unter anderem gezeigt werden, dass mit Verwendung der aus Abschnitt 2.1.1 bekannten NLDE die Simulation der Schallausbreitung innerhalb verschiedener Freistrahlströmungen bis in den hohen Überschallbereich hin möglich ist [89, 90]. Ferner konnten unter anderem Bailly und Juvé [7], Longatte et al. [81], Redonnet et. al. [106, 107] sowie Reboul et al. [105] die Stabilität nichtlinearer Störungsgleichungen in hydrodynamisch instabilen Grundströmungen anhand verschiedener Testfälle demonstrieren. Die Anwendungsfälle reichen dabei von einfachen Scherschichten bis hin zur Schallausbreitung im Nahfeld komplexer aeroakustischer Quellen, wie Tragflügelprofile oder Flugtriebwerke.

Der Vorteil nichtlinearer Störungsgleichungen liegt insbesondere in der Tatsache, dass anders als bei allen zuvor diskutierten Ansätzen die Physik der Wellenausbreitung bzw. Modeninteraktion nicht verändert wird. Verwendet man Gleichungen wie die in Abschnitt 2.1.1 diskutierten NLDE oder PENNE, so wird lediglich das Verhalten für große Amplituden physikalisch korrekt abgebildet. Somit wird hier nicht das Wachstum hydrodynamischer Störungen als Ursache möglicher Stabilitätsprobleme angesehen, sondern vielmehr die Linearisierung der Grundgleichungen.

6 Validierung des Simulationsverfahrens in stratifizierten Strömungen

In Kapitel 3 wurde das dieser Arbeit zu Grunde liegende Simulationsverfahren vorgestellt. Um die Brauchbarkeit des entwickelten Verfahrens zu demonstrieren, soll in diesem Kapitel die akustische Wellenausbreitung in stratifizierten Grundströmungen untersucht werden. Der Schwerpunkt liegt dabei auf der Betrachtung hydrodynamisch instabiler Strömungen. Wie bereits im vorherigen Kapitel erläutert, stellen hydrodynamisch instabile Strömungen eine besondere Herausforderung für akustische Simulationsverfahren im Zeitbereich dar.

Leider ist die Verfügbarkeit brauchbarer Messdaten zur Validierung des Simulationsverfahrens in stratifizierten Grundströmungen äußerst begrenzt. Testfälle aus dem Anwendungsbereich Brennkammerakustik sind praktisch nicht bekannt. Um dennoch eine zufriedenstellende Validierung des Simulationsverfahrens zu erreichen, wird auf einen gut dokumentierten Testfall von Ronneberger zurückgegriffen.

Im Rahmen eines Forschungsvorhabens zur Schallausbreitung in Strömungskanälen haben Ronneberger [111] und Pallek [97] unter anderem das akustische Streuverhalten einer turbulent durchströmten sprunghaften Querschnittserweiterung experimentell untersucht. Zwar betrachtet dieser Testfall lediglich die longitudinal-akustische Wellenausbreitung, nichtsdestotrotz kann aber davon ausgegangen werden, dass bei einer erfolgreichen Validierung auch das Verhalten höherer akustischer Moden im Wesentlichen korrekt wiedergegeben wird. Dabei ist zu beachten, dass das verwendete Verfahren zur Simulation dreidimensionaler Wellenausbreitungsphänomene entwickelt wurde. Die Beschränkung auf longitudinale Moden kennzeichnet damit lediglich einen Sonderfall. Abgesehen davon stellt die Interaktion zwischen akustischen und hydrodynamischen Moden per se einen höherdimensionalen Vorgang dar.

Abschließend sei noch erwähnt, dass der betrachtete Testfall inzwischen von mehreren Autoren zur Validierung verschiedener Berechnungsmethoden genutzt wurde und eine gewisse Verbreitung erlangt hat. So haben Kirkegaard et al. [70], Gikardi et al. [44] sowie Schulze [114] das von Ronneberger experimentell vermessene Streuverhalten dazu genutzt, um die Stärken eines auf COMSOL Multiphysics® basierenden Frequenzbereichsverfahrens zu demonstrieren. Föller und Polifke [42] verwenden ebenfalls das von Ronneberger gemessene Verhalten, um eine Kombination aus LES Simulation und anschließender Wiener-Hopf-Systemidentifikation (LES/SI) zu validieren.

6.1 Messaufbau und Testfallbeschreibung

Der prinzipielle Versuchsaufbau von Ronneberger ist schematisch in Abbildung 6.1 gezeigt. Er umfasst im Wesentlichen zwei Messrohre unterschiedlichen Durchmessers, die durch eine unstetige Querschnittserweiterung koaxial verbunden sind. Das System wird mit Umgebungsluft der Temperatur T_∞ durchströmt, wobei sich im stromaufseitigen Messrohr mit Durchmesser D_u die Machzahl M_u einstellt. Der Durchmesser des stromab sich befindenden Messrohrs beträgt D_d. Am unstetigen Übergang zwischen den beiden Messrohren kommt es zur Strömungsablösung und infolgedessen zur Ausbildung eines ringförmigen Rezirkulationsgebiets. Anschließend gleichen sich alle durch die Querschnittserweiterung induzierten Strömungsgradienten wieder zunehmend aus.

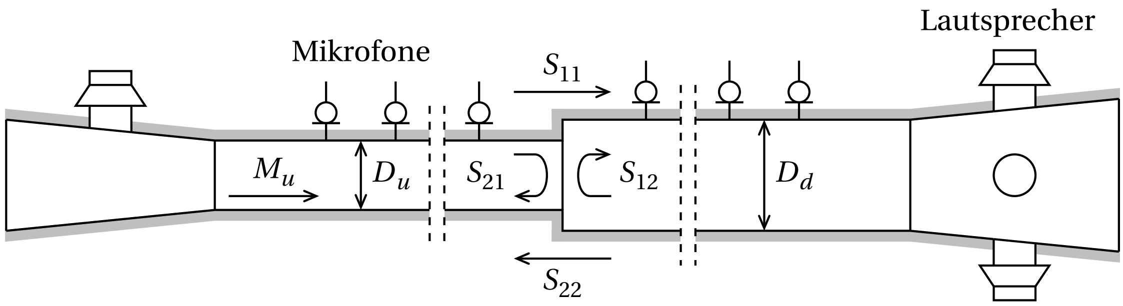


Abbildung 6.1: Von Ronneberger verwendete Messapparatur zur experimentellen Bestimmung der akustischen Streufaktoren S_{11}, S_{12}, S_{21} sowie S_{22} einer durchströmten Querschnittserweiterung

Zur Untersuchung der Strömung-Schall-Wechselwirkung kann das System akustisch angeregt werden. Dazu befinden sich an beiden Enden leistungsfähige Lautsprecher. Die Anregungsfrequenz wurde von Ronneberger so gewählt, dass im dünneren stromauf gelegenen Messrohr lediglich longitudinale Moden ausbreitungsfähig sind. Im stromab gelegenen Messrohr hingegen überschreitet die Anregungsfrequenz teilweise die Grenzfrequenz für die Ausbreitung höherer akustischer Moden. Um letztere nicht bevorzugt anzuregen, sind am unteren Ende des Messrohrs drei über den Umfang verteilte Lautsprecher angebracht, welche synchron in das Rohr einstrahlen. Für das stromauf gelegene Messrohr reicht hingegen ein einzelner Lautsprecher, da hier lediglich longitudinale Moden ausbreitungsfähig sind.

Um die Interaktion zwischen hydrodynamischen und akustischen Störungen am Flächensprung zwischen den beiden Messrohren zu quantifizieren, werden von Ronneberger vier Streufaktoren S_{11}, S_{12}, S_{21} sowie S_{22} bestimmt. Dazu ist eine Messung der komplexen Schalldruckamplituden erforderlich, weshalb entlang der beiden Messrohre jeweils mehrere Mikrofone angebracht sind.

Die Streufaktoren wurden von Ronneberger für verschiedene Konfigurationen und Betriebsbedingungen vermessen. Zur Validierung des Simulationsverfahrens wurde ein Messdatensatz mit den in Tabelle 6.1 aufgelisteten Parametern gewählt. Demnach besitzt die im Rahmen dieser Arbeit untersuchte unstetige Querschnittserweiterung ein charakteristisches Flächenverhältnis $D_u^2/D_d^2 = 0.346$ und wird mit einer mittleren Machzahl $M_u = 0.2$ turbulent durchströmt. Unter diesen Bedingungen ergeben sich im Bereich der Querschnittserweiterung ausgedehnte Scherschichten mit stark angefachten Wirbelmoden. Eine Verwendung der linearisierten Eulergleichungen im Zeitbereich ist hier nicht problemlos möglich, da letztendlich

Parameter	Wert
Querschnittsverhältnis, D_u^2/D_d^2	0.346
mittl. Machzahl, M_u	0.2
Reynoldszahl, Re_u	$1.9 \cdot 10^5$
Messrohrdurchmesser, D_u	0.05 m
Messrohrdurchmesser, D_d	0.085 m
Anregungsfrequenz, f	0.5, 1, 2, 2.5, 3 kHz

Tabelle 6.1: Charakteristische Parameter und Betriebsbedingungen des von Ronneberger verwendeten Versuchsaufbaus.

ein unbegrenztes Anwachsen der Wirbelmoden eintritt. Ziel der nachfolgenden Validierungsrechnungen ist es, zu zeigen, dass unter Verwendung der nichtlinearen PENNE Gleichungen numerisch stabile Rechnungen in hydrodynamisch instabilen Strömungen durchgeführt werden können. Die Interaktion zwischen Strömung und Akustik soll dabei mit ausreichender Genauigkeit wiedergeben werden.

6.2 Modellbildung

Die theoretische Betrachtung des beschriebenen Testfalls erfolgt über mehrere Schritte. Zunächst muss die im Versuchsaufbau vorliegende Grundströmung ermittelt werden. Anschließend wird die Wellenausbreitung und die damit einhergehende Streuung am unstetigen Flächensprung durch Anwendung des Simulationsverfahrens aus Kapitel 3 berechnet. Im letzten Schritt werden aus den Ergebnissen der Akustiksimulation akustischen Streufaktoren bestimmt, wobei hier ein spezielles Auswertungsverfahren zur Anwendung kommt.

6.2.1 Grundströmung

Zur Bestimmung der Grundströmung wird auf ein kommerzielles CFD-Verfahren zurückgegriffen. Um den numerischen Aufwand möglichst gering zu halten, bietet es sich an, eine axialsymmetrische Modellierung zu verwenden. Dabei stellt sich aber zunächst die Frage, ob die Annahme einer axialsymmetrischen Lösung für den hier vorliegenden Fall überhaupt zulässig ist. Es ist allgemein bekannt, dass sich unter entsprechenden Bedingungen asymmetrische Stömungszustände ausbilden, obwohl die geometrischen Randbedingungen eine symmetrische Lösung grundsätzlich erwarten lassen. Dieses Phänomen, das oft auch als sog. Coanda Effekt bezeichnet wird, ist prinzipiell auch für die vorliegende unstetige Querschnittserweiterung denkbar [19].

Die hier betrachtete Problemstellung wurde bereits ausgiebig von Föller und Polifke [42] unter Verwendung eines dreidimensionalen LES Verfahrens analysiert. Die dabei erzielten Ergebnisse zeigen, dass das mittlere Strömungsfeld in der Tat rein axialsymmetrischen Charakter besitzt, wodurch die Verwendung einer axialsymmetrischen Modellierung gerechtfertigt erscheint.

Zur Bestimmung der Grundströmung wird die kompressible Form der Reynolds-gemittelten Navier-Stokes Gleichungen (RANS) mithilfe des kommerziellen Strömungslösers CFX gelöst. Das Rechengebiet beschränkt sich auf eine einzelne Schnittebene durch die Symmetrieachse. Die Diskretisierung erfolgt auf Basis eines strukturierten Rechengitters mit insgesamt $2.3 \cdot 10^5$ Knoten. Der Konturrand ist als adiabate Haftbedingung ausgeführt, was die Ausbildung einer Wandgrenzschicht zur Folge hat. Um diese vollständig aufzulösen, ist das verwendete Rechengitter in Wandnähe stark verfeinert. Der dimensionslose Abstand y^+ zum wandnächsten Gitterpunkt erfüllt dabei überall die Bedingung $y^+ < 1$. Der Einfluss der turbulenten Schubspannungen wird durch das SST-Turbulenzmodell von Menter [83,84] modelliert. Dabei handelt es sich um ein hybrides Modell, welches das k-ω-Modell von Wilcox und das bekannte k-ϵ-Modell miteinander kombiniert. Ersteres ist insbesondere für die Abbildung der Turbulenz in Wandnähe geeignet, wohingegen das k-ϵ-Modell zur Beschreibung turbulenter Vorgänge in wandfernen Gebieten Vorteile besitzt. Eine spezielle Überlagerungsfunktion stellt im Rahmen des SST-Turbulenzmodells sicher, dass das jeweils bevorzugte Modell im gesamten Rechengebiet verwendet wird [4]. Am Auslass wird als Randbedingung der angenommene Umgebungsdruck $p_\infty = 1.013 \cdot 10^5$ Pa gesetzt. Am Einlass ist ein konstantes Strömungsprofil mit $M_u = 0.2$ und einem Turbulenzgrad von 5% vorgeben, wobei das Messrohr vor der Querschnittserweiterung künstlich auf eine Gesamtlänge von $50\,D_u$ erweitert wurde. Damit ist sichergestellt, dass innerhalb des akustischen Rechengebiets (Abbildung 6.3) voll ausgebildete Strömungsverhältnisse vorliegen.

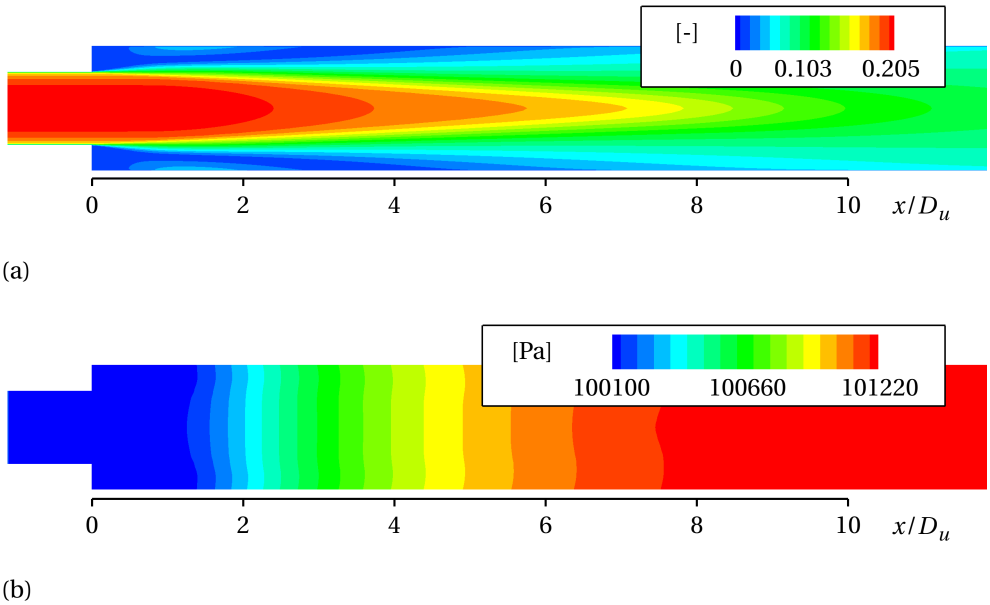


Abbildung 6.2: Grundströmung im Bereich der unstetigen Querschnittserweiterung: Machzahl (a), statischer Druck (b).

Abbildung 6.2 zeigt die quasistationäre Geschwindigkeitsverteilung im Bereich der unstetigen Querschnittserweiterung. Im Messrohr vor der Querschnittserweiterung fällt die axiale Geschwindigkeitskomponente zur Wand hin stark ab. Gleichzeitig ergeben sich auf Höhe der Symmetrieachse Maximalwerte der axialen Geschwindigkeit. Der Bereich hinter der Querschnittserweiterung ist durch eine abgelöste Scherschicht geprägt. Zwischen Scherschicht und Wand bildet sich ein Rezirkulationsgebiet aus. Dieses erstreckt sich von der Querschnittserweiterung bis zum Wiederanlegepunk im Bereich $x \approx 6\,D_u$. Anschließend gleichen sich die Strömungsgradienten zunehmend aus. Für $x > 15\,D_u$ kann in grober Näherung wieder von einem annähernd homogenen Strömungsfeld gesprochen werden.

6.2.2 Akustische Simulation im Zeitbereich

Anders als zuvor die Simulation der Grundströmung erfolgt die Berechnung der akustischen Wellenausbreitung innerhalb eines dreidimensionalen Rechengebiets. Zwar wird im Rahmen der Problemstellung lediglich die Ausbreitung und Streuung ebener akustischer Wellen betrachtet, dennoch ist nicht von vornherein bekannt, inwiefern die Interaktion zwischen hydrodynoamischen Wirbelmoden und akustischen Störungen durch eine in PIANO prinzipiell mögliche Reduktion auf zwei Dimensionen beeinflusst werden würde. Auf eine vereinfachte rotationssymmetrische Modellierung wurde aus diesem Grund verzichtet.

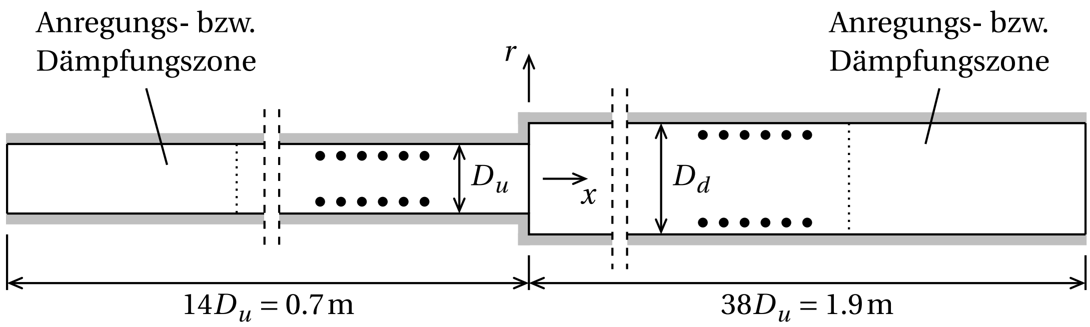


Abbildung 6.3: Schematische Darstellung des akustischen Rechengebiets: Lage der Monitorpunktringe zur Aufzeichnung der akustischen Störgrößen (•).

In Abbildung 6.3 ist das Rechengebiet der Akustiksimulation schematisch dargestellt. Für das Messrohr vor der Querschnittserweiterung wurde eine Ausdehnung von $14\,D_u$ gewählt. Das Messrohr hinter der Querschnittserweiterung hingegen erstreckt sich über eine Länge von $38\,D_u$. Mit diesen Maßen besitzt jedes Messrohr über eine ausreichende Länge ein voll ausgebildetes turbulentes Grundströmungsprofil.

Um die Querschnittserweiterung hinsichtlich der Streuung akustischer Wellen beurteilen zu können, sind insgesamt zwei unabhängige Simulationen mit jeweils einseitiger akustischer Anregung erforderlich. Dazu wird abwechselnd eine Anregungszone im Abschnitt $-0.7\,\mathrm{m} \leq x \leq -0.3\,\mathrm{m}$ sowie $1.3\,\mathrm{m} \leq x \leq 1.9\,\mathrm{m}$ definiert. Zur Unterdrückung unerwünschter Resonanzen

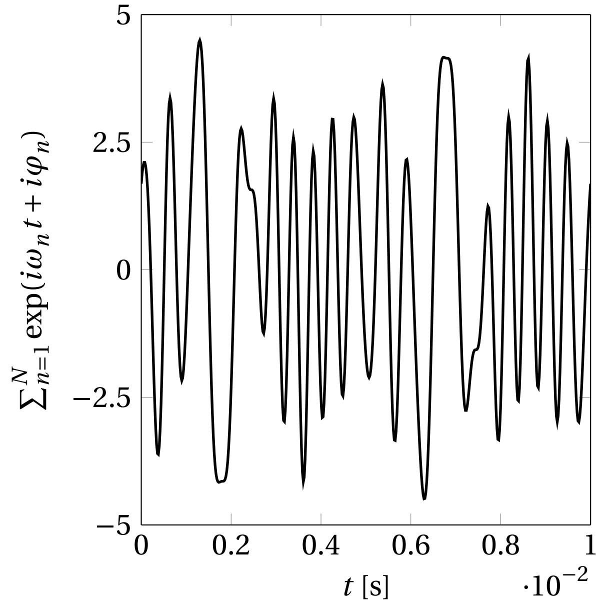


Abbildung 6.4: Zeitlicher Verlauf des Anregungssignals: Um eine möglichst homogene Amplitudenverteilung zu gewährleisten, sind die Phasenwinkel φ_n optimiert.

wird das einer Anregungszone gegenüberliegenden Messrohr jeweils durch eine Dämpfungszone abgeschlossen, wofür ebenfalls die zuvor genannten Abschnitte verwendet werden.

Die Realisierung der Anregungs- bzw. Dämpfungszonen erfolgt unter Verwendung der Methode aus Abschnitt 3.5.5, d.h. es werden künstliche Quellterme eingebracht, wodurch dem Lösungsfeld lokal ein definiertes Verhalten aufgeprägt wird. Für eine Dämpfungszone nimmt der Zielwert $(\varrho, u_i, p)^T_{ref}$ den Wert Null an. Für eine Anregungszone wird als Zielwert hingegen eine Überlagerung mehrerer ebener Wellen vorgegeben:

$$(\varrho, u_i, p)^T_{ref} = A_{ref} \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{\bar{c}^2}, \frac{k_n^{\pm}}{\bar{\varrho}\, d_n}, 0, 0, 1 \right)^T \exp(-i k_n^{\pm} x) \exp(i\omega_n t + i\varphi_n) \;, \tag{6.1}$$

wobei $d_n = \omega_n - \bar{c}\, k_n^{\pm} M$ und $i = \sqrt{-1}$. Der Parameter A_{ref} dient einer Anpassung der Gesamtamplitude. ω_n charakterisiert die Winkelgeschwindigkeit und φ_n den Phasenwinkel der einzelnen überlagerten Wellen. Die axialen Wellenzahlen

$$k_n^{\pm} = \pm \frac{1}{1 \pm M} \frac{\omega_n}{\bar{c}} \tag{6.2}$$

sind aufgrund der lokal herrschenden Machzahl M auch betragsmäßig richtungsabhängig. k_n^+ bezeichnet die Wellenzahl einer sich in positive x-Richtung ausbreitenden Welle, k_n^- hingegen die Wellenzahl einer in negative x-Richtung propagierenden Welle. Um die erwartete Frequenzabhängigkeit der akustischen Störungsausbreitung untersuchen zu können, besteht $(\varrho', u_i', p')^T_{ref}$ im vorliegenden Fall aus insgesamt 11 Einzelwellen im Frequenzbereich zwischen 500Hz und 2500Hz, d.h. $N = 11$. Die Auflösung von 200Hz ist dabei konstant. Darüber hinaus sind die relativen Phasenwinkel φ_n optimiert, um eine möglichst homogene Amplitudenverteilung zu gewährleisten. Abbildung 6.4 zeigt den zeitlichen Verlauf des verwendeten Anregungssignals.

Die Bestimmung des akustischen Streuverhaltens erfordert eine präzise Aufzeichnung der akustischen Störgrößen vor und hinter der Querschnittserweiterung. Dazu werden jeweils sechs virtuelle Ringe um die Symmetrieachse mit jeweils 12 gleichmäßig verteilten Beobachtungspunkten definiert (siehe Abbildung 6.3). Als axiale Position für die Ringe sind die Abschnitte $-0.24\,\mathrm{m} \leq x \leq -0.16\,\mathrm{m}$ sowie $1.16\,\mathrm{m} \leq x \leq 1.24\,\mathrm{m}$ gewählt. Hier handelt sich um Bereiche mit voll ausgebildeten Grundströmungsprofilen. Der axiale Abstand zwischen den einzelnen Ringen beträgt $1.6 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$ und ist konstant.

Zur Simulation der Störungsausbreitung kommen im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich Erhaltungsgleichungen mit vernachlässigter innerer Reibung zum Einsatz. Dies wirkt sich auch auf die Modellierung der Messrohre aus. Aufgrund der Vernachlässigung viskoser Effekte scheidet eine Haftbedingung von vornherein aus. Stattdessen werden auch hier reibungsfreie Wandrandbedingungen gesetzt. Mögliche Einflüsse der akustischen Grenzschicht[25] sind somit nicht berücksichtigt. Allerdings legen die Ergebnisse anderer Autoren [44, 70] nahe, dass letztere im vorliegenden Fall sowieso eine eher untergeordnete Rolle spielen.

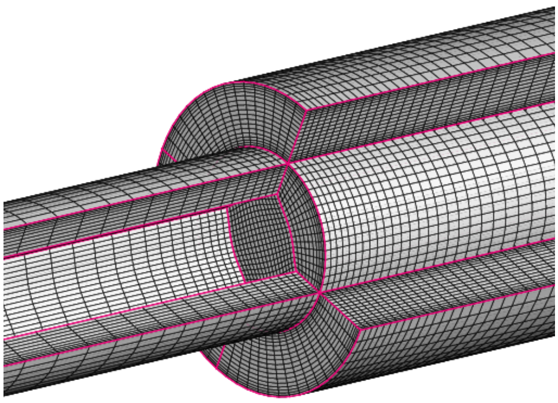


Abbildung 6.5: Akustisches Rechengitter im Bereich der Querschnittserweiterung. Zur besseren Darstellung sind mehrere Blöcke entfernt. Außerdem ist lediglich jede vierte Gitterlinie in axialer Richtung bzw. jede zweite Gitterlinie in radialer Richtung visualisiert.

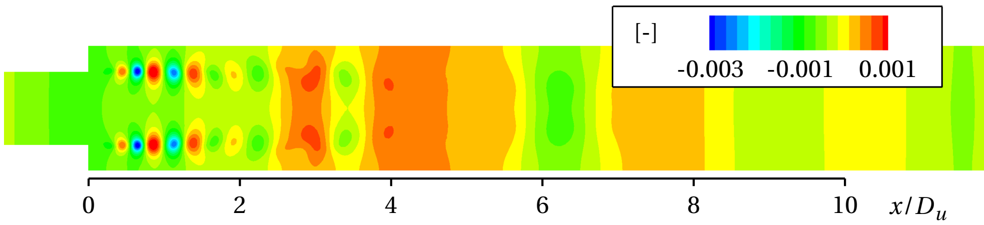
Das im Rahmen der Akustiksimulation verwendete Rechengitter besitzt insgesamt $1.15 \cdot 10^6$ Knoten. Diese sind auf 14 Blöcke mit globaler o-Topologie verteilt. Um die Interaktion zwischen hydrodynamischen und akustischen Störungen ausreichend aufzulösen, ist das Umfeld der Querschnittserweiterung durch eine erhöhte Knotendichte gekennzeichnet (Abbildung 6.5). Der minimale Knotenabstand von $5 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}$ wird dabei im Bereich der Ablösekante erreicht. Außerhalb des Einflussbereichs der Querschnittserweiterung nimmt die Auflösung des Gitters in beiden x-Richtungen mit einer Streckungsrate von jeweils $< 3\%$ ab. Der größte axiale Knotenabstand von $1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$ wird am äußeren Ende der Messrohre erreicht.

[25] Die Dicke der akustischen Grenzschicht δ_a lässt sich nach [122] durch den Zusammenhang $\delta_a \approx \sqrt{2\mu/\varrho\omega}$ abschätzen. Geht man im Vergleich dazu von einem turbulenten Geschwindigkeitsprofil $\bar{u}(r)/\bar{u}_{max} = (1 - 2r/D_u)^{1/7}$ aus, so folgt für die hydrodynamische Grenzschichtdicke $\delta_{99} \approx 0.068\,D_u$, wobei δ_{99} auf $0.99\,\bar{u}_{max}$ bezogen ist. Damit gilt $\delta_a \ll \delta_{99}$.

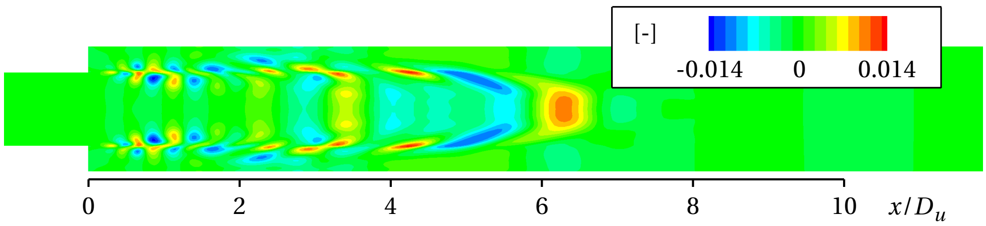
Bei einer maximalen Anregungsfrequenz von 2500Hz ergibt sich damit eine minimale Auflösung von 14PPW. Dieser Wert liegt unterhalb der in Abschnitt 3.4 angegebenen Mindestauflösung von ungefähr 20PPW. Allerdings tritt eine Auflösung von 14PPW lediglich im Bereich der Anregungs- bzw. Dämpfungszonen auf. Eine Minimierung der numerischen Dissipation ist in diesem Bereich ohnehin nicht erforderlich. Außerhalb der Anregungs- und Dämpfungszonen wird die geforderte Mindestauflösung jedoch eingehalten.

Um das Lösungsfeld der axialsymmetrischen Grundströmungssimulation auf das dreidimensionale Akustikgitter zu übertragen, wird ein trilineares Interpolationsverfahren eingesetzt. Da die Akustiksimulation auf entdimensionierten Größen beruht, ist im Zuge dessen auch eine Entdimensionierung erforderlich. Grundlage hierfür ist eine Referenzdichte $\varrho_0 = 1.2\text{kg/m}^3$, eine Referenzgeschwindigkeit $c_0 = 340\text{m/s}$ sowie eine Referenzlänge $L_0 = 1\text{m}$. Für den Referenzdruck p_0 gilt hingegen $p_0 = \varrho_0 c_0^2 = 138720\text{Pa}$.

Der Zeitschritt beträgt für alle Simulationen $5.8{\cdot}10^{-7}$s, wodurch eine CFL-Zahl von annähernd 0.55 resultiert. Die Simulationen umfassen jeweils $1 \cdot 10^6$ Zeitschritte. Damit ergibt sich eine physikalische Simulationszeit von 0.58s.



(a)



(b)

Abbildung 6.6: Instantane Verteilung der Störgrößen für $t/\Delta t = 2 \cdot 10^4$ unter Verwendung der nichtlinearen PENNE Gleichungen: Dimensionslose Druckschwankung p'/p_0 (a), dimensionslose Geschwindigkeitsschwankung in axialer Richtung u'/c_0 (b).

Die Simulation der Wellenausbreitung erfolgt unter Verwendung zweier unterschiedlicher Gleichungssätze. Die PENNE Gleichungen bewirken durch das Vorhandensein nichtlinearer Terme eine Sättigung hydrodynamischer Lösungsbestandteile, wodurch ein numerisch stabiles Verhalten resultiert. Anders ist das Verhalten im Falle der modifizierten LEE Gleichungen aus Abschnitt 5.2.3. Hier werden durch die Vernachlässigung bestimmter Gradiententerme hydrodynamische Lösungsbestandteile bewusst unterdrückt. Die sich daraus ergebenden

Unterschiede lassen sich bereits bei einer Betrachtung der instantanen Störgrößenverteilungen erkennen.

Abbildung 6.6 zeigt die dimensionslose Druckschwankung p'/p_0 sowie die dimensionslose Geschwindigkeitsschwankung in axialer Richtung u'/c_0 im Falle der nichtlinearen PENNE. Betrachtet man die Druckschwankung, so lässt sich eine Überlagerung ebener und nichtebener Lösungsbestandteile erkennen. Letztere treten vor allem im Bereich der Scherschichten deutlich hervor. Die charakteristische Länge dieser Lösungsbestandteile ist dabei deutlich kleiner als die Wellenlänge der akustischen Anregung[26]. Es ist davon auszugehen, dass es sich hierbei um Druckstörungen hydrodynamischen Ursprungs handelt, wohingegen die ebenen Bestandteile auf die Anregung zurückzuführen sind. Im Gegensatz zur Druckschwankung zeigt die Geschwindigkeitsschwankung im betrachteten Skalenbereich so gut wie keine ebenen Bestandteile. Das Lösungsfeld wird damit überwiegend durch hydrodynamische Geschwindigkeitsschwankungen dominiert. Dieser Unterschied wird später auch zur präzisen Bestimmung der Streufaktoren genutzt. Neben diesen Besonderheiten sei auch auf die auffällige Symmetrie der hydrodynamischen Moden hingewiesen. Diese tritt nur bis zu einem gewissen Simulationszeitpunkt in Erscheinung. Mit fortschreitender Simulationsdauer geht dieses markante Bild zunehmend verloren, bis schließlich für $t/\Delta t > 2 \cdot 10^5$ ein stationäres, quasi-turbulentes Verhalten vorliegt. Abbildung 6.7 zeigt diesen finalen Zustand in Form einer Isokonturfläche für die dimensionslose Druckschwankung p'/p_0. Demnach zerfallen die sich am Flächensprung ausbildenden Ringstrukturen nach kurzer Zeit in ein unregelmäßiges Feld dreidimensionaler Störungen. Ebene Lösungsbestandteile sind auf das Gebiet vor der Querschnittserweiterung beschränkt.

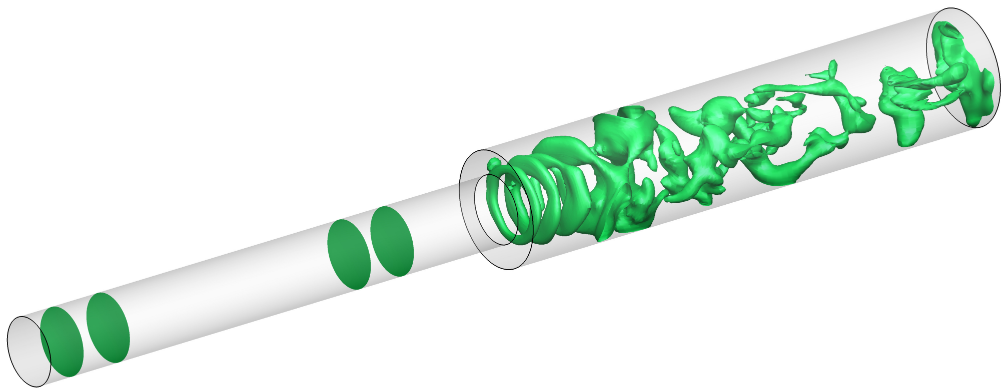


Abbildung 6.7: Isokonturfläche der dimensionslosen Druckschwankung $p'/p_0 = 1 \cdot 10^{-4}$ im Bereich der Querschnittserweiterung zum Zeitpunkt $t/\Delta t = 9 \cdot 10^5$ unter Verwendung der nichtlinearen PENNE Gleichungen.

[26]Nach Kierkegaard et al. [69] gilt für das charakteristische Längenmaß bzw. die Wellenlänge hydrodynamischer Störungen $\lambda^\omega \approx M\,\lambda^p$, wobei M die Machzahl der Grundströmung und λ^p die Wellenlänge der akustischen Störungen bezeichnet.

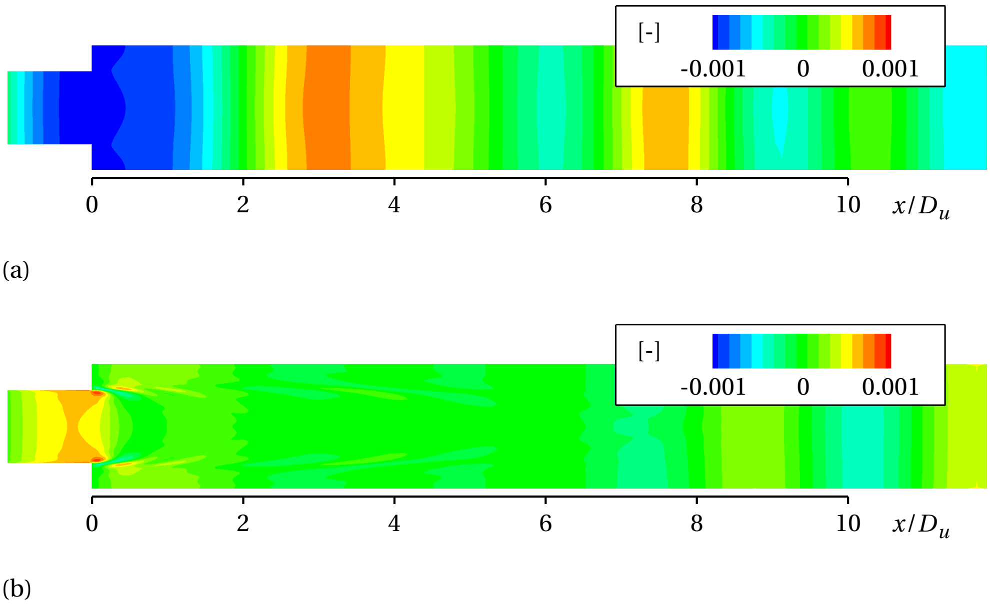


Abbildung 6.8: Instantane Verteilung der Störgrößen für $t/\Delta t = 2 \cdot 10^4$ unter Verwendung der modifizierten LEE Gleichungen: Dimensionslose Druckschwankung p'/p_0 (a), dimensionslose Geschwindigkeitsschwankung in axialer Richtung u'/c_0 (b).

Die Verteilung der dimensionslosen Größen p'/p_0 und u'/c_0 bei einer Verwendung der modifizierten LEE Gleichungen ist in Abbildung 6.8 dargestellt. Im Gegensatz zu den nichtlinearen PENNE Gleichungen zeigt die Geschwindigkeitsschwankung hier überwiegend akustische Anteile. Lediglich in direkter Nähe zur Ablösekante sind schwache nicht-akustische Störungen sichtbar. Auch die Druckschwankung zeigt ein deutlich verändertes Bild. Hydrodynamische Störungen sind nicht mehr zu erkennen. Stattdessen besteht das Lösungsfeld überwiegend aus einer Üblagerung ebener Wellen.

6.2.3 Auswertungsverfahren

Zur Quantifizierung des akustischen Streuverhaltens wurden von Ronneberger Reflexions- und Transmissionsfaktoren experimentell bestimmt. Ronneberger verwendet dazu eine sog. Multi-Mikrofon-Methode [62], welche in leicht modifizierter Form auch zur Auswertung der Simulationsergebnisse herangezogen wird. Der wesentliche Vorteil gegenüber anderen Verfahren ist die Tatsache, dass auf eine Bestimmung der akustischen Schnelle verzichtet werden kann. Im Gegensatz zu Störungen des akustischen Drucks ist die akustische Schnelle in erheblichem Maße von hydrodynamischen Geschwindigkeitsfluktuationen überlagert. Eine präzise Bestimmung der akustischen Schnelle ist deshalb in turbulenten Strömungen von vornherein erschwert und nur mit zusätzlichem Aufwand möglich [42]. Die Multi-Mikrofonmethode umgeht dieses Problem, da lediglich die axiale Verteilung der akustischen Druckstörung zur Bestimmung der Streufaktoren verwendet wird.

Um Streufaktoren aus den Simulationsdaten abzuleiten, werden zunächst auf Basis der Multi-Mikrophon-Methode die aus Abschnitt 2.4 bekannten Größen $\hat{f}$ und $\hat{g}$ rekonstruiert. Mathematisch lässt sich dieser Vorgang wie folgt ausdrücken:

$$\begin{bmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{bmatrix} = Z^{\dagger} b \,, \tag{6.3}$$

mit

$$Z = \begin{bmatrix} \exp(-ik^{+}(x_1 - x_0)) & \exp(ik^{-}(x_1 - x_0)) \\ \exp(-ik^{+}(x_2 - x_0)) & \exp(ik^{-}(x_2 - x_0)) \\ \vdots & \vdots \\ \exp(-ik^{+}(x_n - x_0)) & \exp(ik^{-}(x_n - x_0)) \end{bmatrix}, \quad b = \frac{1}{\bar{\varrho}\bar{c}} \begin{bmatrix} \hat{p}_1 \\ \hat{p}_2 \\ \vdots \\ \hat{p}_n \end{bmatrix}.$$

Dabei ist $Z^{\dagger}$ die Moore-Penrose Pseudo-Inverse der Matrix Z, b der Vektor der komplexen Druckamplituden am Ort $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und $k^{\pm}$ die axiale Wellenzahl gemäß Gleichung 6.2. Der Index n kennzeichnet die zur Verfügung stehende Anzahl an axialen Messpositionen. Wie bereits erwähnt sind für jedes Messrohr sechs virtuelle Ringe mit Beobachtungspunkten definiert, d.h. $n = 6$.

Gleichung 6.3 lässt sich als Lösung eines linearen Ausgleichproblems der Form

$$\left\| Z \begin{bmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{bmatrix} - b \right\|_2 \stackrel{!}{=} \min_{\hat{f}, \hat{g}} \tag{6.4}$$

auffassen, wobei $\| \cdot \|_2$ die euklidische Norm bezeichnet. Um die Qualität einer Rekonstruktion beurteilen zu können, wird von Moeck et al. [85] ein normiertes Residuum

$$\epsilon_{fg} = \frac{\| (I - ZZ^{\dagger})\, b \|_2}{\| b \|_2} \tag{6.5}$$

vorgeschlagen. I bezeichnet dabei eine Identitätsmatrix der Dimension $n \times n$. Das Residuum besitzt den Wertebreich $\epsilon_{fg} \in [0, 1]$, wobei ein niedriger Wert mit einer hohen Rekonstruktionsgenauigkeit gleichzusetzen ist.

Die Rekonstruktion von $\hat{f}$ und $\hat{g}$ erfolgt jeweils für eine vorgegebene Referenzposition x_0. Im vorliegenden Fall soll die untersuchte Querschnittserweiterung als akustisch kompaktes Element ohne räumliche Ausdehnung betrachtet werden [41]. Als Referenzposition wird deshalb der Ort der unstetigen Querschnittserweiterung $x_0 = 0$ gewählt, wodurch der theoretische Laufzeiteinfluss der Messrohre auf das akustische Übertragungsverhalten vollständig korrigiert wird. Das damit letztendlich bestimmte Übertragungsverhalten charakterisiert ausschließlich die Querschnittserweitung und ist in erster Näherung unabhängig vom Ort der Rekonstruktion.

Bereits zu Beginn dieses Abschnitts wurde darauf hingewiesen, dass das akustische Störungsfeld zum Teil erheblich durch Störungen hydrodynamischen Ursprungs überlagert ist. Zwar ist die akustische Druckstörung im Vergleich zur akustischen Schnelle weit weniger stark betroffen, dennoch treten auch hier Störanteile auf, welche nicht primär durch die akustische Anregung verursacht werden. Für die gesuchten Streufaktoren sind allerdings ausschließlich akustische Longitudinalanteile von Bedeutung. Um letztere aus den Simulationsdaten zu extrahieren, wird jeweils der arithmetische Mittelwert aller Beobachtungspunkte innerhalb eines Mikrofonrings gebildet. Dadurch werden alle nicht ebenen Bestandteile weitgehend unterdrückt. Die anschließende Ermittlung der komplexen Druckamplituden $\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_n$ erfolgt durch Anwendung der diskreten Fouriertransformation. Es gilt:

$$\hat{p}(\omega) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} p'(m\Delta t) \exp(-i\omega m\Delta t) \ , \tag{6.6}$$

mit der konstanten Zeitschrittweite Δt sowie der Gesamtanzahl von Zeitschritten M. Als Winkelgeschwindigkeit ω werden nacheinander die spektralen Komponenten des Anregungssignals abgetastet, wodurch sich eine mögliche Frequenzabhängigkeit des Streuverhaltens ermitteln lässt.

Um schließlich die gesuchten Streufaktoren S_{11}, S_{12}, S_{21} sowie S_{22} zu bestimmen, sind vier Gleichungen erforderlich, welche sich durch zwei unabhängige Simulationen mit jeweils einseitiger akustischer Anregung gewinnen lassen. Nach erfolgter Rekonstruktion von $\hat{f}$ und $\hat{g}$ kann die akustische Streumatrix wie folgt berechnet werden:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{f}_d^A & \hat{f}_d^B \\ \hat{g}_u^A & \hat{g}_u^B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_u^A & \hat{f}_u^B \\ \hat{g}_d^A & \hat{g}_d^B \end{bmatrix}^{-1} , \tag{6.7}$$

wobei die hochgestellten Buchstaben A und B eine Rekonstruktion bei stromabseitiger bzw. stromaufseitiger Anregung kennzeichnen. Die Indizes u und d hingegen verweisen auf den Ort der Rekonstruktion. So kennzeichnet u (upstream) das stromauf gelegene Messrohr, d (downstream) hingegen das Messrohr stromab der Querschnittserweiterung.

6.3 Diskussion der Ergebnisse

Die Rekonstruktion der Größen $\hat{f}$ und $\hat{g}$ aus den Rohdaten der Simulation ist entscheidend für eine präzise Bestimmung der Streufaktoren. Für die hier durchgeführten Simulationen ergeben sich durchgängig sehr geringe Residuen ϵ_{fg}. Wie erwartet nehmen letztere dabei mit ansteigender Frequenz zu, wobei $\epsilon_{fg} < 0.01$ für den gesamten Frequenzbereich erreicht wird. Daraus lässt sich schlussfolgern, dass die Charakteristiken der ebenen Wellenausbreitung mit ausreichender Genauigkeit aus den Rohdaten der Simulation bestimmt werden.

6.3.1 Akustische Streumatrix

Nach erfolgreicher Identifikation der Charakteristiken können die Streufaktoren gemäß Gleichung 6.7 bestimmt werden. Abbildung 6.9 zeigt Betrag und Phase der akustischen Streufak-

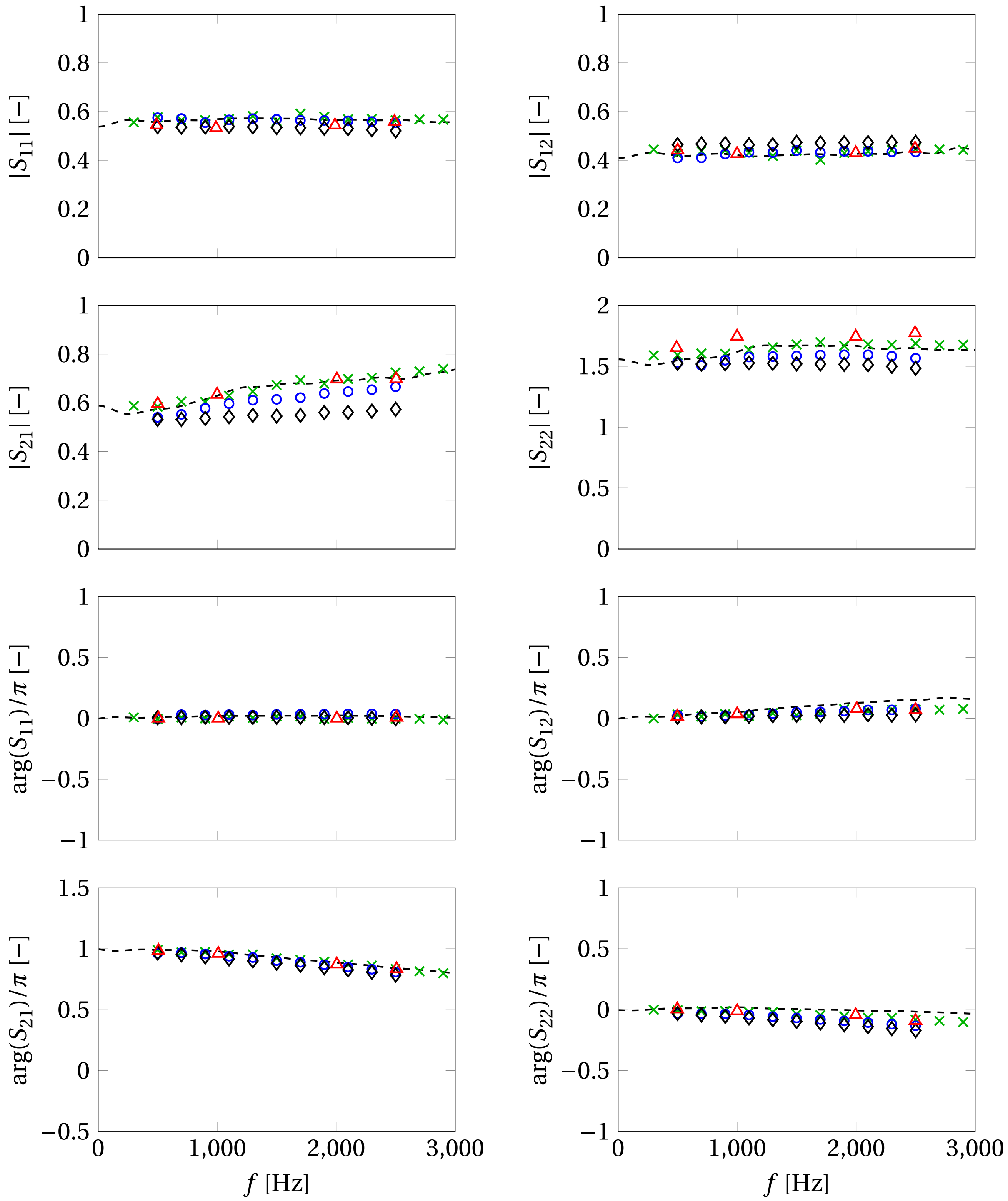


Abbildung 6.9: Akustischen Streufaktoren: nichtlineare PENNE (○), modifizierte LEE (◇), Messdaten von Ronneberger [111] (△), LES/SI Ergebnisse von Föller und Polifke [42] (- - -) sowie LNSE-Frequenzbereichsergebnisse von Schulze [114] (×).

toren aus Simulation und Experiment in Abhängigkeit der Frequenz. Allgemein lässt sich feststellen, dass die Frequenzabhängigkeit relativ gering ausfällt. Eine gewisse Ausnahme stellt der Reflexionskoeffizient S_{21} dar. Der Betrag nimmt hier mit ansteigender Frequenz zunehmend größere Werte an, die Phase hingegen fällt zu größeren Frequenzen hin spürbar ab.

Die Übereinstimmung zwischen numerischen und experimentellen Ergebnissen kann im Fall der nichtlinearen PENNE als sehr gut bezeichnet werden. Lediglich für den Betrag des Transmissionskoeffizienten S_{22} ergeben sich größere Unterschiede zwischen Experiment und Simulation. Ähnliche Abweichungen sind auch in den LES/SI Ergebnissen von Föller und Polifke sowie den Frequenzbereichsergebnissen[27] von Schulze erkennbar.

Betrachtet man die Ergebnisse für die modifizierten LEE, so kann man zunächst für die Phasenverläufe generell und für die Beträge der Streufaktoren S_{11} bzw. S_{12} eine gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Experiment feststellen. Spürbare Abweichungen sind jedoch für $|S_{22}|$ und insbesondere für $|S_{21}|$ zu beobachten. Es scheint, dass die vorhandenen Abweichungen mit ansteigender Frequenz zunehmen. Dies steht allerdings im Widerspruch zu den Aussagen von Bogey und Ewert, wonach die Gültigkeit der modifizierten Grundgleichungen vor allem im Bereich hoher Frequenzen erfüllt sein sollte.

6.3.2 Akustische Transfermatrix

Neben der Streumatrix kann das akustische Verhalten eines Flächensprungs ebenso durch akustische Transfermatrizen abgebildet werden. Verwendet man die Transfermatrix in pu-Darstellung, so ergeben sich aus physikalischer Sicht gewisse Anforderungen an einzelne Matrixkoeffizienten, welche einen Rückschluss auf die Qualität der Ergebnisse zulassen. Es ist deshalb sinnvoll neben der Streumatrix auch die Transfermatrix zu betrachten. Letztere muss dabei nicht neu aus den Rohdaten bestimmt werden, sondern kann unter Verwendung der Beziehungen aus Anhang D direkt aus der Streumatrix berechnet werden. Abbildung 6.10 zeigt die Ergebnisse aus Abbildung 6.9 in pu-Matrixdarstellung.

Innerhalb der pu-Darstellung wird das Verhältnis der akustischen Drücke vor und hinter der Querschnittserweiterung durch den Koeffizienten C_{11}^{pu} repräsentiert. Wie aus der Abbildung hervorgeht, gilt im Rahmen der Genauigkeit für den gesamten Frequenzbereich $|C_{11}^{pu}| = 1$ und $\arg(C_{11}^{pu}) = 0$, d.h. $C_{11}^{pu}(\omega) = 1$. Damit ist im Einklang mit den physikalischen Erfordernissen die Kontinuität des akustischen Drucks über den Flächensprung hinweg sichergestellt. Unter der Annahme kleiner Machzahlen ist auch das Verhältnis der akustischen Schnelle eindeutig durch das Flächenverhältnis D_u^2/D_d^2 festgelegt. Letzteres wird durch den Transfermatrixkoeffizienten C_{22}^{pu} repräsentiert. Wie sich aus Abbildung 6.10 entnehmen lässt, entspricht $|C_{22}^{pu}|$ im Rahmen der Genauigkeit dem vorgegebenen Querschnittsverhältnis $D_u^2/D_d^2 = 0.346$, die Phase $\arg(C_{22}^{pu})$ ist hingegen Null. Damit gilt wie erwartet $C_{22}^{pu}(\omega) = D_u^2/D_d^2$. Die an C_{11}^{pu} und C_{22}^{pu} gestellten Voraussetzungen für physikalisch korrektes Verhalten sind demnach erfüllt. Dies

[27] Die hier verglichenen Ergebnisse basieren auf einer Lösung der *linearisierten Navier-Stokes Gleichungen* (englisch *Linearized Navier-Stokes Equations* - LNSE) im Frequenzbereich. Die dafür erforderliche Grundströmung wurde dabei aus den LES Ergebnissen von Föller und Polifke gewonnen.

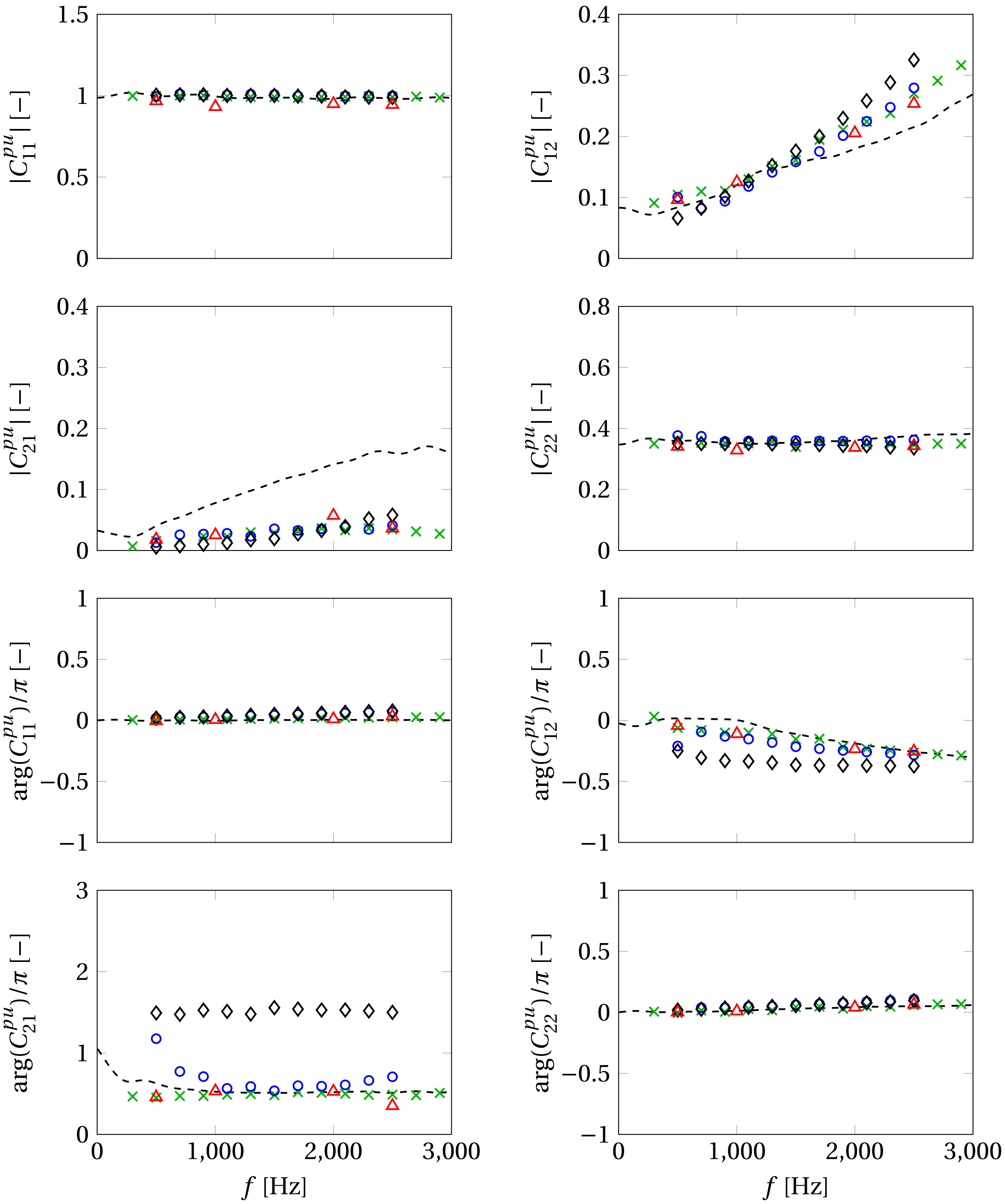


Abbildung 6.10: Koeffizienten der pu-Transfermatrix: nichtlineare PENNE (○), modifizierte LEE (◇), Messdaten von Ronneberger [111] (△), LES/SI Ergebnisse von Föller und Polifke [42] (- - -) sowie LNSE-Frequenzbereichsergebnisse von Schulze [114] (×).

gilt in annähernd vergleichbarer Ausprägung für alle hier diskutierten Berechnungsansätze. Bei den übrigen Koeffizienten zeigen die verschieden Ansätze jedoch ein differenziertes Bild. Im Falle der nichtlinearen PENNE kann die Übereinstimmung der numerischen Ergebnisse mit den experimentellen Daten wiederum als sehr gut bewertet werden. Der Grad der Übereinstimmung übertrifft dabei zum Teil auch die LES/SI-Ergebnisse von Föller und Polifke. Insbesondere für $|C_{12}^{pu}|$ sowie $|C_{21}^{pu}|$ erhält man eine deutlich bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen. Eine gewisse Abweichung lässt sich bei $\arg(C_{21}^{pu})$ für den Bereich niedriger Frequenzen feststellen. Dabei sei allerdings erwähnt, dass der zugehörige Koeffizientenbetrag im Bereich der beobachteten Abweichungen sehr kleine Werte annimmt.

Die Beträge der berechneten Matrixkoeffizienten stimmen im Falle der modifizierten LEE ebenfalls gut mit den Messwerten überein. Für $\arg(C_{12}^{pu})$ und besonders für $\arg(C_{21}^{pu})$ werden jedoch deutliche Unterschiede sichtbar. Im Gegensatz zur Streumatrix ist hier jedoch keine generelle Tendenz zu größeren Abweichungen mit ansteigender Frequenz erkennbar.

6.3.3 Energiebetrachtung

Die im Bereich des Flächensprungs auftretenden Strömungsverhältnisse lassen sich in ähnlicher Weise auch in stratifizierten Brennkammerströmungen vorfinden. Für das Verständnis potentieller Dämpfungsmechanismen ist eine energetische Betrachtung der hier analysierten Querschnittserweiterung deshalb von besonderem Interesse.

Im Folgenden soll die Energiebilanz des Flächensprungs näher untersucht werden. Trifft eine Welle auf ein akustisches Element, so wird die Energie der Welle zu unterschiedlichen Teilen reflektiert, transmittiert und dissipiert. Dieser Sachverhalt lässt sich allgemein durch die Summe aus drei Koeffizienten ausdrücken. Es gilt:

$$R_e^{\pm} + T_e^{\pm} + D_e^{\pm} = 1 \ , \tag{6.8}$$

wobei $(\cdot)^{\pm}$ die Ausbreitungsrichtung der Welle charakterisiert. $R_e^{\pm}$ bezeichnet dabei den energetischen Reflexionskoeffizienten, also das Verhältnis aus reflektierter und eintretender akustischer Energie. Analog dazu bezeichnen $T_e^{\pm}$ den energetischen Transmissionskoeffizienten und $D_e^{\pm}$ den Dissipationskoeffizienten. Die Koeffizienten stehen über die Machzahlen M_u und M_d sowie den Rohrquerschnitten D_u und D_d mit den Beträgen der Streumatrix in Verbindung

$$\begin{aligned} R_e^{+} &= \left(\frac{1-M_u}{1+M_u}\right)^2 \left|S_{21}\right|^2 \ , \qquad & T_e^{+} &= \left(\frac{D_d}{D_u}\right)^2 \left(\frac{1+M_d}{1+M_u}\right)^2 \left|S_{11}\right|^2 \ , \\ R_e^{-} &= \left(\frac{1+M_d}{1-M_d}\right)^2 \left|S_{12}\right|^2 \ , \qquad & T_e^{-} &= \left(\frac{D_u}{D_d}\right)^2 \left(\frac{1-M_u}{1-M_d}\right)^2 \left|S_{22}\right|^2 \ . \end{aligned} \tag{6.9}$$

Abbildung 6.11 zeigt die energetischen Reflexions-, Transmissions- und Dissipationskoeffizienten in Abhängigkeit der Frequenz für beide Ausbreitungsrichtungen. Dargestellt ist dabei

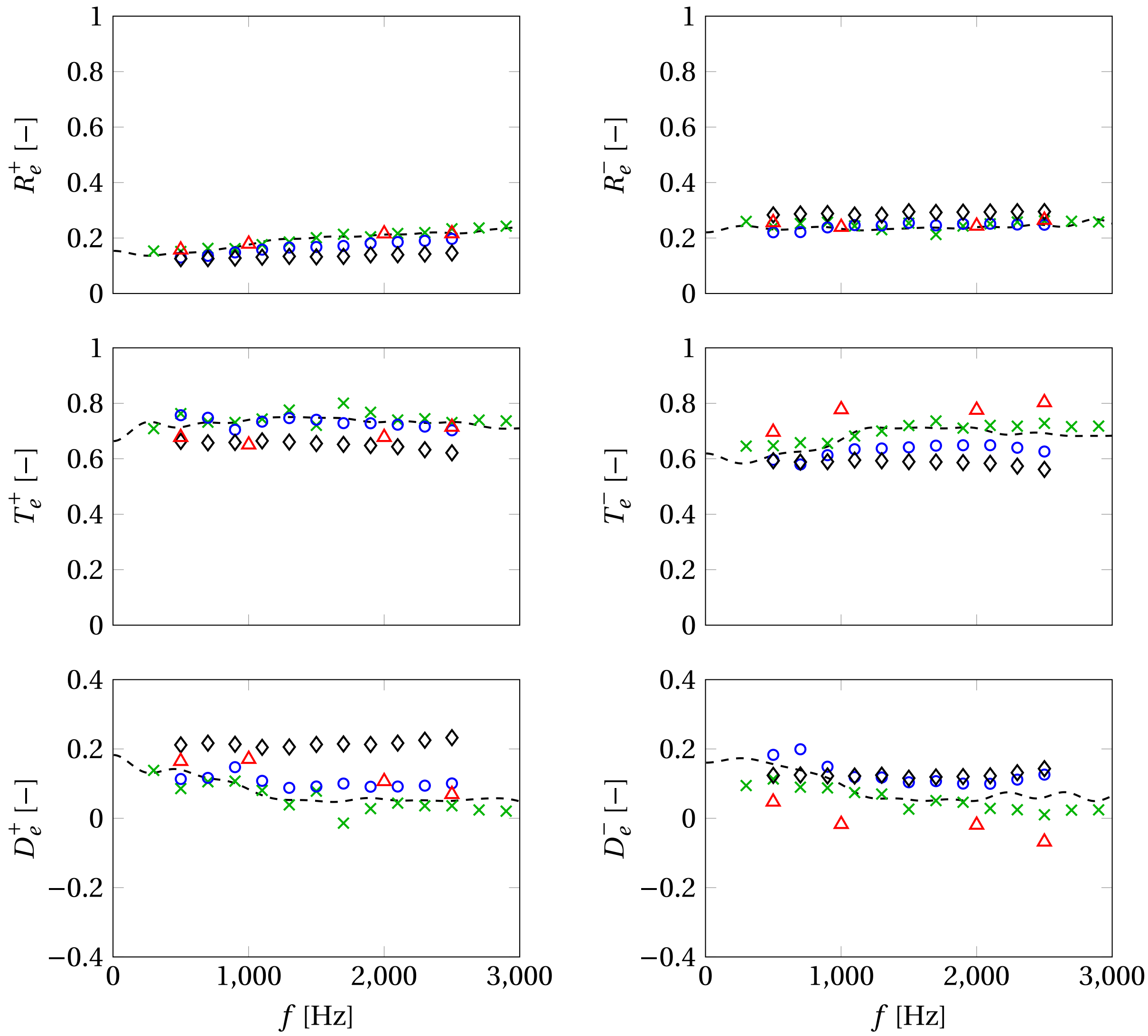


Abbildung 6.11: Energetische Reflexions-, Transmissions- und Dissipationskoeffizienten für beide Ausbreitungsrichtungen: Nichtlineare PENNE (○), modifizierte LEE (◇), Messdaten von Ronneberger [111] (△), LES/SI Ergebnisse von Föller und Polifke [42] (- - -) sowie LNSE-Frequenzbereichsergebnisse von Schulze [114] (×).

sowohl das experimentell ermittelte Verhalten als auch die theoretische Energiebilanz auf Basis unterschiedlicher Berechnungsansätze.

Generell lässt sich feststellen, dass die energetischen Reflexionskoefizienten von allen Berechnungsverfahren relativ gut vorhergesagt werden. Zwar erhält man für die modifizierten LEE, verglichen mit den nichtlinearen PENNE, spürbar größere Abweichungen. Die Ergebnisse stimmen aber noch immer in guter Näherung mit den Messdaten von Ronneberger überein. Für die übrigen Koeffizienten ist die Bewertung weniger eindeutig. Betrachtet man die Wellenausbreitung in Strömungsrichtung, so wird auf Basis der PENNE eine ausgesprochen gute Übereinstimmung hinsichtlich Transmission und Dissipation erreicht. Für eine Wellenausbreitung entgegen der Strömungsrichtung erkennt man jedoch deutliche Unterschiede. Wie bereits für die akustischen Streu- und Transfermatrizen festgestellt wurde, treten ähnliche Unterschiede auch bei den LES/SI Ergebnissen von Föller und Polifke [42] auf.

Ein bemerkenswertes Verhalten zeigen die beiden Dissipationskoeffizienten D_e^+ und D_e^-. Gemäß den Ergebnissen aus Abbildung 6.11 ist die Dissipation einer sich in Strömungsrichtung ausbreitenden Welle unter Verwendung der modifizierten LEE deutlich erhöht. Um dieses Verhalten nachzuvollziehen wird an dieser Stelle nochmals auf Abbildung 6.8 aus Abschnitt 6.2.2 hingewiesen. Demnach besitzen auch die modifizierten LEE das Potential, in der Nähe der Ablösekannte hydrodynamische Störungsanteile (Wirbel) auszubilden. Es ist davon auszugehen, dass dieser Vorgang gemäß den Ausführungen aus Abschnitt 2.6 mit dem Verlust akustischer Energie verbunden ist. Im Gegensatz zu den PENNE wird die Interaktion der Akustik mit den hydrodynamischen Scherschichten nicht bzw. nicht vollständig innerhalb der modifizierten LEE abgebildet. Die Ergebnisse aus Abbildung 6.8 deuten möglicherweise darauf hin, dass diese Interaktion mit einem Austausch von Energie in umgekehrter Richtung verbunden ist, wodurch die dissipierte Gesamtenergie insgesamt reduziert wird. Im Gegensatz dazu ergeben sich für eine Wellenausbreitung entgegen der Strömungsrichtung keine größeren Unterschiede hinsichtlich der Dissipation akustischer Energie. Da innerhalb der modifizierten LEE die Gradienten der Grundströmung nicht berücksichtigt sind, lässt dies den Schluss zu, dass letztere für die Dissipation stromauf propagierender Wellen keine bzw. nur eine untergeordnete Bedeutung besitzen.

6.4 Zusammenfassung

Die Simulation akustischer Wellenausbreitung in stratifizierten Grundströmungen stellt im Zeitbereich eine große Herausforderung dar. Linearisierte Störungsgleichungen, wie die häufig verwendeten LEE, zeigen hier verstärkt ein instabiles Verhalten. Der Anwendungsbereich dieser Modellgleichungen ist damit im Zeitbereich auf hydrodynamisch stabile Grundströmungsfelder beschränkt.

Im Rahmen der hier vorgestellten Untersuchung kann jedoch gezeigt werden, dass unter Verwendung nichtlinearer Störungsgleichungen sowie einer modifizierten Form der LEE eine numerisch stabile Simulation im Zeitbereich möglich ist. Beide Modellierungsansätze werden erfolgreich zur akustischen Charakterisierung einer durchströmten Querschnittserweiterung eingesetzt. Dabei stellt man unter anderem fest, dass die nichtlinearen PENNE deutliche Vorteile hinsichtlich einer Übereinstimmung der Simulationsergebnisse mit verfügbaren Messdaten besitzen. Die Qualität der berechneten Streufaktoren kann in diesem Fall als hoch eingeschätzt werden. Im Gegensatz dazu lassen sich für die modifizierten LEE mehr oder weniger große Abweichungen zwischen Simulation und Experiment erkennen. Für eine quantitativ hochwertige Analyse sind deshalb die nichtlinearen PENNE gegenüber den modifizierten LEE vorzuziehen.

Darüber hinaus ergeben sich durch den Vergleich der unterschiedlichen Modellgleichungen interessante Rückschlüsse auf die akustische Wirkung der Gradienten des Grundströmungsfelds. Demnach fällt für den hier analysierten Testfall die Dissipation akustischer Energie höher aus, wenn auf eine Berücksichtigung der Strömungsgradienten verzichtet wird. Dies legt nahe, dass die vernachlässigten Gradienten im konkreten Fall eine akustisch anfachende Wirkung besitzen.

7 Simulation der akustischen Wellenausbreitung in Raketenschubkammern

Nachdem im letzten Kapitel die Funktions- und Leistungsfähigkeit des Simulationsverfahrens in hydrodynamisch instabilen Strömungen demonstriert werden konnte, soll jetzt die akustische Wellenausbreitung in Raketenschubkammern näher untersucht werden. Mit akustischer Wellenausbreitung ist hier der Bereich der linearen Akustik gemeint. Im Gegensatz zu Kapitel 8 werden in den nachfolgenden Ausführungen lediglich kleine Störungsamplituden betrachtet, wodurch nichtlineare Effekte noch keine Rolle spielen.

Die Untersuchung soll am Beispiel einer kalt-, d.h. nicht reaktiv durchströmten Flüssigkeitsraketenbrennkammer durchgeführt werden. Der komplexe Einfluss der Verbrennung, der ohnehin nicht Teil dieser Arbeit sein soll, wird dadurch von vornherein ausgeschlossen. Stattdessen wird der Schwerpunkt auf die korrekte Beschreibung der akustischen Verluste gelegt. Letztere besitzen im Rahmen thermoakustischer Stabilitätsanalysen eine ähnlich große Bedeutung wie die zuvor ausgeschlossene Rückkopplung infolge transienter Verbrennungsprozesse.

Neben einer korrekten Modellierung der physikalischen Dämpfungsprozesse besitzt auch der Einfluss der numerischen Dissipation eine besondere Bedeutung. Um aussagekräftige Stabilitätsanalysen durchführen zu können, muss der Einfluss der numerischen Dämpfung so weit wie möglich minimiert werden. Besitzen numerische und physikalische Dissipation eine ähnliche Größenordnung, so ist eine brauchbare thermoakustische Stabilitätsaussage praktisch nicht mehr möglich. Der Einfluss der Numerik auf das berechnete Dämpfungsverhalten wurde bereits von Pieringer [101] thematisiert. Morgenweck [88] stellt in seiner Arbeit fest, dass das ursprünglich in PIANO zur numerischen Stabilisierung der Simulation genutzte Filterverfahren einen erheblichen Dämpfungseinfluss besitzt. Um diesen zu reduzieren, wird von Morgenweck ein optimiertes Verfahren vorgeschlagen, wodurch der unerwünschte Einfluss deutlich reduziert werden kann. Dennoch bleibt ein spürbarer Rest an numerischer Dämpfung, der sich besonders bei schwach gedämpften Moden zeigt. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Numerik des Simulationsverfahrens abermals überarbeitet, um den Anteil der künstlichen Dämpfung noch weiter zu reduzieren. Die Bewertung dieser Anstrengungen soll ebenfalls innerhalb dieses Kapitels erfolgen.

Für eine Untersuchung der akustischen Wellenausbreitung in Raketenschubkammern bietet es sich an, auf ein Experiment von Kathan [68] zurückzugreifen. Kathan hat im Rahmen einer Arbeit über Verlustmechanismen in Raketenbrennkammern die Akustik einer kalt durchströmten Brennkammergeometrie vermessen. Die dabei gewonnen experimentellen Daten liegen in gut dokumentierter Form [66–68] vor, wodurch sich der Versuchsaufbau als idealer Testfall zur Validierung numerischer Berechnungsmethoden erweist. Darüberhinaus wurde der Testfall bereits von verschiedenen Autoren im Rahmen des zweiten REST Scientific Workshops[28] untersucht. Auch die von Morgenweck [88] durchgeführten Untersuchungen zum numerischen Dämpfungseinfluss basieren auf diesem Testfall.

7.1 Messaufbau und Testfallbeschreibung

Der Versuchsaufbau von Kathan ist in Abbildung 7.1 dargestellt. Zentrales Element bildet eine repräsentative Brennkammergeometrie, bestehend aus einem zylindrischen Brennkammersegment und anschließender Lavaldüse. Zur Versorgung der Modellbrennkammer strömt komprimierte Umgebungsluft zunächst radial durch einen Ringspalt in eine Vorkammer. Die Vorkammer wiederum ist über eine Lochblechplatte mit der eigentlichen Brennkammer verbunden. Die Kombination aus Vorkammer und Lochblechplatte ersetzt dabei den in realen Raketenbrennkammern vorkommenden Einspritzkopf. Darüber hinaus besteht die Aufgabe des Lochblechs darin, eine möglichst homogene Strömung innerhalb der Brennkammergeometrie zu gewährleisten.

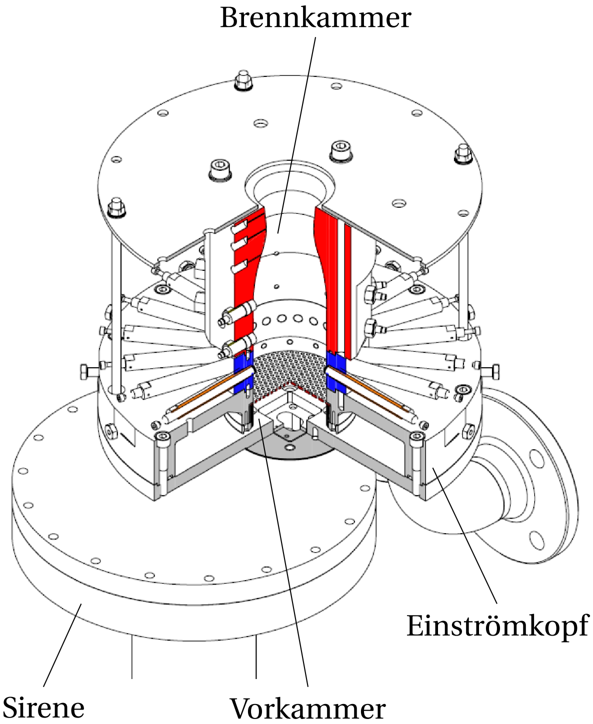


Abbildung 7.1: Versuchsaufbau zur Untersuchung der akustischen Wellenausbreitung in Raketenbrennkammern (Abbildung aus [73]).

Zur Anregung der Modellbrennkammer ist in den Versuchsaufbau eine Lochscheibensirene integriert. Dabei wird ein zusätzlicher, in die Vorkammer gerichteter Luftstrom periodisch

[28] Der zweite REST Scientific Workshop fand am 5. und 6. Oktober 2010 in Ottobrunn statt.

unterbrochen. Durch Anpassung der Motordrehzahl können damit einzelne Brennkammermoden gezielt angeregt werden.

Die Betriebsparameter der Versuchsanlage sind so gewählt, dass sowohl die Lavaldüse, als auch der Ringspalt zwischen Einströmkopf und Vorkammer kritisch durchströmt werden. Dadurch wird die Akustik der Brennkammer gegenüber der Umgebung und dem Zufuhrsystem entkoppelt. Der sich daraus für nachfolgende Untersuchungen ergebene akustisch relevante Bereich ist schematisch in Abbildung 7.2 dargestellt.

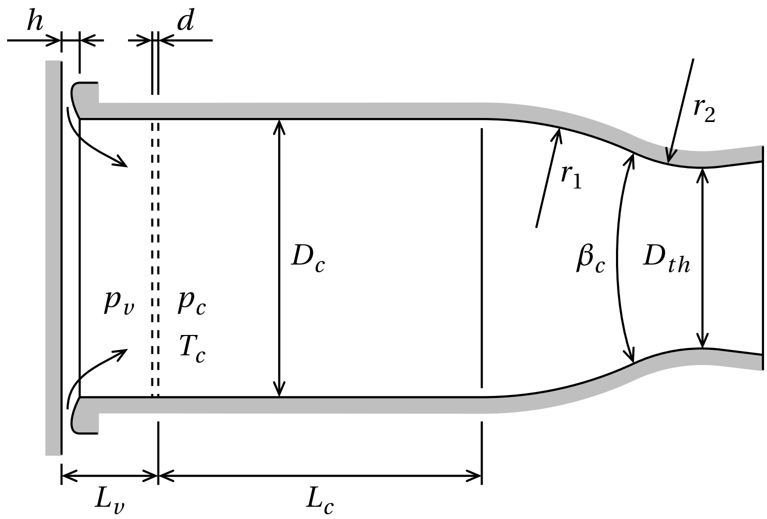


Abbildung 7.2: Schematische Darstellung und charakteristische Parameter des akustisch relevanten Bereichs.

Abbildung 7.2 ermöglicht auch einen Überblick über die wichtigsten geometrischen Abmessungen des Experiments. Der subsonische Bereich der Lavaldüse wird eindeutig durch den Brennkammerdurchmesser D_c, den Düsenhalsdurchmesser D_{th}, dem Kontraktionswinkel β_c, sowie durch die Krümmungsradien r_1 und r_2 beschrieben. Das zylindrische Brennkammersegment der Länge L_c ist über die bereits erwähnte Lochblechplatte der Dicke d mit der Vorkammer verbunden. Letztere ist in erster Näherung zylinderförmig. Der Durchmesser entspricht dabei dem Brennkammerdurchmesser. Die Länge der Vorkammer inklusive Lochblechplatte beträgt L_v, wobei die radiale Zuströmung über die Höhe h erfolgt.

Aufgrund der Lochblechplatte bildet sich ein deutlicher Druckunterschied zwischen Vorkammer und Modellbrennkammer aus. Der statische Druck in der Vorkammer beträgt dabei p_v, der entsprechende Druck im zylindrischen Teil der Modellbrennkammer p_c. Die Temperatur der komprimierten Umgebungsluft innerhalb der Modellbrennkammer wird von Kathan mit $T_c = 290\,\mathrm{K}$ angegeben.

Eine Zusammenstellung charakteristischer Abmessungen und Betriebsparameter findet sich in Tabelle 7.1. Für darüber hinausgehende Informationen sei auf die Testfallbeschreibung [66, 67] sowie auf [68] verwiesen.

Parameter	Wert
Brennkammerdurchmesser, D_c	0.092 m
Düsenhalsdurchmesser, D_{th}	0.060 m
Krümmungsradius, r_1	0.119 m
Krümmungsradius, r_2	0.053 m
Zyl. Brennkammerlänge, L_c	0.107 m
Zyl. Vorkammerlänge, L_v	0.032 m
Kontraktionswinkel, β_c	25°
Zuströmhöhe, h	0.008 m
Lochblechplattendicke, d	0.002 m
Vorkammerdruck, p_v	$1.80 \cdot 10^5$ Pa
Brennkammerdruck, p_c	$1.65 \cdot 10^5$ Pa
Drucklufttemperatur, T_c	290 K

Tabelle 7.1: Charakteristische Abmessungen und Betriebsparameter des von Kathan verwendeten Versuchsaufbaus [66–68].

7.2 Akustischer Energieverlust durch die Düse

Zunächst soll die Modellbrennkammer von der Lochblechplatte und der Vorkammer entkoppelt analysiert werden. Am Einlass der Brennkammer wird dazu künstlich eine akustisch neutrale Randbedingung spezifiziert. Die Wände der Brennkammer werden als akustisch hart angesehen. Ebenso werden Grenzschichteinflüsse sowie innere Dissipationseffekte vernachlässigt. Unter diesen Voraussetzungen kann das Dämpfungsverhalten ausschließlich auf den akustischen Energieverlust durch die Düse reduziert werden.

Im Rahmen des Versuchsaufbaus ist eine entkoppelte Betrachtung nicht, bzw. nur sehr eingeschränkt möglich. Ein Vergleich zwischen Experiment und Numerik entfällt deshalb an dieser Stelle. Allerdings existiert für diesen Sonderfall eine halbanalytische Lösung im Frequenzbereich, die mit einer entsprechenden dreidimensionalen Zeitbereichssimulation verglichen werden kann. Die Ergebnisse dienen dabei weniger einem Erkenntnisgewinn über die Vorgänge innerhalb der Modellbrennkammer, als vielmehr einer weiteren Validierung des numerischen Zeitbereichsverfahrens. Darüber hinaus wurde dieser Testfall bereits von Morgenweck zur Beurteilung unterschiedlicher Grundgleichungstypen bzw. zur Evaluierung des numerischen Lösungsverfahrens herangezogen [88]. Morgenweck verwendet dabei die linearisierten Euler Gleichungen (LEE) bzw. die von Ewert [35–37] entwickelten akustischen Störungsgleichungen (APE).

Im Rahmen der nachfolgenden Untersuchungen sollen zwei weitere Grundgleichungen mit der halbanalytischen Frequenzbereichslösung verglichen werden. Dabei handelt es sich wie bereits in Kapitel 6 um die nichtlinearen PENNE sowie um die modifizierten LEE. Ein weiterer

Aspekt der Untersuchungen betrifft das numerische Lösungsverfahren, das im Rahmen dieser Arbeit nochmals überarbeitet worden ist. Durch eine vergleichende Analyse des Dämpfungsverhaltens kann der Grad der numerischen Dissipation beurteilt und Konsequenzen für den praktischen Einsatz des Simulationsverfahrens gezogen werden.

7.2.1 Halbanalytische Lösung

Betrachtet man lediglich kleine Störungen in einem reibungsfreien Fluid ohne Wärmeleitung, so lässt sich die akustische Wellenausbreitung innerhalb einer durchströmten Brennkammerkontur durch die isentrope Form der linearisierten Eulergleichungen beschreiben. Nach einer Transformation in den Frequenzbereich und unter der Annahme einer quasi-eindimensionalen Grundströmung sowie einer rotationsfreien Geschwindigkeitsstörung können diese Erhaltungsgleichungen für die betrachtete rotationssymmetrische Brennkammerkontur halbanalytisch gelöst werden. Das Vorgehen erfolgt hier analog zu Abschnitt 2.3 durch Separation der Variablen, wobei die Bestimmungsgleichungen für die Ansatzfunktionen in radialer sowie in Umfangsrichtung explizit gelöst werden können. In axialer Richtung ergibt sich hingegen eine komplexe Riccati Differentialgleichung, die numerisch integriert werden muss.

Dieses Vorgehen wurde erstmals von Crocco und Sirignano [25] und später von Bell und Zinn [10] dazu genutzt, um die akustische Admittanz einer kritisch durchströmten Düsenkontur für verschiedene Modenformen zu berechnen. Durch entsprechende Weiterentwicklung der Methode [73] ist man aber auch in der Lage, die komplexen Eigenfrequenzen einer parametrisierten Raketenschubkammer zu bestimmen. Dazu wird die Integration der komplexen Riccati Differentialgleichung zunächst bis ans obere Ende des zylindrischen Brennkammersegments ausgedehnt, wodurch sich die Admittanz der Brennkammer am Einströmrand ergibt. Die Admittanz am Einströmrand muss wiederum eine vorgegebene Randbedingung erfüllen. Da dies aber nur für die komplexen Eigenfrequenzen möglich ist, lassen sich durch Minimierung der Admittanzabweichung die komplexen Eigenfrequenzen der parametrisierten Raketenschubkammer bestimmen.

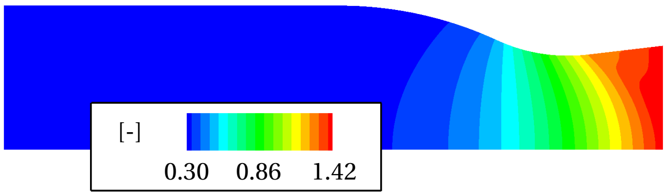
Eine detaillierte Beschreibung der Methode findet sich in [73]. Darüber hinaus sei auch auf die grundlegenden Arbeiten von Crocco und Sirignano [25] sowie von Bell und Zinn [10] verwiesen.

7.2.2 Grundströmung

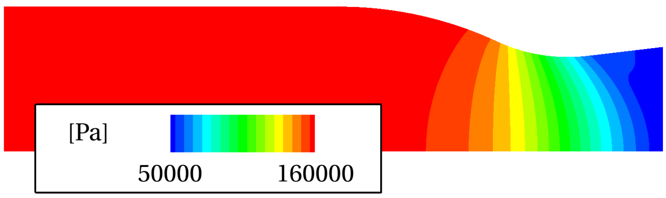
Die Anwendung des numerischen Simulationsverfahrens erfordert zunächst die Bestimmung der Grundströmung innerhalb der Modellbrennkammer. Hierfür wird wie bereits in Kapitel 6 der kommerzielle Strömungslöser CFX verwendet.

Die Berechnung der Grundströmung erfolgt unter der Annahme einer axialsymmetrischen Lösung. Außerdem wird auf eine Berücksichtigung viskoser bzw. turbulenter Effekte verzichtet. Die Brennkammerwand ist konsistent mit der Vernachlässigung innerer Reibung als adiabate Wand ohne Haftbedingung modelliert. Am Einlass wird ein statischer Druck von $1.65 \cdot 10^5$ Pa vorgegeben, die Temperatur der einströmenden Luft beträgt 290 K. Am Auslass ist keine besondere Spezifikation der Randbedingung erforderlich, da hier die Abströmung im Überschall erfolgt.

Abbildung 7.3 zeigt die Kontur der Machzahl sowie des statischen Drucks innerhalb der Modellbrennkammer. Die Strömung innerhalb des zylindrischen Brennkammersegments ist eindimensional und gradientenfrei. Mit Eintritt in den konvergenten Düsenabschnitt tritt eine zunehmende Beschleunigung der Strömung in Erscheinung, wobei dies mit einer Absenkung des statischen Drucks verbunden ist. Nach Überschreiten der lokalen Schallgeschwindigkeit im Bereich des engsten Querschnitts beschleunigt die Strömung im divergenten Düsenabschnitt weiter und tritt schließlich mit Überschallgeschwindigkeit am Düsenende aus.



(a)



(b)

Abbildung 7.3: Grundströmung innerhalb der kalt durchströmten Modellbrennkammer: Machzahlkontur (a), Kontur des statischen Drucks (b).

7.2.3 Akustische Simulation im Zeitbereich

Die Ausbreitung akustischer Störungen innerhalb der Brennkammer ist prinzipiell in alle drei Raumrichtungen möglich. Damit erfordert die Simulation der Brennkammerakustik, anders als zuvor die Berechnung der Grundströmung, eine dreidimensionale Betrachtung.

Wie bereits erwähnt, wird für eine entkoppelte Betrachtung eine akustisch neutrale Randbedingung am Einlass der Brennkammer spezifiziert. Die Wände der Brennkammer werden als akustisch hart betrachtet und sind ohne Haftbedingung modelliert. Am Auslass ist die Vorgabe einer speziellen Randbedingung aus akustischer Sicht nicht erforderlich. Die Abströmung erfolgt hier im Überschall, wodurch sich automatisch ein nicht-reflektierendes Verhalten ergibt. Um aber den numerischen bzw. formalen Anforderungen des Lösers gerecht zu werden, wird dennoch die in PIANO verfügbare Ausströmrandbedingung am Auslass des Rechengebiets gesetzt.

Zur Anregung der akustischen Brennkammermoden wird die Druckstörung durch eine räumliche Gaußverteilung der Form

$$p'(x_i, t=0) = A_p \exp\left[-\ln(2)\frac{(x_i - x_i^c)^2}{b_g^2}\right] \tag{7.1}$$

initialisiert. Dabei bezeichnet $A_p = 10\,\mathrm{Pa}$ die Stärke der Druckstörung, $b_g = 1.5 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$ den Halbwertsradius und $x_i^c = (-0.145\,\mathrm{m}, 0.046\,\mathrm{m}, 0)^T$ das Zentrum der Gaußverteilung. Die Dichtestörung $\varrho'(x_i, t=0)$ ist über die Isentropiebeziehung an die initiale Druckstörung gekoppelt. Für die Geschwindigkeitsstörung gilt $u_i'(x_i, t=0) = 0$. Die Stärke der Druckstörung ist für die nachfolgenden Untersuchungen so gewählt, dass Effekte nichtlinearer Akustik zu vernachlässigen sind. Ferner ist das Zentrum der Druckstörung gegenüber der Symmetrieachse der Modellbrennkammer verschoben. Dadurch ist sichergestellt, dass nicht nur longitudinale und radiale, sondern auch transversale Moden angeregt werden.

Parameter	Gitter 1	Gitter 2	Gitter 3	Gitter 4
Δ_x	$2.5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$	$2.5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$	$2.5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$	$2.5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$
Δ_ϑ	$2.7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$	$1.8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$	$1.3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$	$1.1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$
Δ_r	$2.7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$	$1.8 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$	$1.3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$	$1.1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$
N_t	74880	164160	299520	460800

Tabelle 7.2: Charakteristische Parameter der verwendeten Rechengitter: Mittlerer Gitterabstand in axialer Δ_x, radialer Δ_r und Umfangsrichtung Δ_ϑ, sowie Gesamtanzahl der Gitterknoten N_t.

Um später den Einfluss numerischer Dissipation im Detail untersuchen zu können, stehen insgesamt vier verschiedene Rechengitter (im Folgenden als Gitter 1 bis 4 bezeichnet) zur Verfügung. Die Rechengitter sind in ihrer Topologie identisch und unterscheiden sich nur durch die Anzahl der Gitterpunkte. Abbildung 7.4 zeigt die Struktur der verwendeten Rechengitter, die jeweils in 15 Blöcke unterteilt sind. Aufgrund der Rotationssymetrie wird auch hier die bereits aus Abschnitt 6.2.2 bekannte O-Struktur verwendet. Die Anzahl der Gitterpunkte in axialer Richtung ist für alle verwendeten Gitter konstant. Innerhalb des zylindrischen Brennkammersegments beträgt der Gitterabstand $\Delta_x = 2.5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$. Um die Gradienten im Bereich des engsten Querschnitts besser aufzulösen, nimmt der axiale Gitterabstand mit Eintritt in den konvergenten Düsenabschnitt stetig ab bis schließlich ein Minimum von $1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$ erreicht wird. Die Streckungsrate beträgt dabei $< 3\%$. Der charakteristische Gitterabstand in radialer

Richtung Δ_r sowie in Umfangsrichtung Δ_ϑ ist gitterabhängig[29]. Gitter 1 besitzt das geringste, Gitter 4 das größte Auflösungsvermögen. Ein Vergleich der gitterspezifischen Unterschiede findet sich in Tabelle 7.2.

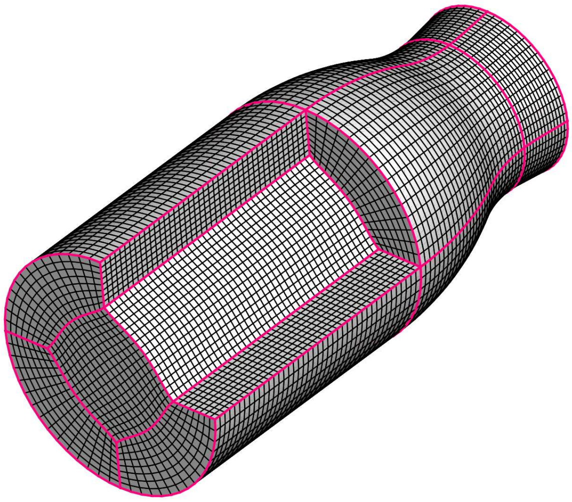


Abbildung 7.4: Struktur der verwendeten Rechengitter am Beispiel von Gitter 1. Zur besseren Darstellung wurde ein Block im Bereich des zylindrischen Brennkammersegments entfernt.

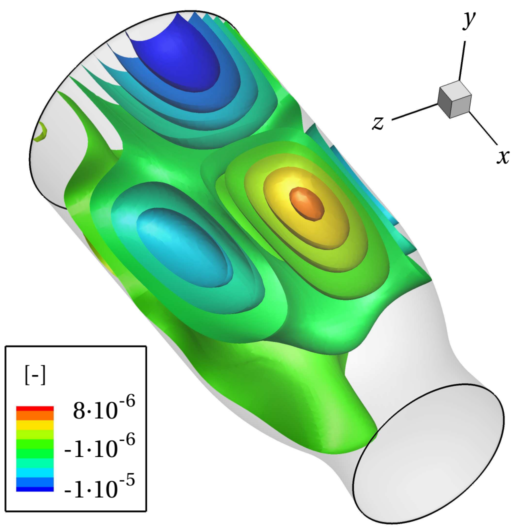
Um die Ergebnisse der zweidimensionalen Strömungssimulation auf die dreidimensionalen Akustikgitter zu übertragen, wird ein trilineares Interpolationsverfahren eingesetzt. Im Zuge dessen wird auch eine Entdimensionierung der Grundströmungslösung vorgenommen. Grundlage hierfür ist eine Referenzdichte $\varrho_0 = 1\text{kg/m}^3$, eine Referenzgeschwindigkeit $c_0 = 330\text{m/s}$, sowie eine Referenzlänge $L_0 = 1\text{m}$. Der Zeitschritt beträgt für alle durchgeführten Simulationen $6.1 \cdot 10^{-8}s$.

7.2.4 Diskussion der Simulationsergebnisse

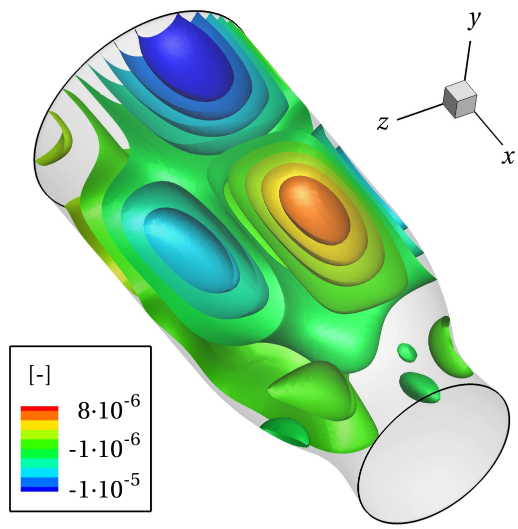
Analog zum Vorgehen in Abschnitt 6.2.2 erfolgt die Simulation der Wellenausbreitung unter Verwendung unterschiedlicher Grundgleichungssätze. Da aber hier keine hydrodynamischen Instabilitäten zu erwarten sind, ist neben den modifizierten LEE und den nichtlinearen PENNE auch die Verwendung der klassischen LEE möglich. Letztere werden später als Referenz verwendet. Auf eine Anwendung der akustischen Störungsgleichungen (APE) wird hingegen verzichtet. Wie Morgenweck [88] zeigen konnte, besitzen die akustischen Störungsgleichungen im Bereich des Schalldurchgangs ein numerisch instabiles Verhalten, wodurch dieser Grundgleichungstyp für eine Anwendung in Raketenschubkammern weitestgehend ausscheidet.

[29] Für den mittleren Gitterabstand in radialer Richtung Δ_r sowie in Umfangsrichtung Δ_ϑ gilt im Rahmen dieser Arbeit die Definition $\Delta_r = \Delta_\vartheta = \sqrt{V_c/N_t\Delta_x}$, wobei V_c das Brennkammervolumen bezeichnet.

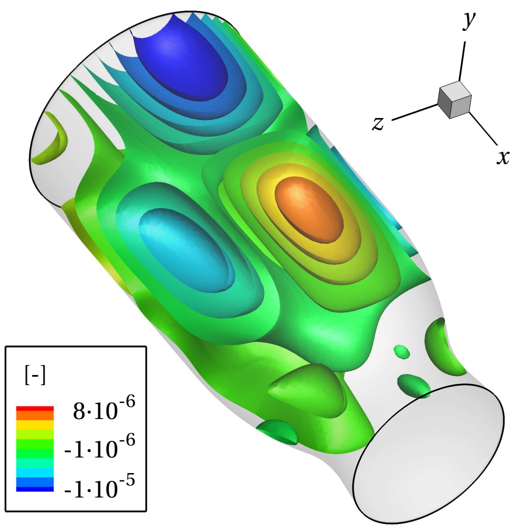
Bevor auf eine quantitative Bewertung der berechneten Eigenfrequenzen und Dämpfungsraten eingegangen wird, soll zunächst das instantane Lösungsfeld der akustischen Schwankungsgrößen verglichen werden. Abbildung 7.5 zeigt die dimensionslose Druckschwankung p'/p_0 zum Zeitpunkt $t/\Delta t = 2 \cdot 10^4$ in Form mehrerer Isokonturflächen. Dabei lässt sich feststellen, dass das Lösungsfeld der nichtlinearen PENNE mit den Ergebnissen der konventionellen LEE praktisch identisch ist. Dies ist auch nicht weiter verwunderlich, da nichtlineare Effekte bei einer Anfangsstörung von 10Pa weitestgehend vernachlässigbar sind.



(a)



(b)



(c)

Abbildung 7.5: Vergleich der Isokonturflächen der dimensionslosen Druckschwankung p'/p_0 zum Zeitpunkt $t/\Delta t = 2 \cdot 10^4$: Modifizierte LEE (a), nichtlineare PENNE (b), konventionelle LEE (c).

Demgegenüber erkennt man zwischen den modifizierten und den konventionellen LEE leichte Unterschiede, wobei sich letztere vor allem auf den Bereich der kritisch durchströmten Lavaldüse erstrecken. Betrachtet man das mittlere Strömungsfeld aus Abbildung 7.3, so sind im Einflussbereich der Düse die größten Strömungsgradienten anzutreffen. Der zylindrische Teil der Brennkammer ist hingegen weitestgehend gradientenfrei. Da der Einfluss der Gradienten innerhalb der modifizierten LEE nicht berücksichtigt ist, wird sofort klar, weshalb die erwähnten Unterschiede vor allem im Bereich der Lavaldüse in Erscheinung treten.

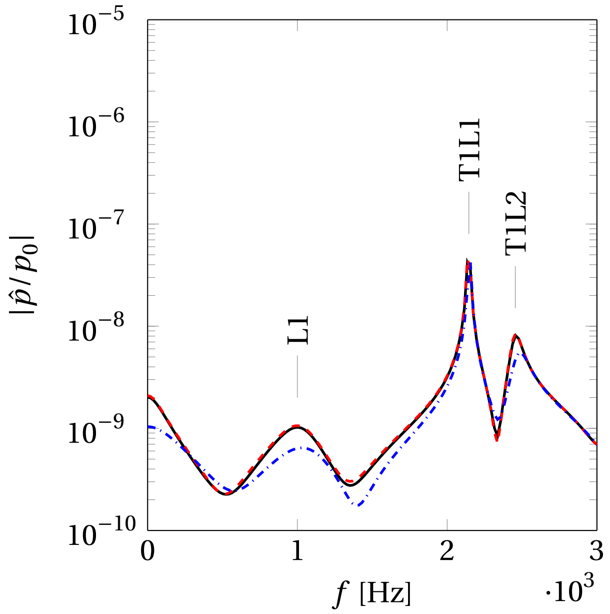


Abbildung 7.6: Vergleich der Amplitudenspektren der dimensionslosen Druckstörung $p'/\varrho_0 c_0^2$: Modifizierte LEE (-·-·-), nichtlineare PENNE (- - -), konventionelle LEE (——).

Abbildung 7.6 zeigt das Amplitudenspektrum der Druckschwankung p'/p_0. Die Zeitreihe zur Berechnung des Spektrums wurde dabei an einen Monitorpunkt mit den Koordinaten $x_i = (-0.178\text{m}, 0.045\text{m}, 0)^T$ aufgezeichnet. Der Monitorpunkt befindet sich damit im äußeren Bereich des Rechengebiets in unmittelbarer Nähe zur Einströmfläche und besitzt die selbe Umfangsposition wie die initiale Druckstörung zur Anregung akustischer Schwingungen. Damit ist gewährleistet, dass das aufgezeichnete Drucksignal spektrale Anteile aller dominanten Transversalmoden enthält [88].

Wie Abbildung 7.6 erkennen lässt, beobachtet man im Frequenzbereich bis 3000Hz drei charakteristische Resonanzüberhöhungen. Das Maximum der ersten Überhöhung korrespondiert mit einer Oszillationsfrequenz von ca. 1000Hz und kann der ersten longitudinalen Modellbrennkammermode (L1) zugeordnet werden. Der Resonanzpeak ist hier sehr breit ausgeprägt, was im Allgemeinen auf eine hohe Dämpfung schließen lässt. Die dominanteste spektrale Komponente innerhalb des betrachteten Frequenzbereichs wird hingegen durch die erste Transversalmode (T1L1) verursacht. Die Resonanzfrequenz dieser Mode beträgt ca. 2150Hz. Mit dem Auftreten der ersten Transversalmode ist auch die Entstehung von Schwingungszuständen mit höherem Longitudinalanteil möglich. Der nächsthöhere dieser Zustände wird durch die T1L2-Mode repräsentiert und besitzt gemäß Abbildung 7.6 eine Oszillationsfrequenz von ungefähr 2450Hz. Für Frequenzen jenseits der 3000Hz-Grenze ergeben sich weitere Resonanzpeaks. Allerdings wurden die zugehörigen Moden im Rahmen der experimentellen Untersuchungen nicht weiter betrachtet. Aus diesem Grund soll die Auswertung der Simulationsergebnisse ebenfalls auf den in Abbildung 7.6 gezeigten Frequenzbereich beschränkt bleiben.

Vergleicht man die Spektren der unterschiedlichen Modellgleichungen miteinander, so fällt zunächst auf, dass die konventionellen LEE sowie die nichtlinearen PENNE zu weitestgehend identischen Ergebnissen führen. Im Vergleich dazu erhält man auf Basis der modifizierten LEE ein leicht unterschiedliches Resultat. Mitunter fällt auf, dass die Lage der Resonanzpeaks gegenüber den konventionellen LEE bzw. den nichtlinearen PENNE leicht verschoben ist. Besonders deutlich werden dahingehende Unterschiede im Falle der L1-Mode. Die Resonanzfrequenz ist unter Verwendung der modifizierten LEE um ca. 30Hz zu größeren Werten hin verschoben. Ein ähnliches Verhalten - wenn auch nicht ganz so ausgeprägt - findet sich für die T1L2 Mode. Anscheinend wirkt sich die Modifikation der LEE vor allem auf die longitudinale Störungsausbreitung aus. Diese wird im Gegensatz zur transversalen Komponente sehr stark durch die akustischen Eigenschaften der Düse beeinflusst. Letztere sind aufgrund der vernachlässigten Gradiententerme jedoch nur vereinfacht innerhalb der modifizierten LEE abgebildet.

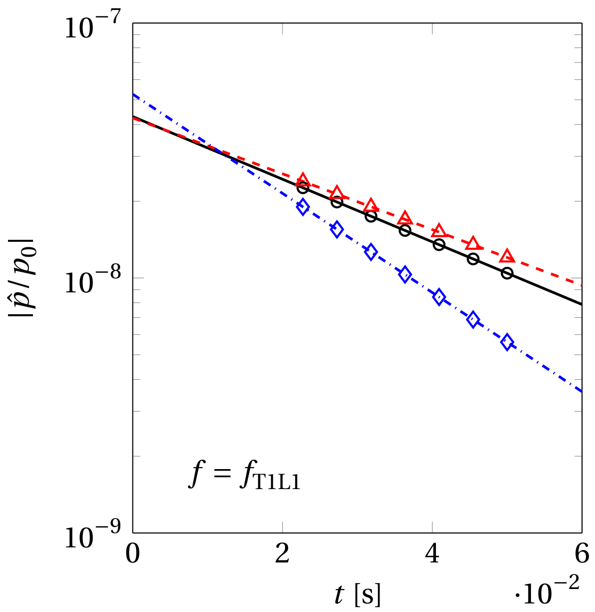


Abbildung 7.7: Vergleich des akustischen Dämpfungsverhaltens am Beispiel der T1L1-Mode für Gitter 3: Modifizierte LEE (-·-·-), nichtlineare PENNE (- - -), konventionelle LEE (——).

Im Hinblick auf eine Analyse thermoakustischer Phänomene ist das zeitliche Abklingverhalten der unterschiedlichen Modellbrennkammermoden von besonderer Bedeutung. Um dieses aus den Simulationsdaten zu extrahieren, kann auf eine zeitaufgelöste diskrete Fouriertransformation zurückgegriffen werden [65, 101]. Dabei wird nicht wie zuvor die gesamte aufgezeichnete Zeitreihe fouriertransformiert, sondern lediglich kurze zeitversetzte Ausschnitte bzw. Fenster. Die Transformation wird dabei mit der jeweiligen Oszillationsfrequenz der Moden durchgeführt. Schließlich erhält man die zeitliche Entwicklung der modalen Komponenten in Form mehrerer Stützstellen. Werden diese in halblogarithmischer Darstellung aufgetragen, so lassen sich aus der Steigung die exponentiellen Abklingraten α ablesen.

Abbildung 7.7 zeigt das hier beschriebene Vorgehen am Beispiel der T1L1-Mode. Demnach ergeben sich für die konventionellen LEE und die nichtlinearen PENNE sehr ähnliche Abklingverhalten. Die modifizierten LEE hingegen führen zu einer spürbar erhöhten Dämpfung. Aufgrund der vernachlässigten Gradiententerme ist davon auszugehen, dass für die modifizierten LEE auch der Fluss akustischer Energie durch die Düse spürbar verändert ist. Wie zu Beginn von Abschnitt 7.2 erläutert wurde, bestimmt der akustische Fluss durch die Düse das Dämpfungsverhalten des hier betrachteten Testfalls. Damit wird sofort klar, weshalb sich für die modifizierten LEE ein unterschiedliches Abklingverhalten beobachten lässt.

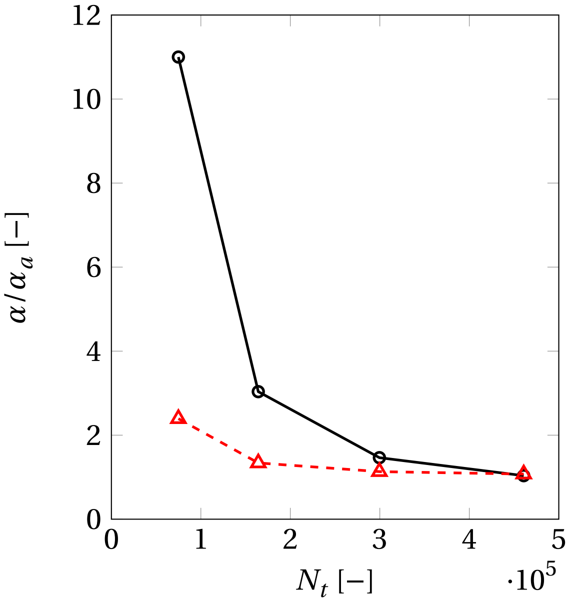


Abbildung 7.8: Konvergenzverhalten der Dämpfungsrate (PENNE) in Abhängigkeit der Gitterknotenanzahl N_t: T1L1-Mode (—o—), T1L2-Mode (-△-).

Im Gegensatz zu den Eigenfrequenzen handelt es sich bei den Dämpfungsraten um Ergebnisgrößen, die in erheblichem Maße durch die spezifischen Eigenschaften des numerischen Verfahrens und das verwendete Rechengitter beeinflusst werden. Morgenweck hat dazu in [88] eine detaillierte Studie durchgeführt. Er konnte dabei zeigen, dass mitunter eine sehr hohe Gitterauflösung erforderlich ist, um den numerischen Dämpfungsanteil auf ein akzeptables Maß zu reduzieren. Dieser Arbeit liegt ein nochmals überarbeitetes Lösungsverfahren zu Grunde. Abbildung 7.8 zeigt das damit erzielte Konvergenzverhalten, wobei α_a die entsprechende Dämpfung auf Basis der halbanalytischen Referenzlösung bezeichnet.

Für die T1L1-Mode fällt die berechnete Dämpfung im Bereich $N_t < 3\cdot10^5$ stark ab, um sich anschließend deutlich verlangsamt der halbanalytischen Referenzlösung anzunähern. Für Gitter 4 stimmen beide Lösungen schließlich mit einer Abweichung von unter 4% überein. Im Vergleich dazu erhält Morgenweck bei einem Gitter mit annähernd doppelt so hoher Auflösung eine Abweichung von 25%. Dies zeigt, dass das hier verwendete Lösungsverfahren nochmals eine spürbare Verbesserung mit sich bringt.

Deutlich weniger ausgeprägt ist das Konvergenzverhalten der T1L2-Mode. Ein konvergierter Zustand wird hier bereits bei einer geringeren Knotenanzahl erreicht. Der Unterschied zur Referenzlösung beträgt für Gitter 4 weniger als 8%. Die Ursache für dieses unterschiedliche Konvergenzverhalten kann mit hoher Wahrscheinlichkeit auf den gleichbleibenden Gitterabstand in axialer Richtung zurückgeführt werden, der innerhalb der verwendeten Gitter konstant gehalten wurde (Tabelle 7.2).

	Resonanzfrequenz	Dämpfung
Halbanalytisch[30], LEE (f-Bereich)	2141Hz	-28s^{-1}
PIANO, PENNE	2140Hz	-29s^{-1}
PIANO, LEE	2140Hz	-31s^{-1}
PIANO, LEE modifiziert	2155Hz	-52s^{-1}

Tabelle 7.3: Resonanzfrequenz und Dämfungsrate der T1L1 Mode für Gitter 4 im Vergleich zwischen halbanalytischer Referenzlösung [73] und numerischer Simulation mit PIANO unter Verwendung unterschiedlicher Grundgleichungssätze.

Tabelle 7.3 gibt am Beispiel der T1L1 Mode einen Überblick über die erzielten Ergebnisse. Verwendet man die nichtlinearen PENNE Grundgleichungen bzw. die konventionellen LEE, so lässt sich sowohl für die numerisch berechneten Resonanzfrequenzen, als auch für die dazugehörigen Dämpfungswerte eine sehr gute Übereinstimmung mit den Ergebnissen der halbanalytischen Referenzlösung feststellen. Für die modifizierten LEE hingegen ergeben sich zum Teil signifikante Abweichungen.

7.3 Akustische Verluste des Gesamtaufbaus

Im letzten Abschnitt wurde unter anderem deutlich, dass die Dämpfung der dominierenden T1L1-Mode relativ geringe Werte annimmt. Experimentelle Untersuchungen von Kathan [68] legen allerdings nahe, dass der Gesamtaufbau eine erheblich größere Dämpfungscharakteristik besitzt.

Bisher konnte der Gesamtaufbau inklusive der Lochblechplatte nur sehr eingeschränkt modelliert werden. Erste Ansätze die Lochblechplatte zu berücksichtigen basieren auf der halbanalytischen Lösung aus Abschnitt 7.2.1 [73]. Darüber hinaus konnte Morgenweck [88] unter Verwendung der Impedanzrandbedingung aus Abschnitt 3.5.4 ebenfalls die Wirkung der stromaufseitigen Randbedingung abbilden. Beide Ansätze benötigen allerdings einen zuvor experimentell ermittelten Impedanzverlauf. Hier wurde in der Vergangenheit auf Messdaten von Kathan [68] zurückgegriffen.

[30] Die hier angegebenen Werte zeigen leichte Unterschiede mit den Ergebnissen aus [73]. Die Ursache dafür ist eine angepasste Schallgeschwindigkeit $\bar{c}$. In [73] wird für $\bar{c}$ ein Wert von 330m/s angesetzt. Für $T_c = 290K$, wie hier angenommen, ergibt sich jedoch ein Wert von 341m/s.

Im Folgenden wird erstmalig der Versuch unternommenen, den Gesamtaufbau in PIANO vollständig zu modellieren. Auf die Zuhilfenahme externer Messdaten soll dabei bewusst verzichtet werden. Stattdessen wird der Ansatz aus Abschnitt 4.2 zur akustischen Modellierung spezieller Verluste herangezogen. Das Rechengebiet umfasst dabei den bereits im vorherigen Abschnitt untersuchten Bereich der Modellbrennkammer. Neu hinzu kommt jedoch die Vorkammer mit Lochblechplatte. Weiter stromauf liegende Komponenten können vernachlässigt werden, da die Zuströmung in die Vorkammer über einen kritisch durchströmten Ringspalt erfolgt. Der stromauf gerichtete akustische Fluss nimmt in diesem Fall den Wert Null an, wodurch sich der Ringspalt als energetisch neutraler Einlass auffassen lässt.

7.3.1 Grundströmung

Wie im vorherigen Abschnitt ist zunächst die Bestimmung der Grundströmung erforderlich. Dabei ist zu beachten, dass die Zuströmung in die Vorkammer radial erfolgt. Die geometrischen Verhältnisse zeigen zwar eine ausgeprägte Axialsymmetrie (mit Ausnahme der Sirenenanregung), dennoch ist keineswegs mit einer axialsymmetrischen Grundströmung zu rechnen. Erschwerend kommt hinzu, dass die Zuströmung aufgrund der vorherrschenden Betriebsbedingungen im Überschall erfolgt. Es ergeben sich daher mit großer Wahrscheinlichkeit lokal äußerst komplexe Strömungsverhältnisse[31].

Um damit einhergehende Schwierigkeiten zu vermeiden, wird die Strömung innerhalb der Vorkammer vereinfacht modelliert. Anstelle einer radialen Zuströmung von außen erfolgt die Einbringung des Luftmassenstroms durch eine künstliche volumetrische Massenquelle der Form

$$S_\varrho(x_i) = A_\varrho \left[1 + \tanh\left(\frac{x_h - x}{\delta_h}\right)\right] , \tag{7.2}$$

mit den Parametern $A_\varrho = 10800\,\mathrm{kg\,m^{-3}s^{-1}}$, $x_h = -0.204\,\mathrm{m}$ und $\delta_h = 1 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$. x_h definiert dabei die axiale Ausdehnung der Zuströmung und ist bezogen auf den Koordinatenursprung im engsten Querschnitt der Lavaldüse. Das Ergebnis dieser Modellierung ist ein eindimensionales Strömungsfeld innerhalb der Vorkammer. Die stromaufseitige Grundplatte ist im Einklang mit den realen Strömungsverhältnissen nicht überströmt. Stattdessen bildet sich ein axialer Geschwindigkeitsgradient über die Zuströmhöhe h aus.

Um den Einfluss des Lochblechs auf die Grundströmung zu berücksichtigen, wird analog zur akustischen Modellierung ein poröses Modellmedium verwendet. Der dafür benötigte Widerstandskoeffizent in Strömungsrichtung

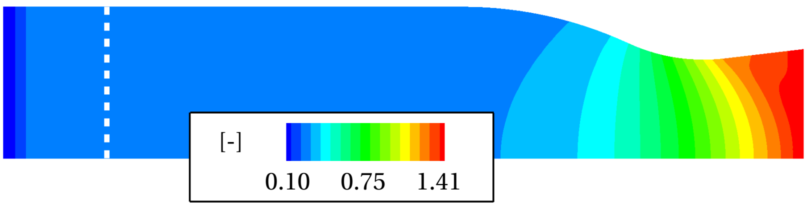
$$b_s = \frac{\Delta p}{u^2 d} , \tag{7.3}$$

[31] Versuche, die Grundströmung mithilfe einer dreidimensionalen CFD Simulation zu bestimmen, legen nahe, dass sich innerhalb der Vorkammer lokale Überschallgebiete mit komplexen Stoßsystemen ausbilden.

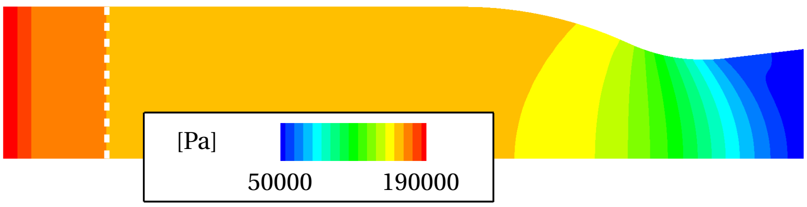
wird aus der gegebenen Druckdifferenz zwischen der Vorkammer und der Modellbrennkammer $\Delta p = p_v - p_c$, der Lochblechdicke d sowie der Strömungsgeschwindigkeit $u = 80\,\mathrm{m/s}$ bestimmt. Lineare bzw. viskose Verluste werden hingegen vernachlässigt.

Alle übrigen Modellierungsannahmen entsprechen im Wesentlichen den Annahmen aus Abschnitt 7.2.2. Aufgrund der getroffenen Vereinfachungen ist es wiederum möglich, ein axialsymmetrisches Rechengebiet zu verwenden. Der Einfluss viskoser und turbulenter Effekte ist wie zuvor vernachlässigt.

Abbildung 7.9 zeigt die Kontur der Machzahl sowie des statischen Drucks innerhalb des Gesamtaufbaus. Die Strömungsverhältnisse stromab des Lochblechs sind praktisch identisch mit der Grundströmungslösung aus Abschnitt 7.2.2. Die Machzahl ist über das Lochblech hinweg konstant. Dies liegt daran, dass sich die hier verwendete Machzahl auf die mittlere Strömungsgeschwindigkeit innerhalb des porösen Modellmediums bezieht.



(a)



(b)

Abbildung 7.9: Grundströmung innerhalb des Gesamtaufbaus, bestehend aus Vorkammer und nachgeschalteter Modellbrennkammer: Machzahlkontur (a), Kontur des statischen Drucks (b).

7.3.2 Akustische Modellierung der Lochblechplatte

Die akustische Wirkung des Lochblechs soll durch den Ansatz aus Abschnitt 4.2 abgebildet werden. Dabei stellt sich zunächst die Frage, inwieweit die erforderliche Voraussetzung geringer Mach- und Helmholtzzahlen erfüllt ist. Die charakteristische Helmholtzzahl für die hier betrachtete Problemstellung lässt sich in erster Näherung aus der Lochblechdicke d und dem Durchmesser der Modellbrennkammer D_c abschätzen, d.h. $He = 0.5d/D_c = 0.01$. Zwar wurde hier die geometrische Ausdehnung des hydrodynamischen Interaktionsbereichs hinter der Lochblechplatte vernachlässigt. Nichtsdestotrotz kann die Vorraussetzung einer geringen Helmholtzzahl als ausreichend erfüllt angesehen werden. Die Machzahl im zylindrischen Bereich der Modellbrennkammer beträgt im vorliegenden Anwendungsfall 0.24. In der Literatur wird als Obergrenze für inkompressible Betrachtungsweisen häufig eine Machzahl von 0.3 genannt. Damit liegt auch hier die erforderliche Rahmenbedingung für eine erfolgreiche Anwendung der Modellierung vor.

Gemäß Abschnitt 4.2 werden die akustischen Eigenschaften des Lochblechs durch die Verlusttensoren A_{ij} und B_{ij} definiert. Viskose Verluste werden hier allerdings als vernachlässigbar gering angesehen, wodurch $A_{ij} = 0$ resultiert. Darüber hinaus wird ebenso ein potentieller Trägheitseinfluss vernachlässigt, d.h $m_p = 0$. Zur Definition von B_{ij} sind in PIANO die beiden Koeffizienten b_s und b_t sowie die Strömungsrichtung innerhalb des verlustbehafteten Bereichs $s_i = (1,0,0)^T$ erforderlich. Für b_s gilt dabei der Zusammenhang 7.3. Für b_t wird hingegen ein Wert der Größenordnung $b_t/b_s \approx 10$ gewählt, wodurch die Störungsausbreitung in Querrichtung weitestgehend unterbunden wird.

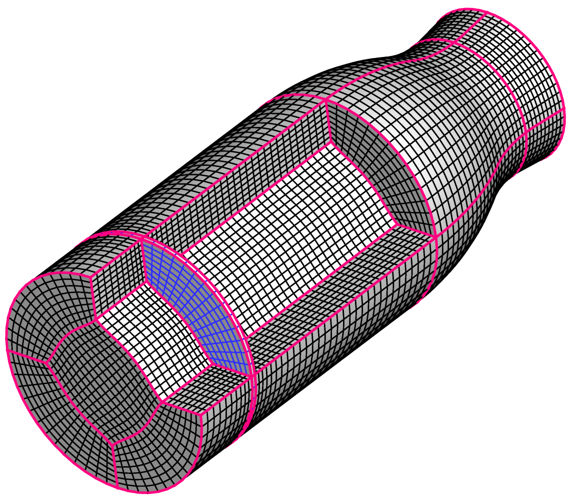


Abbildung 7.10: Struktur des verwendeten Rechengitters zur numerischen Simulation des Gesamtaufbaus. Zur besseren Darstellung wurden einzelne Blöcke entfernt und die Knotendichte reduziert.

Abbildung 7.10 zeigt die Struktur des akustischen Rechengitters. Wie bereits in den vorherigen Simulationen ist das Rechengebiet auch hier durch ein Gitter mit globaler O-Struktur vernetzt. Das Volumen der Lochblechplatte wird durch fünf zusätzliche Blöcke repräsentiert, die wiederum dazu benutzt werden, den verlustbehafteten Bereich innerhalb des Rechengebiets zu definieren. Die zusätzlichen Blöcke zur Abbildung der Lochblechplatte besitzen jeweils 7 Knoten in axialer Richtung. Dieser Wert entspricht der Mindestknotenanzahl[32] für einzelne Blöcke in PIANO. Lokal ergibt sich dadurch eine deutlich erhöhte Knotendichte. Um eine möglichst ungestörte Ausbreitung akustischer Wellen zu ermöglichen, ist die Knotendichte im Übergangsbereich durch eine entsprechende Streckungsfunktion an die Knoten-

[32] Die Mindestknotenanzahl für einzelne Blöcke in PIANO folgt aus dem verwendeten finite Differenzen Schema mit 7 Stützstellen.

dichte im umliegenden Rechengebiet angepasst. Das Rechengitter umfasst insgesamt 489216 Knoten. Abgesehen von zusätzlichen Blöcken zur Vernetzung der Vorkammer sowie der Lochblechplatte besitzt das hier verwendetet Rechengitter ähnliche Eigenschaften wie Gitter 3 aus Abschnitt 7.2.3.

Zur Anregung der akustischen Brennkammermoden wird die Simulation wiederum mit einer pulsförmigen Druckstörung initialisiert. Zwar werden im Rahmen der Lochblechmodellierung auch nichtlineare Verluste berücksichtigt. Die gewählte Stärke der initialen Druckstörung von 10Pa ist aber aller Voraussicht nach zu gering, um ein spürbar nichtlineares Verhalten auszulösen.

7.3.3 Diskussion der Simulationsergebnisse

Zunächst soll die Wirkung der Lochblechplatte anhand instantaner Störgrößenverteilungen beurteilt werden. Abbildung 7.11 zeigt die dimensionlose Druckschwankung p'/p_0 für $t/\Delta t = 1 \cdot 10^3$, dem Zeitpunkt des erstmaligen Auftreffens akustischer Störungen auf das Lochblech. Man erkennt, dass die sich ausbreitenden Druckstörungen im Einflussbereich des Lochblechs spürbar verformt werden und nur in stark abgeschwächter Form in die Vorkammer eindringen. Eine signifikante, durch die Lochblechplatte verursachte Wellenreflexion, ist in Abbildung 7.11 jedoch nicht zu beobachten.

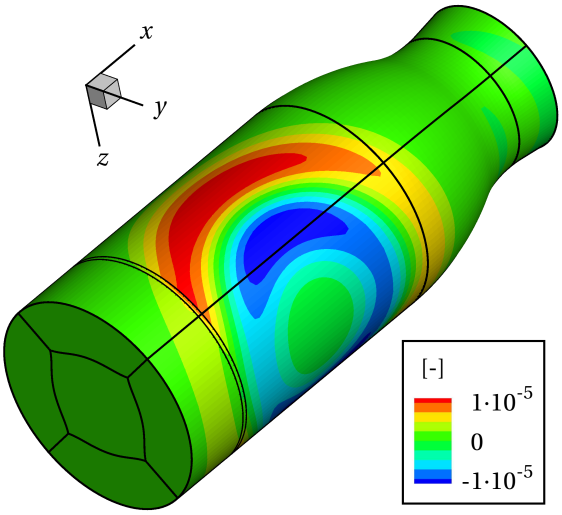


Abbildung 7.11: Instantane Verteilung der dimensionslosen Druckschwankung p'/p_0 zum Zeitpunkt $t/\Delta t = 1 \cdot 10^3$.

Abbildung 7.12 zeigt die Verteilung der dimensionslosen Geschwindigkeitsstörungen innerhalb der xy-Ebene zum Zeitpunkt $t/\Delta t = 3 \cdot 10^3$. Dargestellt ist dabei sowohl die Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung u'/c_0, als auch die zugehörige Komponente in y-Richtung v'/c_0. Man erkennt, dass beide Geschwindigkeiten aufgrund des Lochblechs mehr oder weniger stark beeinflusst werden. Besonders hervorzuheben ist in diesem Zusammenhang die verschwindende y-Komponente innerhalb des Lochblechs. Außerhalb ist v'/c_0 hingegen ungleich Null. u'/c_0 wird infolge der Lochblechwirkung primär abgeschwächt. Im Gegensatz zur y-Komponente verschwindet u'/c_0 innerhalb des Lochblechs jedoch nicht. Damit gibt die Modellierung das reale akustische Verhalten prinzipiell korrekt wieder.

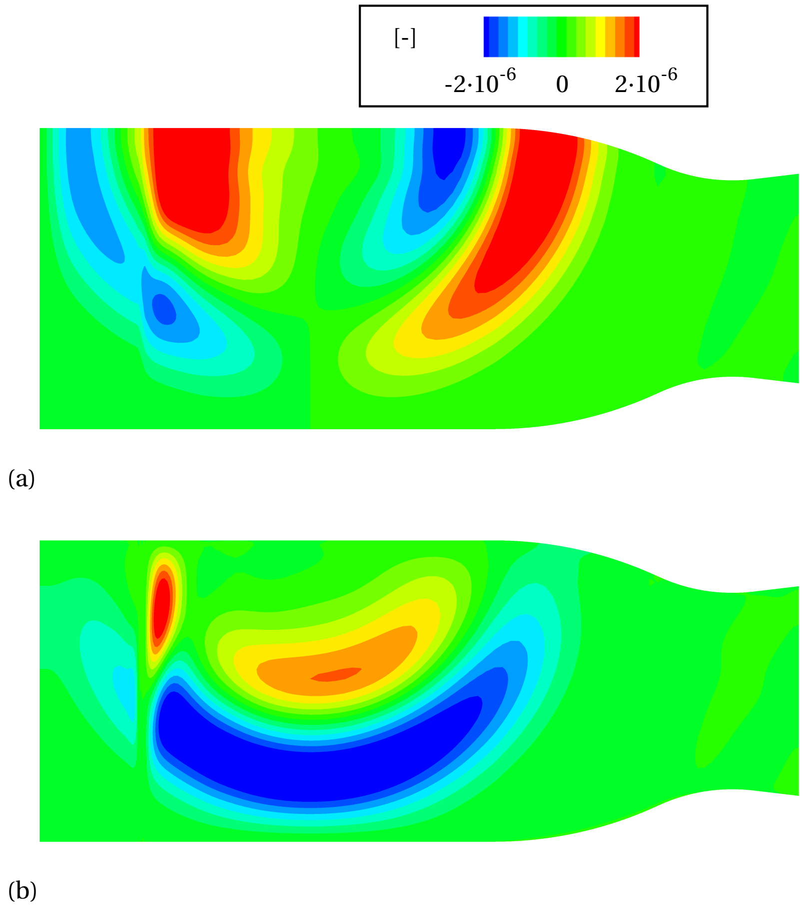


Abbildung 7.12: Instantane Verteilung der dimensionslosen Geschwindigkeitsstörungen innerhalb der xy-Ebene zum Zeitpunkt $t/\Delta t = 3 \cdot 10^3$: Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung u'/c_0 (a), Geschwindigkeitskomponente in y-Richtung v'/c_0 (b).

Anders als für die Modellbrennkammer mit energieneutraler Einlassradbedingung, besteht für das Gesamtsystem mit Vorkammer und Lochblechplatte die Möglichkeit, die Simulationsergebnisse auch mit realen Messdaten zu vergleichen. Abbildung 7.13 zeigt das mit PIANO berechnete Amplitudenspektrum der dimensionslosen Druckstörung p'/p_0 am Ort $x_i = (-0.178\text{m}, 0.045\text{m}, 0)^T$. Im Frequenzbereich bis 3000Hz fallen dabei wieder drei charakteristische Überhöhungen auf. Die erste relativ schwache Überhöhung im Bereich von ca. 1000Hz kann einer stark gedämpften L1 Mode zugeordnet werden. Die übermäßige Dämpfung ist wahrscheinlich auch die Ursache, weshalb eine L1 Mode in den experimentellen Untersuchungen von Kathan nicht beobachtet werden konnte. Aufgrund dieses Umstands ist für die L1-Mode ein Vergleich zwischen Experiment und Numerik an dieser Stelle nicht möglich.

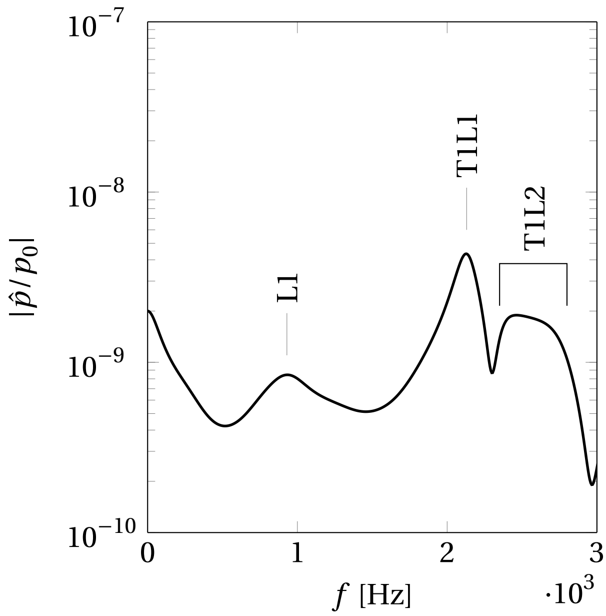


Abbildung 7.13: Amplitudenspektrum der dimensionslosen Druckstörung p'/p_0 für den Gesamtaufbau unter Verwendung der nichtlinearen PENNE Erhaltungsgleichungen.

Das markanteste Resonanzverhalten innerhalb des gezeigten Amplitudenspektrums weist die T1L1 Mode auf. Die zugehörige Schwingungsfrequenz ist klar indentifizierbar und beträgt 2140Hz. Kathan gibt für diese Mode eine gemessene Frequenz von 2160Hz an. Die Abweichung zwischen Experiment und Simulation beträgt in diesem Fall weniger als 1%. Gegenüber Abschnitt 7.2.4 ist die berechnete T1L1 Resonanzfrequenz des Gesamtaufbaus damit unverändert.

Entsprechend dem Vorgehen aus Abschnitt 7.2.4 soll im Folgenden die exponentielle Dämpfungsrate der T1L1 Mode bestimmt werden. Abbildung 7.14 zeigt den zeitlichen Verlauf der spektralen T1L1 Komponente. Aus der Steigung der Ausgleichsgerade lässt sich dabei eine Dämpfung von -488s^{-1} ablesen. Darüber hinaus beinhaltet die Darstallung auch das experimentell ermittelte Abklingverhalten. Für Letzteres gibt Kathan in [68] eine Dämfungskonstante von -573s^{-1} an, wobei dieser Wert aus dem Abklingverhalten einer durch Sirenenanregung angefachten T1L1 Mode bestimmt wurde. Damit beträgt die Abweichung zwischen Experiment und Simulation weniger als 15%. Im Hinblick auf die generelle Schwierigkeit einer quantitativ-korrekten Berechnung bzw. Modellierung akustischer Dämpfung ist dieser Wert als gut einzuschätzen. Eine vergleichende Zusammenstellung der Ergebnisse für die T1L1 Mode findet sich in Tabelle 7.4.

	Resonanzfrequenz	Dämpfung
Experiment (mit Sirenenanregung)	2160Hz	-573s^{-1}
PIANO	2140Hz	-488s^{-1}

Tabelle 7.4: Resonanzfrequenz und Dämfungsrate der T1L1 Mode im Vergleich zwischen Experiment und numerischer Simulation mit PIANO.

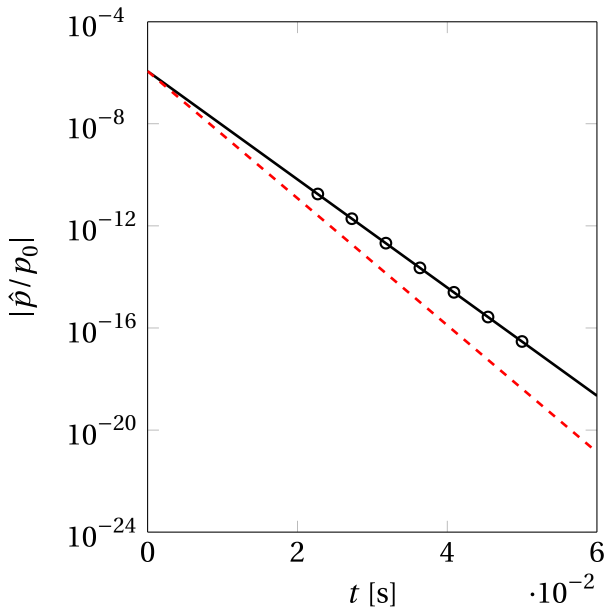


Abbildung 7.14: Abklingverhalten der T1L1 Mode für den Gesamtaufbau unter Verwendung der nichtlinearen PENNE Erhaltungsgleichungen (——) und von Kathan [68] experimentell bestimmtes Abklingverhalten (- - -).

Für Frequenzen jenseits der T1L1 Mode erkennt man eine weitere Überhöhung im Amplitudenspektrum. Diese erstreckt sich über den Bereich zwischen 2400Hz und 2800Hz. Ein Vergleich mit den Ergebnissen aus Abschnitt 7.2.4 legt nahe, dass es sich hier um den stark gedämpften Resonanzpeak der T1L2 Mode handelt. Analog zur L1-Mode, ist die Dämpfung auch hier scheinbar zu groß, um eine spürbare Überhöhung im experimentell ermittelten Spektrum zu verursachen. Eine weitere Validierung der Simulation anhand dieser Mode ist deshalb nicht möglich.

Im Rahmen der bisher durchgeführten Ansätze [73, 88] zur Modellierung des Gesamtsystems wurde das akustische Verhalten der Lochblechplatte jeweils durch das von Kathan experimentell ermittelte Reflexionsverhalten abgebildet. Dieses Vorgehen wurde im Rahmen der hier vorgestellten Modellierung aufgegeben. Das Reflexionsverhalten der Lochblechplatte ist damit nicht länger eine benötigte Inputgröße. Stattdessen werden die zur Verfügung stehenden Messdaten dazu genutzt, die Qualität der Simulation und die Leistungsfähigkeit der akustischen Verlustmodellierung zu bewerten.

Im Folgenden soll das Reflexionsverhalten der Lochblechplatte untersucht werden. Voraussetzung dafür ist zunächst eine präzise Bestimmung der akustischen Störgrößen am Übergang zwischen Modellbrennkammer und der Lochblechplatte. Analog zu Abschnitt 6.2.2 sind dazu insgesamt 12 Monitorpunkte im Rechengebiet vorgesehen, welche sich gleichmäßig verteilt auf einem konzentrischen Kreis mit Radius $r = 0.045$m befinden. Um eine aus numerischen Gesichtspunkten eher problematische Auswertung der Störgrößen an Blockgrenzen zu vermeiden, ist die axiale Position der Monitorpunkte um $2 \cdot 10^{-3}$m gegenüber der Schnittebene zwischen Lochblechplatte und Modellbrennkammer in Richtung der Düse verschoben. Dabei besteht prinzipiell die Gefahr einer Verfälschung des Reflexionsverhaltens [88]. Im hier vorliegenden Fall ist die Verschiebung der Bezugsebene jedoch sehr gering, weshalb die erwarteten Auswirkungen auf das Ergebnis als eher vernachlässigbar angesehen werden.

Aus den Messungen von Kathan geht hervor, dass das Reflexionsverhalten der Lochblechplatte nicht modenunabhängig ist [68]. Demnach erhält man für eine longitudinale Wellenausbreitung andere akustische Eigenschaften als für eine Ausbreitung tangentialer Schwingungsmoden. Zur Validierung der Simulationsergebnisse bietet sich vor allem die Betrachtung der longitudinalen Reflexionseigenschaften an. Beschränkt man sich auf den Frequenzbereich unterhalb der radialen cut-on Frequenz ($f_{R1} \approx 4300$Hz), so lässt sich der longitudinale Anteil der akustischen Störungen relativ einfach durch eine arithmetische Mittelung aller Monitorpunktsignale extrahieren. Dieser Ansatz wurde bereits in Abschnitt 6.2.2 erfolgreich eingesetzt und findet auch hier erneut Anwendung.

Zur Charakterisierung des Lochblechs wird der Reflexionsfaktor $\hat{R}$ vewendet. Dieser kann aus der komplexen Druckamplitude $\hat{p}$ sowie der komplexen Geschwindigkeitsamplitude normal zur Lochblechebene $\hat{u}_i n_i = \hat{u}$ wie folgt berechnet werden:

$$\hat{R} = \frac{\hat{f}}{\hat{g}} = \frac{\hat{p} + \bar{\varrho}\bar{c}\,\hat{u}}{\hat{p} - \bar{\varrho}\bar{c}\,\hat{u}} \,, \tag{7.4}$$

wobei sich die komplexen Druck- und Geschwindigkeitsamplituden $\hat{p}$ und $\hat{u}$ jeweils durch eine Anwendung der diskreten Fourier Transformation (DFT) auf die arithmetisch gemittelten Zeitreihen der Monitorpunkte ergeben.

Abbildung 7.15 zeigt den Betrag sowie die Phase des berechneten Reflexionsfaktors. Zusätzlich enthält die Abbildung das experimentell bestimmte Reflexionsverhalten. Betrachtet man den Betrag des Reflexionsfaktors, so stellt man eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Experiment und Simulation fest. Demnach fällt der Reflexionsfaktor zunächst auf ein Minimum im Bereich von 2500Hz ab, um anschließend wieder anzusteigen. Ein anderes Bild ergibt sich hingegen für den Phasengang des Reflexionsfaktors. Hier lassen sich deutliche Unterschiede zwischen Experiment und Simulation erkennen. Die berechnete Phase ist hier zunächst linear fallend, was auf einen konstanten Zeitverzug zwischen auftreffender und reflektierter Welle schließen lässt. Der experimentell gemessene Verlauf hingegen zeigt eine über den betrachteten Frequenzbereich ansteigende Phase[33].

Um diesen Sachverhalt besser zu beleuchten, wird im Folgenden die Annahme getroffen, dass die Reflexion der akustischen Wellen an der Grundplatte der Vorkammer erfolgt. Dies ist durchaus naheliegend, da die Wellenlänge der akustischen Störungen groß gegenüber der charakteristischen Länge des Lochblechs ist. Unter dieser Voraussetzung lässt sich der erwartete Phasenverlauf des Reflexionsfaktors aus der theoretischen Laufzeit einer akustischen Welle innerhalb der Vorkammer abschätzen. Es gilt:

$$\frac{\arg(\hat{R})}{\pi} = -\frac{4 f L_v}{\bar{c}} \,, \tag{7.5}$$

wobei $\bar{c}$ die Schallgeschwindigkeit und L_v die Länge der Vorkammer bezeichnet (Abschnitt 7.1). Vergleicht man den Phasenverlauf entsprechend Gleichung 7.5 mit den numerischen

[33] Eine ansteigende Phase impliziert zwar eine negative Gruppenlaufzeit, bedeutet aber nicht zwangsläufig ein akausales Verhalten.

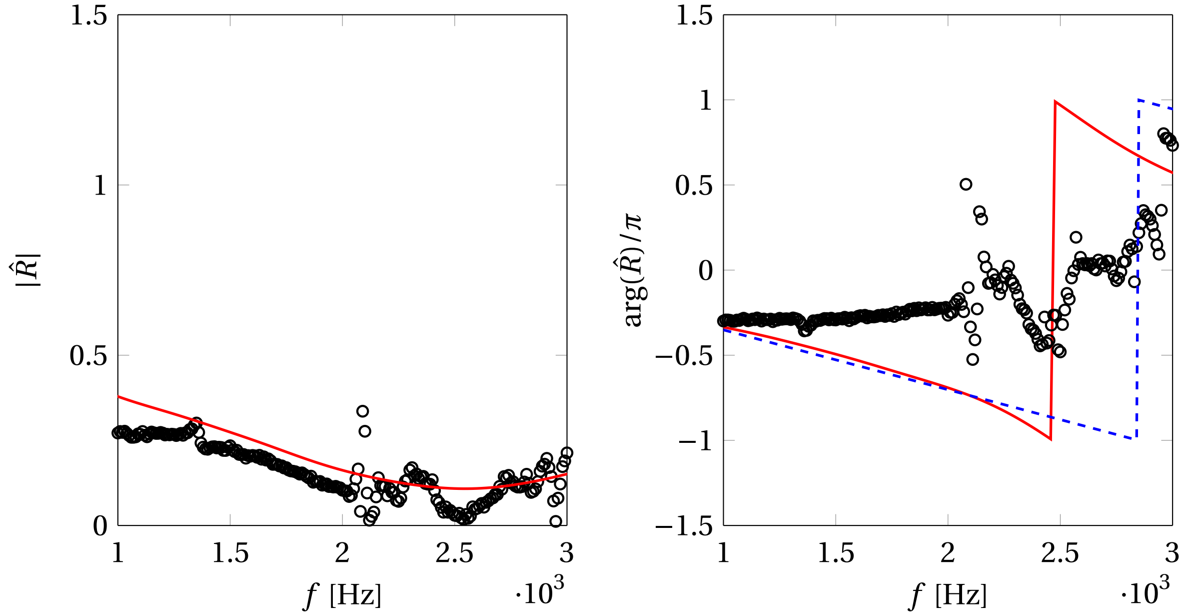


Abbildung 7.15: Vergleich des Lochblechreflexionsfaktors für longitudinale Störungsausbreitung: Messdaten Kathan [68] (○); Verlustmodellierung PIANO (——); erwarteter Phasenverlauf gemäß Gleichung 7.5 (- - -).

Simulationsergebnissen so wird klar, dass die getroffene Annahme auch durch die Simulationsergebnisse gestützt wird. Gleichzeitig wird aber auch die Plausibilität der Simulationsergebnisse bestätigt.

Nichtsdestotrotz zeigt der gemessene Phasenverlauf ein unterschiedliches Verhalten. Eine mögliche Erklärung lässt sich in der vereinfachten Modellierung der Grundströmung innerhalb der Vorkammer finden. Wie bereits erwähnt, ist in diesem Bereich des Versuchsaufbaus aufgrund der radialen Überschallzuströmung mit sehr komplexen Strömungsverhältnissen zu rechnen. Im Rahmen der vorgestellten Modellierung werden diese Zustände jedoch nicht im Detail abgebildet, sondern lediglich durch eine reine Axialströmung approximiert. Eine in der Realität auftretende inhomogene Geschwindigkeitsverteilung in radialer Richtung wird hingegen nicht berücksichtigt.

Die beobachteten Abweichungen könnten darüber hinaus auf vernachlässigte Trägheitseffekte ($m_p = 0$) zurückzuführen sein. Die Trägheitskräfte infolge der Fluidbeschleunigung innerhalb der Lochblechbohrungen sollten sich im Allgemeinen bevorzugt auf den Phasenverlauf und weniger auf die Dissipation auswirken. Diese würde mitunter die gute Übereinstimmung hinsichtlich des Betrags und die Abweichungen bzgl. des Phasenverlaufs erklären.

8 Simulation nichtlinearer Wellenausbreitung in Raketenschubkammern

Im letzten Kapitel wurde die Wellenausbreitung innerhalb einer kalt durchströmten Modellbrennkammer mit unterschiedlichen Grundgleichungssätzen untersucht. Dabei kamen auch die nichtlinearen PENNE Gleichungen zum Einsatz. Die Störungsamplituden der akustischen Wellen wurden aber bewusst sehr gering gehalten, um etwaige nichtlineare Effekte zu vermeiden. Diese Beschränkung soll im Folgenden fallen gelassen werden. Stattdessen werden die Störungsamplituden soweit erhöht, dass nichtlineare Effekte in ausgeprägter Form zu erwarten sind.

Als Testfall wird wiederum die kalt durchströmte Modellbrennkammer aus Kapitel 7 verwendet. Anders als zuvor liegen für den nichtlinearen Bereich jedoch weder Messdaten noch analytische bzw. halb-anlytische Referenzlösungen vor. Eine quantitative Validierung der numerischen Ergebnisse scheidet deshalb an dieser Stelle aus.

Der Fokus der nachfolgenden Ausführungen liegt auf der Untersuchung transversaler Brennkammermoden. Im Gegensatz zur rein longitudinalen Wellenausbreitung ist das nichtlineare Verhalten höherdimensionaler Moden noch relativ unerforscht. Der Umfang an Publikationen auf diesem Gebiet ist hier sehr gering. Ein nicht unerheblicher Grund dafür dürfte auf die erschwerten mathematischen Rahmenbedingungen zurückzuführen sein. Trotzdem wurden bereits früh Anstrengungen unternommen, den Charakter tangentialer Brennkammermoden im nichtlinearen Bereich theoretisch zu erschließen. Erwähnenswert sind in diesem Zusammenhang vor allem die Arbeiten von Maslen und Moore [82, 86].

Trotz des überschaubaren Umfangs von Arbeiten zu diesem Thema ist die Bedeutung nichtlinearer Wellenausbreitung für das Verständnis realer Verbrennungsinstabilitäten in Raketenbrennkammern als nicht unerheblich einzuschätzen. Es ist allgemein bekannt, dass das Auftreten hochfrequenter Verbrennungsschwingungen in Raketenbrennkammern überwiegend mit nichtlinearen Effekten verknüpft ist. Um letztere physikalisch richtig beschreiben und abbilden zu können, ist ein grundlegendes Verständnis über die Akustik der Brennkammer im nichtlinearen Amplitudenbereich unerlässlich.

8.1 Anwendungsbereich nichtlinearer Akustik

Bevor im Detail auf die Beschreibung und Diskussion des Testfalls eingegangen wird, soll zunächst der grundlegende Anwendungsbereich der nichtlinearen Theorie näher eingegrenzt werden. Es ist bekannt, dass der im Allgemeinen nichtlineare Zusammenhang zwischen Druck und Dichte $p = p(\varrho, s)$, wobei s die spezifische Entropie bezeichnet, zu einer Verzerrung akustischer Wellen führt. Die gängige Vorstellung geht hier von einer variablen Ausbreitungsgeschwindigkeit aus, die im Bereich erhöhten Drucks größere Werte annimmt als im Bereich verminderten Drucks. Dies hat zur Folge, dass sich eine zunächst harmonische Welle mit $p'(x=0,t) = A_p \sin(\omega t)$ zunehmend aufsteilt und schließlich in eine Stoßwelle übergeht. Die Entfernung, nach der sich erstmals eine unstetige Lösung ausbildet, wird als Stoßbildungsstrecke $x_\perp$ bezeichnet. Nach Blackstock et al. [12] gilt unter Vernachlässigung von Verlusten für die Stoßbildungsstrecke einer ebenen Welle

$$x_\perp = \frac{2\bar{\varrho}\bar{c}^3}{A_p \omega(\gamma+1)} \,, \tag{8.1}$$

wobei als akustisches Ausbreitungsmedium ein ideales Gas mit Isentropenexponenten γ angenommen wird. Gemäß Gleichung 8.1 ist $x_\perp$ indirekt proportional zum Produkt aus Amplitude A_p und Winkelgeschwindigkeit ω der Störungsquelle. Die Stoßbildungsstrecke nimmt demnach mit zunehmender Amplitude, aber auch mit steigender Schwingungsfrequenz immer mehr ab.

Gleichung 8.1 geht für $x < x_\perp$ von einem verlustfreien Verhalten aus. Unter realen Bedingungen ist die Ausbreitung akustischer Wellen jedoch mehr oder weniger starken Verlusten unterworfen. Letztere wirken dem nichtlinearen Verzerrungsvorgang der Wellen entgegen [76]. Neben Amplitude und Oszillationsfrequenz der Störungen besitzt demnach auch die akustische Dämpfung einen entscheidenden Einfluss auf die Bedeutung der nichtlinearen Effekte. Um diesen Einfluss zu quantifizieren, wird im Folgenden eine dimensionslose Kennzahl

$$\Gamma_t = \frac{1/t_\perp}{\alpha} \tag{8.2}$$

eingeführt, wobei $t_\perp = x_\perp/\bar{c}$ die Stoßbildungszeit und α die exponentielle Dämpfungsrate[34] charakterisiert. Auf Grundlage dieser Kennzahl lässt sich der Einfluss der nichtlinearen Effekte auf die Wellenausbreitung innerhalb einer Brennkammer abschätzen bzw. grob bewerten. Ist demnach $\Gamma_t << 1$, so verhindert die dominierende Dämpfung eine signifikante Ausprägung nichtlinearen Verhaltens. Für $\Gamma_t >> 1$ überwiegt hingegen der Einfluss der Nichtlinearität. Die akustische Dämpfung ist hier nicht mehr in der Lage eine Akkumulation der nichtlinearen Effekte zu unterbinden.

Die bisher beschriebene Wirkung nichtlinearer Wellenausbreitung basiert ausschließlich auf einer Selbstinteraktion rein akustischer Moden. Aus Abschnitt 2.2 ist jedoch bekannt, dass neben akustischen Moden auch Entropie- und Wirbelstärkemoden existieren. Beschränkt man sich ausschließlich auf lineare Dynamik, so ist eine Kopplung unterschiedlicher Moden nur über ein inhomogenes Grundströmungsfeld möglich (Abschnitt 2.2). Wird diese Einschränkung fallen gelassen, so ergeben sich aber auch direkte Kopplungsmöglichkeiten zwischen

[34] Die ursprüngliche Definition dieser Kennzahl - auch als Gol'dbergzahl [45] bezeichnet - basiert auf einer räumlichen Dämpfungsrate α_x mit der Einheit [m^{-1}], d.h. $\Gamma_x = x_\perp^{-1}/\alpha_x$. Für eine Anwendung in Raketenbrennkammern ist jedoch eine zeitliche Betrachtung zweckmäßiger, weshalb hier die Definition gemäß Gleichung 8.2 eingeführt wird.

den einzelnen Lösungsbestandteilen. Diese sind im Gegensatz zur linearen Dynamik jedoch nicht primär an ein gradientenbehaftetes Grundströmungsfeld gebunden. Die letztendliche Wirkung dieser nichtlinearen Interaktionsmechanismen und deren Bedeutung für die Wellenausbreitung in Raketenbrennkammern wurde bisher nur sehr begrenzt untersucht. Veröffentlichungen zu dieser Thematik beschränken sich im Wesentlichen auf die theoretischen Arbeiten von Chu und Kovásznay [21].

8.2 Durchführung der Simulation

Nun soll der Einfluss nichtlinearer Akustik anhand der kalt durchströmten Modellbrennkammer aus Kapitel 7 untersucht werden. Um die Komplexität der Untersuchung zu begrenzen und eine leichtere Interpretation der Simulationsergebnisse zu ermöglichen, wird die Konfiguration ohne Lochblechplatte gewählt. Letztere besitzt überdies den Vorteil, dass die akustische Dämpfung hier relativ gering ausfällt. Wie im letzten Abschnitt erläutert wurde, ist eine geringe Dämpfung eine Voraussetzung für das Auftreten nichtlinearer Effekte.

Für die Untersuchung ist es erforderlich, akustische Schwingungen mit erhöhten Amplituden anzuregen. Dazu wird innerhalb der Modellbrennkammer eine oszillierende Energiequelle der Form

$$S'_e(x_i,t) = A_e \exp\left[-\ln(2)\frac{(x_i - x_i^c)^2}{b_g^2}\right]\sin(2\pi f_1 t) \tag{8.3}$$

definiert. Die räumliche Ausdehnung der oszillierenden Energiefreisetzung entspricht einer sphärischen Gaußverteilung, wobei die Halbwertsbreite b_g sowie die Lage des Verteilungszentrums x_i^c mit den Werten aus Abschnitt 7.2.3 identisch ist. Die Anregungsfrequenz $f_1 = 2140\text{Hz}$ entspricht der aus Abschnitt 7.2.4 bekannten Eigenfrequenz der T1L1 Mode. A_e charakterisiert die Amplitude der Energiequelle. Der Wert dieses Parameters ist mit $A_e = \varrho_0 c_0^3$ zunächst so gewählt, dass sich innerhalb der Modellbrennkammer ein quasistationärer Schwingungszustand mit $p'/p_0 \leq 0.25$ einstellt[35]. Für die dimensionslose Kennzahl Γ_t sind unter diesen Bedingungen Werte der Größenordnung $\mathcal{O}(10^2)$ zu erwarten, d.h. $\Gamma_t >> 1$. Damit sind nichtlineare Wellenausbreitungseffekte in ausgeprägter Form zu erwarten.

Um nichtlineare Effekte eindeutig identifizieren zu können, ist zunächst eine Referenzlösung auf Basis der linearisierten Eulergleichungen erforderlich. Anschließend wird eine identische Simulation unter Verwendung der nichtlinearen PENNE Grundgleichungen durchgeführt. In beiden Simulationen wird dabei dasselbe numerische Lösungsverfahren sowie ein identisches Rechengitter (Gitter 3 aus Abschnitt 7) verwendet. Einflüsse der Numerik können somit ausgeschlossen werden. Darüber hinaus entspricht die verwendete Grundströmung der

[35] Unter diesen Bedingungen bleibt das Lösungsfeld innerhalb des Rechengebiets trotz nichtlinearer Verzerrungen stetig. Numerische Probleme im Bereich potentieller Stoßlösungen können in diesem Fall von vornherein vermieden werden und das numerische Lösungsverfahren bleibt gegenüber den vorherigen Anwendungsfällen unverändert.

CFD Lösung aus Abschnitt 7.2.2. Die Simulationen umfassen jeweils $8 \cdot 10^5$ Zeitschritte mit $\Delta t = 1.52 \cdot 10^{-7}$s, wodurch sich eine physikalische Simulationsdauer von ca. 0.12s ergibt.

8.3 Diskussion der Simulationsergebnisse

Bevor die Unterschiede zwischen einer linearen Simulation auf Basis der LEE und einer nichtlinearen Rechnung unter Verwendung der PENNE Gleichungen im Detail diskutiert werden, soll zunächst die Wirkung der oszillierenden Wärmefreisetzungsquelle besprochen werden. Dazu wird die nichtisentrope Dichteschwankung $\varrho^s = \varrho' - \varrho^p$ betrachtet, wobei für den isentropen Anteil im nichtlinearen Bereich der Zusammenhang $\varrho^p = \bar{\varrho}[(1+p'/\bar{p})^{1/\gamma} - 1]$ gilt. Abbildung 8.1 zeigt ϱ^s zum Zeitpunkt $t/\Delta t = 8 \cdot 10^5$. Es ist deutlich zu erkennen, dass sich in Wandnähe ein periodisches Muster nichtisentroper Dichtestörungen ausbildet. Die am Ort $x_i^c = (-0.145\,\text{m}, 0.046\,\text{m}, 0)^T$ definierte Energiequelle führt demnach nicht nur zur Anregung akustischer Störungen, sondern auch zur Ausbildung einer prägnanten Entropiemode, welche konvektiv durch das Rechengebiet transportiert wird. Dabei sei erwähnt, dass die Entstehung

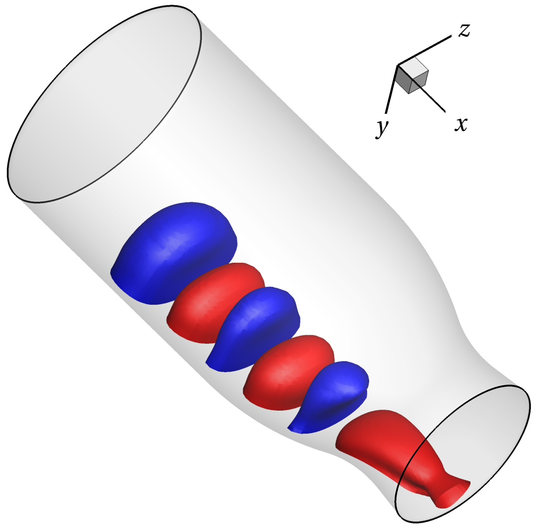


Abbildung 8.1: Isokonturflächen der nichtisentropen Dichtestörung ϱ^s/ϱ_0 zum Zeitpunkt $t/\Delta t = 8 \cdot 10^5$ unter Verwendung der nichtlinearen PENNE Grundgleichungen ($-2.5 \cdot 10^{-3}$ blau, $+2.5 \cdot 10^{-3}$ rot).

der Entropiemode keineswegs eine spezielle Eigenschaft der nichtlinearen PENNE Modellgleichungen darstellt, sondern ebenso durch Verwendung der linearisierten Eulergleichungen in Erscheinung tritt. Eine Wechselwirkung zwischen der Entropiemode und den akustischen Störungen ist jedoch nur für die nichtlineare PENNE Modellierung uneingeschränkt möglich. Für die linearisierten Eulergleichungen hingegen ist die Interaktion der charakteristischen Lösungsbestandteile an das Vorhandensein von Gradienten im mittleren Strömungsfeld geknüpft. Dies bedeutet, dass für die LEE Modellierung eine Wechselwirkung auf den konvergenten Bereich der Düse beschränkt ist, wohingegen für die PENNE Modellierung prinzipiell das gesamte Rechengebiet in Frage kommt.

Im Weiteren soll das akustische Störungsfeld innerhalb der Modellbrennkammer verglichen werden. Abbildung 8.2 zeigt die instantane Verteilung der dimensionslosen Druckschwankung p'/p_0 zum Zeitpunkt $t/\Delta t = 8 \cdot 10^5$. Zunächst kann für beide Modellierungsarten eine

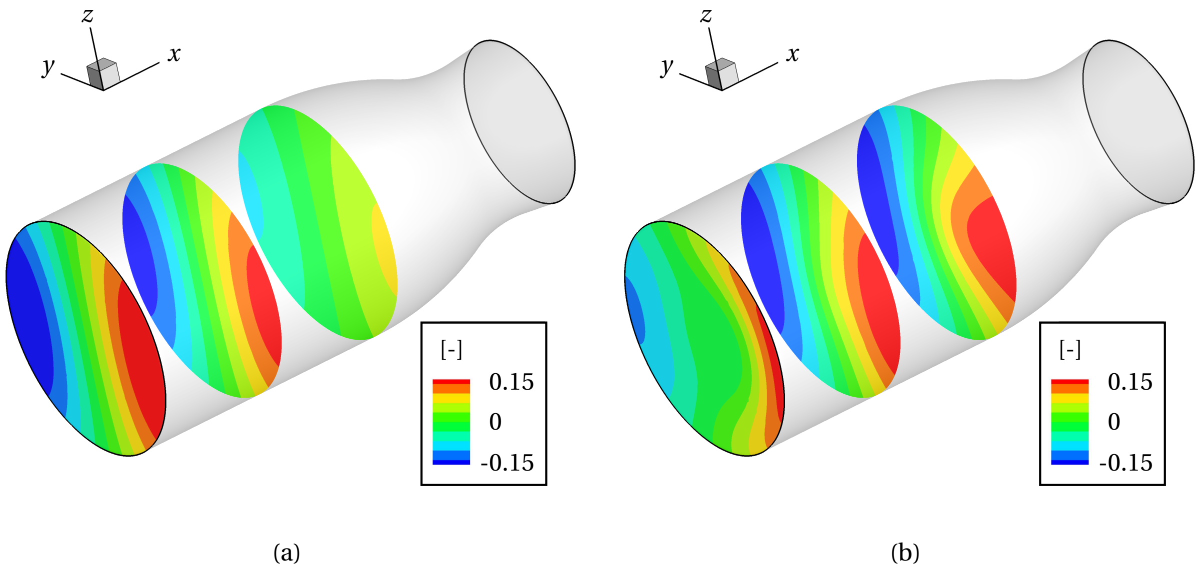


Abbildung 8.2: Instantane Verteilung der dimensionslosen Druckschwankung p'/p_0 zum Zeitpunkt $t/\Delta t = 8 \cdot 10^5$ unter Verwendung der linearisierten Eulergleichungen a) sowie der nichtlinearen PENNE b).

globale T1 Modenstruktur identifiziert werden. Über diese Beobachtung hinaus lassen sich aber spürbare Unterschiede im Druckfeld erkennen. Werden demnach die linearisierten Eulergleichungen verwendet, so besitzt das errechnete Störungsfeld eine symmetrische Gestalt. Demgegenüber zeigt das Lösungsfeld der nichtlinearen PENNE Modellierung einen zunehmenden Verlust der Symmetrie, verursacht durch signifikante Verzerrungen. Letztere offenbaren sich besonders im Bereich des Einströmrands. Aber auch am Übergang zwischen der zylindrischen Brennkammersektion und dem konvergenten Düsenabschnitt sind deutliche Verzerrungen zu erkennen.

Abbildung 8.3 zeigt den zeitlichen Verlauf der dimensionslosen Druckschwankung p'/p_0 am Ort $x_i = (-0.178\text{m}, -0.039\text{m}, 0.025\text{m})^T$. Das dargestellte Zeitfenster ist dabei repräsentativ für einen Zustand quasistationären Verhaltens, der sich nach einer Simulationsdauer von ca. 0.09s einstellt. Im Falle der LEE ist die Oszillation wie erwartet harmonisch. Der Gleichanteil ist Null. Das Verhalten auf Basis der nichtlinearen PENNE weist hingegen fundamentale Unterschiede auf. Besonders auffällig ist dabei ein zweites lokales Maximum innerhalb der positiven Halbwelle. Darüber hinaus lässt sich feststellen, dass das Zeitsignal keine einseitig aufgesteilten Flanken (in der englischsprachigen Literatur ist in diesem Zusammenhang auch von „steep-fronted waves" die Rede) besitzt. Damit zeigen die hier vorliegenden Ergebnisse deutliche Unterschiede gegenüber der rein longitudinalen Wellenausbreitung [74]. Allerdings

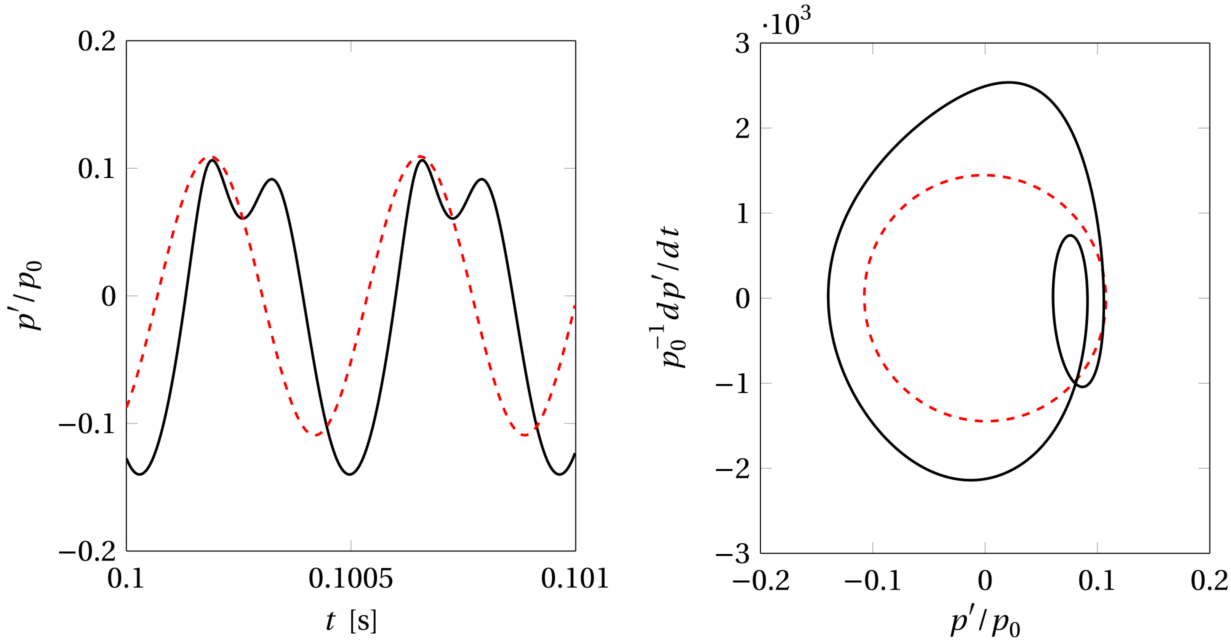


Abbildung 8.3: Zeitlicher Verlauf der dimensionslosen Druckschwankung p'/p_0 (links) und zugehörige Phasenraumdarstellung (rechts) für $A_e = \varrho_0 c_0^3$: LEE (- - -), PENNE (—).

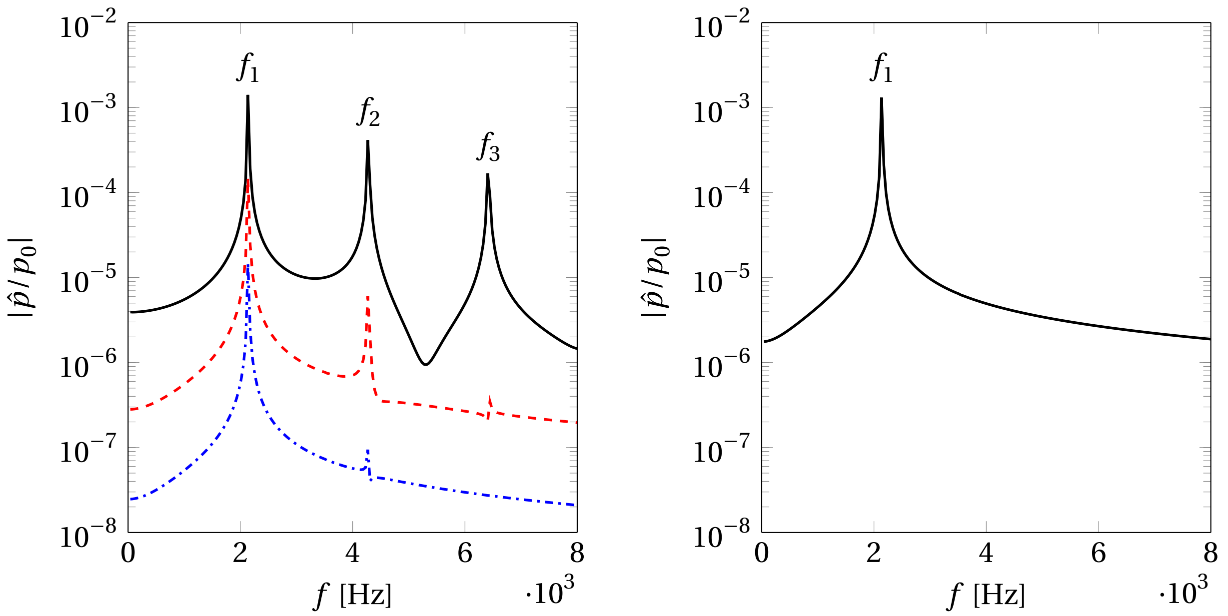


Abbildung 8.4: Amplitudenspektren der dimensionslosen Druckstörung p'/p_0 unter Verwendung der LEE (rechts) sowie der nichtlinearen PENNE (links) für unterschiedliche Anrequngsamplituden: $A_e = \varrho_0 c_0^3$ (—), $A_e = 0.1\varrho_0 c_0^3$ (- - -), $A_e = 0.01\varrho_0 c_0^3$ (-·-·-).

wird diese Besonderheit der transversalen Wellenausbreitung im nichtlinearen Bereich durch verschiedene theoretische [82, 86] als auch experimentelle [53] Untersuchungen bzw. Beobachtungen gestützt.

Der Frequenzinhalt der gezeigten Signalverläufe ist in Abbildung 8.4 dargestellt. Wie erwartet, enthält das Zeitsignal der LEE Simulation lediglich eine einzige spektrale Komponente. Diese korrespondiert mit der Oszillationsfrequenz der Anregung f_1. Aufgrund der monofrequenten Anregung werden somit keine weiteren Brennkammermoden angefacht. Im Gegensatz dazu enthält die Zeitreihe der nichtlinearen PENNE Rechnung neben der Anregungsfrequenz auch ganzzahlige Vielfache der Grundschwingung, d.h. $f_2 = 2f_1$ bzw. $f_3 = 3f_1$. Letztere sind dabei nicht als zusätzlich angeregte Schwingungsformen aufzufassen, sondern resultieren zunächst lediglich aus der nichtlinearen Verzerrung der ursprünglich harmonischen Schwingungsform. Die Amplituden dieser auch als Fourierfrequenzen bezeichneten Komponenten nehmen mit zunehmender Frequenz spürbar ab. Darüber hinaus ist die Entstehung der Fourierfrequenzen maßgeblich durch die Amplitude der angeregten Schwingung beeinflusst. Wird das Anregungspotential der monofrequenten Energiequelle um eine Zehnerpotenz reduziert, d.h. $A_e = 0.1\varrho_0 c_0^3$, so ist lediglich die erste Fourierfrequenz im Spektrum sichtbar. Für $A_e = 0.01\varrho_0 c_0^3$ verschwindet auch die letzte Fourierfrequenz und man erhält ein Amplitudenspektrum, das im wesentlichen dem Ergebnis der LEE gleicht. Die Amplitude der Druckschwingung innerhalb der Modellbrennkammer beträgt in diesem Fall weniger als 0.2% des Referenzzustands p_0.

Mode	f_{mn}	f_{mn}/f_1
T1	2140Hz	1
T2	3550Hz	1.659
R1	4453Hz	2.081
T3	4883Hz	2.282
T4	6180Hz	2.888
T1R1	6195Hz	2.895
T5	7456Hz	3.484

Tabelle 8.1: Erwartete Resonanzfrequenzen f_{mn} und Frequenzverhältnisse f_{mn}/f_1 der transversalen Brennkammermoden.

Tabelle 8.1 enthält eine Auflistung der erwarteten Eigenfrequenzen[36] der Brennkammer. Demnach fallen die Fourierkomponenten nicht direkt mit höheren Eigenfrequenzen der Brennkammer zusammen. Eine nichtlineare Kopplung und ein damit verbundener Energieaustausch zwischen den unterschiedlichen Moden erscheint deshalb von vornherein deutlich

[36] Die in Tabelle 8.1 angegebenen Resonanzfrequenzen basieren auf einer Skalierung der bekannten T1L1 Frequenz entsprechend der analytischen Lösung aus Abschnitt 2.3, d.h. $f_{mn}/f_1 = \eta_{mn}/1.8413$. Prinzipiell können die Resonanzfrequenzen auch aus den Ergebnissen aus Abschnitt 7.2.4 gewonnen werden. Aufgrund der zunehmenden Modendichte im Bereich hoher Frequenzen ist die Zuordnung der spektralen Überhöhungen jedoch nicht immer eindeutig, weshalb hier auf eine einfache Skalierung zurückgegriffen wurde.

erschwert. Wäre ein solcher gegeben, müssten neben der angeregten T1L1 Mode auch andere Eigenfrequenzen der Brennkammer im Amplitudenspektrum sichtbar sein. Wie Abbildung 8.4 jedoch zeigt, ist dies nicht der Fall. Das Fehlen von Kopplungs- bzw. Energieaustauscheffekten würde darüber hinaus bedeuten, dass das Abklingverhalten der Brennkammermoden auch für erhöhte Amplituden weitestgehend unverändert bleibt.

Um dies zu überprüfen, soll nachfolgend das Dämpfungsverhalten der angeregten T1L1 Mode bestimmt werden. Dazu wird die oszillierende Energiequelle mit $A_e = \varrho_0 c_0^3$ nach Erreichen einer quasistationären Brennkammerschwingung deaktiviert und das Abklingen der Schwingung betrachtet. Abbildung 8.5 zeigt die zeitliche Entwicklung der spektralen Komponenten während des Abklingvorgangs. Dargestellt ist dabei sowohl das Dämpfungsverhalten der T1L1 Komponente als auch die zeitliche Entwicklung der Fourierfrequenzen.

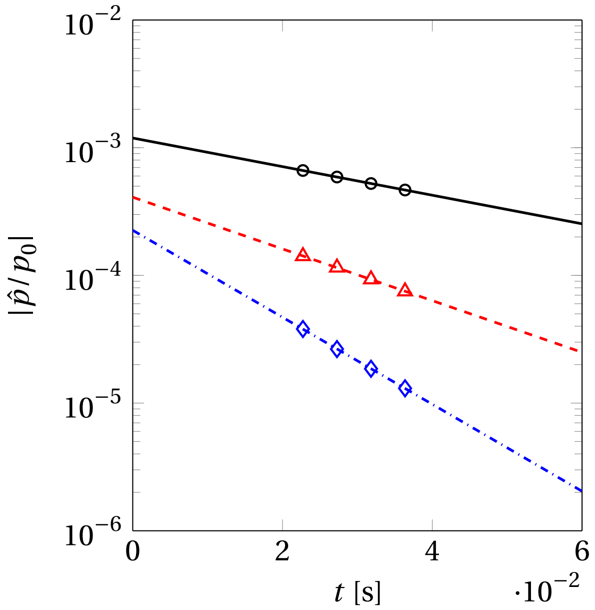


Abbildung 8.5: Zeitliche Entwicklung der spektralen Komponenten während des Abklingvorgangs: T1L1 Komponente (——), erste Fourierkomponente (- - -), zweite Fourierkomponente (-·-·-).

Die Dämpfung der T1L1 Mode entspricht im Rahmen der Genauigkeit dem Wert aus Abschnitt 7.2.4, womit die Vermutung eines weitestgehend unveränderten Abklingverhaltens bestätigt wird. Gemäß Abbildung 8.5 ergeben sich für Abklingraten der Fourierfrequenzen mit zunehmender Frequenz größere Werte. Um diesen Sachverhalt nachzuvollziehen, wird im Folgenden eine auf Heidmann [53] zurückgehende empirische Beziehung herangezogen, wonach für die Amplitude der Fourierfrequenzen $|\hat{p}_n|$ näherungsweise gilt:

$$|\hat{p}_n| \sim \epsilon^n \ , \tag{8.4}$$

wobei $n \in \mathbb{Z}$ die Ordnung der Fourierfrequenzen und ϵ einen allgemeinen Amplitudenparameter bezeichnet. Die zeitliche Entwicklung des Amplitudenparameters wird in erster Näherung durch das Abklingverhalten der dominanten Grundmode bestimmt, d.h. $\epsilon(t) \sim \exp(\alpha_1 t)$. Damit erhält man für die Abklingrate der Fouriermoden den Zusammenhang:

$$\alpha_n = n\alpha_1 \ . \tag{8.5}$$

Demnach klingt die erste Fourierfrequenz ($n = 2$) mit der doppelten und die zweite Fourierfrequenz ($n = 3$) mit der dreifachen Rate ab. Diese Abhängigkeit der Dämfungskonstanten kann prinzipiell auch in Abbildung 8.5 beobachtet werden.

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass der Einfluss erhöhter Amplituden auf die Wellenausbreitung innerhalb der Brennkammer relativ begrenzt ist. Zwar lassen sich eindeutige Verzerrungseffekte beobachten - ein Einfluss auf die Dissipation akustischer Energie ist im Rahmen der durchgeführten Untersuchung jedoch nicht nachweisbar. Allerdings beinhaltet der betrachtete Testfall lediglich eine sehr vereinfachte Problemstellung. Darüber hinaus wurde die Interaktion mit der Verbrennung von vornherein ausgeklammert. Die Frage, inwieweit nichtlineare Wellenausbreitungseffekte einen Einfluss auf die thermoakustische Stabilität der Brennkammer besitzen, kann deshalb an dieser Stelle noch nicht abschließend beantwortet werden.

9 Zusammenfassung und Ausblick

Um im Rahmen der Entwicklung moderner Raketenantriebssysteme die Gefahr unerwarteter Verbrennungsinstabilitäten so weit wie möglich zu minimieren, ist man bestrebt, das Phänomen theoretisch zu erfassen, um etwaige Probleme frühzeitig zu erkennen. Die praktische Erfahrung hat allerdings gezeigt, dass dieses Unterfangen mit enormen Schwierigkeiten verbunden ist. Trotz intensiver Forschung existiert bis heute kein verlässliches Simulations- und Berechnungsverfahren. Um diesem Defizit zu begegnen, wird am Lehrstuhl für Thermodynamik der Technischen Universität München ein neuartiger Simulationsansatz entwickelt. Im Zentrum dieser Simulationsmethode steht dabei ein Akustiklöser im Zeitbereich.

Zur Beschreibung der akustischen Wellenausbreitung innerhalb einer Brennkammer wurden in Vorgängerarbeiten zwei unterschiedliche Modellgleichungssysteme verwendet. Beide Ansätze sind auf eine lineare Wellendynamik beschränkt, wodurch die Modellierung lediglich für kleine Störungsamplituden Gültigkeit besitzt. Innerhalb der vorliegenden Arbeit wurde diese Beschränkung durch die Einführung nichtlinearer Störungsgleichungen beseitigt. Damit kann der Akustiklöser auch erhöhte Amplituden physikalisch korrekt abbilden. Dies ist vor allem für Raketenanwendungen von Interesse, da hier große Amplituden eine besondere Relevanz besitzen.

Die ursprüngliche Motivation, nichtlineare Störungsgleichungen näher zu betrachten, kann auf Schwierigkeiten im Bereich hydrodynamischer Instabilitäten zurückgeführt werden. Letztere stellen im Zeitbereich eine große Herausforderung dar, da sie wie im Falle der ursprünglich verwendeten linearisierten Eulergleichungen mit einem unbegrenzten Wachstum der Lösung verbunden sind. Die Berücksichtigung nichtlinearer Effekte ermöglicht es jedoch, diese linearen Instabilitäten in ihrem Wachstum zu begrenzen. Damit ist es möglich, auch unter hydrodynamisch instabilen Strömungsverhältnissen akustische Analysen im Zeitbereich durchzuführen.

Die Anwendung nichtlinearer Störungsgleichungen in hydrodynamisch instabilen Strömungen wird am Beispiel einer sprunghaften Querschnittserweiterung demonstriert. Im Zuge dessen wird das akustische Transferverhalten des Flächensprungs bestimmt und mit Messdaten und verfügbaren LES-Simulationsergebnissen verglichen. Es zeigt sich, dass das akustische Streuverhalten in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Daten durch nichtlineare Störungsgleichungen abgebildet werden kann. Die Qualität der Streufaktoren ist durchgängig mit den betrachteten LES-Ergebnissen vergleichbar. Darüber hinaus wird der Flächensprung auch mit einer angepassten Form der linearisierten Eulergleichungen modelliert. In diesem Fall ergeben sich jedoch deutliche Unterschiede zwischen den Simulationsergebnissen und den experimentellen Daten. Eine angepasste Formulierung, wie sie von unterschiedlichen Autoren vorgeschlagen wird, ist demnach nur bedingt dazu geeignet, die Wellenausbreitung in stratifizierten Grundströmungen adäquat zu beschreiben.

Im Hinblick auf die Modellierung thermoakustischer Probleme ist eine quantitativ korrekte Abbildung der akustischen Dämpfung von besonderem Interesse. Im Zeitbereich tritt in diesem Zusammenhang das Problem der numerischen Dissipation verstärkt in Erscheinung. Um die Ergebnisse nicht zu verfälschen, muss der Einfluss parasitärer Dämpfung so weit wie möglich minimiert werden. Hierfür kommt ein optimiertes Randfilterverfahren zur Anwendung. Wie am Beispiel einer schwach gedämpften Brennkammerkonfiguration gezeigt wird, gelingt es damit die numerischen Verluste auf ein vertretbares Maß zu begrenzen. Neben der numerischen Dissipation ist aber auch die physikalisch begründete Dämpfung Thema der vorliegenden Arbeit. Die Betrachtung einer akustischen Analogie legt nahe, dass sich die Wechselwirkung zwischen akustischen Schwankungen und gradientenbehafteten Strömungen meist durch effektive Impulsaustauschterme beschreiben lässt. Darauf aufbauend wird ein Ansatz zur speziellen Berücksichtigung akustischer Verluste vorgestellt. Im Gegensatz zu Vorgängerarbeiten wird hier auf die Zuhilfenahme akustischer Messdaten bewusst verzichtet. Die Brauchbarkeit der Modellierung wird schließlich anhand einer mit Kaltgas betriebenen Modellbrennkammer demonstriert. Dabei zeigt sich, dass der entwickelte Ansatz in der Lage ist, den Verlust an akustischer Energie in guter Übereinstimmung mit den gemessenen Werten wiederzugeben.

Am Ende der Arbeit wird die Wellenausbreitung im Bereich hoher Störungsamplituden betrachtet. Anhand eines generischen Testfalls wird dabei das Verhalten transversaler Brennkammermoden untersucht. Es kann gezeigt werden, dass die Form des Schwingungszustands für große Amplituden zunehmend verzerrt wird. Im Frequenzspektrum äußert sich diese Verzerrung durch eine Reihe ganzzahliger Vielfacher der Grundfrequenz. Im Gegensatz zur longitudinalen Wellenausbreitung kann für transversale Schwingungen die Bildung sogenannter „steep-fronted waves“ nicht beobachtet werden. Darüber hinaus legen die Ergebnisse nahe, dass das Dämpfungsverhalten transversaler Brennkammermoden auch im Bereich erhöhter Amplituden weitestgehend unverändert gegenüber dem linearen Bereich bleibt.

Durch den Übergang auf nichtlineare Störungsgleichungen konnte der Einsatzbereich des Simulationsverfahrens im Rahmen dieser Arbeit erheblich erweitert werden. Es ist von nun an möglich, auch Anwendungsfälle mit hydrodynamisch instabilem Grundströmungsfeld im Zeitbereich zu analysieren. Außerdem erlaubt das Verfahren die Wellenausbreitung hoher Amplituden physikalisch korrekt zu beschreiben, wodurch sich der Ansatz deutlich von anderen Verfahren zur Simulation akustischer Problemstellungen abhebt. Durch dieses Alleinstellungsmerkmal erscheint auch der im Allgemeinen (gegenüber dem Frequenzbereich) erhöhte Rechenaufwand des Zeitbereichs gerechtfertigt.

Es bietet sich an, das hiermit zur Verfügung stehende Verfahren für eine weitere Erforschung nichtlinearer Effekte einzusetzen. Die Praxis der Triebwerksentwicklung zeigt, dass Verbrennungsinstabilitäten in Flüssigkeitsraketenantrieben überwiegend durch nichtlineare Effekte dominiert werden. Vor diesem Hintergrund ist ein besseres Verständnis der nichtlinearen Zusammenhänge von großer Bedeutung. Ein erster Schritt könnte darin bestehen, die nichtlineare Wirkung des Lochblechs zu untersuchen. Dies würde mitunter weiteren Aufschluss über die Existenz und die Bedeutung nichtlinearer Verluste geben. Darüber hinaus ist es auch denkbar, die Wirkung der nichtlinearen Wellendynamik im Zusammenspiel mit unterschiedlichen Rückkopplungsmodellen zu analysieren. Dadurch könnte ein besseres Verständnis über die Wirkung von Triggeringeffekten oder die Entstehung von Grenzamplituden gewonnen werden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde auch die Möglichkeit geschaffen, klassische Flammentransferfunktionen in eine Simulation einzubinden. Voraussetzung dafür ist die Ableitung einer kausalen Übertragungsfunktion, beispielsweise auf Grundlage einer CFD-basierten Einzelflammensimulation. Zur Bestimmung der benötigten Filterkoeffizienten für den Zeitbereich muss die Übertragungsfunktion die Einheitsimpulsantwort des Systems abbilden. In der Vergangenheit hat sich dies als sehr schwierig herausgestellt. Inzwischen konnten aber deutliche Fortschritte erzielt werden, sodass auch dahingehende Untersuchungen ins Auge gefasst werden können.

A Eulergleichungen in nichtkonservativer Form

A.1 Kontinuitätsgleichung

Durch Anwendung der Produktregel lässt sich die konservative Form der Kontinuitätsgleichung 2.1a in ihr nichtkonservatives Äquivalent überführen. Man erhält:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \varrho \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial \varrho}{\partial x_j} = S_\varrho \; . \tag{A.1}$$

A.2 Impulsgleichung

Wird der Einfluss von Viskosität und Wärmeleitung vernachlässigt, so besitzt die konservative Form der Impulsbilanz gemäß Gleichung 2.1b die Form:

$$\frac{\partial \varrho u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varrho u_i u_j + p\delta_{ij}\right) = S_i + u_i S_\varrho \; . \tag{A.2}$$

Durch Anwendung der Produktregel und unter Berücksuchtigung der Kontinuitätsgleichung lässt sich A.2 auf die Form

$$\varrho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \underbrace{u_i \frac{\partial \varrho}{\partial t} + u_i \frac{\partial \varrho u_j}{\partial x_j}}_{=u_i S_\varrho} + \varrho u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = S_i + u_i S_\varrho \tag{A.3}$$

bringen. Damit lautet die nichtkonservative Form der Impulsbilanz:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{1}{\varrho} S_i \; . \tag{A.4}$$

A.3 Energiegleichung

Wird der Einfluss von Viskosität und Wärmeleitung vernachlässigt, so besitzt die konservative Form der Energiegbilanz entsprechend Gleichung 2.1c die Form:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho e+\varrho\frac{u_i u_i}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varrho u_j e+\varrho u_j\frac{u_i u_i}{2}+u_j p\right)=S_e+u_i S_i+u_i u_i S_\varrho\ . \tag{A.5}$$

Zunächst wird die spezifische kinetische Energie $\frac{1}{2}u_i u_i$ eliminiert. Dazu wird die Impulsbilanz A.2 mit u_i multipliziert

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho\frac{u_i u_i}{2}\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varrho u_j\frac{u_i u_i}{2}+u_j p\right)-p\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=u_i S_i+u_i u_i S_\varrho \tag{A.6}$$

und anschließend von Gleichung A.5 subtrahiert

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varrho e\right)+\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varrho u_j e\right)+p\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=S_e\ . \tag{A.7}$$

Gemäß Gleichung 2.6 aus Abschnitt 2.1 gilt für die innere Energie der Gasphase:

$$\varrho e=\frac{p}{\gamma-1}\ , \tag{A.8}$$

wobei $\gamma=1+Rz_R/c_v$. Durch Einsetzen in Gleichung A.7 erhält man schließlich eine nichtkonservative Formulierung der Energiegleichung auf Basis der primitiven Druckvariable p:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u_j\frac{\partial p}{\partial x_j}+\gamma p\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=\frac{p}{\gamma-1}\underbrace{\left(\frac{\partial\gamma}{\partial t}+u_j\frac{\partial\gamma}{\partial x_j}\right)}_{=D\gamma/Dt}+(\gamma-1)S_e\ . \tag{A.9}$$

Die Fluktuation des Isentropenexponenten ist üblicherweise sehr gering und kann deshalb oft vernachlässigt werden, d.h. $\partial\gamma/\partial t\approx 0$. Damit ergibt sich für die nicht-konservative Form der Energiegleichung:

$$\frac{\partial p}{\partial t}+u_j\frac{\partial p}{\partial x_j}+\gamma p\frac{\partial u_j}{\partial x_j}=\frac{1}{\gamma-1}p u_j\frac{\partial\gamma}{\partial x_j}+(\gamma-1)S_e\ . \tag{A.10}$$

B Akustische Analogie in Raketenschubkammern

Zur Ableitung einer geeigneten Analogie für wellendynamische Effekte in Raketenschubkammern wird zunächst die instantane Impulsbilanz in nichtkonservativer Form A.4 mit dem Ausdruck $c^2/(\gamma p)\,\partial p/\partial x_i$ erweitert. Unter Verwendung des allgemeinen gültigen Zusammenhangs $d\ln(x)/dx = 1/x$ lässt sich schreiben:

$$\frac{Du_i}{Dt} + \frac{c^2}{\gamma}\frac{\partial \ln(p)}{\partial x_i} = \frac{1}{\varrho}S_i + \left(\frac{c^2}{\gamma p} - \frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial x_i} \ . \tag{B.1}$$

Anschließend wird $\partial(\,\cdot\,)/\partial x_i$ auf B.1 angewandt, wodurch

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{Du_i}{Dt}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{c^2}{\gamma}\frac{\partial \ln(p)}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\varrho}S_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{c^2}{\gamma p} - \frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial x_i}\right] \tag{B.2}$$

resultiert.

Die Energiegleichung A.10 lässt sich analog auf die Form

$$\frac{1}{\gamma}\frac{D\ln(p)}{Dt} + \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = \frac{1}{\gamma-1}u_j\frac{\partial \ln(\gamma)}{\partial x_j} + \frac{\gamma-1}{\gamma p}S_e \tag{B.3}$$

bringen. Nach Anwendung des Operators der substantiellen Ableitung $D(\,\cdot\,)/Dt$ gilt:

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{D\ln(p)}{Dt}\right) + \frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) = \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\gamma-1}u_j\frac{\partial \ln(\gamma)}{\partial x_j} + \frac{\gamma-1}{\gamma p}S_e\right) \ . \tag{B.4}$$

Im Weiteren ist es zweckmäßig, den ersten Term auf der linken Seite von Gleichung B.2 sowie den zweiten Term auf der linken Seite von Gleichung B.4 in mathematisch äquivalente Ausdrücke wie folgt zu entwickeln:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{Du_i}{Dt}\right) = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_i \partial t} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_i} \tag{B.5}$$

sowie

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial t} + u_i\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i \partial x_j} \ . \tag{B.6}$$

Wird nun Gleichung B.4 von Gleichung B.2 subtrahiert, so gilt unter Einbeziehung der Zusammenhänge B.5 bzw. B.6:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{c^2}{\gamma}\frac{\partial \ln(p)}{\partial x_i}\right) - \frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\gamma}\frac{D\ln(p)}{Dt}\right) = \\
\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\varrho}S_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{c^2}{\gamma p} - \frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial x_i}\right] \\
-\frac{D}{Dt}\left(\frac{1}{\gamma - 1}u_j\frac{\partial \ln(\gamma)}{\partial x_j} + \frac{\gamma - 1}{\gamma p}S_e\right) - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\ .
\end{aligned}
\tag{B.7}
$$

Die linke Seite von Gleichung B.7 besitzt die Form einer konvektiven Wellengleichung für $\ln(p)$ mit variabler Schallgeschwindigkeit c sowie variablen Isentropenexponenten γ. Für eine detaillierte Disskussion dieser Gleichung sei auf Abschnitt 2.6 verwiesen.

Unter der Annahme kleiner Druckstörungen p' kann Gleichung B.7 weiter vereinfacht werden. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\ln(p) &= \ln(\bar{p}) + \left.\frac{\partial \ln(p)}{\partial p}\right|_{\bar{p}} p' + \mathcal{O}(p'^2) \\
&= \ln(\bar{p}) + \frac{p'}{\bar{p}} + \mathcal{O}(p'^2)
\end{aligned}
\tag{B.8}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{p} &= \frac{1}{\bar{p}} + \left.\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{p}\right)\right|_{\bar{p}} p' + \mathcal{O}(p'^2) \\
&= \frac{1}{\bar{p}}\left(1 - \frac{p'}{\bar{p}}\right) + \mathcal{O}(p'^2)\ .
\end{aligned}
\tag{B.9}
$$

Dabei bezeichnet $\bar{p}$ den mittleren Druck. Für kleine Machzahlen $M \to 0$ kann dieser näherungsweise als konstant angesehen werden d.h. $\bar{p} = const.$. Damit lässt sich schreiben:

$$
\frac{\partial \ln(p)}{\partial x_i} \approx \frac{1}{\bar{p}}\frac{\partial p'}{\partial x_i}
\tag{B.10}
$$

bzw. unter der Annahme $D(\cdot)/Dt \approx \partial(\cdot)/\partial t$ für kleine Machzahlen

$$
\frac{D\ln(p)}{Dt} \approx \frac{1}{\bar{p}}\frac{\partial p'}{\partial t}\ .
\tag{B.11}
$$

Unter diesen Annahmen besitzt Gleichung B.7 die Form:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}=\gamma\bar{p}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\varrho}S_i\right)+\gamma\bar{p}\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\left(\frac{c^2}{\gamma\bar{p}}-\frac{1}{\bar{\varrho}}\right)\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right]$$

$$-(\gamma-1)\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(1-\frac{p'}{\bar{p}}\right)S_e\right]-\gamma\bar{p}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\ , \tag{B.12}$$

wobei der Isentropenexponent $\gamma = const.$ und Terme höherer Ordnung als vernachlässigbar klein angesehen werden. Mit $c^2 = \gamma\bar{p}/\bar{\varrho}$ erhält man schließlich

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(c^2\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right)-\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2}=\gamma\bar{p}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{\varrho}S_i\right)$$

$$-(\gamma-1)\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(1-\frac{p'}{\bar{p}}\right)S_e\right]-\gamma\bar{p}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right)\ . \tag{B.13}$$

Für eine Diskussion von Gleichung B.13 sei wiederum auf Abschnitt 2.6 verwiesen.

C Fehlerordnung numerischer Glättungsfilter

Ausgangspunkt für nachfolgende Ausführungen bildet die allgemeine Übertragungsfunktion eines expliziten Tiefpassfilters (Gleichung 3.14) zur Glättung räumlicher Feldgrößen:

$$\hat{D}(k\Delta x) = 1 + \sigma \sum_{j=-N}^{M} d_j^{NM} e^{ijk\Delta x} \ .$$

Der Ausdruck $\exp(ijk\Delta x)$ lässt sich in eine Taylorreihe um den Punkt $k\Delta x = 0$ entwickeln. Es gilt

$$e^{ijk\Delta x} = \sum_{n=0}^{m} \frac{(ijk\Delta x)^n}{n!} + \mathcal{O}(k\Delta x^{m+1}) \ , \tag{C.1}$$

wobei die maximale Ordnung des Abbruchfehlers durch die Anzahl der verfügbaren Stützstellen begrenzt ist, d.h. $m \leq N + M - 1$. Damit folgt für die Übertragungsfunktion:

$$\begin{aligned} \hat{D}(k\Delta x) &= 1 + \sigma \sum_{j=-N}^{M} d_j^{NM} \sum_{n=0}^{m} \frac{(ijk\Delta x)^n}{n!} + \mathcal{O}(k\Delta x^{m+1}) \\ &= 1 + \sigma \sum_{n=0}^{m} \frac{(ik\Delta x)^n}{n!} \left[\sum_{j=-N}^{M} j^n d_j^{NM} \right] + \mathcal{O}(k\Delta x^{m+1}) \ . \end{aligned} \tag{C.2}$$

An ein Tiefpassfilter der Ordnung $\mathcal{O}(k\Delta x^{m+1})$ wird üblicherweise die Bedingung

$$\hat{D}(k\Delta x \to 0) = 1 + \mathcal{O}(k\Delta x^{m+1}) \tag{C.3}$$

gestellt. Um diese Bedingung zu erfüllen, muss in Gleichung C.2 der zweite Term auf der rechten Seite verschwinden. Dazu gelten für die Filterkoeffizienten d_j^{NM} die Bedingungen:

$$\sum_{j=-N}^{M} j^n d_j^{NM} = 0 \ , \qquad n = 0, \ldots, m \ . \tag{C.4}$$

D Akustische Streu- und Transfermatritzen

Akustisch kompakte Elemente mit lediglich einem Ein- und einem Ausgang werden in Analogie zur Beschreibung elektrischer Netzwerke in der Elektrotechnik auch als akustische Zweitore bezeichnet. Die mathematische Charakterisierung eines Zweitors erfolgt üblicherweise auf Basis von 2×2 Matrizen. Letztere stellen einen eindeutigen Zusammenhang zwischen dem Zustand vor und hinter dem Element her. Im Falle akustischer Zweitore lässt sich der jeweilige Zustand am Ein- und Ausgang entweder durch Angabe der akustischen Schnelle $\hat{u}$ und des akustischen Drucks $\hat{p}$ oder mit Hilfe der Riemann Invarianten $\hat{f}$ und $\hat{g}$ beschreiben. Diese werden jeweils zu einem Vektor, dem sogenannten Zustandsvektor zusammengefasst und bilden damit die Grundlage für die Definition einer Transformationsbeziehung zwischen dem Ein- und dem Ausgang des akustischen Elements.

D.1 Akustische Streumatrix

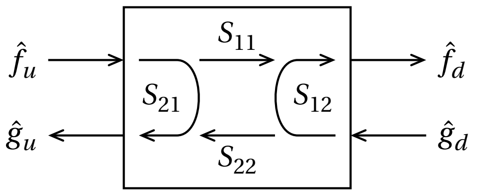


Abbildung D.1: Übertragungsverhalten eines akustischen Elements auf Basis der Streumatrix S_{ij}.

Der akustische Zustand am Ein- und Ausgang wird im Rahmen der Streumatrixdarstellung durch die vier Riemann Invarianten $\hat{f}_u$, $\hat{g}_u$ sowie $\hat{f}_d$, $\hat{g}_d$ definiert. Wie bereits aus der Bezeichnung hervorgeht, beschreibt eine Systemdarstellung auf Basis der akustischen Streumatrix die Streuung der genannten Riemann Invarianten innerhalb des akustischen Elements. Für den Streuvorgang gelten dabei die folgenden allgemeinen Zusammenhänge:

$$\hat{f}_d = S_{11}\hat{f}_u + S_{12}\hat{g}_d \ , \tag{D.1}$$

$$\hat{g}_u = S_{21}\hat{f}_u + S_{22}\hat{g}_d \ , \tag{D.2}$$

wobei die Koeffizienten S_{11} bzw. S_{22} die Transmission und S_{12} bzw. S_{21} die Reflexion der Riemann Invarianten innerhalb des Streuvorgangs beschreiben. Wird der Streuvorgang als Matrix-Vektor-Operation formuliert, so lässt sich schreiben:

$$\begin{bmatrix} \hat{f}_d \\ \hat{g}_u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}_u \\ \hat{g}_d \end{bmatrix} \ . \tag{D.3}$$

Bei den Koeffizienten der Streumatrix S_{ij} handelt es sich im Allgemeinen um komplexe Größen, wodurch neben einer Skalierung der Amplitude auch eine Verschiebung der Phasenlage ermöglicht wird. Eine Besonderheit der Streumatrixdarstellung ist der ihr innewohnende kausale Zusammenhang zwischen den einlaufenden und auslaufenden Wellen. Dadurch lässt sich die Wirkung der einzelnen Koeffizienten der Streumatrix mitunter sehr anschaulich interpretieren.

D.2 Akustische Transfermatrizen

Akustische Transfermatrizen stellen ausschließlichen einen Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen am Ein- und Ausgang des akustischen Elements her. Im Gegensatz zur Streumatrix werden die kausalen Zusammenhänge dabei jedoch nicht direkt abgebildet. Dennoch wird auch hier das akustische Verhalten des betrachteten Systems vollständig charakterisiert. Als Zustandsvariablen können dabei sowohl die akustische Druck- und Geschwindigkeitsstörung (pu-Darstellung) als auch die bereits bekannten Riemann Invarianten (fg-Darstellung) verwendetet werden. Betrachtet man die pu-Darstellung, so ergibt sich für die Definition der zugehörigen Transfermatrix

$$\begin{bmatrix} \hat{p}/\bar{\varrho}\bar{c} \\ \hat{u} \end{bmatrix}_d = \begin{bmatrix} C_{11}^{pu} & C_{12}^{pu} \\ C_{21}^{pu} & C_{22}^{pu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{p}/\bar{\varrho}\bar{c} \\ \hat{u} \end{bmatrix}_u . \tag{D.4}$$

Analog erhält man unter Verwendung der Riemann Invarianten $\hat{f}$ und $\hat{g}$ als akustische Zustandsgrößen die Definitionsgleichung der fg-Darstellung:

$$\begin{bmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{bmatrix}_d = \begin{bmatrix} C_{11}^{fg} & C_{12}^{fg} \\ C_{21}^{fg} & C_{22}^{fg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{bmatrix}_u . \tag{D.5}$$

Aufgrund der nicht direkt ersichtlichen kausalen Zusammenhänge ist die Interpretation der Transfermatrixkoeffizienten im Vergleich zur Streumatrix erschwert. Die Koeffizienten spiegeln hier im Wesentlichen die Erhaltung von Masse und Impuls innerhalb des akustischen Elements wieder. Dadurch lassen sich gewisse Eigenschaften der akustischen Elemente wie beispielsweise Querschnittsverhältnisse aus bestimmten Koeffizienten der Transfermatrizen ablesen.

D.3 Transformation in unterschiedliche Darstellungen

Alle hier erläuterten Darstellungen bilden das Übertragungsverhalten eines akustischen Zweitors vollständig ab. Dadurch ist es möglich, die unterschiedlichen Matrizen direkt ineinander umzurechnen. Nach Fischer [41] gelten beispielsweise zwischen den unterschiedlichen Darstellungen der Transfermatrizen folgende Transformationsbeziehungen:

$$C_{ij}^{pu} = \Omega_{im}^{-1}\, C_{mn}^{fg}\, \Omega_{nj}\ , \tag{D.6}$$

$$C_{ij}^{fg} = \Omega_{im}\, C_{mn}^{pu}\, \Omega_{nj}^{-1}\ , \tag{D.7}$$

wobei

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\Omega_{ij}^{-1}\ . \tag{D.8}$$

Ebenso ist eine Überführung der Transfermatrizen in Streumatrizen möglich:

$$S_{ij} = \frac{1}{C_{22}^{fg}} \begin{bmatrix} C_{11}^{fg}C_{22}^{fg} - C_{12}^{fg}C_{21}^{fg} & C_{12}^{fg} \\ -C_{21}^{fg} & 1 \end{bmatrix} \tag{D.9}$$

bzw.

$$C_{ij}^{fg} = \frac{1}{S_{22}} \begin{bmatrix} S_{11}S_{22} - S_{12}S_{21} & S_{12} \\ -S_{21} & 1 \end{bmatrix} \tag{D.10}$$

für die Transformation in umgekehrter Richtung.

E Zur Konsistenz der akustischen Verlustmodellierung

Im Folgenden wird eine durchströmte Blende entsprechend Abbildung E.1 betrachtet. Eine mögliche Einschnürung der Strömung innerhalb der Blende wird vernachlässigt. Darüber hinaus werden die Machzahlverhältnisse als ausreichend gering angesetzt, sodass in erster Näherung von einem inkompressiblen Verhalten ausgegangen werden kann. Die Geschwindigkeit des Fluids vor Eintritt in die Blende beträgt u_∞, innerhalb des engsten Querschnitts u_{th} und in ausreichender Entfernung stromab der Blende wiederum u_∞. Der mit u_∞ korrespondierende Stromröhrenquerschnitt sei D_∞, für u_{th} hingegen D_{th}. Neben der Annahme

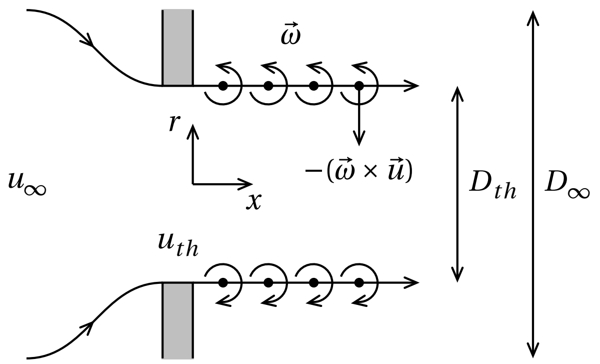


Abbildung E.1: Betrachtung einer durchströmten axialsymmetrischen Blende.

einer geringen Machzahl wird für die nachfolgenden Ausführungen auch vorausgesetzt, dass die charakteristische Wellenlänge der akustischen Störungen groß gegenüber den geometrischen Abmessungen der Blende ist. Die Gültigkeit der Ergebnisse ist somit auf den Bereich kleiner Helmholtzzahlen beschränkt, d.h. $He \ll 1$. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer akustisch kompakten Betrachtung.

Druckverlustbetrachtung Sind die Verluste einer durchströmten Blende im wesentlichen auf die Expansion und Durchmischung der Strömung hinter der Blendenverengung zurückzuführen, so lässt sich der erwartete Totaldruckverlust theoretisch herleiten. Aus einer einfachen Bilanzierung der quasistationären Impuls- und Energieflüsse in axialer Richtung ergibt sich für den Totaldruckverlust Δp über die Blende der folgende allgemeine Zusammenhang [125]:

$$\Delta p = \frac{\varrho u_{th}^2}{2} \left(1 - \frac{D_{th}^2}{D_\infty^2}\right)^2 . \tag{E.1}$$

Gleichung E.1 kennzeichnet den sog. Borda-Carnot-Stoßverlust.

Unter der Annahme eines quasistationären Verhaltens werden die instantanen Strömungsgeschwindigkeiten sowie die Druckdifferenz in Störung und Gleichanteil aufgespalten. Die Dichte des Fluids bleibt für kleine Machzahlverhältnisse hingegen näherungsweise konstant, d.h. $\varrho \approx \bar{\varrho}$. Mit der Beschränkung auf lineare Dynamik lässt sich schreiben:

$$\Delta p' = \bar{\varrho}\,\bar{u}_{th} u'_{th} \left(1 - \frac{D_{th}^2}{D_\infty^2}\right)^2 . \tag{E.2}$$

Für kleine Flächenverhältnisse kann Gleichung E.2 weiter vereinfacht werden[37], d.h. $\Delta p' = \bar{\varrho}\bar{u}_{th} u'_{th}$ für $D_{th}^2/D_\infty^2 \rightarrow 0$. Dabei ist zu beachten, dass für $D_{th}^2/D_\infty^2 \rightarrow 0$ im Allgemeinen auch $\bar{u}_\infty \rightarrow 0$ folgt. Im Rahmen einer Bilanzierung der akustischen Flüsse entfällt damit die Berücksichtigung konvektiver Effekte. Für die akustische Leistung P_v, welche im zeitlichen Mittel innerhalb eines Kontrollvolumens Ω dissipiert, gilt somit:

$$\langle P_v \rangle = \iint_{\partial\Omega} \langle n_i I_i \rangle \, dA = -\frac{\pi D_\infty^2}{4} \langle \Delta p' u'_\infty \rangle \tag{E.3}$$

bzw. unter Berücksichtigung der Kontinuitätsbeziehung $D_\infty^2 u'_\infty = D_{th}^2 u'_{th}$ und einsetzen von Gleichung E.2 für $D_{th}^2/D_\infty^2 \rightarrow 0$

$$\langle P_v \rangle = -\frac{\pi D_{th}^2 \bar{\varrho} \bar{u}_{th}}{4} \langle u'^2_{th} \rangle . \tag{E.4}$$

Interaktion mit Coriolis-Kraftdichtefeld Der Verlust an akustischer Leistung P_v kann für die betrachtete Konfiguration auch unter Verwendung von Gleichung 2.64 aus Abschnitt 2.6 bestimmt werden. Es gilt:

$$\langle P_v \rangle = \iiint_\Omega \langle D_\omega \rangle \, dV = -\bar{\varrho} \iiint_\Omega \langle (\vec{\omega} \times \vec{u})_i \, u_i^p \rangle \, dV . \tag{E.5}$$

Die Geschwindigkeitsverteilung $\vec{u}(r,\vartheta,x)$ stromab der Blende wird mit Hilfe einer Heaviside-Funktion[38] $\Theta(D_{th}/2 - r)$ in Zylinderkoordinaten (r,ϑ,x) definiert:

$$\vec{u}(r,\vartheta,x) = u_{th} \Theta(D_{th}/2 - r) \vec{e}_x . \tag{E.6}$$

[37] Betrachtet man den Fall einer Expansion auf Umgebungszustand, d.h. die Druckschwankung stromab der Blende verschwindet, so gilt für die Impedanz der Blende demnach $\bar{\varrho}\bar{u}_{th}$. Diese Beziehung wird auch durch die experimentellen Untersuchungen mehrerer Autoren bestätigt [51, 60].

[38] Die Konvektionsgeschwindigkeit der abgelösten Wirbel ist üblicherweise durch den Mittelwert der Strömungsgeschwindigkeiten außerhalb der Wirbelschicht gegeben [9, 57]. Aus diesem Grund wird hier die symmetrische Definition der Heaviside-Funktion verwendet, d.h.:

$$\Theta(D_{th}/2 - r) = \begin{cases} 1, & r < D_{th}/2 \\ 1/2, & r = D_{th}/2 \\ 0, & r > D_{th}/2 \end{cases}$$

Die Verteilung der Wirbelstärke $\vec{\omega}(r,\vartheta,x)$ ergibt sich aus der zuvor definierten Geschwindigkeitsverteilung durch Anwendung des Rotationsoperators

$$\begin{aligned}\vec{\omega}(r,\vartheta,x) = \operatorname{rot}\vec{u} &= -\frac{\partial u_x}{\partial r}\vec{e}_\vartheta \\ &= u_{th}\delta(D_{th}/2-r)\vec{e}_\vartheta \ ,\end{aligned} \tag{E.7}$$

wobei $\delta(D_{th}/2-r)$ die Dirac-Delta Funktion bezeichnet. Schließlich erhält man für das Kreuzprodukt aus Wirbelstärke- und Geschwindigkeitsverteilung - auch als Lamb-Vektorfeld bezeichnet - folgenden Ausdruck:

$$\begin{aligned}\vec{\omega}\times\vec{u} &= \begin{vmatrix}\vec{e}_r & \vec{e}_\vartheta & \vec{e}_x \\ 0 & \omega_\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & u_x\end{vmatrix} \\ &= \omega_\vartheta u_x \vec{e}_r = \frac{u_{th}^2}{2}\delta(D_{th}/2-r)\vec{e}_r \ .\end{aligned} \tag{E.8}$$

Für Gleichung E.5 ist lediglich der Schwankungsanteil des Coriolis-Kraftdichtefelds von Bedeutung. Nach einer Zerlegung von u_c in Störung und Gleichanteil sowie einer Beschränkung auf lineare Störungsterme lässt sich schreiben:

$$(\vec{\omega}\times\vec{u})' = \bar{u}_{th}u'_{th}\delta(D_{th}/2-r)\vec{e}_r \ . \tag{E.9}$$

Damit ergibt sich für die instantane Verlustleistung

$$\begin{aligned}P_v(t) &= -\bar{\varrho}\bar{u}_{th}u'_{th}\iiint_\Omega \delta(D_{th}/2-r)\ \vec{u}^p\cdot\vec{e}_r\, r\, dr\, d\vartheta\, dx \\ &= -\bar{\varrho}\bar{u}_{th}u'_{th}\underbrace{\frac{D_{th}}{2}\iint_{\partial\Omega}\vec{u}^p(r=D_{th}/2)\cdot\vec{e}_r\, d\vartheta\, dx}_{\pi D_{th}^2 u'_{th}/4} \ ,\end{aligned} \tag{E.10}$$

wobei das Volumenintegral über Ω durch Auswertung des inneren Integrals über r in ein Oberflächenintegral überführt wurde. Letzteres beschreibt den Volumenfluss der akustischen Schnelle durch die Wirbelschicht. Für kleine Mach- und Helmholtzzahlen entspricht der integrale Volumenfluss dem instantanen Volumenstrom im engsten Querschnitt der Drossel [56, 57][39]. Nach Anwendung des Operators der zeitlichen Mittelung erhält man für die dissipierte Schallleistung:

$$\langle P_v\rangle = -\frac{\pi D_{th}^2\bar{\varrho}\bar{u}_{th}}{4}\langle u'^2_{th}\rangle \ . \tag{E.11}$$

[39]Dies bedeutet, dass der gesamte Volumenstrom im engsten Querschnitt der Blende mit der Wirbelschicht interagiert. Damit enthalten ist auch die bereits im Rahmen der Druckverlustbetrachtung getroffene Vereinfachung $D_{th}^2/D_\infty^2 \to 0$.

Dieser Ausdruck ist mit Gleichung E.4 identisch. Obwohl auf den ersten Blick zwei unterschiedliche Berechnungsgrundlagen verwendet werden, führen beide Ansätze letztendlich auf das selbe Ergebnis. Es wird somit deutlich, dass eine akustische Verlustmodellierung entsprechend Abschnitt 4.2 keinen unmittelbaren Widerspruch mit der Analogiebetrachtung aus Abschnitt 2.6 darstellt.

Betreute Arbeiten

Im Rahmen dieser Dissertation entstand am Lehrstuhl für Thermodynamik in den Jahren 2010 bis 2013 unter wesentlicher wissenschaftlicher, fachlicher und inhaltlicher Anleitung des Autors die folgende studentische Arbeit. In ihr wurden verschiedene Fragestellungen zur akustischen Injektorkopplung in Flüssigkeitsraketenantrieben untersucht. Ergebnisse aus dieser Arbeit können in Teilen in das vorliegende Dokument eingeflossen sein. Der Autor dankt hiermit nochmals explizit Herrn Wolfgang Fenninger für sein Engagement bei der Unterstützung dieser wissenschaftlichen Arbeit.

Student	Studienarbeit
Wolfgang Fenninger	*Modellierung der Admittanz von Injektoren und Kopplung an die Brennkammerakustik von Flüssigkeitsraketentriebwerken* eingereicht am 15.11.2011

Literaturverzeichnis

[1] A. Agarwal, P. J. Morris, and R. Mani. Calculation of sound propagation in nonuniform flows: Suppression of instability waves. *AIAA Journal*, 42(1):80–88, 2004.

[2] A. Angeloski, M. Discacciati, C. Legendre, G. Lielens, and A. Huerta. Challenges for time and frequency domain aeroacoustic solvers. In *11th World Congress on Computational Mechanics (WCCM XI); 5th European Conference on Computational Mechanics (ECCM V); 6th European Conference on Computational Fluid Dynamics (ECFD VI)*, Barcelona, Spain, 2014.

[3] ANSYS, Inc. *ANSYS CFX-Solver Modeling Guide*, 15.0 edition, 2013.

[4] ANSYS, Inc. *ANSYS CFX-Solver Theory Guide*, 15.0 edition, 2013.

[5] R. J. Astley. Numerical methods for noise propagation in moving flows, with application to turbofan engines. *Acoustical Science and Technology*, 30(4):227–239, 2009.

[6] Y. Bae and Y. J. Moon. Brinkman penalization method for computation of acoustic scattering from complex geometry. In *16th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Stockholm, Sweden, 2010.

[7] C. Bailly and D. Juve. Numerical solution of acoustic propagation problems using linearized Euler equations. *AIAA Journal*, 38(1):22–29, 2000.

[8] T. J. Barth and P. O. Frederickson. Higher order solution of the Euler equations on unstructured grids using quadratic reconstruction. In *28th Aerospace Sciences Meeting*, Reno, Nevada, 1990.

[9] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2002.

[10] W. A. Bell and B. T. Zinn. The prediction of three-dimensional liquid-propellant nozzle admittances. Technical Report NASA CR-121129, NASA Lewis Research Center, 1973.

[11] J. Berland, C. Bogey, O. Marsden, and C. Bailly. High-order, low dispersive and low dissipative explicit schemes for multiple-scale and boundary problems. *Journal of Computational Physics*, 224:637–662, 2007.

[12] D. T. Blackstock, M. F. Hamilton, and A. D. Pierce. Progressive waves in lossless and lossy fluids. In M. F. Hamilton and D. T. Blackstock, editors, *Nonlinear Acoustics*. Acoustical Society of America, 2008.

[13] C. Bogey and C. Bailly. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations. *Journal of Computational Physics*, 194:194–214, 2004.

[14] C. Bogey, C. Bailly, and D. Juvé. Computation of flow noise using source terms in linearized Euler's equations. *AIAA Journal*, 40(2):235–243, 2002.

[15] C. Bogey, N. de Cacqueray, and C. Bailly. A shock-capturing methodology based on adaptive spatial filtering for high-order non-linear computations. *Journal of Computational Physics*, 228:1447–1465, 2009.

[16] M. J. Brear, F. Nicoud, M. Talei, A. Giauque, and E. R. Hawkes. Disturbance energy and sound production in gaseous combustion. *Journal of Fluid Mechanics*, 707:53–73, 2012.

[17] H. F. Burcharth and O. K. Andersen. On the one-dimensional steady and unsteady porous flow equations. *Coastal Engineering*, 24(3):233–257, 1995.

[18] S. M. Candel. Acoustic conservation principles and an application to plane and modal propagation in nozzles and diffusers. *Journal of Sound and Vibration*, 41:207–232, 1975.

[19] W. Cherdron, F. Durst, and J. H. Whitelaw. Asymmetric flows and instabilities in symmetric ducts with sudden expansions. *Journal of Fluid Mechanics*, 84:13–31, 1978.

[20] B. T. Chu. On the energy transfer to small disturbances in fluid flow (part 1). *Acta Mechanica*, 1(3):215–234, 1965.

[21] B.-T. Chu and L. S. G. Kovásznay. Non-linear interactions in a viscous heat-conducting compressible gas. *Journal of Fluid Mechanics*, 3(5):494–514, 1958.

[22] T. Chyczewski, P. Morris, and L. Long. Large-eddy simulation of wall bounded shear flow using the nonlinear disturbance equations. *6th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2000.

[23] T. Colonius and S. K. Lele. Computational aeroacoustics: Progress on nonlinear problems of sound generation. *Progress in Aerospace Sciences*, 40:345–416, 2004.

[24] L. Crocco and S. I. Cheng. *Theory of Combustion Instability in Liquid Propellant Rocket Motors*. Butterworths Scientific Publications, London, agardograph no. 8 edition, 1956.

[25] L. Crocco and W. A. Sirignano. Behaviour of supercritical nozzles under three-dimensional oscillatory conditions. Technical Report AGARDograph 117, North Atlantic Treaty Organization, 1967.

[26] M. J. Crocker. *Handbook of Acoustics*. John Wiley & Sons, 1998.

[27] F. E. C. Culick. Unsteady motions in combustion chambers for propulsion systems. Technical Report RTO AGARDograph, AG-ATV-039, North Atlantic Treaty Organization, 2006.

[28] J. W. Delfs, M. Bauer, R. Ewert, H. A. Grogger, M. Lummer, and Lauke T. G. W. *Numerical Simulation of Aerodynamic Noise with DLR's aeroacoustic code PIANO*. Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik, Abteilung Technische Akustik, Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e. V. in der Helmholtz-Gemeinschaft, 2008.

[29] J. E. Jr. Dennis and R. B. Schnabel. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. Prentice-Hall, 1983.

[30] J. Dongarra, S. Otto, M. Snir, and D. Walker. An introduction to the MPI standard. Technical Report CS-95-274, University of Tennessee, 1995.

[31] W. Dornberger. *Peenemünde: Die Geschichte der V-Waffen*. Ullstein Verlag, 2003.

[32] K. Ehrenfried. *Strömungsakustik: Skript zur Vorlesung*. Mensch und Buch, 2004.

[33] J. P. Erwin, P. J. Morris, and K. S. Brentner. Trailing-edge noise prediction using the nonlinear disturbance equations. In *47th AIAA Aerospace Sciences Meeting*, Orlando, Florida, 2009.

[34] R. Ewert, O. Kornow, J. W. Delfs, J. Yin, T. Röber, and M. Rose. A CAA based approach to tone haystacking. In *15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit*, Miami, Florida, 2009.

[35] R. Ewert, M. Meinke, and W. Schröder. Computation of sound radiation from a trailing edge applying acoustic perturbation equations. In *3rd Swing Aeroacoustics Workshop, Stuttgart, Germany*, Stuttgart, Germany, 2002.

[36] R. Ewert, M. Meinke, and W. Schröder. Computation of trailing edge noise via LES and acoustic perturbation equations. In *8th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit*, Breckenridge, Colorado, 2002.

[37] R. Ewert and W. Schröder. Acoustic perturbation equations based on flow decomposition via source filtering. *Journal of Computational Physics*, 188:365–398, 2003.

[38] R. Ewert, J. Yin, and J. Delfs. Simulation of multigeometry scattering problems and the radiation and refraction of acoustic waves through a shear layer with instability waves suppressed. In *Fourth Computational Aeroacoustic (CAA) Workshop on Benchmark Problems*, Ohio, 2004.

[39] F. Farassat and M. Farris. Acoustic energy estimates in inhomogeneous moving media. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 105(2), 1999.

[40] J. E. Ffowcs Williams and M. S. Howe. The generation of sound by density inhomogeneities in low Mach number nozzle flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 70:605–622, 1975.

[41] A. Fischer. *Hybride, thermoakustische Charakterisierung von Drallbrennern*. PhD thesis, Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München, 2004.

[42] S. Föller and W. Polifke. Identification of aero-acoustic scattering matrices from large eddy simulation: Application to a sudden area expansion of a duct. *Journal of Sound and Vibration*, 331:3096–3113, 2012.

[43] A. Giauque, F. Nicoud, and M. Brear. Numerical assessment of stability criteria from disturbance energies in gaseous combustion. *13th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2007.

[44] J. Gikadi, M. Schulze, J. Schwing, S. Föller, and T. Sattelmayer. Linearized Navier-Stokes and Euler equations for the determination of the acoustic scattering behaviour of an area expansion. In *33rd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Colorado Springs, Colorado, 2012.

[45] Z. A. Gol'dberg. On the propagation of plane waves of finite amplitude. *Soviet Physics Acoustics*, 3:340–347, 1957.

[46] J. M. Grenda, S. Venkateswaran, and C. L. Merkle. Application of computational fluid dynamics techniques to engine instability studies. In V. Yang and W. E. Anderson, editors, *Liquid Rocket Engine Combustion Instability*, volume 169, pages 503–525. American Institute of Aeronautics and Astronautics, progress in astronautics and aeronautics edition, 1995.

[47] B. Gustavsen. Improving the pole relocation properties of vector fitting. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 21:1587–1592, 2006.

[48] B. Gustavsen and A. Semlyen. Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting. *IEEE Transactions on Power Delivery*, 14:1052–1061, 1999.

[49] M. Habiballah and I. Dubois. Numerical analysis of engine instability. In V. Yang and W. E. Anderson, editors, *Liquid Rocket Engine Combustion Instability*, volume 169, pages 475–502. American Institute of Aeronautics and Astronautics, progress in astronautics and aeronautics edition, 1995.

[50] D. M. Harland and R. Lorenz. *Space Systems Failures: Disasters and Rescues of Satellites, Rocket and Space Probes*. Springer Praxis Books. Springer New York, 2007.

[51] D. T. Harrje and F. H. Reardon. Liquid propellant rocket combustion instability. Technical Report NASA SP-194, NASA Scientific and Technical Information Office, 1972.

[52] M. E. Harvazinski, W. E. Anderson, and C. L. Merkle. Analysis of self-excited combustion instabilities using two- and three-dimensional simulations. *Journal of Propulsion and Power*, 29(2):396–409, 2013.

[53] M. F. Heidmann. Empirical characterization of some pressure wave shapes in strong traveling transverse acoustic modes. Technical Report NASA TM X-1716, National Aeronautics and Space Administration, 1969.

[54] A. Hirschberg and S. Rienstra. An introduction to aeroacoustics. Technical report, Eindhoven University of Technology, 2004.

[55] M. S. Howe. Attenuation of sound in a low Mach number nozzle flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 91:209–229, 1979.

[56] M. S. Howe. The dissipation of sound at an edge. *Journal of Sound and Vibration*, 70:407–411, 1980.

[57] M. S. Howe. *Acoustics of Fluid-Structure Interactions.* Cambridge University Press, cambridge monographs on mechanics edition, 1998.

[58] A. Huber. *Impact of fuel supply impedance and fuel staging on gas turbine combustion stability.* PhD thesis, Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München, 2009.

[59] I. E. Idelchik. *Handbook of Hydraulic Resistance.* Jaico Publishing House, 2005.

[60] U. Ingard and H. Ising. Acoustic nonlinearity of an orifice. *Journal of the Acoustical Society of America*, 42(1):6–17, 1967.

[61] M. Israeli and S. A. Orszag. Approximation of radiation boundary conditions. *Journal of Computational Physics*, 41(1):115–135, 1981.

[62] S-H. Jang and J-G. Ih. On the multiple microphone method for measuring in-duct acoustic properties in the presence of mean flow. *Journal of the Acoustical Society of America*, 103(3):1520–1526, 1998.

[63] S. A. Jordan. The spatial resolution properties of composite compact finite differencing. *Journal of Computational Physics*, 221:558–576, 2007.

[64] K. Joseph George and R. I. Sujith. Disturbance energy norms: A critical analysis. *Journal of Sound and Vibration*, 331(7):1552–1566, 2012.

[65] R. Kaess, S. Köglmeier, M. Schmid, and T. Sattelmayer. Linearized Euler calculation of acoustics of a rocket combustion chamber. In *Proceedings of the 2nd REST Modelling Workshop*, Ottobrunn, Germany, 2011.

[66] R. Kathan. Test case HF-2, acoustics of a rocket motor model with chocked nozzle. In *2nd REST Workshop on Combustion Instability Modeling*, Ottobrunn, Germany, 2010.

[67] R. Kathan. Test case HF-2, appendix, issue 2. In *2nd REST Workshop on Combustion Instability Modeling*, Ottobrunn, Germany, 2010.

[68] R. Kathan. *Verlustmechanismen in Raketenbrennkammern*. PhD thesis, Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München, 2013.

[69] A. Kierkegaard, S. Boij, and G. Efraimsson. A frequency domain linearized Navier-Stokes equations approach to acoustic propagation in flow ducts with sharp edges. *Journal of the Acoustical Society of America*, 127(2):710–719, 2010.

[70] A. Kierkegaard, S. Boij, and G. Efraimsson. Simulations of the scattering of sound waves at a sudden area expansion. *Journal of Sound and Vibration*, 331(5):1068–1083, 2012.

[71] S. Koeglmeier, R. Kaess, and T. Sattelmayer. Determination of acoustic scattering matrices using nonlinear disturbance equations. In *7th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference*, Atlanta, USA, 2014.

[72] S. Koeglmeier, R. Kaess, and T. Sattelmayer. Modelling of acoustic absorbers for liquid rocket combustion chambers. In *Space Propulsion Conference 2014*, Köln, 2014.

[73] S. Köglmeier, R. Kaess, D. Morgenweck, K. Vollmer, R. Kathan, and T. Sattelmayer. Rapid approach for the prediction of complex acoustic resonance frequencies in rocket combustion chambers. In *Proceedings of the 2nd REST Modelling Workshop*, Ottobrunn, Germany, 2011.

[74] S. Köglmeier, R. Kaess, and T. Sattelmayer. Numerical inverstigation of nonlinear acoustics in liquid rocket combustion instability. In *4th European Conference for Aerospace Sciences*, St. Petersburg, Russia, 2011.

[75] E. Labourasse and P. Sagaut. Advance in RANS-LES coupling, a review and an insight on the NLDE approach. *Archives of Computational Methods in Engineering*, 11(3):199–256, 2004.

[76] W. Lauterborn, T. Kurz, and I. Akhatov. Nonlinear acoustics in fluids. In T. D. Rossing, editor, *Springer Handbook of Acoustics*. Springer New York, 2007.

[77] S. K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *Journal of Computational Physics*, 103:16–42, 1992.

[78] E. C. Levi. Complex-curve fitting. *IRE Transactions on Automatic Control*, AC-4:37–43, 1959.

[79] J. Liu and L. N. Long. Direct aeroacoustic and aerodynamic simulation of multi-hole engine liners using the nonlinear disturbance equations. In *4th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Toulouse, France, 1998.

[80] L. N. Long. A nonconservative nonlinear flowfield splitting method for 3-D unsteady fluid dynamics. In *6th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Maui, Hawaii, 2000.

[81] E. Longatte, P. Lafon, and S. Candel. Linear and nonlinear development of instabilities in shear layers. *7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2001.

[82] S. Maslen and F. K. Moore. On strong transverse waves without shocks in a circular cylinder. *Journal of the Aeronautical Sciences*, 23(6):583–593, 1956.

[83] F. R. Menter. Zonal two equation k-ω turbulence models for aerodynamic flows. *23rd Fluid Dynamics, Plasmadynamics, and Lasers Conference*, 1993.

[84] F. R. Menter. Two-equation eddy-viscosity turbulence models for engineering applications. *AIAA Journal*, 32(8):1598–1605, 1994.

[85] J. P. Moeck, H. J. Konle, and C. O. Paschereit. An assessment of alternative sensor technology for transfer matrix measurement in combustors. In *14th International Congress on Sound and Vibrations*, Cairns, Australia, 2007.

[86] F. K. Moore and S. H. Maslen. Transverse oscillations in a cylindrical combustion chamber. Technical Report NACA TN 3152, National Advisory Committee for Aeronautics, Lewis Flight Propulsion Laboratory, 1954.

[87] C. L. Morfey. Acoustic energy in non-uniform flows. *Journal of Sound and Vibration*, 14(2):159–170, 1970.

[88] D. Morgenweck. *Modellierung des Transferverhaltens im Zeitbereich zur Beschreibung komplexer Randbedingungen in Raketenschubkammern.* PhD thesis, Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München, 2013.

[89] P. J. Morris, L. N. Long, A. Bangalore, and Q. Wang. A parallel three-dimensional computational aeroacoustics method using nonlinear disturbance equations. *Journal of Computational Physics*, 133(1):56–74, 1997.

[90] P. J. Morris, L. N. Long, and T. Scheidegger. Parallel computations of high speed jet noise. In *5th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Bellevue, WA, USA, 1999.

[91] M. K. Myers. Transport of energy by disturbances in arbitrary steady flows. *Journal of Fluid Mechanics*, 226:383–400, 1991.

[92] F. Nicoud and T. Poinsot. Thermoacoustic instabilities: Should the Rayleigh criterion be extended to include entropy changes. *Combustion and Flame*, 142:153–159, 2005.

[93] J. C. Oefelein and V. Yang. Comprehensive review of liquid-propellant combustion instabilities in F-1 engines. *Journal of Propulsion and Power*, 9(5):657–677, 1993.

[94] H. Jr. Oertel and J. Delfs. *Strömungsmechanische Instabilitäten.* Spinger-Verlag Berlin Heidelberg, 1996.

[95] H. Jr. Oertel and E. Laurien. *Numerische Strömungsmechanik*. Spinger-Verlag Berlin Heidelberg, 1995.

[96] S. J. Orfanidis. *Introduction to Signal Processing*. previously published by Pearson Education, Inc, 2010.

[97] D. Pallek and D. Ronneberger. Fundamental mode sound transmission through a discontinuity in a flow duct. In *Fortschritte der Akustik - FASE/DAGA '82*, 1982.

[98] C. Pankiewitz. *Hybrides Berechnungsverfahren für thermoakustische Instabilitäten von Mehrbrennersystemen*. PhD thesis, Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München, 2004.

[99] A. D. Pierce. *Acoustics: An Introduction to Its Physical Principles and Applications*. McGraw-Hill Series in Mechanical Engineering. McGraw-Hill, New York, 1981.

[100] J. Pieringer, F. Fassl, and T. Sattelmayer. Simulation of combustion instabilities in liquid rocket engines with acoustic perturbation equations. *Journal of Propulsion and Power*, 25(5):1020–1031, 2009.

[101] J. E. Pieringer. *Simulation Selbsterregter Verbrennungsschwingungen in Raketenschubkammern im Zeitbereich*. PhD thesis, Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München, 2008.

[102] T. Poinsot and D. Veynante. *Theoretical and Numerical Combustion*. R. T. Edwards, Inc., Philadelphia, PA 19118 USA, second edition, 2005.

[103] R. J. Priem. Influence of combustion process on stability. Technical Report NASA TN D-2957, National Aeronautics and Space Administration, 1965.

[104] L. Rayleigh. On the stability, or instability, of certain fluid motions. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 1(1):57–72, 1879.

[105] G. Reboul, C. Polacsek, and G. Desquesnes. Towards numerical simulation of fan broadband noise propagation and radiation from aero-engines. In *15th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Miami, Florida, 2009.

[106] S. Redonnet, E. Manoha, and O. Kenning. Numerical simulation of the downstream fan noise and jet noise of a coaxial jet with shielding surface. *10th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2004.

[107] S. Redonnet, E. Manoha, and P. Sagaut. Numerical simulation of propagation of small perturbations interacting with flows and solid bodies. *7th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, 2001.

[108] C. Richter. *Liner Impedance Modeling in the Time Domain with Flow*. PhD thesis, Technische Universität Berlin, 2009.

[109] C. Richter, H. Lück, L. Panek, and F. Thiele. Methods for suppressing shear layer instabilities in CAA. *Journal of Computational Acoustics*, 19(2):181–203, 2011.

[110] S. W. Rienstra and A. Hirschberg. *An Introduction to Acoustics.* Eindhoven University of Technology, 2015.

[111] D. Ronneberger. Theoretische und experimentelle Untersuchungen der Schallausbreitung durch Querschnittssprünge und Lochplatten in strömungskanälen. Technical report, Drittes Physikalisches Institut der Universität Göttingen, 1987.

[112] V. R. Rubinsky. Combustion instability in the RD-0110 engine. In V. Yang and W. E. Anderson, editors, *Liquid Rocket Engine Combustion Instability*, volume 169, pages 89–112. American Institute of Aeronautics and Astronautics, progress in astronautics and aeronautics edition, 1995.

[113] T. Sattelmayer, M. Schmid, and M. Schulze. Interaction of combustion with transverse velocity fluctuations in liquid rocket engines. *Journal of Propulsion and Power*, 31(4):1137–1147, 2015.

[114] M Schulze. Linearized Euler and Navier-Stokes equations for the determination of the acoustic scattering behaviour of area expansion and orifice. Master's thesis, Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München, 2011.

[115] M. Schulze, M. Schmid, D. Morgenweck, S. Koeglmeier, and T. Sattelmayer. A conceptual approach for the prediction of thermoacoustic stability in rocket engines. In *49th AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference*, San Jose, California, 2013.

[116] M. Schulze, M. Zahn, M. Schmid, and T. Sattelmayer. About flame-acoustic coupling phenomena in supercritical H2/O2 rocket combustion system. In *63. Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress*, Augsburg, 2014.

[117] J. H. Seo and Y. J. Moon. The linearized perturbed compressible equations for aeroacoustic noise prediction at very low Mach numbers. In *11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference*, Monterey, California, 2005.

[118] J. H. Seo and Y. J. Moon. Linearized perturbed compressible equations for low Mach number aeroacoustics. *Journal of Computational Physics*, 218:702–719, 2006.

[119] C. K. W. Tam and T. Z. Dong. Wall boundary conditions for high-order finite difference schemes in computational aeroacoustics. *Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, 6:303–322, 1994.

[120] C. K. W. Tam, C. Webb, and T. Z. Dong. A study of short wave components in computational aeroacoustics. *Journal of Computational Acoustics*, 1:1–30, 1993.

[121] C. K. W. Tam and J. C. Webb. Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics. *Journal of Computational Physics*, 107:262–281, 1993.

[122] S. Temkin. *Elements of Acoustics.* Acoustical Society of America, New York, 2001.

[123] M. Terracol. A zonal RANS/LES approach for noise sources prediction. *Flow, Turbulence and Combustion*, 77(1):161–184, 2006.

[124] L. N. Trefethen. *Spectral Methods in MATLAB.* Society for Industrial and Applied Mathematics, 2000.

[125] E. Truckenbrodt. *Strömungsmechanik: Grundlagen und technische Anwendungen.* Spinger-Verlag Berlin Heidelberg, 1968.

[126] A. Urbano, L. Selle, G. Staffelbach, B. Cuenot, T. Schmitt, S. Ducruix, and S. Candel. Exploration of combustion instability triggering using large eddy simulation of a multiple injector liquid rocket engine. *Combustion and Flame*, 169:129–140, 2016.

[127] K. Vafai. *Handbook of Porous Media, Second Edition.* CRC Press, 2005.

[128] M. R. Visbal and D. V. Gaitonde. Very high-order spatially implicit schemes for computational acoustics on curvilinear meshes. *Journal of Computational Acoustics*, 9:1259–1286, 2001.

[129] M. R. Visbal and D. V. Gaitonde. Shock capturing using compact-differencing-based methods. In *43rd AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit*, Reno, Nevada, 2005.

[130] E. W. Weisstein. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics, Second Edition.* CRC Press, 2002.

[131] V. Yang, M. W. Yoon, and J. M. Wicker. Acoustic waves in baffled liquid-propellant rocket engines. Technical report, Department of Mechanical Engineering, The Pennsylvania State University, 1993.

[132] A. Young. *The Saturn V F-1 Engine: Powering Apollo into History.* Springer Praxis Books. Springer New York, 2008.