

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
MÜNCHEN

Analyse drallverstärkter Intermittenz mit Hilfe der Grobstruktursimulation

René Hermann Franz Grottke

Lehrstuhl für Thermodynamik
Technische Universität München

Analyse drallverstärkter Intermittenz mit Hilfe der Grobstruktursimulation

René Hermann Franz Grottke

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen
der Technischen Universität München
zur Erlangung des akademischen Grades eines

DOKTOR-INGENIEURS
(DR.-ING.)

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:		Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Hartmut Spliethoff
Prüfer der Dissertation:	1.	Univ.-Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattelmayer
	2.	apl. Prof. Dr.-Ing., Dr. rer. nat. habil. Ulrich Schumann, Ludwig-Maximilians-Universität München

Die Dissertation wurde am 26.10.2006 bei der Technischen Universität München eingereicht und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 30.01.2007 angenommen.

Für Maria

Zusammenfassung

Die Arbeit untersucht bekannte Defizite etablierter Reynolds-Spannungs-Modelle im Zusammenhang mit für Gasturbinen typischen, hochverdrallten Strömungen. Mit Hilfe der Grobstruktursimulation wird eine Datenbasis gemittelter Strömungsgrößen erstellt, die auch das fluktuierende Druckfeld berücksichtigt. So wird ein Vergleich der in der Transportgleichung der Reynolds'schen Spannungen beinhalteten Terme mit den Modellen möglich und Rückschlüsse auf die Wirkweise der drallverstärkten Intermittenz sind ableitbar. Es gelingt dabei eine deutliche Abbildung des Effekts, der sich im Vergleich mit den experimentellen Daten durch hohe Qualität auszeichnet. Anhand von Charakteristika in den radialen Verläufen der Komponenten des Druck-Scher-Tensors ist ein Mechanismus ableitbar, der in direktem Zusammenhang mit der Wechselwirkung von eingerolltem Umgebungsfluid in den Hauptstrahl steht. Wesentlich ist, daß weder lineare nach quadratische Modellansätze dies adäquat abzubilden vermögen.

Abstract

Commonly known deficiencies of Reynolds Stress Models used in strongly swirling jet flows are inspected, as they are model flows for gas turbine combustor applications. In this work, the technique of Large Eddy Simulation is chosen to generate a data base of averaged flow quantities including fluctuations of the static pressure. Thus, all terms of the exact transport equation of the Reynolds-Stresses are available and provide a basis of comparison with model assumptions. Moreover, the effect of swirl amplified intermittency is directly observable. This effect is clearly distinguished and in good agreement with experimentally gained results. By means of characteric shapes of radial profiles of the pressure-strain correlation a mechanism of the impact of intermittency can be deduced. The essential outcome of this work is that neither linear nor quadratic Reynolds Stress Models are able to describe the intermittency effect in an appropriate manner.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand am Lehrstuhl für Thermodynamik der Technischen Universität München während meiner Zeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Rahmen des vom Bundesministerium für Bildung und Forschung geförderten Vorhabens „Turbulente Strömungen mit starker Strombahnkrümmung: Analyse und Modellierung drallverstärkter Intermittenz“.

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Professor Dr.-Ing. Thomas Sattelmayer für die mir gegebene Chance zur Bearbeitung einer wissenschaftlichen Aufgabe und das in mich gesetzte Vertrauen, sowie für den mir gewährten Freiraum. Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. rer. nat. habil. Ulrich Schumann vom Institut für Physik der Atmosphäre des DLR in Oberpfaffenhofen danke ich für die spontane Übernahme des Koreferates und sein Interesse an meiner Arbeit, Herrn Professor Dr.-Ing. habil. Hartmut Spliethoff gilt mein Dank für den Vorsitz bei der mündlichen Prüfung.

Für die unzähligen Anregungen und Diskussionen sowie den damit einhergegangenen Wissenstransfer möchte ich mich bei Herrn Dr.-Ing. Christoph Hirsch bedanken. Sein Ideenreichtum prägte in entscheidendem Maße den Fortgang der Arbeit. Auch Herr Dr.-Ing. habil. Frank Holzäpfel vom Institut für Physik der Atmosphäre des DLR hatte in der letzten Phase durch entscheidende Hinweise einen wichtigen Anteil am Gelingen der Dissertation.

Bedanken möchte ich mich bei meinen Kollegen am Lehrstuhl für Thermodynamik, Frau Edurne Carpintero Rogero sowie den Herren Dr.-Ing. Marco Auer, Emad Gharaibah, Udo Glückert, Christoph Heinz, Volker Kaufmann, Dr.-Ing. Frank Kiesewetter, Florian Mittermayer, Christian Richter, Sebastian Steinbach und Peter Zimmermann. Sie hatten stets ein offenes Ohr unabhängig der äußeren Situation und hinterließen im besonderen durch eine Vielzahl *nicht* fachlicher Diskussionen einen bleibenden Eindruck. Auch den beiden Damen des Sekretariats, Frau Helga Bassett und Frau Sigrid Schulz-Reichwald für ihre Unterstützung bei organisatorischen Dingen, und Frau Corinne Grimm für die Hilfe bei der Überarbeitung des vorliegenden Manuskripts gilt mein Dank.

Mein besonderer Dank aber gilt meinen Eltern, die durch ihre enorme Unterstützung und ihr Vertrauen in mich meine akademische Ausbildung erst ermöglicht haben, sowie allen Freunden, deren Toleranz besonders in den letzten Monaten oftmals sehr beansprucht wurde.

München, im Februar 2007

René Grottke

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur **xv**

1 Einleitung **1**
1.1 Stand der Wissenschaft . . . 1
1.2 Bisherige Arbeiten . . . 4
1.2.1 Eingeschlossene Drallströmung . . . 5
1.2.2 Drallfreistrahl . . . 8
1.2.3 Drallinduzierte Intermittenz . . . 10
1.3 Ziele der Arbeit . . . 11

2 Beschreibung turbulenter Strömungen **13**
2.1 Navier-Stokes-Gleichungen . . . 13
2.2 Das Phänomen Turbulenz . . . 15
2.3 Konsequenzen für die numerische Beschreibung . . . 17
2.4 Reynolds-Mittelung . . . 19
2.4.1 Reynolds-gemittelte Bewegungsgleichungen . . . 21
2.4.2 Exakte Transportgleichung der Reynolds'schen Spannungen . . . 24
2.4.3 Schließungsansätze . . . 28
2.5 Grobstruktursimulation . . . 31
2.5.1 Filterung . . . 32
2.5.2 Gefilterte Navier-Stokes Gleichungen . . . 34
2.6 Feinstrukturmodelle . . . 37
2.6.1 Das Modell von Smagorinsky . . . 38
2.6.2 Dynamisches Modell nach Germano . . . 39

3 Statistische Mittelung **45**
3.1 Ergoden-Theorem . . . 45
3.2 Dynamische Mittelung . . . 46
3.3 Räumliche Mittelung . . . 48

4 Numerische Methode **51**
4.1 Räumliche Diskretisierung . . . 51
4.2 Entwicklung in der Zeit . . . 53
4.3 Kopplung von Druck und Geschwindigkeit . . . 54
4.4 Lösung des Gleichungssystems . . . 54
4.5 Verwendetes Programm . . . 55

5 Ergebnisse **57**
5.1 Darstellung der Simulation . . . 57
5.2 Bilanzen . . . 60
5.3 Analyse diskreter Punkte . . . 62
5.3.1 Zeitreihen . . . 63
5.3.2 Spektrale Auswertung . . . 65
5.3.3 PDF und jPDF . . . 71
5.4 Räumliche Analyse . . . 78
5.4.1 Statistische Stationarität im Nahbereich . . . 79
5.4.2 Validierung mit Meßergebnissen . . . 83
5.5 Diffusive Anteile . . . 89
5.5.1 Vergleich der Tripelkorrelationen . . . 89
5.5.2 Diffusion infolge der Druckschwankungen . . . 92
5.6 Vergleich der Druck-Scher-Korrelation mit Modellen . . . 95
5.7 Wirkung der Intermittenz . . . 101
5.7.1 Diskussion der allgemeinen Modellierungspraxis . . . 108
5.8 Variation der Modellkonstanten . . . 110
5.9 Parameter zur Identifikation von Intermittenz . . . 113

6 Resümee **119**

Literaturverzeichnis **121**

Abbildungsverzeichnis **129**

Tabellenverzeichnis **135**

A Energiedichtefunktionen **137**
A.1 Freistrahl . . . 137
A.2 Zyklon . . . 151

B Verbundwahrscheinlichkeitsdichten **165**
B.1 Freistrahl x=100 mm . . . 165
B.2 Freistrahl x=200 mm . . . 179
B.3 Zyklon x=100 mm . . . 193
B.4 Zyklon x=200 mm . . . 207

C Zur statistischen Stationarität **221**
C.1 Freistrahl . . . 221
C.2 Zyklon . . . 227

D Lumley’sches Dreieck **233**

E Vergleich mit Messdaten **237**
E.1 Freistrahl . . . 237
E.2 Zyklon . . . 243

F Vergleich der Tripelkorrelationen mit Modellansatz **249**
F.1 Freistrahl . . . 249
F.2 Zyklon . . . 255

G Diffusion infolge der Druckschwankung **261**
G.1 Freistrahl . . . 261
G.2 Zyklon . . . 265

H Vergleich des Druck-Scher-Tensors mit Modellen **269**
H.1 Freistrahl . . . 269
H.2 Zyklon . . . 273

I Variation der Modellkonstanten des linearen Modells **277**
I.1 Freistrahl . . . 277
I.2 Zyklon . . . 281

J Vergleich des norm. Druck-Scher-Tensors mit Stabilitätsparametern **285**
J.1 Freistrahl . . . 285
J.2 Zyklon . . . 289

K Transformation **293**

L Herleitung der Transportgleichung Reynolds'scher Spannungen **299**

M Verschiedene Darstellungen der Druck-Scher-Korrelation **305**
M.1 Alternative Schreibweisen des Druck-Scher-Tensors . . . 305
M.2 Umrechnung . . . 306
M.3 Gleichungssystem für die Koeffizienten des schnellen Terms . . . 308
M.4 Gleichungssystem für die Koeffizienten des Rotta-Terms . . . 308
M.5 Weitere Formulierungen . . . 309

Nomenklatur

Falls bei folgend aufgeführten Symbolen die explizite Angabe einer Einheit fehlt, handelt es sich um eine universelle Größe, die mehr als nur eine Einheit annehmen kann. Da dimensionslose Kennzahlen *per Definition* frei von Einheiten sind, wird auf eine Kennzeichnung verzichtet. Sollte *nicht* die Einstein'sche Summenkonvention verwendet werden, sind Vektoren mit *einfachem* Unterstrich gekennzeichnet, Tensoren zweiter Stufe (Matrizen) mit *doppeltem* und so fort. Die Kennzeichnung gefilterter und Reynolds-gemittelter Größen geschieht beidesmal durch einen Überstrich, wobei die Zugehörigkeit direkt aus dem Zusammenhang abzuleiten ist.

Lateinische Symbole

II	zweite Invariante des Anisotropietensors b_{ij}	[-]
${}_{\mathrm{L}}II$	zweite Invariante des Anisotropietensors b_{ij} nach Lumley	[-]
${}_{\mathrm{L}}III$	dritte Invariante des Anisotropietensors b_{ij} nach Lumley	[-]
$\mathsf{A}_{ij}, \mathsf{B}_{ij}, \mathsf{N}_{ij}$	Hilfstensoren zum Ansatz von Germano et al.	$[1/\mathrm{s}^2]$
$\underline{\underline{A}}$	Transformationsmatrix	
A	Fläche	$[\mathrm{m}^2]$
B	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion	[-]
b_{ij}	Anisotropietensor	[-]
$\mathscr{C}_{ij}$	Cross-Stress Tensor	$[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2]$
$\mathfrak{C}$	dynamischer Parameter des Feinstrukturmodells von Germano et al.	[-]
c	Schallgeschwindigkeit	$[\mathrm{m}/\mathrm{s}]$
$C_{1,2}$	Koeffizienten im Modellansatz von Launder et al.	[-]
$C_{1\ldots5}, C_1^\star, C_3^\star$	Koeffizienten im Modellansatz von Speziale et al.	[-]
C_{ij}	konvektive Änderung einer Größe	
C_S	Koeffizient im Modellansatz von Smagorinsky	[-]
C_s	Koeffizient im Modellansatz von Daly und Harlow	[-]
C_S	konstanter Parameter des Feinstrukturmodells von Smagorinsky	[-]
$\dot{D}$	Drehimpulsstrom	$[\mathrm{kg}\,\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2]$
$\mathscr{D}_{ij}^{\nu}$	molekulare Diffusion	$[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3]$
$\mathscr{D}_{ij}^{p}$	Diffusion aufgrund von Druckschwankung	$[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3]$
$\mathscr{D}_{ij}^{t}$	Diffusion aufgrund von turbulenter Schwankung	$[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3]$
D	mittlerer Durchmesser des einlaßseitigen Ringspaltes	[m]
D_{ij}	diffusive Änderung einer Größe	
E_{ij}	Fehlertensor zum Ansatz von Germano et al.	$[1/\mathrm{s}^2]$
E	Energiedichte	$[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}]$

f	Frequenz	[Hz]
f_c	Cut-Off-Frequenz	[Hz]
$\underline{g}$	Gravitationsvektor	$[\mathrm{m/s^2}]$
$\dot{I}$	Axialimpulsstrom	$[\mathrm{kg\,m/s^2}]$
I	Turbulenzintensität	
k	Wellenzahl	$[1/\mathrm{m}]$
k	turbulente kinetische Energie	$[\mathrm{m^2/s^2}]$
$\mathscr{L}_{ij}$	Leonard Tensor	$[\mathrm{m^2/s^2}]$
$\mathfrak{L}_{ij}$	Tensor intermedialer Längenmaße zwischen Filter und Testfilter	$[\mathrm{kg/(m\,s)}]$
L	Integrale Längenskala	[m]
l	Längenmaß	[m]
L_{ij}	zeitlich lokale Änderung einer Größe	
$\dot{m}$	Massenstrom	[kg/s]
$\mathscr{O}$	von der Ordnung	
$\mathscr{P}$	Produktion turbulenter kinetischer Energie	$[\mathrm{m^2/s^3}]$
$P^\star$	Gesamtdruck inkl. des ‘mittleren Turbulenzdruckes’	$[\mathrm{N/m^2}]$
P_∞	statischer Druck der Umgebung	$[\mathrm{N/m^2}]$
P_{ij}	Produktion Reynolds’scher Spannung	$[\mathrm{m^2/s^3}]$
P	statischer Druck	$[\mathrm{N/m^2}]$
$\mathscr{R}_{ij}$	Reynolds’scher Feinstrukturtensor	$[\mathrm{m^2/s^2}]$
$\mathfrak{R}$	Residuum	
r	Radius	[m]
s'_{ij}	fluktuierender Schertensor	$[1/\mathrm{s}]$
S_{ij}	mittlerer Schergeschwindigkeitstensor	$[1/\mathrm{s}]$
T	Temperatur	[K]
t	Zeit	[s]
T_{ij}	Germano-Identität	$[\mathrm{kg/(m\,s^2)}]$
$\underline{U}$	Geschwindigkeitsvektor	$[\mathrm{m/s}]$
U,V,W	Geschwindigkeitskomponenten	$[\mathrm{m/s}]$
W_{ij}	mittlerer Wirbelgeschwindigkeitstensor	$[1/\mathrm{s}]$
x', r', φ'	Raumrichtungen im Strombahnsystem	[m]
x, y, z	Raumrichtungen	[m]

Griechische Symbole

α	Faktor zwischen Filter und Testfilter	[-]
χ, ψ, ω	Drehwinkel	
Δ	Filterweite	[m]
δ_{ij}	Kronecker Delta	[-]
η	Kolmogorov’sche Längenskala	[m]
ε	Dissipationsrate turbulenter Energie	$[\mathrm{m^2/s^3}]$
ε_{ij}	Dissipationstensor	$[\mathrm{m^2/s^3}]$

ϵ	Abbruchgrenze des iterativen Lösungsprozesses	[-]
$_{\mathscr{P}}\varepsilon$	Dissipationsrate turbulenter Energie aus dem energetischen Gleichgewicht mit der Produktionsrate $\mathscr{P}$	$[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3]$
$_{\mathrm{sgs}}\varepsilon$	Dissipationsrate turbulenter Energie aus dem energetischen Gleichgewicht mit der Feinstrukturproduktionsrate	$[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3]$
$_{\mathrm{th}}\varepsilon$	theoretisch bestimmte Dissipationsrate	$[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3]$
γ	Wichtungsfaktor für das 'Flux-Blending'-Verfahren	[-]
Γ_ϕ	Diffusionskoeffizient der Größe ϕ	
κ	Wellenzahl	$[1/\mathrm{m}]$
μ	dynamische Viskosität	$[\mathrm{Ns}/\mathrm{m}^2]$
ν	kinematische Viskosität	$[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}]$
ϕ	beliebige Größe	
Φ_{ij}	Druck-Scher-Korrelation	$[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3]$
Π_{ij}	Summe von Druck-Scher-Korrelation und Diffusion aufgrund von Druckschwankung	$[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^3]$
φ	Umfangsrichtung	[m]
ρ	Dichte	$[\mathrm{kg}/\mathrm{m}^3]$
σ	Prandtl-Schmidt-Zahl im Diffusionsmodell der Reynolds'schen Spannungen	[-]
σ	Standardabweichung	
τ_{ij}^{sgs}	Sub-Grid-Scale Tensor	$[\mathrm{kg}/(\mathrm{m}\,\mathrm{s}^2)]$
τ	Kolmogorov'sche Zeitskala	[s]
τ	Zeitmaß	[s]
τ_{ij}	Feinstrukturtensor	$[\mathrm{kg}/(\mathrm{m}\,\mathrm{s}^2)]$
τ_{ij}	Spannungstensor	$[\mathrm{kg}/(\mathrm{m}\,\mathrm{s}^2)]$
τ_t	turbulentes Dissipationszeitmaß	[s]
T_{ij}	Sub-Grid-Scale Tensor aus Testfilter	$[\mathrm{kg}/(\mathrm{m}\,\mathrm{s})]$

Mathematische Symbole

D	substantielle Differentiation
exp	Exponentialfunktion
$\forall$	für alle
$f(\dots)$	Funktion von
$G(\dots)$	Faltungsfunktion
$\in$	Element von
∂	partielle Differentiation
$\mathbb{R}^3$	dreidimensionaler Raum

Hochgestellte Indizes

$'$	Schwankungsanteil bzgl. des Mittelwerts
$\bar{}$	Reynolds-gemittelte Größe
$\tilde{}$	gefilterte Größe

$\tilde{}$	*test*gefilterte Größe
k	bzgl. der turbulenten kinetischen Energie k
I, J, K	Hauptrichtungen
s	Strombahnkoordinaten
T	transponiert

Tiefgestellte Indizes

$\mathfrak{D}$	Deviator
eff	effektiver Wert
H	bzgl. der Hauptachsen
i, j, k, l, m, n	Zählindex
μ, ν, ρ	Zählindex
$\mathfrak{N}$	normiert
nb	Nachbarpunkte von P; engl.: ***N**eigh**b**our*
ϕ	bzgl. der beliebigen Variable ϕ
P	beliebiger Punkt des numerischen Gitters
th	theoretischer Wert
tot	total
ξ, η	Zählindex

Dimensionslose Kennzahlen

Ma	Machzahl
Pe	Peclét-Zahl
$\mathrm{Ri_P}$	Richardsonzahl nach Philipp
Ri	Richardsonzahl nach Bradshaw
$\mathrm{Ri_f}$	Fluß-Richardsonzahl
$\mathrm{Ri_g}$	Gradienten-Richardsonzahl
Re	Reynolds-Zahl
$\mathrm{S_0}$	theoretische Drallzahl

Akronyme

ARSM	**A**lgebraisches **R**eynolds-**S**pannungs-**M**odell
CAD	**C**omputer **A**ided **D**esign
CDS	**C**entral **D**ifferencing **S**cheme
CFD	**C**omputational **F**luid **D**ynamics
CPU	**C**entral **P**rocessing **U**nit
DH	**D**aly und **H**arlow
DNS	**D**irekte **N**umerische **S**imulaton
FD	**F**inite-**D**ifferenzen Verfahren
FV	**F**inite-**V**olumen Verfahren
IPC	Isotropisierung der Produktion inkl. eines konvektiven Terms nach Fu et al. engl.: ***I**sotropisation of **P**roduction incl. **C**onvection*

JM	**J**ones und **M**usonge
jPDF	Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktion; engl.: ***j**oint **P**robality **D**ensity **F**unction*
KV	**K**ontroll**v**olumen
LDV	**L**aser **D**oppler **V**elocimetry
LES	Grobstruktursimulation engl.: ***L**arge-**E**ddy-**S**imulation*
LRR	**L**aunder, **R**eece und **R**odi
PDF	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion; engl.: ***P**robality **D**ensity **F**unction*
RANS	**R**eynolds-**A**veraged **N**avier-**S**tokes
RSM	**R**eynolds **S**pannungs-**M**odell
sgs	Feinstruktur; engl.: ***S**ub-**G**rid-**S**cale*
SIMPLE	**S**emi-**I**mplicit **M**ethod for **P**ressure-**L**inked **E**quations
SSG	**S**peziale, **S**arkar und **G**atski
STKE	**S**tandard **k**-ε-**M**odell
UDS	**U**pwind **D**ifferencing **S**cheme

Abkürzungen

abs.	absolut
bzgl.	bezüglich
bzw.	beziehungsweise
d. h.	das heißt
engl.	englisch
ggf.	gegebenenfalls
Grad.	Gradient
i. allg.	im allgemeinen
inkl.	inklusive
m.	mit
Quadr.$_{geo}$	Quadrant bezogen auf das numerische Gitter in kartesischen Koordinaten
Quadr.	Quadrant
rad.	radial
rel.	relativ
u.	und
u. a.	unter anderem
Vergl.	Vergleich
vgl.	vergleiche
z. B.	zum Beispiel
zit.	zitiert

Vereinzelt verwendete Variablen und / oder Indizes haben nur lokale Bedeutung und werden an der Stelle ihrer Benutzung im Text definiert.

1 Einleitung

1.1 Stand der Wissenschaft

In letzter Zeit werden Analysen von Strömungs-, Temperatur-, Mischungs- und Reaktionsfeldern technischer Systeme im industriellen Umfeld vermehrt mit Hilfe kommerzieller CFD Programme (Computational Fluid Dynamics) durchgeführt, die turbulente Strömungen durch RANS (Reynolds-Averaged Navier-Stokes) Gleichungen unter Verwendung von Turbulenzmodellen beschreiben. Aufgrund der Verwendung von gemittelten Größen bei gleichzeitiger Modellierung der Turbulenz kann eine im Vergleich zu den kleinsten turbulenten Skalen grobe Diskretisierung des vorliegenden Problems verwendet werden. Folglich reduziert sich die Anzahl der notwendigen endlichen Berechnungsvolumina im Raum und der Rechenaufwand bleibt auch für dreidimensionale Rechengebiete in einem zeitlich akzeptablen Rahmen.

Der Durchbruch dieser Berechnungsmethode läßt sich auf zwei bedeutende Faktoren zurückführen. Zum einen wurden leistungsfähige Rechner (anfänglich Workstations, später vermehrt PC-Cluster-Systeme (INFINIBAND, 2006)) immer kostengünstiger , die die trotz relativ grober Beschreibung des Strömungsproblems noch immer großen Datenmengen beherrschen und effizient verarbeiten konnten. Andererseits wurden die CFD Programme seit dem erstmaligen Auftauchen außerhalb des akademischen Bereichs vor etwa 20 bis 25 Jahren stark verbessert und universeller einsetzbar, was eine weitverbreitete Nutzung im industriellen Umfeld mit der primären Forderung nach verkürzten Entwicklungszeiten neuer und optimierter Produkte erst ermöglichte. Beispielhaft seien sowohl moderne Methoden der Gittererzeugung unter direkter Verwendung von CAD (Computer Aided Design) Modellen als auch grundlegende Verbesserungen numerischer Lösungsalgorithmen genannt.

Die Qualität der in den kommerziellen CFD Applikationen implementierten Turbulenzmodelle hat im genannten Zeitraum allerdings keine vergleichbaren Fortschritte gemacht. So ist zwar wegen des Anstiegs der Rechnerleistung und der verbesserten Stabilität des Berechnungsprozesses eine weitere Verbreitung des RSMs (Reynolds Spannungs-Modell) erkennbar, das gegenüber dem einfachen STKE-Modell (Standard k-ε-Modell) (Launder und Spalding, 1972) weitaus größere Allgemeingültigkeit bzgl. verschiedenster Strömungstypen mit hohen Scherraten besitzt. Gerade aber diese breitere Anwendung zeigte, daß der höhere numerische Aufwand (das RSM erfordert die Lösung von *sieben* Transportgleichungen im Gegensatz zu *zwei* beim STKE) oftmals nicht durch qualitativ bessere Ergebnisse im unmittelbaren Vergleich mit experimentellen Daten zu rechtfertigen ist. Es treten sogar Situationen auf, in denen die eigentlich bessere Ergebnisse versprechenden RSM Berechnungen lokal deutlich schlechtere Resultate liefern als das STKE-Modell. Es handelt sich dabei um technisch relevante Strömungsfälle, die sich durch stark unterschiedliche Teilbereiche (Turbulenz, Rotation, Drall) auszeichnen, z. B.

- Strahlen in einer Querströmung
- stark verdrallte Strahlen nach einem großen Querschnittssprung
- Drall-Freistrahlen

In der Regel lassen sich diese Teilbereiche in komplexen Strömungen nicht separieren (um z. B. verschiedene Turbulenzmodelle anzuwenden), was zur Folge hat, daß viele Anwender auch heutzutage noch generell auf das STKE-Modell zurückgreifen und dabei die vielfach geringere Genauigkeit dieses Ansatzes in Kauf nehmen, auch oder gerade wegen der höheren Konvergenzraten während des iterativen Berechnungsprozesses.

Die stark verdrallte Strömung mit Wirbelaufplatzen ist ein für den Einsatz in verbrennungs- und verfahrenstechnischen Anlagen relevanter Strömungstyp, der experimentell, numerisch und theoretisch in den vergangenen Jahrzehnten eingehend untersucht wurde (einen Überblick bieten u. a. Lucca-Negro und O'Doherty, 2001). Kennzeichnend für diese Art von Strömung ist eine starke Strombahnkrümmung, welche einen erheblichen Einfluß auf die Ausbildung der Turbulenzstruktur und über deren Rückwirkung auch auf das mittlere Strömungsfeld besitzt. Als Maß der relativen Stärke tangentialer Kräfte (Fliehkräfte) zu axialen Trägheitskräften eignet sich die Drallzahl S_0. Sie entspricht dem Verhältnis von Drehimpuls- zu Axialimpulsstrom, wobei im Nenner des Bruchs der axiale Impulsstrom durch Multiplikation mit einer geeigneten Länge in die Einheit des Zählers überführt wird. Diese Länge entspricht nach Leuckel (1967) einem massengewichteten Radius, auch ein mittlerer Radius findet häufig Verwendung. Es gilt:

$$S_0 = \frac{\dot{D}}{\dot{I} R_{\text{eff}}}, \tag{1.1}$$

und

$$\dot{D} = 2\pi \int_0^\infty \rho(\overline{U}\,\overline{W} r + \overline{u'w'} r) r\, dr,$$

$$\dot{I} = 2\pi \int_0^\infty \left[\overline{P} - P_\infty + \rho(\overline{U}\,\overline{U} + \overline{u'u'})\right] r\, dr,$$

$$R_{\text{eff}} = \frac{1}{\dot{m}} \int_A r\, d\dot{m},$$

mit $\overline{U}$ der mittleren Axial-, $\overline{W}$ der mittleren Umfangsgeschwindigkeit, r dem Radius bezüglich der Rotationsachse und $\overline{u'u'}$ bzw. $\overline{u'w'}$ der axialen bzw. tangentialen Reynolds'schen Spannungskomponente. $\dot{I}$ wird dabei durch die Hinzunahme der Druckdifferenz im Falle eines Drallfreistrahls ebenfalls zu einer Erhaltungsgröße (Holzäpfel, 1996). Eine Drallzahl von $S_0 = 1{,}0$ entspricht in etwa der kritischen Drallzahl, d. h. daß die Druckgradienten, die durch die Fliehkräfte an einer Erweiterung des Strömungsquerschnittes entstehen, in der Lage sind die axiale Strömung auf der Achse bis zur Strömungsumkehr zu verzögern.

Bereits Rayleigh (1917) erarbeitete mit der Stabilitätsanalyse ausgelenkter Fluidelemente in verdrallten Strömungen einen bedeutenden Beitrag zum grundlegenden Verständnis der Phänomenologie gekrümmter Scherschichten. Auf Basis des Zirkulationsgradienten sowie spezifischer Volumenkräfte entwickelt er ein Stabilitätskriterium bzgl. der Auslenkung von Fluidballen um

kleine Beträge dr. Hierbei wird angenommen, daß unter Beibehaltung des Drehimpulses ein Element von der Bahn mit Radius r um eben jenen Betrag dr auf einen Radius $r+dr$ ausgelenkt wird. Aus seinen Analysen folgt:

$$\text{stabil} \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\rho\,\overline{W}\,r\right)^2\right] \geq 0$$

$$\text{instabil} \qquad \frac{\partial}{\partial r}\left[\left(\rho\,\overline{W}\,r\right)^2\right] < 0,$$

wobei ρ die Dichte des Fluids darstellt. Demzufolge ist eine Drallströmung mit Starrkörperprofil der Umfangsgeschwindigkeit $\overline{W} = b\,r$ stets stabil (der Radius r ist stets positiv), da bei Auslenkung eine entgegengesetzte Rückstellkraft auftritt. Im Falle eines Potentialwirbelprofils $\overline{W} = a/r$ nimmt das System einen indifferenten Zustand an (oben genanntes Kriterium ist dann gleich Null), während für steilere Profile $\overline{W} = a\,r^n$ mit $n < -1$ die Verrückung des Fluidelements sogar noch verstärkt wird und infolgedessen die Scherschicht als instabil zu charakterisieren ist.

Prandtls (1961) Dämpfungsansatz für den turbulenten Impulstransport im Falle gekrümmter Grenzschichten wurde dabei der Sichtweise gerecht, daß sich die Wechselwirkung von Drall und Turbulenz wegen des Einflusses von Coriolis- und Zentrifugalkräften im besonderen auf die radial-tangentiale Komponente des Spannungsellipsoiden auswirkt. So konnte Hirsch (1995) in seiner Arbeit zeigen, daß mit diesem Ansatz die Sensitivität auf Strombahnkrümmung in allgemeiner Form durch Korrektur der angesprochenen Komponente auch auf das STKE abgebildet werden kann.

Dagegen wurden in den Arbeiten von Launder et al. (1977) und Leschziner und Rodi (1983) im STKE die Stabilitätskriterien im Zusammenhang der Modellierung turbulenter, stark verdraller Strömungen in Form einer Korrektur der Dissipationsgleichung als Funktion turbulenter Richardsonzahlen berücksichtigt. Zur Differenzierung stabilisierender bzw. destabilisierender Zustände wurden zwei Formulierungen verwendet. Einerseits die sogenannte Gradienten-Richardsonzahl $\mathrm{Ri_g}$, zum anderen die Fluß-Richardsonzahl $\mathrm{Ri_f}$ (siehe auch Sloan, 1985):

$$\text{Gradienten-Ri} \qquad \mathrm{Ri_g} = \tau^2 \frac{\overline{W}}{r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\left(\overline{W}\,r\right)}{\partial r}\right]$$

$$\text{Fluß-Ri} \qquad \mathrm{Ri_f} = \tau^2 \frac{\overline{W}}{r}\left[r\frac{\partial\left(\overline{W}/r\right)}{\partial r}\right]$$

In diesem Zusammenhang zeigten die Arbeiten von Döbbeling (1990) und Philipp (1991), daß derartige Korrekturansätze zwar generell dazu geeignet sind, Charakteristika verdrallter Strömungen auch mit dem einfachen STKE-Modell abzubilden, jedoch einen nur stark eingeschränkten Gültigkeitsbereich beinhalten und so für eine verallgemeinerte Formulierung nicht geeignet erscheinen.

Die Überlegenheit des RSM (Mehrgleichungs-) Ansatzes im Vergleich zum STKE konnte in den Publikationen von Visser et al. (1987) sowie Weber et al. (1990) für eingeschlossene Strahlen gezeigt werden, wobei bereits darauf hingewiesen wurde, daß die Vorhersagequalität dieser Modelle mit abnehmendem Grad der Einschließung durch ein begrenzendes (Brennkammer-) System ebenfalls abnimmt. I. allg. existiert eine signifikante, nicht triviale Kopplung zwischen

der Ausprägung mittlerer Strömungsprofile und dem Grad der Einschließung, wie erst kürzlich von Fu et al. (2005) anhand zweidimensionaler LDV-Messungen (Laser Doppler Velocimetry) dargestellt wurde.

Die Untersuchungen schwach verdrallter Freistrahlen ($S_0 = 0,4$) von Gibson und Younis (1986) brachten einen formalen Zusammenhang der verwendeten Koeffizienten linearer RSM-Modelle hervor und zeigten mit variierten Konstanten auch eine Verbesserung der Ergebnisqualität. Ergebnisse von Berechnungen höherer Drallzahlen hingegen, wie von Fu et al. (1987) ($S_0 = 0,7$) und später von Hirsch (1995); Hirsch et al. (1997) ($S_0 = 0,95$) aufgezeigt, konnten weder durch erweiterte Ansätze (z. B. durch die Hinzunahme eines konvektiven Anteils (IPC), siehe Fu et al., 1988) noch durch variierte Wichtungsfaktoren (Hirsch, 1995) qualitativ verbessert werden. Die abnehmende Vorhersagegenauigkeit mit steigender Drallzahl und fallendem Grad der Einschließung ist auch hier deutlich zu beobachten.

Grundsätzlich ähnliche Eigenschaften zeigen rein algebraische Reynolds Spannungs-Modelle (ARSM) wie von Rodi (1976) vorgeschlagen, da sie lediglich reduzierte RSM-Ansätze darstellen und das prinzipielle Modellierungskonzept identisch ist. Auch die unter einschränkenden Annahmen mögliche Ableitung einer Formulierung effektiver Viskositätsmodelle (siehe z. B. Taulbee, 1992)[1] kann das Problem einer ungenügenden Vorhersagequalität in soeben genannten Situationen nicht lösen.

1.2 Bisherige Arbeiten

Die vorangegangene Darstellung der Problematik soll nun anhand des Vergleichs experimenteller und numerischer Ergebnisse konkretisiert werden. Dabei enthält die Arbeit von Holzäpfel (1996) den experimentellen und jene von Hirsch (1995) den numerischen Teil der Untersuchung. Die in Bild 1.1 skizzierte Versuchsanordnung einer koaxialen Ringspaltströmung wurde von Holzäpfel (1996) mit Hilfe der fünffach Hitzdrahtanemometrie detailliert vermessen und so eine Datenbasis mittlerer Geschwindigkeiten sowie Reynolds'scher Spannungen erstellt. Hierbei wird der Tangentialimpuls der Strömung durch den links angeordneten „movable-block“ Drallgenerator erzeugt. Im Falle einer Untersuchung des Freistrahls wird die im Bild rechts angeordnete zylindrische Kammer entfernt.

1 Man wird hierbei der Variation des Zusammenhangs $\nu_t = C_\mu k^2/\varepsilon$ insofern gerecht, indem der Koeffizient C_μ als Funktion der strömungsabhängigen Größen Produktion und Dissipation dargestellt wird, also variabel und eben nicht, wie in linearen Gradientenansätzen nach Boussinesq (1877), als konstanter Wert.

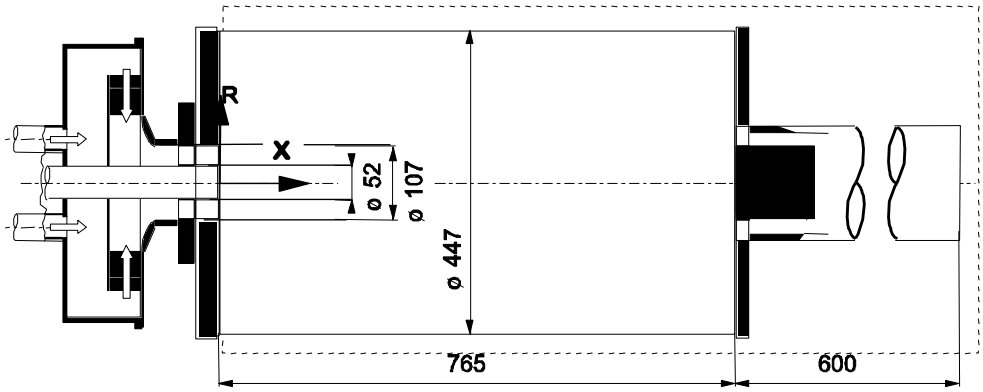


Bild 1.1. Querschnitt der Versuchsanlage von Holzäpfel (1996) (aus Hirsch, 1995). Im Drallfreistrahl fallen die gestrichelt umrandeten Komponenten weg. Alle Dimensionen in [mm].

1.2.1 Eingeschlossene Drallströmung

Der Vergleich experimenteller Daten mit Berechnungen auf Basis des RSM nach Weber et al. (1990) in Bild 1.2 und Bild 1.3 zeigt für die eingeschlossene Strömung mit einer Drallzahl $S_0 = 0,95$ eine befriedigende Übereinstimmung, wohingegen die mit Hilfe des STKE-Modells bestimmten Ergebnisse stark von der Realität abweichen. Bild 1.2 zeigt die Isolinien der auf den eintretenden Massenstrom bezogenen Stromfunktion. Global betrachtet ist leicht zu erkennen, daß das Mehrgleichungsmodell die Verteilung des Massenstroms im betrachteten Strömungsfeld korrekt abbilden kann, wobei hier aufgrund der kumulierten Meßfehler in den experimentellen Daten Abweichungen in der Größenordnung von etwa 10% akzeptiert werden müssen. Das RSM ist im Gegensatz zum STKE in der Lage, die für vorliegende, stark verdrallte Strömung typische Präkontraktion der Stromlinien (eine weit stromauf befindliche Konzentration der Strömung auf den Austrittsquerschnitt, hier bei etwa der halben Brennkammerlänge, gekennzeichnet durch parallel verlaufende Stromlinien; zweidimensionaler Zwang (Taylor, 1921)) in guter Übereinstimmung mit dem Experiment abzubilden.

Bild 1.3 zeigt sowohl die radialen Profilverläufe der axialen ($\overline{U}$-) und azimutalen ($\overline{W}$-) Geschwindigkeitskomponenten als auch der axialen Reynolds'schen Normalspannung ($\overline{u'u'}$) und der tangentialen Reynolds'schen Schubspannung ($\overline{v'w'}$). In der Detailansicht wird ebenfalls die große Ähnlichkeit von Messung und RSM-Simulationsergebnis deutlich. Die im Falle des STKE vorhergesagte, deutlich erhöhte tangentiale Schubspannung führt zu einem festkörperwirbelähnlichen Profil der Tangentialgeschwindigkeit und so zu einer stark unterschiedlichen Druckverteilung im betrachteten Rechengebiet, wodurch letztlich das Versagen dieses Modells in vorliegendem Fall herbeigeführt wird. Wie Hirsch (1995) zeigte, ist hierfür die dem Boussineq'schen Ansatz (Boussinesq, 1877) zugrunde liegende lineare Verknüpfung von Reynolds'schem Spannungstensor und Schertensor der mittleren Geschwindigkeiten verantwortlich, für die er eine befriedigende Korrektur vorstellen konnte.

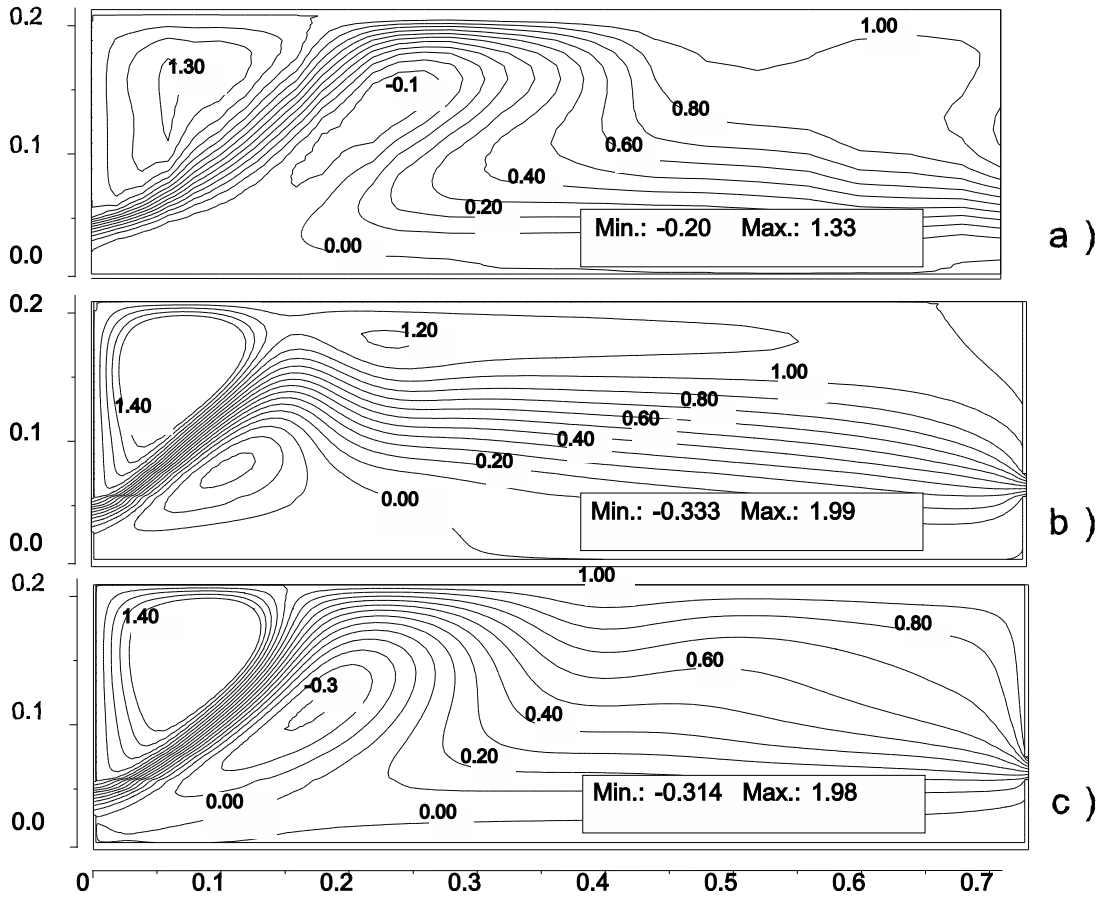


Bild 1.2. Isolinien der normierten (dimensionslosen) Stromfunktion, a) Messung, b) STKE Modellrechnung, c) RSM Rechnung (aus Hirsch, 1995). Die Achsen entsprechen den geometrischen Abmaßen in [m].

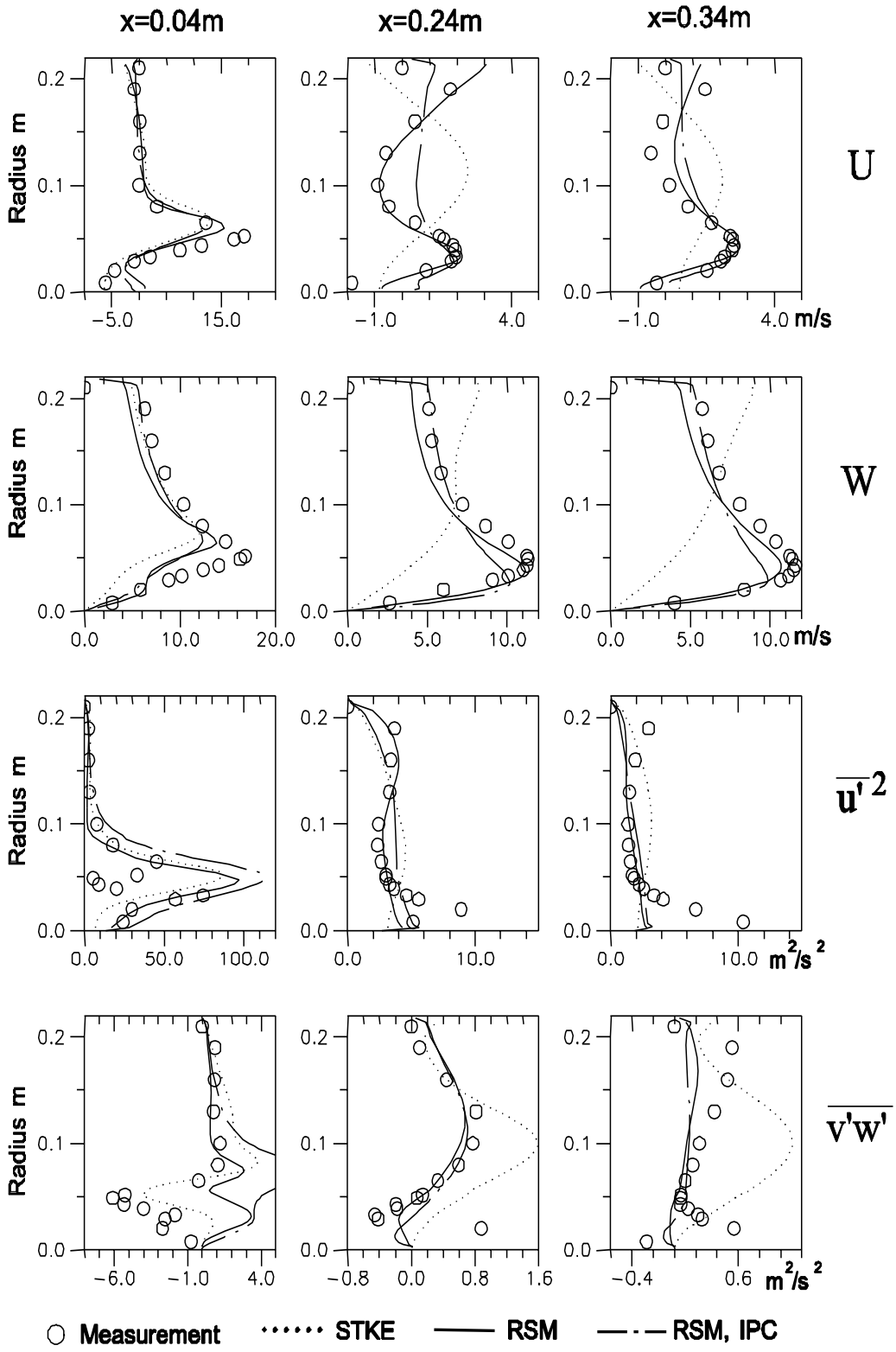


Bild 1.3. Vergleich von radialen Profilen aus Messung und Berechnung für die eingeschlossene Drallströmung (aus Hirsch et al., 1997).

1.2.2 Drallfreistrahl

Im Gegensatz zum eingeschlossenen Drallstrahl kehrt sich die Qualitätsordnung der Ergebnisse im hochverdrallten Freistrahl mit $S_0 = 0,95$ um. Die Ergebnisse des RSM sind eindeutig schlechter als die des STKE, wie im Bild 1.4 und Bild 1.5 offensichtlich wird. Bild 1.4 zeigt die Isolinien der normierten Stromfunktion aus Messung (nach Holzäpfel, 1996) und RSM Rechnung und macht deutlich, daß die RSM Rechnung weder Größe noch Stärke der inneren Rezirkulationszone adäquat abbilden kann. In Bild 1.5 sind zusätzlich die Ergebnisse des erweiterten Ansatzes von Fu et al. (1987) durch die strichpunktierte Linie markiert dargestellt. Trotz einer tendenziellen Verbesserung der numerischen Ergebnisse in Hinblick auf die Übereinstimmung mit der Messung (insbesondere der axialen Geschwindigkeit in der Nähe der Symmetrieachse), sind die Abweichungen, wie im Fall der axialen Normalspannung, inakzeptabel. In Folge einer scheinbar trivialen Änderung der äußeren Randbedingung resultiert eine signifikante Verschlechterung der Vorhersagegenauigkeit des verwendeten Modellansatzes.

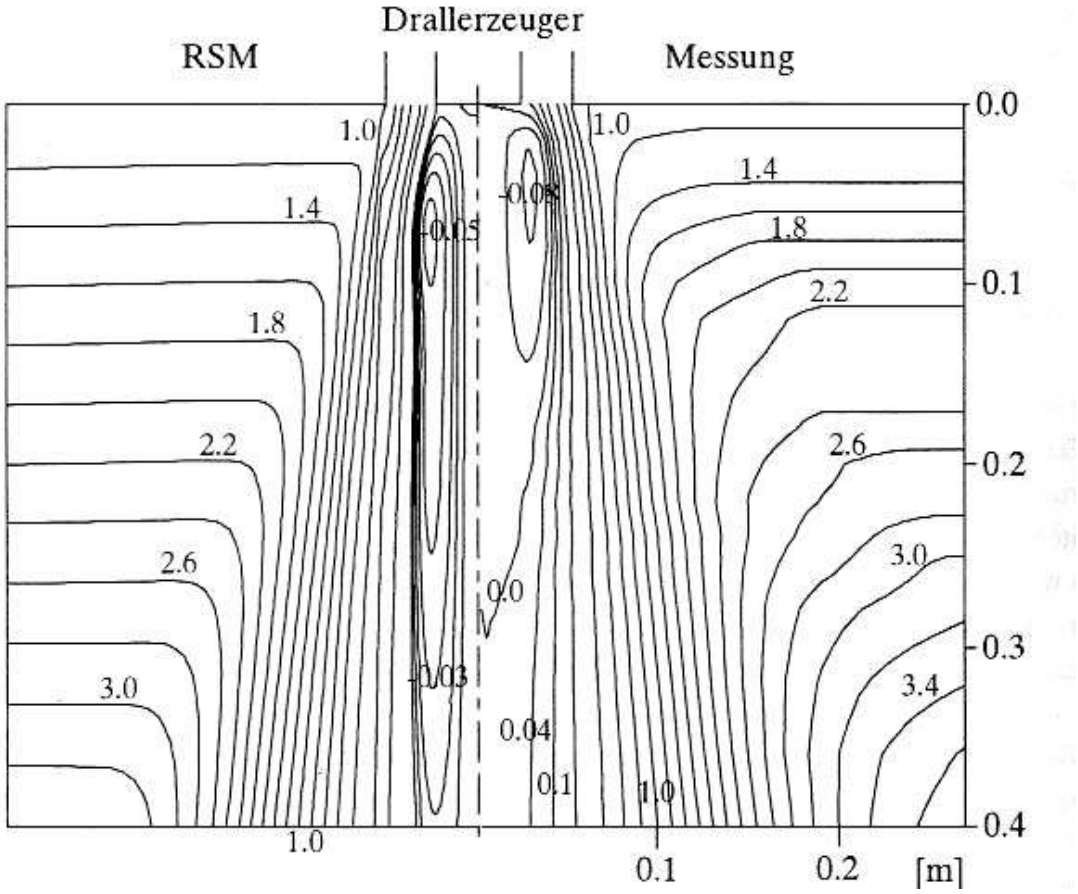


Bild 1.4. Vergleich der normierten Stromfunktion am Drallfreistrahl; links: RSM Berechnung, rechts: Messung (aus Holzäpfel, 1996).

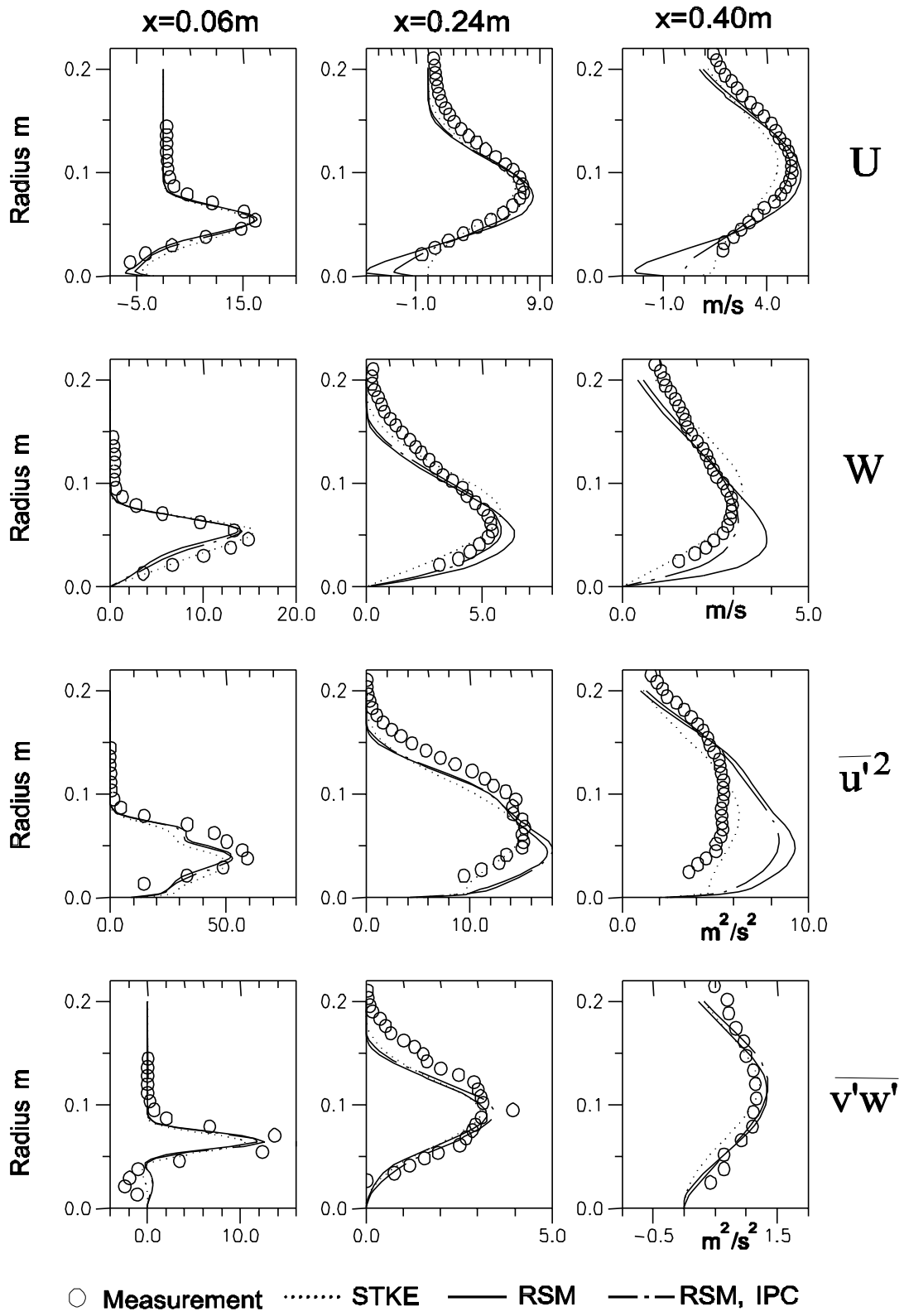


Bild 1.5. Vergleich von radialen Profilen aus Messung und Berechnung für den Drallfreistrahl (aus Hirsch et al., 1997).

1.2.3 Drallinduzierte Intermittenz

Hirsch (1995) begründet das Versagen der Mehrgleichungsmodelle im Falle einer stark verdrallten, nicht eingeschlossenen Strömung mit einem durch den Drall verstärkten Intermittenzeffekt, der später von Holzäpfel (1996) auch experimentell nachgewiesen und quantifiziert werden konnte (siehe auch Holzäpfel et al., 1996; Holzäpfel und Lenze, 1997; Holzäpfel et al., 2002). Aufgrund des Fehlens einer begrenzenden Wand resultiert ein negativer radialer Gradient des Totaldrucks, der zu einer Selbstverstärkung der Instabilität im Bereich des äußeren Strahlrandes führt. Die Wahl des Totaldrucks begründet sich dabei darin, daß bei fehlender räumlicher Begrenzung eine „Rekuperation“ von kinetischer Energie in statischen Druck *nicht* gegeben ist, das Kriterium zur Unterscheidung von stabiler bzw. instabiler Situation aber auch die Bewegungsenergie beinhalten sollte.

An die Stelle von aus dem Hauptstrahl herausgeschleuderten Fluidballen treten drallfreie und nur schwach turbulente Teile des Umgebungsfluids. Wegen des anfänglichen Fehlens einer Umfangsgeschwindigkeit wirken dem radialen Druckgradienten keine Fliehkräfte entgegen und die Fluidballen aus der Umgebung können entsprechend tief eindringen[2]. Erst auf dem radial nach innen gerichteten Weg nehmen diese tangentialen Impuls auf bzw. werden durch die turbulente Scherung und Streckung im weiter innen liegenden Teil der Strömung mehr und mehr aufgelöst. Zur Verdeutlichung zeigt Bild 1.6 die experimentell ermittelte Verbundwahrscheinlichkeitsdichte der radialen (v'-) und tangentialen (w'-) Fluktuation an drei verschiedenen radialen Positionen des Freistrahls in der axialen Schnittebene x=100 mm. Mit sich vergrößerndem Abstand von der Rotationsachse in Richtung des Strahlrands (r=60 mm bzw. r=80 mm) wird eine bimodale Verteilung der Stichprobenwahrscheinlichkeiten deutlich erkennbar, deren schlankes Maximum im dritten Quadranten des zugrunde liegenden Koordinatensystems durch die eindringenden ($v' < 0$), drallfreien ($w' < 0$) Umgebungsballen hervorgerufen wird.

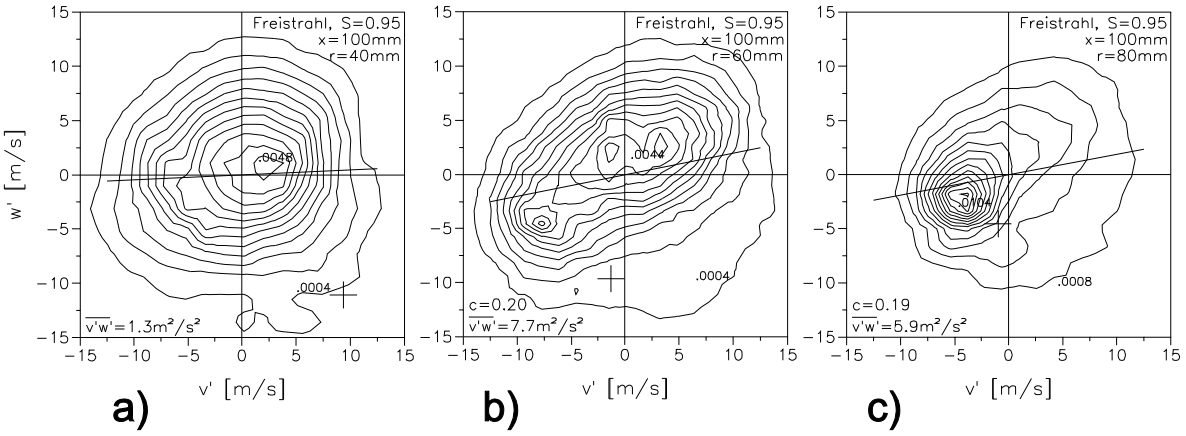


Bild 1.6. Isolinien der Verbundwahrscheinlichkeitsdichte der radialen und tangentialen Geschwindigkeitsschwankung an drei radialen Positionen (aus Holzäpfel, 1996): a) r=40 mm b) r=60 mm c) r=80 mm.

2 Holzäpfel konnte ihre Wirkung durch Zweipunkt-Korrelationen bis zur Achse des Drallfreistrahls nachweisen.

Der hier beschriebene Effekt ist nicht nur für Drallströmungen, sondern allgemein bei starker Strombahnkrümmung zu erwarten, wenn sich ein negativer und bzgl. der Strombahn radialer Totaldruckgradient über einer Scherschicht bilden kann. Diese Situation stellt sich in technischen Strömungsfeldern häufig ein, wenn Bereiche innerhalb der Strömung existieren, die bzgl. Turbulenz und wirkender Kräfte (Stichwort Zentrifugalkraft) große Unterschiede aufweisen. Die bedeutende Relevanz der RANS-Simulation im industriellen Umfeld und deren Versagen in den genannten Situationen dient als Motivation für eine detaillierte Untersuchung der verantwortlichen Effekte.

1.3 Ziele der vorliegenden Arbeit

Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführten Grobstruktursimulationen sollen dazu dienen, einen tieferen Einblick in die Wirkungsweise der im vorangegangenen Abschnitt beschriebenen drallverstärkten Intermittenz zu erlangen. Mit Hilfe dieser Methode erscheint es möglich, statistische Effekte adäquat zu beschreiben und deren Einfluß auf die resultierenden Mittelwerte relevanter Strömungs- und Turbulenzgrößen abzubilden. Die aus den Berechnungen gewonnene Datenbasis ermöglicht neben dem unmittelbaren Vergleich mit den von Holzäpfel experimentell gewonnenen Erkenntnissen auch die Überprüfung der Gültigkeit von Annahmen, unter denen alle in industriell eingesetzten Berechnungsprogrammen implementierte Turbulenzmodelle entwickelt worden sind. Ein termweiser Vergleich von Modellvorhersage und (LES)-Experiment, wie er beispielsweise für Grenzschichten in der Publikation von Schwarz und Bradshaw (1994) zu finden ist, wird so auch für einen im industriellen Anwendungsbereich wichtigen Strömungsfall möglich.

Das im Gegensatz zu den experimentellen Daten voll konsistente Strömungsfeld erlaubt eine direkte Untersuchung der häufig für das Versagen angesehenen Kopplung von fluktuierendem Druck- und Geschwindigkeitsfeld, welches mit heute verfügbaren Meßmethoden einem realen Experiment, wenigstens in drei Dimensionen, unzugänglich ist. Die Daten ermöglichen eine Überprüfung vorhandener Verbesserungsansätze, welche sich beispielsweise einer einfachen Koeffizientenvariation linearer Modelle bedienen, oder durch Hinzunahme weiterer nichtlinearer Terme charakterisiert sind. Hieraus ist auch ableitbar, ob überhaupt und in welcher Weise eine Modifikation vorhandener Turbulenzmodelle zur Beschreibung des Intermittenzeffektes denkbar ist. Dabei muß die im Hinblick auf die für die praxisgerechte Anwendung relevante Forderung nach Stabilität und hoher Effizienz berücksichtigt werden, weshalb sich die in dieser Arbeit durchgeführte Untersuchung auf lineare und quadratische Turbulenzmodelle beschränkt.

In Abschnitt 2 werden zunächst die notwendigen Gleichungen zur Beschreibung isothermer, inkompressibler Strömungen vorgestellt und auf die Phänomenologie der Turbulenz eingegangen. Die hieraus ableitbaren Konsequenzen für die numerische Beschreibung sowie etablierte Ansätze zur Lösung der daraus resultierenden Probleme werden aufgezeigt. Der meist im industriellen Umfeld verwendete Ansatz der Reynolds'schen Mittelung wird zum einen mathematisch beschrieben, zum anderen werden Defizite in der Modellierungstrategie angesprochen und diskutiert. Desweiteren stellt dieses Kapitel die grundlegenden Unterschiede des Grobstrukturansatzes vor, beschreibt die Problematik der Feinstrukturmodellierung und geht genauer auf zwei weit

verbreitete Modellierungsansätze ein. Hieraus lassen sich bereits Anforderungen an die numerische Simulation ableiten, im besonderen dann, wenn neben der Bildung von konventionellen Mittelwerten (Geschwindigkeit, Reynolds'sche Spannungen), auch der fluktuierende Druck in Betracht gezogen werden soll.

Abschnitt 3 geht auf die allg. gegebene Problematik großer Datenmengen im Zusammenhang mit der Grobstruktursimulation ein und beschreibt den in dieser Arbeit verwendeten Lösungsansatz zur Reduktion der Datenmenge. Dazu erfolgt neben der Mittelwertbildung über eine Anzahl von Stichproben aus einer Zeitreihe noch eine räumliche Mittelung unter Annahme der Gültigkeit des Ergoden-Theorems.

Grundlegende numerische Methoden sowie verwendete Modelle werden in Abschnitt 4 kurz vorgestellt. Aufgrund des Einsatzes eines etablierten Berechnungswerkzeugs aber wird der interessierte Leser weitestgehend auf die Literatur verwiesen.

Die verwendeten Randbedingungen, grundlegende Einstellungen zur Gewährleistung der Stabilität der iterativen Berechnung sowie das numerische Rechengitter sind entscheidende Punkte für jede Simulation und werden deshalb am Ende des Abschnitts 4 bzw. zu Beginn des Abschnitts 5 detailliert beschrieben. Im Anschluß daran werden die erhaltenen Ergebnisse zunächst auf ihre Konsistenz und physikalische Plausibilität hin überprüft. Sind diese Voraussetzungen erfüllt, können auf Basis von Zeitreihen an diskreten Punkten im Beobachtungsgebiet Analysen durchgeführt werden, die Intermittenzeffekte aufzeigen und zudem Aufschluß über die Ergebnisqualität der Simulationsrechnung (über den *direkt* gelösten Teil der Turbulenz), auch im Vergleich zum Experiment, geben. Für eine weitere Analyse im Raum ist eine statistische Stationarität bzgl. der Mittelungsrichtung erforderlich. Nur so ist eine Validierung der generierten Mittelwerte anhand eines Vergleichs mit den empirischen Ergebnissen ohne Einschränkung zulässig.

Im weiteren Verlauf dieser Arbeit werden dann termweise Vergleiche einzelner Beträge zur Transportgleichung der Reynolds'schen Spannungen durchgeführt, die anhand von Abweichungen zwischen Simulationsergebnis und Modellansatz eine Beschreibung der Wirkweise der Intermittenz auf die Turbulenzstruktur ermöglichen. Die Ergebnisse der Modelle basieren dabei stets auf direkt eingesetzten mittleren Größen aus der Grobstruktursimulation. Am Ende dieser Arbeit sollen Korrelationen zwischen Stabilitätsparametern und den identifizierten Wirkungen der Intermittenz Aufschlüsse über potentielle Korrektur- bzw. Modellansätze geben.

2 Beschreibung turbulenter Strömungen

Dieses Kapitel stellt zum einen die grundlegenden Gleichungen vor, welche zur Charakterisierung reibungsbehafteter Strömungen notwendig sind. Zum anderen wird die Phänomenologie der Turbulenz kurz beschrieben, werden technisch interessante Eigenschaften aufgezeigt und daraus Konsequenzen für die numerische Simulation solcher Strömungen abgeleitet.

2.1 Navier-Stokes-Gleichungen

Die mathematische Beschreibung eines beliebigen strömenden Fluids erfolgt durch die Kontinuitätsgleichung (*Gesetz zur Erhaltung der Masse*),

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho U_j\right) = 0, \tag{2.1}$$

sowie die Impulserhaltung für alle drei Raumrichtungen des $\mathbb{R}^3$ (*Gesetz zur Erhaltung des Impulses*),

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho U_i U_j\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij} + \rho\, g_i\, \delta_{i3}, \tag{2.2}$$

mit $i, j \in \{1,2,3\}$. Das Kronecker Delta δ_{ij} nimmt dabei für $i = j$ den Wert 1 an, für alle $i \neq j$ den Wert 0. Es sei an dieser Stelle angemerkt, daß, sofern nicht anders vermerkt, stets die Einstein'sche Summenkonvention bei der Formulierung partieller Differentialgleichungen verwendet wird (Barr, 1989). In Gleichung (2.1) und (2.2) bezeichnet U_i die Geschwindigkeitskomponente in Richtung der i-ten kartesischen Koordinate, ρ die Dichte, P den statischen Druck, τ_{ij} den Spannungstensor und $\rho\, g_i\, \delta_{i3}$ den häufig vernachlässigbaren Einfluß der Gravitation. Handelt es sich beim zu berechnenden Fluid um ein Newton'sches, kann τ_{ij} wie folgt mit dem Strömungsfeld verknüpft werden (Schlichting, 1982):

$$\tau_{ij} = \rho\, \nu \left[\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial U_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right]. \tag{2.3}$$

Die kinematische Viskosität ν ist eine Stoffgröße, welche vom inneren Zustand (dessen Stoffzusammensetzung und Temperatur) des Fluids abhängig ist. Eine detaillierte Herleitung des Spannungstensors (2.3) zeigt beispielsweise Schlichting (1982). Unter Verwendung der Definition des Spannungstensors (2.3) für Newton'sche Fluide in den Impulsgleichungen (2.2) erhält man den allgemein unter dem Namen *Navier-Stokes-Gleichungen* bekannten mathematischen Zusammenhang,

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho U_i\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\rho U_i U_j\right) = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left\{\rho\, \nu \left[\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial U_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right]\right\} + \rho\, g_i\, \delta_{i3}, \tag{2.4}$$

mit $i,j,k \in \{1,2,3\}$. Es folgt somit ein System mit sechs unbekannten Größen (U_i, P, ρ und ν), für die allerdings nur vier Gleichungen zur Verfügung stehen. Dichte und Viskosität sind als Funktion des thermodynamischen Zustandes des Fluids beschreibbar, es gilt allgemein der funktionale Zusammenhang $\rho,\nu = f(P,T)$. Die Schließung des vorliegenden Gleichungssystems bedarf somit entweder einer weiteren Gleichung zur Bestimmung der Temperatur T, oder aber einer Vereinfachung des vorliegenden Systems unter Beachtung der korrekten Beschreibung der Strömung. Aus Gründen einer numerisch effizienten Berechnung ist stets ein möglichst hoher Grad an Vereinfachung wünschenswert.

Für den Fall einer vernachlässigbar kleinen Druck-Dichte-Korrelation kann das Fluid vereinfachend als *inkompressibel* angenommen werden (Forkel, 2000; Spurk, 2004). Dies ist immer dann zulässig, wenn das betrachtete Fluid erstens nur von Eigenerwärmung gekennzeichnet ist, also keine Wärmezufuhr von außen erfolgt, zweitens die dominierende Strömungsgeschwindigkeit im betrachteten Gebiet um ein Vielfaches kleiner als die Schallgeschwindigkeit ist (es muß gelten: $U^2/c^2 = \mathrm{Ma}^2 \ll 1$; meist wird $\mathrm{Ma} < 0,3$ genannt) sowie drittens keine akustischen Effekte innerhalb der Strömung vorhanden sind. Die Abhängigkeit der Dichte vom Druck entfällt, sie ist nur noch eine Funktion der Temperatur T.

Ist die chemische Zusammensetzung des zu untersuchenden Fluids bekannt und, im Falle nicht reagierender Strömungen, zudem konstant in Raum und Zeit, so berechnet sich die Viskosität ν im allgemeinen aus dem empirischen Zähigkeitsgesetz als Funktion der Temperatur, $\nu = f(T)$. Liegt desweiteren noch eine isotherme Strömung im Rechengebiet vor, so sind Dichte und Viskosität eindeutig zu bestimmen und für die verbleibenden vier Unbekannten U_i und P stehen vier Gleichungen zur Verfügung. Problematisch allerdings ist, daß für die Berechnung des Drucks keine eigene Gleichung vorhanden ist und nur mit Hilfe von Nebenbedingungen aus einer energetischen Betrachtung bzw. unter Beachtung der Zustandsgleichung eine Lösung möglich ist.

Im Falle der in der vorliegenden Arbeit betrachteten inkompressiblen Strömungen werden i. allg. sogenannte *Druckkorrekturverfahren* eingesetzt, um ein konsistentes Druckfeld zum jeweiligen Geschwindigkeitsfeld zu erhalten. Hierbei paßt sich der Druck quasi automatisch an das vorliegende Geschwindigkeitsfeld an, da die Kontinuität (2.1) als Nebenbedingung zu erfüllen ist (Piquet, 1999)[1]. Algorithmen zur Bestimmung des Drucks im Beobachtungsraum stellen u.a. Patankar (1980) und Noll (1993) detailliert vor. Die im Zusammenhang mit der mathematischen Beschreibung turbulenter Strömungen eigentliche Hauptproblematik besteht in der einhergehenden Bandbreite relevanter Turbulenzskalen, sowohl zeitlich, als auch räumlich und soll in folgendem Abschnitt genauer beschrieben werden.

1 Es handelt sich um ein auf den Druck bezogenes Verfahren. Bei kompressiblen Problemen kommen hingegen oftmals dichtebezogene Verfahren zum Einsatz, bei denen aus der Kontinuität als Nebenbedingung anstatt des Drucks die Dichte berechnet wird (Noll, 1993).

2.2 Das Phänomen Turbulenz

Der Begriff *Turbulenz* [lat.: *turbulentus*: unruhig, stürmisch] meint im physikalischen Sinne das Auftreten von Wirbeln verbunden mit einem breiten Spektrum von Längen- und Zeitskalen in Strömungen von Fluiden (Drosdowski, 1989). Hinze (1959) definiert den Begriff als einen Zustand eines Fluides, in dem die Zustandsgrößen einen (quasi-) zufälligen Charakter in Raum- und Zeitkoordinaten aufweisen. Die Bewegung eines Fluid ist dabei wesentlich durch das Zusammenspiel von Trägheits- und (molekularen) Reibungskräften bestimmt. Eine nach Osborne Reynolds benannte dimensionslose Kennzahl stellt genau diese beiden Größen ins Verhältnis und charakterisiert so die Neigung einer Strömung, Turbulenz zu entwickeln. Betrachtet man die Definition der Reynolds-Zahl Re,

$$\mathrm{Re} = \frac{U\,l}{\nu},$$

mit der charakteristischen Geschwindigkeit U, einer typischen Längenskala l und der Viskosität des Fluids ν, so stellt sie eine Verknüpfung strömungs- bzw. geometrieabhängiger Größen (U und l) mit der Zähigkeit, also einer Stoffeigenschaft des Fluids, dar. Trägheitskräfte sind durch den Konvektionsterm der Strömung beschrieben, also eine quadratische (nicht lineare) Funktion von Geschwindigkeitskomponenten, $f = f(U^2)$, vgl. Gleichung (2.4). Die balancierende Reibung hingegen ist bzgl. der Geschwindigkeit lediglich linear, $f = f(U)$. Tritt nun bei einer genügend großen Reynolds-Zahl, $U\,l \gg \nu$, eine Störung im Geschwindigkeitsfeld als Folge einer Instabilität auf, so wird sie aufgrund des nichtlinearen Trägheitsterms angefacht und eine vollständige Dämpfung der Initialstörung durch die molekulare Viskosität (diffusiver Effekt) kann nicht mehr erzielt werden. Bildlich gesprochen wirkt der Störung nichts mehr entgegen. Die stark dominierenden Trägheitskräfte übersteigen die dämpfende Wirkung der Reibung um ein Vielfaches, sodaß eine quasi-reibungsfreie Instabilität[2] resultiert, verbunden mit der Entstehung großskaliger Wirbelstrukturen (integrales Längenmaß L). Diese beeinflussen die Strömung makroskopisch und erhalten ihre Bewegungsenergie aus der Hauptströmung. Da sich die Strukturen relativ zur Umgebung bewegen, entstehen an deren Rändern weitere, kleinere Wirbel. Dieser Prozeß (*Kaskadenprozeß*) setzt sich solange fort, bis bei sehr kleinen Wirbeln schließlich wieder viskose Effekte über die Trägheit dominieren und eine Umwandlung der kinetischen Energie in innere erfolgt. Es zeigt sich eine Trennung großer reibungsfreier Turbulenzskalen und kleinster Strukturen, auf denen viskose Reibung stattfindet. Die entstehenden Strukturen sind stets dreidimensional, instationär und zeichnen sich durch eine Rotationsbewegung aus. Hieraus folgt u.a. eine erhöhte Durchmischung des Mediums, was Turbulenz zu einem für die technische Anwendungen interessanten Phänomen werden läßt.

Das Auftreten von Geschwindigkeitsgradienten der mittleren Strömung, sei es in unmittelbarer Nähe fester Wände oder in freien Scherströmungen, ist die notwendige Voraussetzung für die Existenz von Turbulenz, da ohne sie sowohl Trägheits- als auch Reibungskräfte verschwinden. Mit anderen Worten: Turbulenz braucht einen Antrieb, der i. allg. als Verlust an Totaldruck erkennbar ist. Existiert diese Quelle nicht mehr, klingt auch die turbulente Bewegung als Folge von Dissipation in innere Energie, wie in allen realen, viskosen (reibungsbehafteten) Fluiden, ab. Turbulente Strömungen weisen folglich, *trotz* der quasi Reibungsfreiheit der großen Struktu-

2 Im Grenzfall $\mathrm{Re} \to \infty$ verschwindet der Einfluß der Reibung vollständig.

ren, stets einen dissipativen Charakter auf und sind von einer kontinuierlichen Energiezufuhr der Hauptströmung abhängig.

Der sukzessive Transfer von Bewegungsenergie läßt sich durch einen Kaskadenprozeß beschreiben, in dem die der mittleren Strömung entzogene Energie an jeweils kleinere Wirbel übertragen wird. Das anfängliche Paradoxon einer Koexistenz von quasi reibungsfreiem Verhalten und Dissipation wird so physikalisch sinnvoll erklärt (Hirsch, 1995) und spiegelt sich typischerweise in Energiespektren turbulenter Geschwindigkeitszeitreihen wider.

Bild 2.1 zeigt schematisch die kinetische Turbulenzenergie E als Funktion der Wellenzahl k, $E = f(k)$, doppelt logarithmisch aufgetragen. Zu erwähnen bleibt noch, daß Turbulenz eine *Strömungs*eigenschaft ist und keine Stoffeigenschaft des Fluids.

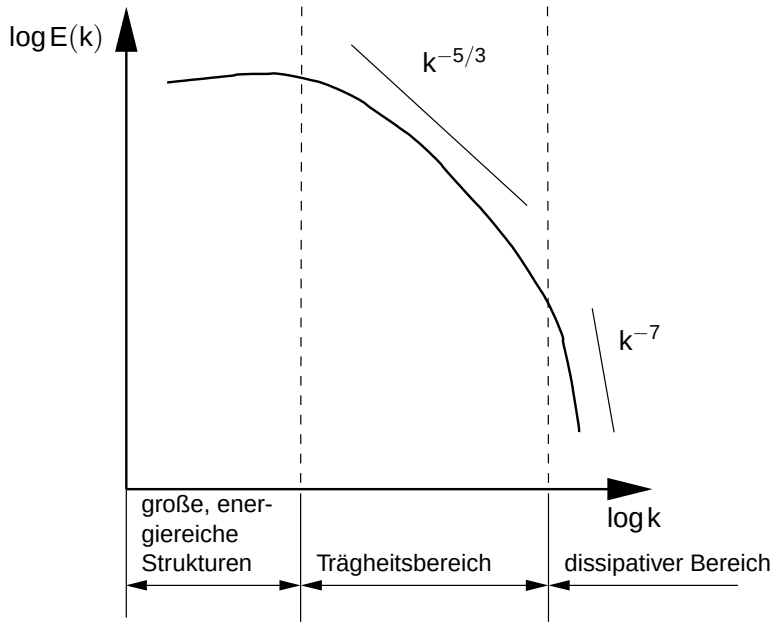


Bild 2.1. Turbulentes Energiespektrum (schematisch).

Die skalare Dissipationsrate ε charakterisiert dabei die Weitergabe turbulenter Bewegung von großen zu immer kleineren Skalen, bis hin zur Umwandlung in innere Energie des Fluids. Mit Hilfe dieser Größe sowie der kinematischen Viskosität des Fluids ν lassen sich die kleinsten, in der Strömung auftretenden Skalen (räumlich und zeitlich) (*Kolmogorov'sche Längen- und Zeitskalen η und τ*), beschreiben (Tennekes und Lumley, 1972; Wilcox, 1998). Es gilt,

$$\eta \equiv \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \tag{2.5}$$

und

$$\tau \equiv \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}. \tag{2.6}$$

Das untere Ende des Energiespektrums (die kleinste auftretende Wellenzahl) wird durch die globale Geometrie begrenzt (integrales Längenmaß L), ein Entzug von Bewegungsenergie aus der

Hauptströmung findet im Bereich dieser kleinen Wellenzahlen statt. Skalen dieser Größenordnung sind aufgrund des direkten Zusammenhanges mit der äußeren Geometrie des Strömungsproblems nur schwer in allgemeiner Form zu charakterisieren. Das obere Ende der Kaskade hingegen ist durch die Kolmogorov'sche Länge charakterisiert und so unmittelbar mit der Dissipation verbunden. Im mittleren Bereich verläuft der Transfer von Energie kontinuierlich. Dieser sogenannte Trägheitsbereich ist im wesentlichen durch den $k^{-5/3}$-Abfall des Energiespektrums beschrieben. Hin zu größeren Wellenzahlen fällt $E(k)$ wegen des wachsenden Einflusses der kinematischen Viskosität noch stärker ab. Die von Schlichting zitierte Theorie von Heisenberg (1948) spricht hier von einer Proportionalität $E(k) \sim k^{-7}$. Die eigentliche Umwandlung der Turbulenzbewegung in innere Energie des Fluids geschieht in der Größenordnung $k\eta < 0,5$, wobei für $k\eta \approx 0,2$ ein Maximum zu beobachten ist (Hinze, 1959).

Der Abfall kinetischer Energie mit steigender Wellenzahl k läßt sich durch einen Verteilungsprozeß veranschaulichen. Eine ursprünglich auf wenige großskalige Strukturen beschränkte energiereiche Störung gibt die beinhaltete Bewegungsenergie an immer kleinere Skalen weiter, wobei wegen des chaotischen Charakters der Turbulenz ein „Gedächtnisverlust" innerhalb der Kaskade zu beobachten ist und eine Angleichung der Wirbel resultiert. Dies rechtfertigt die Annahme von Isotropie im Bereich dieser Skalen. Kleine Skalen haben die ursprünglichen Eigenschaften (Anisotropie), geprägt durch die äußere Geometrie des betrachteten Problems, gewissermaßen vergessen und sind praktisch unabhängig von ihr charakterisierbar. Universell gültige Beschreibungen kleiner Skalen sind somit deutlich einfacher abzuleiten, während dies für großskalige Strukturen, wie bereits angesprochen, nicht möglich ist. Diese Universalität kleinskaliger Turbulenz stellt eine signifikante Vereinfachung des Problems dar und ist für die Modellentwicklung von entscheidender Relevanz.

2.3 Konsequenzen für die numerische Beschreibung turbulenter Strömungen

Die numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen liefert für turbulente Strömungen nur dann exakte Ergebnisse, wenn alle relevanten Skalen der Strömung berücksichtigt werden, d. h. wenn die gesamte in der Strömung enthaltene Information in die mathematische Beschreibung einbezogen wird. Das betrachtete Problem muß bzgl. aller beinhalteter Skalen beschreibbar sein, physikalisch betrachtet sind alle Freiheitsgrade[3] zu beachten. Aus dem vorangegangenen Abschnitt 2.2 läßt sich unmittelbar ableiten, daß *alle* im Kaskadenprozeß beinhalteten Wirbelklassen beachtet werden müssen. Geschieht dies direkt, also ohne weitere Vereinfachungen in Form modellhafter Annahmen, so handelt es sich bei dieser Methode um die sogenannte Direkte Numerische Simulation (DNS).

DNS-Rechnungen erfordern somit zur exakten Beschreibung eines Strömungsproblems eine sehr feine räumliche wie zeitliche Diskretisierung. Der gesamte Bereich relevanter Skalen,

3 Der Freiheitsgrad eines physikalischen Systems ist eine allgemeine Koordinate (z. B. Raum- und/oder Zeitkoordinaten), mit deren Hilfe das System beschreibbar ist.

beschreibbar durch das Verhältnis der größten, energiegeladenen Skalen l zu den kleinsten dynamischen η (Kolmogorov'sches Längenmaß) mit Hilfe des Zusammenhangs

$$\frac{l}{\eta} = \mathcal{O}(\mathrm{Re}_l^{3/4})$$

ist hierbei zu berücksichtigen. Desweiteren erfordert die Berechnung der zeitlichen Entwicklung eine Auflösung der Größenordnung

$$\tau \frac{l}{u'} = \mathcal{O}(\mathrm{Re}_l^{1/2}),$$

mit u' der typischen Geschwindigkeitsfluktuation und τ dem Kolmogorov'schen Zeitmaß. Die notwendige Anzahl diskreter Punkte im Raum $\mathbb{R}^3$, die zu einer vollständigen Beschreibung aller (räumlichen) Skalen in einem Würfel der Seitenlänge $L = l$ notwendig sind, liegt somit in der Größenordnung $\mathcal{O}(\mathrm{Re}_l^{9/4})$. Betrachtet man nun noch die zeitliche Entwicklung innerhalb der größten Zeitskalen der Strömung, so sind aufgrund der zusätzlich zu beachtenden (Zeit)-Koordinate Freiheitsgrade der Ordnung $\mathcal{O}(\mathrm{Re}_l^{11/4})$ zu beschreiben. Für die in vorliegender Arbeit betrachtete Strömung mit einer Reynoldszahl $\mathrm{Re} \approx 7 \cdot 10^5$ ergeben sich nach dieser Abschätzung Freiheitsgrade der Größenordnung $\mathcal{O}(10^{13})$. Die Navier-Stokes-Gleichungen müßten somit in Raum und Zeit circa zehn Billionen Mal gelöst werden. Soll zudem noch das Nyquist-Kriterium bei der Abschätzung berücksichtigt werden, um tatsächlich alle vorkommenden Skalen adäquat zu betrachten, sollte der eben angegebene Wert nochmals mit einem Faktor von mindestens Acht (2^n mit $n = 3$ im $\mathbb{R}^3$) multipliziert werden (Piquet, 1999).

Da technische Strömungen Reynolds-Zahlen in der Größenordnung von mehreren Millionen aufweisen können (Sagaut (2001) nennt Größenordnungen bis zu $\mathrm{Re} = 10^8$ aus der Luftfahrt), muß die Anzahl in die numerische Simulation eingehender Freiheitsgrade drastisch reduziert werden, um eine Berechnung überhaupt zu ermöglichen bzw. (zeitlich) effizient durchführen zu können. Selbst moderate Reynolds-Zahlen technisch relevanter Anwendungen der Größenordnung $\mathcal{O}(10^5)$ würden auf Basis obiger Abschätzung eine Anzahl Gitterpunkte von einigen hundert Millionen erfordern. Gleichermaßen kommt noch die entsprechende Diskretisierung der Zeitkoordinate hinzu. Realisierbare Reynolds-Zahlen liegen auch bei heutigen Rechnerleistungen und Datenspeichergrößen noch deutlich in unteren Bereichen der Reynolds-Zahl, wie beispielsweise eine von Freitag und Klein (2005) berechnete Drallströmung mit Re=5000 zeigt. Abhilfe schafft hier eine Methodik, die nicht mehr alle Skalen direkt bestimmt, sondern vielmehr einen Teil modelliert. Der Ansatz erlaubt eine vielfach effizientere Beschreibung des Problems, da eine verhältnismäßig grobe Diskretisierung hinreichend genaue Ergebnisse liefert.

Solche Modellierungsverfahren lassen sich generell anhand des Grades der getroffenen Vereinfachung sowie des numerischen Aufwandes klassifizieren. Während die sogenannte Grobstruktursimulation nur die kleinsten Wirbel in einem schmalen Bereich am rechten Rand des turbulenten Energiespektrums (Bild 2.1) durch Modelle beschreibt und die großen Wirbel direkt berechnet, erfolgt die Berücksichtigung der Turbulenz in der im industriellen Umfeld am häufigsten angewandten Statistischen Momenten Methode nach Reynolds (1895) einzig durch Modelle. Erwartungsgemäß ist die numerische Effizienz der statistischen Ansätze im direkten Vergleich der beiden anderen Methoden am höchsten. Es bleibt aber zu beachten, daß die verwendeten

Modelle *alle* Skalen beinhalten, also auch die größten, die unmittelbar von der Geometrie des betrachteten Strömungsfalles bestimmt sind und deshalb i. allg. die universelle Gültigkeit der Modellansätze für eine Vielzahl von Strömungstypen in Frage stellen. Die Methode der Grobstruktursimulation hingegen bedient sich modellhafter Beschreibungen ausschließlich im Bereich kleiner Skalen, welche durchaus mit universell gültigen Ansätzen charakterisiert werden können. Eine vielfach höhere Genauigkeit (bei erwartungsgemäß höherem numerischen Aufwand) ist so erreichbar und folglich dient diese Methode in der vorliegenden Arbeit als primäres Berechnungswerkzeug zur Überprüfung der statistischen Ansätze.

2.4 Statistische Methode auf Basis der Reynolds-Mittelung

Die Simulation technischer Anwendungen aus dem Bereich der Thermo- und Aerodynamik mit Ziel einer ersten Auslegung oder Optimierung bestehender Systeme in Hinblick auf beispielsweise Leistung, Lebensdauer oder Schadstoffausstoß stützt sich meist auf Mittelwerte von Strömungsgrößen. Weiterreichende Informationen des momentanen Geschwindigkeits- oder Mischungsfeldes sind hingegen nur selten von eigentlichem Interesse. Eine auf die Beschreibung statistischer Momente (Mittelwerte, Varianzen) der Strömung reduzierte Sichtweise bietet ein hohes Potential der Vereinfachung bei gleichzeitiger Wahrung der für den Anwender relevanten Information. Der Ansatz von Reynolds beinhaltet genau diese Grundüberlegung, indem er die Gesamtheit aller in der Strömung vorhandenen Detailinformationen als Überlagerung eines mittleren und eines fluktuierenden Feldes interpretiert und dabei der fluktuierende Teil als Differenz momentaner und mittlerer Größen verstanden wird. Diese Aufspaltung beliebiger instantaner Strömungsgrößen ϕ in ihren Mittelwert $\overline{\phi}$ und einen turbulenten Schwankungsanteil ϕ', ist wie folgt zu formulieren:

$$\phi\left(\underline{x},t\right) = \overline{\phi}\left(\underline{x},t\right) + \phi'\left(\underline{x},t\right), \tag{2.7}$$

mit $\underline{x} = \left(x,y,z\right)^T$ der räumlichen und t der zeitlichen Koordinate. Die arithmetische Mittelwertbildung über eine Anzahl N von Stichproben (*Ensemble-Mittelung*) ist dabei für alle Strömungstypen gültig,

$$\overline{\phi}^{\mathrm{E}}\left(\underline{x},t\right) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N}\phi_n\left(\underline{x},t\right). \tag{2.8}$$

Durch Anwendung des Mittelungsoperators $\overline{\phi}^{\mathrm{E}}$ wird gewährleistet, daß keinerlei aus dem fluktuierenden Feld resultierende Information in die gemittelte Größe einfließt, allerdings nur dann, wenn die Anzahl eingehender Stichproben tatsächlich gegen Unendlich strebt. Praktisch ist wegen der Notwendigkeit von $N \to \infty$ eine Mittelwertbildung nach Gleichung (2.8) unmöglich durchführbar, weswegen $\overline{\phi}$ meist durch Integration in der Zeit ermittelt wird[4],

$$\overline{\phi}^{\mathrm{Z}}\left(\underline{x}\right) = \lim_{T\to\infty}\left\langle\phi\left(\underline{x},t,T\right)\right\rangle \quad \text{mit} \quad \left\langle\phi\left(\underline{x},t,T\right)\right\rangle = \frac{1}{2T}\int_{t-T}^{t+T}\phi\left(\underline{x},\tau\right)d\tau. \tag{2.9}$$

4 Voraussetzung für die Gültigkeit von Gleichung (2.9) ist eine statistisch stationäre Strömung, d. h. mittlere Größen müssen sich bzgl. der Zeit invariant verhalten (Piquet, 1999). Siehe auch Abschnitt 3.1.

Der hier ebenfalls beinhaltete Grenzübergang $T \to \infty$ wird in der realen Anwendung meist nicht notwendig, Piquet nennt in diesem Zusammenhang vielmehr eine Mittelungsdauer der Größenordnung $\mathcal{O}\left(10^2 L/|U|\right)$, mit L dem integralen Längenmaß und $|U|$ dem mittleren Geschwindigkeitsbetrag. Gleichung (2.9) ist dabei sowohl für statistisch stationäre als auch für instationäre Strömungen gültig, solange die Mittelungsdauer T viel größer als das typische Turbulenzzeitmaß und gleichzeitig genügend kleiner als die Zeitskala der mittleren Strömungsgrößen ist.

Die Mittelung der Felder erfüllt dabei folgende Rechenregeln:

$$\overline{\phi_1 + \phi_2} = \overline{\phi}_1 + \overline{\phi}_2, \tag{2.10a}$$

$$\overline{\alpha\phi} = \alpha\overline{\phi} \quad \forall\, \alpha = \text{const.}, \tag{2.10b}$$

$$\frac{\overline{\partial\phi}}{\partial\xi} = \frac{\partial\overline{\phi}}{\partial\xi}, \tag{2.10c}$$

$$\overline{\overline{\phi}_1\phi_2} = \overline{\phi}_1\overline{\phi}_2, \tag{2.10d}$$

wobei das stellvertretende Symbol ξ sowohl durch eine Orts- als auch durch eine Zeitkoordinate ersetzt werden kann, $\xi \in \{\underline{x}, t\}$. Bedingungen (2.10a) und (2.10b) weisen auf die Linearität der Mittelungsprozedur hin, (2.10c) beschreibt die Gültigkeit des Kommutativgesetzes bzgl. der partiellen Ableitung (Leibniz-Regel), während aus (2.10d) nach Piquet (1999) folgt:

$$\overline{\overline{\phi}_1\phi_2'} = 0 \tag{2.11a}$$

$$\overline{\overline{\phi}_1\overline{\phi}_2} = \overline{\phi}_1\overline{\phi}_2. \tag{2.11b}$$

Diese *Korrelationen* der beiden Größen ϕ_1 und ϕ_2 sind allgemein betrachtet ein Maß für die Ähnlichkeit der beiden untersuchten Eingangsgrößen[5]. Resultiert, wie im Falle der Bedingung (2.11a), ein Wert gleich Null, so können *keine* Ähnlichkeiten der beiden Komponenten festgestellt werden. Im vorliegenden Fall erscheint dies klar ersichtlich, denn der gemittelte Wert einer Größe enthält per Definition keinerlei Information über Schwankungsanteile und ist in der Zeit konstant, während der fluktuierende Anteil die gesamte Schwankungsinformation trägt und zeitlich veränderlich ist. Werte ungleich Null folgen hingegen bei einer erkennbaren Ähnlichkeit eingehender Größen.

Mittelwert und Fluktuation sind also stets *unkorreliert* mit der Folge, daß Mittelwerte beliebiger Momente mittlerer Größen und *einem* Schwankungswert verschwinden,

$$\overline{\overline{\phi}_1\overline{\phi}_2\cdots\overline{\phi}_m\phi_n'} = 0, \tag{2.12}$$

während dies im allgemeinen für beliebige Momente *korrelierter* Schwankungswerte nicht gilt (Tennekes und Lumley, 1972):

$$\overline{\phi_1'\phi_2'\cdots\phi_m'} \neq 0. \tag{2.13}$$

Bei geeigneter Wahl der betrachteten Größen folgt aus (2.11a) und (2.11b) direkt $\overline{\overline{\phi}} = \overline{\phi}$ und $\overline{\phi'} = 0$.

5 Die Anzahl der betrachteten Größen ist dabei beliebig und unbeschränkt.

Die Anwendung der Operatoren $\overline{\phi}^{\mathrm{E}}$ bzw. $\overline{\phi}^{\mathrm{Z}}$ überführt die für ein momentanes Feld gültigen Bewegungsgleichungen in die Reynolds-gemittelte Form. Entscheidend dabei ist, daß hierdurch unbekannte Korrelationen im Gleichungssystem entstehen, für die zwar wiederum Gleichungen entwickelt werden können, die ihrerseits aber Korrelationen mindestens einer Ordnung höher enthalten. Die Vereinfachung des vorliegenden Problems ist damit allein durch die Anwendung der Operatoren per se *nicht* erreicht. Erst ein frühzeitiger Abbruch der resultierenden Reihenentwicklung (in der Ordnung der statistischen Momente) und der Einsatz von Modellannahmen ermöglicht dies. Die Ordnung des Abbruchgliedes bestimmt sogleich den Gültigkeitsbereich des Modellansatzes. Abschnitt 2.4.1 diskutiert diesen Sachverhalt ausführlich. Der Preis der Vereinfachung des Problems ist die Notwendigkeit eines Modellansatzes und eine eingeschränkte Gültigkeit. Es bleibt aber festzuhalten, daß der Einfluß von Korrelationen auf das mittlere Geschwindigkeits- und Druckfeld mit steigender Ordnung abnimmt (Oberlack, 1994), und folglich auch jener verwendeter Modellansätze. Eine Tripelkorrelation von Geschwindigkeitsfluktuationen bestimmt das mittlere Feld weitaus weniger, als eine Auto- oder Kreuzkorrelation eben dieser fluktuierenden Anteile. Als Analogie hierzu sei eine Reihenentwicklung genannt, bei der ebenfalls ein sinkender Einfluß auf die Gesamtlösung mit steigender Ordnung der Glieder erkennbar ist.

2.4.1 Reynolds-gemittelte Bewegungsgleichungen

Durch die Anwendung der Dekomposition nach Reynolds (2.7) auf die Kontinuität sowie auf die Impulserhaltungsgleichungen mit anschließender Mittelung erhält man die Reynolds-gemittelten Bewegungsgleichungen. Die Kontinuitätsgleichung (2.1) läßt sich mit Hilfe der Reynolds'schen Dekomposition der Variablen U_j und ρ sowie bereits genannter Eigenschaften wie folgt für mittlere Größen formulieren:

$$\frac{\partial \overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho U}_j\right) = 0. \tag{2.14}$$

Dies gilt für den Fall einer instationären Betrachtung des zugrunde liegenden Problems unter der Annahme variabler Dichte. Für die in dieser Arbeit ausschließlich behandelten, inkompressiblen Fluide ($\rho = \text{const.} \neq f(\underline{x},t)$) folgt für die Kontinuität:

$$\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_j} = 0. \tag{2.15}$$

In analoger Weise ist die für instantane Größen gültige Impulsgleichung (2.2) in die Reynoldsgemittelte Form zu überführen. Es bleibt zu beachten, daß sich aus der Dekomposition des instantanen Geschwindigkeitsfeldes wegen der Nichtlinearität des Konvektionsterms eine Doppelkorrelation von Schwankungsgrößen ergibt, die nach zeitlicher Mittelung *bestehen* bleibt, allerdings mit Hilfe der verfügbaren mittleren Größen nicht zu bestimmen ist („*Schließungsproblem zweiter Ordnung*“) (Zierep, 1984). Aufgrund der weitreichenden Konsequenz dieser Lücke im Gleichungssystem, gerade in Bezug auf die Modellbildung, soll dies im folgenden kurz dargestellt werden.

Setzt man in den konvektiven Term der Impulsgleichung die Reynolds'sche Dekomposition der Geschwindigkeiten ein, so erhält man unter Beachtung des Distributivgesetzes bzgl. der partiellen Ableitung

$$\left(\overline{U}_j + u'_j\right) \frac{\partial \left(\overline{U}_i + u'_i\right)}{\partial x_j} = \underbrace{\overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}}_{\text{I}} + \underbrace{u'_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}}_{\text{II}} + \underbrace{\overline{U}_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}_{\text{III}} + \underbrace{u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}_{\text{IV}}.$$

Term I bleibt von nachfolgender Mittelung unberührt (vgl. (2.11b)), die Terme II und III verschwinden per Definition (vgl. (2.11a) und (2.10c)). Term IV hingegen läßt sich unter Verwendung der Produktregel umformen, so daß gilt:

$$\frac{\partial \phi_i \phi_j}{\partial x_j} = \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial x_j} + \phi_j \frac{\partial \phi_i}{\partial x_j} \quad \Rightarrow \quad u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = \underbrace{\frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}}_{\text{IV a}} - \underbrace{u'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x_j}}_{\text{IV b}}.$$

Nach der Mittelungsprozedur verschwindet lediglich Term IV b aufgrund Gleichung (2.15). Infolgedessen resultiert aus der Reynolds'schen Methode ein zusätzlicher Term, dessen Berechnung im weiteren durch einen Modellansatz gewährleistet werden muß. Es gilt für den Fall eines inkompressiblen Fluids unter Vernachlässigung der Gravitation:

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \overline{U}_j \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j} \right) - \overline{u'_i u'_j} \right]. \tag{2.16}$$

Wie bereits im vorangegangenen Abschnitt kurz erwähnt, sind zur Beschreibung statistischer Momente zweiter Ordnung $\overline{u'_i u'_j}$, im weiteren als Reynolds'scher Spannungstensor bezeichnet, zusätzliche Transportgleichungen nötig, welche ihrerseits Momente höherer (dritter) Ordnung beinhalten. Eine strikte Herleitung weiterer Gleichungen (für jene höheren Momente) führt allerdings *nicht* zur Schließung des Gleichungssystems, da in der Transportgleichung für Momente n-ter Ordnung stets Unbekannte $(n+1)$-ter Ordnung enthalten sind. Das anfängliche Problem der Notwendigkeit einer „unendlich" hohen Auflösung zur Berücksichtigung aller beinhalteten Skalen wird hin zur Notwendigkeit der Lösung einer (unendlich langen) Taylorreihe verschoben. Eine Vereinfachung wird erst durch den frühzeitigen Abbruch dieser Reihe erreicht, der in der allgemeinen Praxis nach den zweiten statistischen Momenten erfolgt. Die Schließung des Gleichungssystems gewährleisten dann Modelle verschiedenster Komplexität und Genauigkeit, angefangen bei einfachen Null-, Ein- und Zweigleichungsmodellen bis hin zu sogenannten Mehrgleichungsmodellen, die alle unabhängigen Komponenten des Reynolds'schien Spannungstensors mittels einer eigenen Transportgleichung direkt bestimmen.

Unabhängig von der Komplexität und Genauigkeit der verwendeten Modellansätze aber bleibt zu beachten, daß aus dieser Vorgehensweise stets symmetrische Ansätze im statistischen Sinne resultieren. Führt man die sogenannte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes ein (Tennekes und Lumley, 1972),

$$\mathrm{B}(U)\,\Delta U \equiv \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\Sigma t \quad \forall t \quad \text{mit} \quad U(t) \in [U;U+\Delta U]\,, \tag{2.17}$$

und den Eigenschaften

$$\mathrm{B}(U) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{B}(U)\,dU = 1,$$

kann dies veranschaulicht werden. Tennekes und Lumley folgend, entspricht die Wahrscheinlichkeit, einen Wert $U(t)$ im Intervall $[U;U+\Delta U]$ zu erhalten, genau dem zeitlichen Anteil t von $U(t) \in [U;U+\Delta U]$ bezogen auf die Gesamtlänge T des Zeitsignals. Eine geeignete Variation des Intervalls führt zum bekannten Verlauf von B, wie er beispielsweise rechts in Bild 2.2 dargestellt ist[6].

Die Definition eines beliebigen Moments n-ter Ordnung läßt sich nun wie folgt formulieren:

$$\overline{u_i'^{\,n}} = \int_{-\infty}^{\infty} u_i'^{\,n}\,\mathrm{B}(U)\,dU \overset{(2.11a)}{=} \int_{-\infty}^{\infty} u_i'^{\,n}\,\mathrm{B}(u_i')\,du_i'. \tag{2.18}$$

Der Abbruch der Reihenentwicklung nach dem Moment zweiter Ordnung ($n=2$) resultiert in der Notwendigkeit der Modellbildung für alle Momente höherer Ordnung ($n \geq 3$) auf *deren* Basis (und denen erster Ordnung). Faßt man die Wahrscheinlichkeitsdichte $\mathrm{B}(U)$ als Summe eines symmetrischen und antisymmetrischen Anteils auf, und beachtet zudem, daß Momente zweiter Ordnung ausschließlich vom symmetrischen und solche dritter Ordnung ausschließlich vom antisymmetrischen Teil abhängig sind (Tennekes und Lumley, 1972), folgt unmittelbar die bereits getroffene Aussage, daß bei Abbruch nach dem zweiten Glied der Taylorreihe stets *rein* symmetrische Funktionen folgen. Effekte höherer Ordnung (Antisymmetrie) können so *per Definition* nicht betrachtet werden.

Bild 2.2 zeigt typische Signale (linke Graphik) mit zugehörigen, durch identische Linienstile gekennzeichnete Wahrscheinlichkeitsfunktionen (rechte Graphik). Die rechts dargestellte Wahrscheinlichkeitsverteilung (strichpunktiert) zeichnet sich durch einen hohen Anteil negativer Werte des Eingangssignals aus. Man spricht von positiver Schiefe und erhält ein von Null verschiedenes drittes Moment, $\overline{u_i'^{\,3}} \neq 0$. Links dargestellt sind verschiedene Größenordnungen des vierten statistischen Moments. Wie zu erwarten, ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion des Peaksignals (unterbrochene Linie) von einer starken Wölbung (Kurtosis) geprägt, da nur ein vergleichsweise geringer Anteil mittlerer Fluktuationen im Signal enthalten ist. Eine nur gering gewölbte Wahrscheinlichkeitsfunktion folgt aus einem flachen Signal (durchgezogene Linie).

Zeitsignale, wie in Bild 2.2 dargestellt, entziehen sich dem Gültigkeitsbereich der angesprochenen Modellierungspraxis, da ihre Charakteristika ausschließlich von statistischen Momenten der Ordnung größer zwei wiedergegeben werden. Es ist daher nicht überraschend, daß die stark

6 Bei diskreten Signalen erhält man B aus dem Anteil eines bestimmten Wertes bezogen auf die Gesamtzahl der Stichproben.

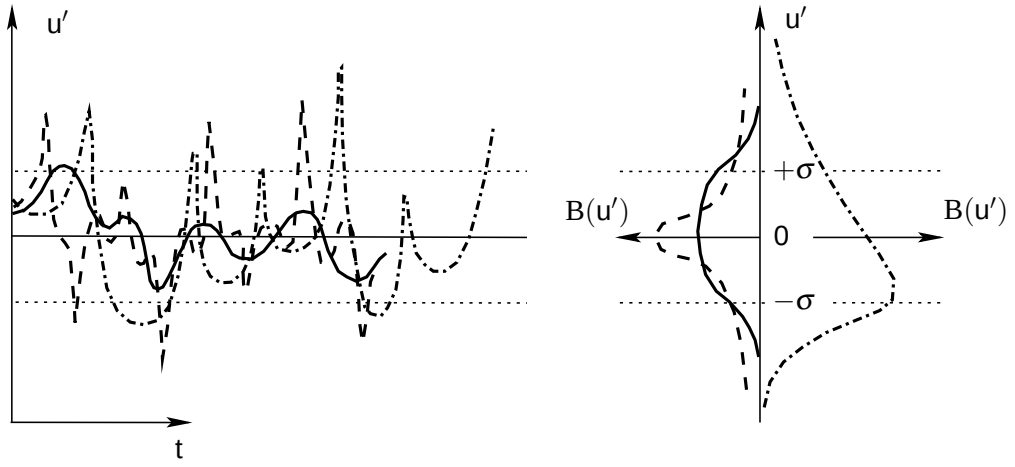


Bild 2.2. Verschiedene Formen der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion in Abhängigkeit des Eingangssignals (nach Tennekes und Lumley, 1972).

von *nicht* symmetrischen Wahrscheinlichkeiten gekennzeichnete freie Drallströmung (vgl. Abschnitt 5.3.3) durch Reynolds-gemittelte Simulationsmethoden nur schwerlich beschrieben wird. Eine potentielle Korrektur begründet sich in einer möglicherweise gegebenen Beschreibung der Abweichung von der Symmetrie. Dies kann allerdings im streng mathematischen Sinne *nicht* als Funktional antisymmetrischer Anteile geschehen, da diese ja bereits im Ansatz nicht mehr vorhanden sind. Vielmehr ist eine „Störfunktion“, bestimmt durch einen geeigneten Parameter denkbar, die eine Abweichung lediglich in ihrer Auswirkung auf das Strömungsfeld beschreibt, also zur „Simulation“ der Abweichung dient.

2.4.2 Die exakte Transportgleichung der Reynolds’schen Spannungen

Die für den Reynolds’schen Spannungstensor $\overline{u_i' u_j'}$ exakt gültige Gleichung bildet folglich die Grundlage aller Modelle, unabhängig vom Grad der Komplexität und Genauigkeit. Ihre Entwicklung sowie die Gleichung selbst als Ergebnis soll deshalb im folgenden Abschnitt kurz vorgestellt werden. Mathematisch betrachtet resultiert die Gleichung aus der Multiplikation der Transportgleichung einer Geschwindigkeitsschwankung u_i' mit der Größe u_j' (respektive umgekehrt), anschließender Addition beider Gleichungen und Mittelung. Unter Verwendung der Kettenregel gilt für die substantielle Ableitung der Reynolds’schen Spannungen:

$$\overline{u_i' \frac{Du_j'}{Dt}} + \overline{u_j' \frac{Du_i'}{Dt}} \overset{(2.10a)}{=} \overline{u_i' \frac{Du_j'}{Dt} + u_j' \frac{Du_i'}{Dt}} = \frac{D\overline{u_i' u_j'}}{Dt}.$$

Die Transportvorschrift der Schwankungsgrößen erhält man direkt aus der Differenz der (inkompressibel formulierten) Gleichungen (2.4) und (2.16). Eine detaillierte Herleitung der exakten

Gleichung ist im Anhang L dargestellt, hier soll lediglich das Ergebnis vorgestellt werden. Für die exakte Gleichung der Reynolds'schen Spannungen gilt:

$$\begin{aligned}\frac{D\overline{u_i'u_j'}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial t}}_{L_{ij}} + \underbrace{\overline{U}_k \frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k}}_{C_{ij}} = &\underbrace{\boxed{-\left(\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} + \overline{u_j'u_k'}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}\right)}}_{P_{ij}} \\ &\underbrace{-\overline{\frac{1}{\rho}\left(u_i'\frac{\partial p'}{\partial x_j} + u_j'\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right)}}_{\Pi_{ij}} \\ &\underbrace{+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\overline{u_i'u_j'u_k'}\right)}_{\mathscr{D}_{ij}^t} \\ &\underbrace{\boxed{+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k}\right)}}_{\mathscr{D}_{ij}^\nu} \\ &\underbrace{-2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}}_{\varepsilon_{ij}},\end{aligned} \tag{2.19}$$

wobei der Term Π_{ij} aus Gründen einer vereinfachten physikalischen Interpretation nochmals aufgespalten werden kann:

$$\Pi_{ij} = \Phi_{ij} + \mathscr{D}_{ij}^p = \overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\overline{\frac{p'}{\rho}\left(u_i'\delta_{jk} + u_j'\delta_{ik}\right)}\right]. \tag{2.20}$$

In den Gleichungen (2.19) und (2.20) beschreibt L_{ij} die (lokale) zeitliche Änderung von $\overline{u_i'u_j'}$, C_{ij} ihren konvektiven Transport, P_{ij} ihre Produktion und Φ_{ij} die für die Umverteilung der Spannungen verantwortliche (spurfreie) Druck-Scher-Korrelation. Diffusive Effekte aufgrund molekularer ($\mathscr{D}_{ij}^\nu$) und turbulenter Effekte ($\mathscr{D}_{ij}^t$), sowie solcher, basierend auf Schwankungen des Drucks ($\mathscr{D}_{ij}^p$), sind beinhaltet. Ebenfalls wird die Dissipation der Spannungen durch den Term ε_{ij} repräsentiert. Mit Ausnahme von P_{ij} und $\mathscr{D}_{ij}^\nu$ (gerahmt) müssen alle Terme auf der rechten Seite der obigen Gleichungen modelliert werden, da die enthaltenen Größen im zugrunde liegenden Gleichungssystem nicht auftauchen (p', u_i') bzw. weitere Gleichungen benötigen würden (Tripelkorrelation der Geschwindigkeitsfluktuation), die aber wegen des Abbruchs der Reihenentwicklung nach dem zweiten Glied i. allg. nicht mehr berücksichtigt werden.

Bild 2.3 stellt die Wirkweise der einzelnen Beiträge auf das Spannungsellipsoid graphisch dar. Der Fluß turbulenter Spannungsgrößen aufgrund konvektiver und diffusiver Transporteffekte ist durch Pfeile außerhalb des Volumens $V = \Delta x \Delta y \Delta z$ gekennzeichnet, Quell- und Senkenterme sowie der Umverteilungsterm innerhalb von V. Bildlich gesprochen ist die Produktion P_{ij} für eine

Vergrößerung eines räumlichen Spannungsellipsoiden verantwortlich und stellt so den Quellterm dar, während die Dissipation ε_{ij} dem System turbulente Bewegungsenergie entzieht und in innere Energie umwandelt, somit einer Senke entspricht. Der Umverteilungsterm Φ_{ij} nimmt keinen Einfluß auf den Energiehaushalt im System, steht aber unmittelbar mit einem sukzessiven Abbau von Anisotropie des Spannungsellipsoiden in direktem Zusammenhang. Wegen dieses Beitrags in der Transportgleichung wird das anfänglich anisotrope, also räumlich gerichtete, Ellipsoid mehr und mehr in eine Kugel überführt, die keine Vorzugsrichtung im räumlichen Sinne beinhaltet.

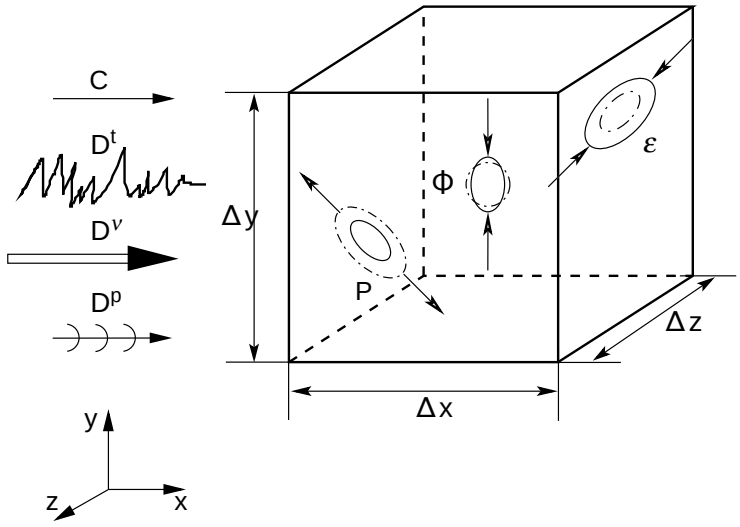


Bild 2.3. Zur physikalischen Interpretation der Transportgleichung der Reynolds'schen Spannungen.

Eine Darstellung dieses physikalischen Prozesses bietet Rotta in seinen grundlegenden Arbeiten zur statistischen Beschreibung von Turbulenz (Rotta, 1951a,b). Ihm gelingt mit Hilfe eines Gedankenexperiments eine einprägsame Interpretation des Tensors Φ_{ij}, dessen Wirkweise im Gegensatz zu den anderen beinhalteten Termen ohne weiteres nicht erkennbar ist (Bild 2.4). Die Erklärung soll zum leichteren Verständnis der im Ergebnisteil 5.7 gegebenen Wirkweise der drallverstärkten Intermittenz sowie der abweichenden Modellvorhersagen dienen.

Zunächst soll nur das ξ-η-Koordinatensystem in Bild 2.4 betrachtet werden. Bewegen sich zwei Turbulenzballen parallel zur ξ-Achse aufeinander zu, so ist unmittelbar einleuchtend, daß das zwischen ihnen befindliche Fluid verdrängt wird. Es resultiert am Punkt 0 ein Druckmaximum, die in ξ-Richtung bewegten Turbulenzballen verrichten Arbeit und folglich wird das verdrängte Fluid senkrecht (in η) beschleunigt. Die Komponente u'_η erhält auf Kosten von u'_ξ Energie. Es bleibt zu beachten, daß es sich bei den betrachteten Strukturen um solche ohne feste Umrandung und mit nur begrenzter Lebensdauer handelt, was eine Analogie zur kinetischen Gastheorie auf Basis starrer (zeitlich wie räumlich unveränderlicher) Kugeln nicht ermöglicht. Das „Zerfließen“ der aufeinanderprallenden Ballen bewirkt i. allg., daß nur ein Teil der entzogenen Bewegungsenergie an die senkrecht stehenden Komponenten übertragen wird. Der Rest verteilt sich im Raum, er fließt in alle Richtungen. Im allgemeinen i-j-Bezugssystem trägt die Geschwindigkeit u'_ξ einen positiven und u'_η einen negativen Anteil zur Korrelation $\overline{u'_i u'_j}$ bei. Dies ist aus der Vektoraddition leicht abzuleiten. Für den Fall einer Energieübertragung der ξ-Komponente an die η-Komponente muß, aufbauend auf der zuvor angestellten Betrachtung im ξ-η-System, $u'_\xi > u'_\eta$ gelten. Ist dies der Fall, so resultiert für die Summe der beiden (positiven und negativen) Beträge ein positiver Wert. Wegen der Energieübertragung wird der positive Beitrag von u'_ξ reduziert und der negative von u'_η erhöht, was somit zu einem negativen Beitrag am zeitlichen Gradienten der Korrelation, $\partial \overline{u'_i u'_j}/\partial t$, führt. Da die Geschwindigkeitsgradienten $\partial u'_i/\partial x_j$ und $\partial u'_j/\partial x_i$ am Punkt 0 beide negativ sind und dort ein positives p' (Druckmaximum) vorliegt, folgt $\overline{p'(\partial u'_i/\partial x_j + \partial u'_j/\partial x_i)} = \Phi_{ij} < 0$. Der negative mittlere Wert von Φ_{ij} entspricht einem negativem Beitrag am zeitlichen Gradienten der Korrelation $\overline{u'_i u'_j}$ und repräsentiert so den Umverteilungsprozeß von turbulenter Bewegungsenergie stets mit der Tendenz, eine bestehende Wechselwirkung zu reduzieren. Bei positiven Korrelationen $\overline{u'_i u'_j}$ ist stets mit einem im Mittel negativen Beitrag von Φ_{ij} zur Differentialgleichung zu rechnen, und umgekehrt. Die Wirkweise von Φ_{ij} besteht also in einer Angleichung aller $\overline{u'_i u'_j}$, wobei dies solange geschieht, bis für alle $i \neq j$ der Wert Null resultiert, also die Nebendiagonalelemente des Spannungstensors verschwinden, was eben dem isotropen, räumlich nicht gerichteten Zustand entspricht.

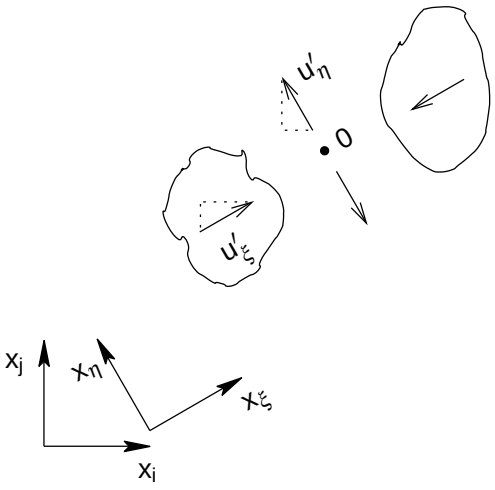


Bild 2.4. Zum Gedankenexperiment von Rotta.

Das in Gleichung (2.19) dargestellte System beschreibt die räumliche Lage des Spannungstensors durch die Berechnung *aller* Komponenten unabhängig vom Schertensor der mittleren Geschwindigkeiten und unter Beachtung von Zentrifugal- und Corioliskräften. D. h. seine Hauptachsenrichtungen fallen nicht notwendigerweise, wie beim Ansatz nach Boussinesq, mit denen des Schertensors zusammen, was als Hauptgrund für das Versagen des STKE in rotationsbehafteten Strömungen betrachtet wird, da hier die genannten Kräfte keinerlei Einfluß besitzen. Grunert (2000); Hirsch (1995); Pfuderer (1997) oder Speziale (1995) diskutieren in ihren Publikationen diesen Zusammenhang ausführlich, weshalb an dieser Stelle lediglich der Hinweis auf entspre-

chende Stellen der Literatur gegeben werden soll. Als Konsequenz werden in vorliegender Arbeit ausschließlich Reynolds-Spannungsmodelle betrachtet, die alle unabhängigen Tensorkomponenten separat beschreiben, da auch modifizierte STKE-Modelle (vgl. z. B. Hirsch, 1995) nur ein eingeschränktes Verbesserungspotential der Vorhersagequalität bieten und bei der heute zur Verfügung stehenden Rechenleistung der zusätzliche numerische Aufwand durch RSM-Modelle meist kaum ins Gewicht fällt.

2.4.3 Schließungsansätze

Wie im vorangegangenen Abschnitt (2.4.2) gezeigt, sind mit Ausnahme der Produktion P_{ij} und der molekularen Diffusion $\mathscr{D}^{\nu}_{ij}$ (umrandete Terme in Gleichung (2.19)) alle verbleibenden Teilterme zu modellieren, da sie Größen enthalten, die im vorliegenden Gleichungssystem nicht zur Verfügung stehen. Im allgemeinen unterscheiden sich die Modellansätze lediglich durch die Beschreibung der Druck-Scher-Korrelation Φ_{ij} bzw. der Summe der diffusiven Anteile $\mathscr{D}_{ij} = \mathscr{D}^{\nu}_{ij} + \mathscr{D}^{t}_{ij} + \mathscr{D}^{p}_{ij}$. Gleichung (2.19) in rein symbolischer Schreibweise erlaubt einen vereinfachten Überblick:

$$\frac{D\overline{u'_i u'_j}}{Dt} = P_{ij} + \Phi_{ij} + \mathscr{D}_{ij} - \varepsilon_{ij}. \tag{2.21}$$

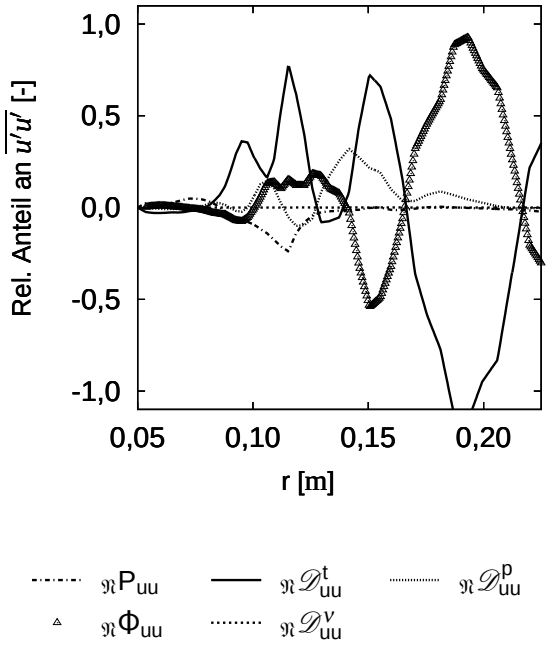


Bild 2.5. Normierte Beiträge der rechten Seite der exakten Transportgleichung; Normal Komponente $\overline{u'u'}$; Freistrahl.

Diffusive Effekte aufgrund der molekularen Viskosität sind in den hier untersuchten Strömungsfällen zu vernachlässigen, da die charakteristischen Reynoldszahlen in der Größenordnung $\mathscr{O}(10^5)$ liegen. Dies wird im direkten Vergleich mit den weiteren Beiträgen der Reynolds'schen Transportgleichung ersichtlich. Selbst in Bereichen geringer turbulenter Intensität ist $\mathscr{D}^{\nu}_{ij}$ um Größenordnungen kleiner als P_{ij}, Φ_{ij} oder einer der beiden verbleibenden diffusiven Anteile.

Bild 2.5 zeigt typische radiale (relative) Anteile der erwähnten Terme an einer axialen Position 100 mm stromab des Brennerauslasses für den Freistrahlfall mit einer Drallzahl von $S_0 = 0{,}95$. Alle Terme wurden aus mittleren Strömungsgrößen der hier durchgeführten Grobstruktursimulation gebildet und sind mit dem konvektiven Term C_{ij} normiert dargestellt (Index $\Re$), sodaß ihr Einfluß auf die Quellterme der rechten Seite von Gleichung (2.19) direkt ableitbar ist. $\Re\mathscr{D}^{\nu}_{ij}$ ist dabei nahezu gleich Null, unabhängig von der radialen Position, während $\Re\Phi_{ij}$, $\Re\mathscr{D}^{t}_{ij}$ und $\Re\mathscr{D}^{p}_{ij}$ dieselbe Größenordnung besitzen und $\Re P_{ij}$ geringfügig kleiner ist. Dieses, rein qualitative Verhalten zeigt sich an allen axialen Position und ist

sowohl im eingeschlossenen Fall als auch beim Freistrahl zu beobachten. Folglich spielen die Modellansätze für die Druck-Scher-Korrelation sowie die Diffusion eine entscheidende Rolle für die Vorhersagequalität.

Wegen der konzeptionellen Ähnlichkeit einer Vielzahl linearer Modelle für die Druck-Scher-Korrelation Φ_{ij} (vgl. u. a. Gibson und Younis, 1986; Fu et al., 1987; Jones und Musonge, 1988; Weber et al., 1990) wird in dieser Untersuchung lediglich der Ansatz von Launder et al. betrachtet. Erweiterungen dieses linearen Modells um höhere nichtlineare Terme, bleiben auf die zweite Ordnung beschränkt[7]. Gründe dafür sind zum einen Ergebnisse zweidimensionaler Testrechnungen, die schon bei Verwendung des quadratischen Ansatzes nach Speziale et al. (1991) trotz ungleich höherem numerischen Aufwands keine signifikante Verbesserung der Vorhersagequalität zeigen. Diese Erfahrung bestätigt Kiesewetter (2005, 2006), ebenfalls in Bezugnahme auf die Simulation stark verdrallter Strömungen.

Zum anderen weisen bereits Speziale et al. in ihrer Publikation des Modells auf eine grundlegende Schwäche des Modellierungsansatzes bzgl. der Berechnung von Drallströmungen hin, die durch Hinzunahme weiterer, nichtlinearer Terme nicht lösbar scheint. Der Einfluß der Rotation auf die Turbulenzkaskade äußert sich primär in einer Reduktion der Dissipationsrate, wobei, Jacquin et al. (1990) folgend, die parallel zum Rotationsvektor ausgerichtete Komponente des Spannungstensors weniger stark beeinflußt wird, als die normal orientierten (siehe hierzu auch die Ausführungen von Hirsch, 1995). Speziale und Mac Giolla Mhuiris (1989) leiten hierfür eine Abhängigkeit vom Verhältnis Rotation zu Scherung, Ω/S, her und folgern daraus, daß die klassische Richardsonzahl $\mathrm{Ri} = -2\,\Omega(S-2\,\Omega)/S^2$ nach Bradshaw (1969) (zitiert) wegen ihrer Zweideutigkeit zur Beschreibung dieses Effektes ungeeignet scheint, da für $\Omega/S = 0$ und $\Omega/S = 0,5$ jeweils $\mathrm{Ri} = 0$ folgt. Speziale et al. zeigen, daß aber gerade diese Richardsonähnlichkeit der allgemeinen Modellbildungsstrategie[8] unterliegt und folglich den Grund für das Defizit der Vorhersagequalität im Falle rotierender Strömungen darstellt, da numerische und experimentelle Untersuchungen *verschiedene* Ergebnisse für $\Omega/S = 0$ und $\Omega/S = 0,5$ aufweisen. Dieses Problem ist unmittelbar mit dem mathematischen Grundmodell der Turbulenzmodellierung verknüpft und somit *nicht* durch Hinzunahme weiterer nichtlinearer Terme, unter Beibehaltung des Ansatzes, zu lösen.

Der Verwendung von Ansätzen höherer Ordnung zur Berechnung hochverdrallter Strömungen (erwähnt seien z. B. Launder und Li, 1994; Pfuderer, 1997), gerade bzgl. des Einsatzes im industriellen Umfeld, wird keine bedeutende Relevanz zugeordnet, da in jedem Fall ein erhöhter numerischer Aufwand einhergeht und eine entsprechende Steigerung der Vorhersagequalität mehr als fragwürdig bleibt.

Modelle der diffusiven Terme beinhalten meist einen Gradientenansatz, wobei der Anteil infolge der Druckschwankungen $\mathscr{D}_{ij}^{p}$ in den meisten Berechnungsprogrammen nicht berücksichtigt wird. In konvektionsdominierten Situationen bietet ein isotroper Ansatz, wie er u. a. von Davidson (1995) und Hirsch (1995) sowie Lien und Leschziner (1993) verwendet wird, einen praktikablen Kompromiß zwischen notwendiger Genauigkeit und numerischem Aufwand. Des-

7 Die Begriffe „linear“ bzw. „quadratisch“ beziehen sich dabei auf die Ordnung, mit der die Spannungskomponenten $\overline{u_i' u_j'}$ in den Ansatz eingehen.

8 Zur Abbildung eines Bereichs, in dem eben *kein* stabiler Zustand mit abnehmender Turbulenzenergie und Dissipation in der Zeit vorherrscht, sondern ein instabiler mit exponentieller Verstärkung der beiden Größen.

weiteren sei hier der Ansatz nach Daly und Harlow (1970) genannt, der aber nicht die Transformationsinvarianz erfüllt, da die Symmetrieeigenschaft bei einer Rotation des Koordinatensystems *nicht* unberührt bleibt (siehe u. a. Jakirlić, 1997).

Der Dissipationstensor wird aufgrund der Universalität kleiner Skalen (vgl. Abschnitt 2.2) in den meisten Anwendungen isotrop beschrieben, folglich reduziert sich die Modellierung auf eine skalare Funktion der Größe ε, für die eine zusätzliche Transportgleichung gelöst werden muß. Auf Modellansätze der Dissipationsgleichung soll in dieser Arbeit nicht weiter eingegangen werden, weshalb ein Verweis auf etablierte Ansätze in der Literatur genügen soll. Einen Überblick bieten z. B. die Arbeiten von Jakirlić (1997) und Oberlack (1994), einen komplexen anisotropen Ansatz beschreiben u. a. Speziale und Gatski (1997).

Verwendete Schließungsansätze sollen nachstehend lediglich stichpunktartig benannt und die beinhalteten Parameter gezeigt werden. Für eine detaillierte Darstellung einer Vielzahl von Modellansätzen sei auf die Arbeiten von Jakirlić (1997) oder Pfuderer (1997) verwiesen.

Modelle für die Druck-Scher-Korrelation

- **linearer Ansatz nach Launder et al. (1975)**

  Es gilt:

$$\Phi_{ij} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k}\left(\overline{u_i' u_j'} - \frac{2}{3}k\delta_{ij}\right) - C_2\left(P_{ij} - \frac{2}{3}\mathscr{P}\right), \tag{2.22}$$

  mit den Konstanten C_1 und C_2 (meist nach Gibson und Younis 1,8 und 0,6), ε der skalaren Dissipationsrate und k der turbulenten kinetischen Energie, $k = 0,5\overline{u_i' u'}_i$. Die Definition der zur eindeutigen Unterscheidung mit einem kalligraphischen $\mathscr{P}$ bezeichnete skalare Produktion von Turbulenzenergie lautet dabei

$$\mathscr{P} = \frac{1}{2}P_{ll} = -\frac{1}{2}\overline{u_m' u_n'}\left(\frac{\partial \overline{U_m}}{\partial x_n} + \frac{\partial \overline{U_n}}{\partial x_m}\right) = -\overline{u_m' u_n'}\,S_{mn}, \tag{2.23}$$

  mit S_{mn} dem mittleren Schergeschwindigkeitstensor. Dieser Modellansatz wird im folgenden durch das Akronym LRR gekennzeichnet.

- **quadratischer Ansatz nach Speziale et al. (1991)**

$$\begin{aligned}\Phi_{ij} = &-\left(C_1\varepsilon + C_1^\star \mathscr{P}\right) b_{ij} + C_2\varepsilon\left(b_{ik}b_{kj} - \frac{1}{3}b_{mn}b_{mn}\delta_{ij}\right) + \left(C_3 - C_3^\star \mathrm{II}^{1/2}\right) kS_{ij} \\ &+ C_4 k\left(b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{ik} - \frac{2}{3}b_{mn}S_{mn}\delta_{ij}\right) + C_5 k\left(b_{ik}W_{jk} + b_{jk}W_{ik}\right),\end{aligned} \tag{2.24a}$$

$$b_{ij} = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{2k} - \frac{\delta_{ij}}{3}, \tag{2.24b}$$

$$\mathrm{II} = b_{ij}b_{ij}, \tag{2.24c}$$

  mit $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i}\right)$ dem mittleren Schertensor, $W_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \overline{U_i}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{U_j}}{\partial x_i}\right)$ dem mittleren Wirbelgeschwindigkeitstensor und den Konstanten:

C_1	$C_1^\star$	C_2	C_3	$C_3^\star$	C_4	C_5
3,4	1,8	4,2	1,8	1,3	1,25	0,4

II beschreibt hier die zweite Invariante des Anisotropietensors b_{ij}, definiert in Gleichung (2.24c), und entspricht so dem Quadrat der *Frobenius* Norm des Tensors. Das Akronym SSG meint im folgenden diesen Ansatz.

Modelle für die turbulente Diffusion

- **isotroper Ansatz**

  Dieser Ansatz stellt eine starke Vereinfachung dar, sodaß in Bereichen mit hohem Diffusioneinfluß mit Fehlern zu rechnen ist. Es gilt:

$$\mathscr{D}_{ij}^t = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\overline{u_i' u_j' u_k'}\right) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\nu_t}{\sigma}\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k}\right), \tag{2.25}$$

  wobei σ meist ein Wert von 0,81 zugeordnet wird (Hirsch verwendet 1,0). Bei der isothermen Betrachtung (*kein* Wärmetransport) *einer* Spezies (*keine* Diffusion weiterer Spezies) ist die sogenannte Prandtl-Schmidt-Zahl σ stets gleich eins.

- **Ansatz nach Daly und Harlow (1970)**

  Hier gilt:

$$\mathscr{D}_{ij}^t = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(C_s \frac{k}{\varepsilon}\overline{u_k' u_l'}\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_l}\right), \tag{2.26}$$

  mit einem konstanten Wert C_s von 0,22. DH kennzeichnet im folgenden den Ansatz.

2.5 Grobstruktursimulation

Die Grobstruktursimulation, meist mit dem Akronym LES, vom englischen *Large-Eddy-Simulation*, bezeichnet, stellt einen Mittelweg zwischen rein statistischer Betrachtung (Reynolds'sche Mittelung) und direkter Berechnung dar, indem die exakte Beschreibung der räumlich und zeitlich variablen Strömung auf *große* Strukturen beschränkt wird und *kleine* modelliert werden.

Im Gegensatz zur statistischen Betrachtungsweise, die definitionsgemäß eine klare Unterscheidung von Mittelwert und Fluktuation ermöglicht, benötigt die LES zunächst eine physikalisch sinnvolle Unterteilung des Spektrums turbulenter Bewegungsskalen. Wie in Abschnitt 2.2 erörtert, ist im Wellenzahlraum die energiereiche Grobstruktur von den universell charakterisierbaren dissipativen Skalen durch einen Trägheitsbereich separiert, in dem ein verlustfreier Transfer turbulenter Bewegungsenergie von großen zu kleinen Skalen stattfindet. Es bietet sich daher an, ein Unterscheidungskriterium (eine Grenzwellenzahl, Cut-Off-Frequenz) in diesem Bereich zu definieren und den jenseits dieses Kriteriums (im Bereich höherer Wellenzahlen) liegenden

Teil des Spektrums mit Hilfe einer mathematischen Filteroperation von der direkten Berechnung abzutrennen und stattdessen geeignet zu modellieren.

Der Vorteil dieses Verfahrens gegenüber der direkten Methode besteht in einer signifikanten Steigerung der numerischen Effizienz, da sich wegen des Wegfallens kleinster Skalen die notwendige Anzahl diskreter räumlicher (und zeitlicher) Stützstellen stark reduziert. Ein lediglich die kleinsten vorkommenden Skalen beschreibender Modellansatz zeichnet sich aufgrund der Universalität dieser Strukturen durch eine im Vergleich zur statistischen Beschreibung geringere Komplexität und höhere Allgemeingültigkeit aus. Die Verwendung lokal isotroper Ansätze mit der Beschreibung charakteristischer Zeit- und Längenmaße liefert in diesem Bereich des turbulenten Energiespektrums eine hinreichende Genauigkeit. Die Grobstruktursimulation ist folglich ein vergleichsweise effizientes Werkzeug mit einer vielfach höheren Genauigkeit.

Folgend soll die Anwendung der Filterung auf die Bewegungsgleichungen erörtert und auf das resultierende Schließungsproblem als auch auf Schließungsansätze eingegangen werden. Überstrichene Variablen $\overline{\phi}$ beschreiben in diesem Zusammenhang *gefilterte* Größen und sind nicht mit dem Reynolds'schen Mittel zu verwechseln.

2.5.1 Filterung

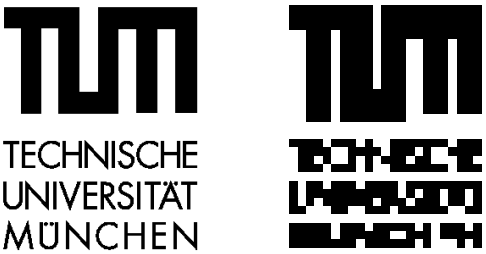


Bild 2.6. Auswirkung der Filterung; die Auflösung der rechten Graphik ist um einen Faktor 10 vergröbert.

Im Gegensatz zur zeitlichen / Ensemble Mittelung wird durch die Anwendung einer Filterung auf das momentane Strömungsfeld die Anzahl beinhalteter Skalen zwar stark reduziert, fluktuierende Größen werden jedoch nur zu einem Teil entfernt (geglättet). Diese Entfernung eines bestimmten Anteils der Information, das „Herausklappen“ aus dem aktuellen Sichtfeld, ist direkt mit dem Begriff „Faltung“ verbunden, welcher im mathematischen Zusammenhang stets mit Filteroperationen einhergeht. Die Gesamtheit der Information wird im Detail verringert, entscheidende Strukturen bleiben erhalten. Im übertragenen Sinne ist die gefilterte Information mit einer Vergröberung verbunden, etwa vergleichbar mit einer (niedrig aufgelösten) Pixelgraphik abgeleitet aus einem analogen Bild. Dabei sind Details nur noch bis zur Größenordnung des Pixelabstandes auszumachen, alle Kleineren verschwinden und sind durch einen mittleren Wert dargestellt. Bild 2.6 macht dies am Beispiel des Logos der TU München deutlich. Die um einen Faktor 10 vergröberte Darstellung auf der rechten Seite läßt zwar noch die Buchstaben „TUM“ erkennen, der darunterliegende Schriftzug hingegen ist nur noch schemenhaft als mittlerer Wert der schwarz-weiß Information gegeben. Kleine Details wie die Punkte der Umlaute verschwinden.

Im Falle der Grobstruktursimulation tritt an die Stelle des Pixelabstandes die sogenannte Filterweite $\overline{\Delta}$, die allgemein aus der relativen räumlichen Lage der diskreten Rechenpunkte zuein-

ander bestimmt wird. Eine direkte Kopplung der Filterweite an die Weite des zugrundeliegenden numerischen Gitters gewährleistet u. a. den Übergang der LES in die DNS bei sukzessiver Verfeinerung. Entscheidend ist, daß bei der Methode der Grobstruktursimulation im Gegensatz zum rein statistischen Ansatz nach Reynolds nur *ein Teil* der Gesamtinformation herausgefiltert wird und dabei die Grobstruktur erhalten bleibt. Konkret bedeutet dies, daß nur die kleinsten Skalen der Turbulenz aus dem Blickfeld fallen, während bei der statistischen Methode das gesamte Turbulenzspektrum entfernt wird.

Die Aufspaltung einer Größe φ in den Grob- und Feinstrukturanteil, $\varphi(\underline{x},t) = \overline{\varphi}(\underline{x},t) + \varphi(\underline{x},t)'$, erfolgt mit Hilfe einer räumlich lokalen Tiefpaßfilterung. Im mathematischen Sinne stellt diese Filteroperation eine Faltung mit der Filterfunktion G dar. Es gilt, Sagaut (2001) folgend:

$$\overline{\varphi}(\underline{x},t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \varphi\left(\underline{\xi}\right) G\left(\underline{x}-\underline{\xi}\right) d^3\underline{\xi}, \tag{2.27}$$

wobei die Faltungsfuntion $G\left(\underline{x}-\underline{\xi}\right)$ im $\mathbb{R}^3$ als Produkt eindimensionaler Operatoren aufzufassen ist,

$$G\left(\underline{x}-\underline{\xi}\right) = \prod_{i=1}^{3} G_i\left(x_i-\xi_i\right),$$

mit Index i der i-ten Raumkoordinate. Wegen der im $\mathbb{R}^3$ durchzuführenden Integration muß im Falle eines beschränkten Strömungsgebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ der Filter außerhalb von Ω formal zu Null gesetzt werden. Jeder Funktion G_i wird dabei eine Filterweite zugeordnet. Ist die räumliche Funktion G *homogen*, so gilt $\overline{\Delta}_i \equiv \overline{\Delta}$. Prinzipiell eignet sich jede Art von Tiefpaßfilter für eine Faltungsfunktion. Erfolgt die Operation im physikalischen Raum, der durch Finite Volumina diskret beschrieben ist, und werden dabei die Seiten der Volumina als Filterweite betrachtet, so entspricht dies der Anwendung eines räumlichen Top-Hat-Filters. Als Definition der räumlich homogenen Filterweite $\overline{\Delta}$ nennen Bernert und Eppler (1996) u. a. das geometrische Mittel der drei Weiten Δx, Δy und Δz,

$$\overline{\Delta} = \sqrt[3]{\Delta x\,\Delta y\,\Delta z}, \tag{2.28}$$

das quadratische Mittel,

$$\overline{\Delta} = \sqrt{\frac{1}{3}\left(\Delta x^2+\Delta y^2+\Delta z^2\right)}, \tag{2.29}$$

sowie das arithmetische,

$$\overline{\Delta} = \frac{1}{3}\left(\Delta x+\Delta y+\Delta z\right). \tag{2.30}$$

Forkel (2000) nennt zudem noch

$$\overline{\Delta} = \max\{\Delta x,\Delta y,\Delta z\}. \tag{2.31}$$

Es ist unmittelbar einsichtig, daß für den Grenzfall eines würfelförmigen Volumens alle genannten Verfahren identische Werte liefern. Bei ungleichen Abmessungen des Volumens jedoch erweist sich die erste Variante als ungeeignet, da im Grenzfall bei mindestens *einer* verschwindenden Kantenlänge (entartetes Volumen, z. B. in unmittelbarer Nähe der Achse eines rotationssymmetrischen Rechengitters) die Filterweite ebenfalls verschwinden würde. Ist diese Situation

auszuschließen, kann der Ansatz ohne Einschränkung verwendet werden. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit durchgeführte Simulationsrechnungen zeigten bei Verwendung des geometrischen bzw. des quadratischen Mittels quasi keine Unterschiede, da die Definition der Filterweite nur einen untergeordneten Einfluß auf die Berechnung nimmt (vgl. auch Forkel, 2000).

Die bereits im Zusammenhang mit der Reynolds'schen Mittelung genannten Eigenschaften der Linearität (Bedingung (2.10a) und (2.10b)) und der Kommutativität (Bedingung (2.10c))[9] sind generelle Eigenschaften einer Faltung und folglich auch bzgl. Filteroperationen gültig (Sagaut, 2001). Hingegen ist Bedingung (2.10d) hier nicht anwendbar, da bei allgemeiner Filterung die Korrelation von gefilterter Größe und fluktuierendem Anteil nicht notwendig verschwindet (in Abschnitt 2.4 wird gezeigt, daß Reynolds-gemittelte Größen und Fluktuation stets unkorreliert sind). Stattdessen gilt[10],

$$\overline{\phi_1\phi_2} = \overline{\overline{\phi}_1\overline{\phi}_2} + \overline{\overline{\phi}_1\phi_2'} + \overline{\phi_1'\overline{\phi}_2} + \overline{\phi_1'\phi_2'}. \tag{2.32}$$

Außerdem sind die Ungleichheiten

$$\overline{\overline{\phi}} \neq \overline{\phi} \quad \text{und} \tag{2.33a}$$

$$\overline{\phi'} \neq 0 \tag{2.33b}$$

zu beachten. Aus der Definition einer integral räumlichen Filteroperation ist Gleichung (2.33a) direkt ersichtlich (Sagaut, 2001). Die hier dargestellten Eigenschaften resultieren in einem Schließungsproblem, das analog jenem im Zusammenhang mit der Reynolds'schen Mittelung durch einen geeigneten Ansatz zu lösen ist.

2.5.2 Gefilterte Navier-Stokes Gleichungen

Die Transportgleichungen für gefilterte Größen erhält man durch die Anwendung des soeben beschriebenen Tiefpaß-Filters auf die Kontinuitäts- (2.1) und Navier-Stokes-Gleichungen (2.4). Für die Kontinuitätsgleichung gilt nun,

$$\frac{\partial\overline{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\rho U_j}\right) = 0, \tag{2.34}$$

wobei für ein inkompressibles Fluid wiederum die Divergenzfreiheit des (gefilterten) Geschwindigkeitsfeldes folgt:

$$\frac{\partial\overline{U}_j}{\partial x_j} = 0. \tag{2.35}$$

Aus der Anwendung des Filters auf die inkompressibel formulierten Navier-Stokes-Gleichungen ohne Beachtung der Gravitation folgt zunächst[11]

$$\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{U_iU_j}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\overline{P}}{\partial x_i} + \nu\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial\overline{U}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_j}\right), \tag{2.36}$$

9 Bei räumlicher Top-Hat-Filterung gilt dies auch für die räumliche Ableitung (Bernert und Eppler, 1996).

10 Für die Variablen sind beliebige Größen zu setzen.

11 Es ist Gleichung (2.32) zu beachten: $\overline{U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}} \neq \overline{U}_i\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_j}$.

wobei der Konvektionsterm auf der linken Seite, Gleichung (2.32) folgend, als Summe der gefilterten Größen und der entsprechenden Fluktuation dargestellt werden muß, um die Gültigkeit der Gleichung zu gewährleisten. Die sogenannte Leonard'sche Dekomposition lautet:

$$\overline{U_i U_j} = \overline{\left(\overline{U}_i + u_i'\right)\left(\overline{U}_j + u_j'\right)} = \overline{\overline{U}_i \overline{U}_j} + \overline{\overline{U}_i u_j'} + \overline{\overline{U}_j u_i'} + \overline{u_i' u_j'}. \tag{2.37}$$

Durch Einsetzen dieses Zusammenhangs in Gleichung (2.36) erhält man eine neue Form der gefilterten Impulsgleichung,

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{\overline{U}_i \overline{U}_j}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \tag{2.38}$$

in der der sogenannte Feinstrukturtensor τ_{ij} alle Terme vereint, die nicht ausschließlich von der Grobstruktur abhängig sind (Sagaut, 2001),

$$\tau_{ij} = \mathscr{C}_{ij} + \mathscr{R}_{ij} = \overline{U_i U_j} - \overline{\overline{U}_i \overline{U}_j}, \tag{2.39}$$

also alle Größen, die aufgrund des aus der Filterung resultierenden Informationsverlustes nicht mehr direkt bestimmt werden können. In obiger Gleichung repräsentiert der sogenannte *Cross-Stress Tensor* $\mathscr{C}_{ij}$ die Wechselwirkung zwischen groben und feinen Strukturen. Der Reynolds'sche Feinstrukturtensor $\mathscr{R}_{ij}$ beschreibt Wechselwirkungen innerhalb der Feinstruktur:

$$\mathscr{C}_{ij} = \overline{\overline{U}_i u_j'} + \overline{\overline{U}_j u_i'} \tag{2.40}$$

und

$$\mathscr{R}_{ij} = \overline{u_i' u_j'}. \tag{2.41}$$

Eine bis hier durchgeführte sogenannte *Doppel-Dekomposition* ermöglicht allerdings noch keine direkte Berechnung der Gleichung mit Hilfe einfach gefilterter Größen. Führt man zusätzlich einen Vorschlag von Leonard (zit. in Sagaut, 2001) ein, nachdem

$$\overline{\overline{U}_i \overline{U}_j} = \left(\overline{\overline{U}_i \overline{U}_j} - \overline{U}_i \overline{U}_j\right) + \overline{U}_i \overline{U}_j = \mathscr{L}_{ij} + \overline{U}_i \overline{U}_j \tag{2.42}$$

gilt und $\mathscr{L}_{ij}$ (Klammerausdruck in obiger Gleichung) der Abbildung von Wechselwirkungen großer (aufgelöster) Skalen untereinander dient, so kann der Forderung nach ausschließlich einfach gefilterten Berechnungsgrößen in Gleichung (2.38) nachgekommen werden. Es gilt:

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{U}_i \overline{U}_j\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_j}\right) - \frac{\partial \tau_{ij}^{\mathrm{sgs}}}{\partial x_j}. \tag{2.43}$$

τ_{ij}^{sgs} bezeichnet den nicht mehr direkt berechneten Spannungsanteil und ist als Summe von Cross-Stress Tensor $\mathscr{C}_{ij}$ (Gleichung (2.40)), Reynolds'schem Feinstrukturtensor $\mathscr{R}_{ij}$ (Gleichung (2.41)) und Leonard Tensor $\mathscr{L}_{ij}$ (aus Gleichung (2.42)) zu verstehen,

$$\tau_{ij}^{\mathrm{sgs}} = \mathscr{C}_{ij} + \mathscr{R}_{ij} + \mathscr{L}_{ij} = \overline{U_i U_j} - \overline{U}_i \overline{U}_j. \tag{2.44}$$

Die Gleichungen (2.43) und (2.44) können nun formal direkt, ohne die explizite Anwendung der Leonard'schen Dekomposition bestimmt werden. Dennoch beinhaltet τ_{ij}^{sgs} wegen des Summanden $\mathscr{L}_{ij}$ einen Anteil, welcher Wechselwirkungen der aufgelösten großen Strukturen untereinander repräsentiert, und besitzt so einen nicht vernachlässigbaren gitterabhängigen Einfluß auf die Vorhersagequalität der Simulation. Außerdem bestimmt die zugrundeliegende räumliche Diskretisierung des Strömungsgebiets (Gitterweite) unmittelbar die Trennung von Grob- und Feinstruktur und damit auch die notwendig zu erfüllenden Anforderungen an das Feinstrukturmodell. Gleichzeitig wird für ein bestimmtes Strömungsproblem die erforderliche Gitterweite durch das formulierte Feinstrukturmodell sichtbar. Bei gegebenem Modell *und* Kopplung von Filter- und Gitterweite führt die Verfeinerung des numerischen Gitters dabei stets zu einer Verminderung des Einflusses von τ_{ij}^{sgs} auf die direkt berechneten Größen. Folglich wird so im Grenzfall die LES in eine DNS überführt. Der Subtrahend in Gleichung (2.44), $\overline{U}_i\overline{U}_j$, stellt eine quadratische Funktion dar und beinhaltet deshalb, Sagaut (2001) folgend, mehr Freiheitsgrade als die Faktoren selbst. Um eine entsprechende Abbildung dieser zusätzlich zu betrachtenden Grade zu gewährleisten, schlägt er ein zweifach verfeinertes Gitter zur Berechnung dieser Größe vor. In der Praxis ist dies allerdings, auch in Betracht des ohnehin schon hohen numerischen Aufwands, nur schwer umsetzbar. Trotzdem wurde in vorliegender Arbeit ein verhältnismäßig feines numerisches Gitter gewählt, um den Einfluß des Modellterms auf die Ergebnisqualität der Simulation so gering wie möglich zu halten. So wird auch gewährleistet, daß das Intermittenzphänomen beim Drallfreistrahl möglichst unbeeinflußt vom eingesetzten Modell abgebildet wird.

Im physikalischen Sinne repräsentiert der Feinstrukturspannungstensor (auch *sgs*-Spannungstensor) τ_{ij}^{sgs} den Energietransfer (Impulstransport) zwischen Grob- und Feinstruktur, wobei im Falle einer Wirkrichtung hin zu modellierten von *outscatter* und in entgegengesetzter Richtung von *backscatter* gesprochen wird. Sagaut folgend ist für eine Existenz einer Feinstruktur stets eine lokal turbulente Strömung notwendig. Der nächste Abschnitt stellt zwei der wichtigsten und am weitesten verbreiteten Schließungsansätze vor.

2.6 Feinstrukturmodelle

Feinstrukturskalen liegen in der Größenordnung der Zellseiten Δx_i und sind in der Form folglich nur noch geringfügig von der äußeren Geometrie des Problems bestimmt. Die im folgenden vorgestellten Modellansätze basieren auf der Annahme eines energetischen Gleichgewichts innerhalb der Energiekaskade sowie ihrer zeitlichen Invarianz, d. h. es existiert innerhalb des Spektrums keinerlei „Anhäufung“ von Energie im Bereich bestimmter Skalen (Frequenzen), und die Ausprägung ist zu jedem betrachteten Zeitpunkt identisch.

Mittels genügend hoher räumlich-zeitlicher Diskretisierung eines Strömungsproblems muß also gewährleistet werden, daß sich die zum Einsatz kommenden Filterweiten in der Nähe der Kolmogorov'schen Skalen befinden oder wenigstens genügend weit am äußersten rechten Rand des Trägheitsbereiches liegen. Die Annahme lokal isotroper Turbulenz kann dann, wenigstens in jenen Bereichen mit hoher räumlicher Auflösung, ohne weitere Einschränkungen getroffen werden.

Die meist zum Einsatz kommenden Modelle basieren auf dem Wirbelviskositätsprinzip nach Boussinesq (1877), der eine Proportionalität von aufgelöstem Schertensor und Feinstrukturspannung durch die sogenannte turbulente Viskosität beschreibt,

$$\nu_t \sim l\,u \quad \text{mit} \quad l \sim \overline{\Delta}, \tag{2.45}$$

wobei das Längenmaß l proportional zur Filterweite $\overline{\Delta}$ gewählt ist und u eine charakteristische Geschwindigkeit darstellt. Dabei ist ν_t *nicht* als reale Eigenschaft des Fluids aufzufassen, sondern als orts- und zeitabhängige Funktion des lokalen Zustands der Turbulenz zu verstehen (Scheinviskosität). Im Gegensatz zur molekularen Größe besteht i. allg. *keine* Nichtnegativitätsforderung der „Pseudogröße“, da auf der hier betrachteten Makroebene (Längenmaß l) kein thermodynamisches Gleichgewicht herrscht. D. h. während in Falle der molekularen Viskosität stets ein Entzug kinetischer Energie und entsprechende Umwandlung in innere Energie des Fluids stattfindet, kann bei den hier betrachteten vielfach größeren Skalen auch ein in umgekehrter Richtung wirkender Energietransport stattfinden, also von kleinen hin zu größeren Strukturen (*backscatter*). Die Wirbelviskositätshypothese verknüpft linear den zu modellierenden *sgs*-Spannungstensor τ_{ij}^{sgs} mit dem lokalen (gefilterten) Schertensor $\overline{S}_{ij}$ (Deardorff, 1970; Bernert und Eppler, 1996). Für den Deviator des Spannungstensors gilt,

$$\mathfrak{D}\tau_{ij}^{\mathrm{sgs}} = \tau_{ij}^{\mathrm{sgs}} - \frac{1}{3}\tau_{kk}^{\mathrm{sgs}}\delta_{ij} = 2\nu_t\overline{S}_{ij}. \tag{2.46}$$

Der Ansatz ist aus Gründen der Konsistenz mit der Spurfreiheit[12] des (gefilterten) Schertensors $\overline{S}_{ij}$ im Falle einer inkompressiblen Strömung nur für den anisotropen Teil des sgs-Spannungstensors formuliert. Der aus den Normalspannungskomponenten abgespaltene „mittlere Turbulenzdruck“

$$-\frac{1}{3}\tau_{kk}^{\mathrm{sgs}}$$

12 Die Spur einer quadratischen Matrix $\underline{\underline{A}}$ vom Typ $n \times n$ ist definiert als die Summe der Diagonalelemente, $\mathrm{Spur}\,(\underline{\underline{A}}) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. Man nennt die Matrix $\underline{\underline{A}}$ *spurfrei*, falls gilt: $\mathrm{Spur}\,(\underline{\underline{A}}) = 0$ (Råde und Westergren, 1997).

wird dabei in den Grobstrukturdruck $\overline{P}$ additiv einbezogen:

$$\overline{P}^{\star} = \overline{P} - \frac{\overline{\rho}}{3}\tau_{kk}^{\mathrm{sgs}}. \tag{2.47}$$

Die gefilterten Navier-Stokes Gleichungen enthalten somit die Größe $\overline{P}^{\star}$ anstelle des tatsächlichen statischen Druckes $\overline{P}$. Eine Bestimmung des real vorhandenen Drucks aus diesem „Pseudodruck“ ist damit nicht mehr möglich, ebenfalls sind die Normalspannungskomponenten des modellierten Spannungstensor und folglich dessen kinetische Energie nicht mehr ableitbar (Bernert und Eppler, 1996). Wenn, wie in vorliegender Arbeit, Druck oder fluktuierender Druck in der Auswertung der Simulationsergebnisse berücksichtigt werden, muß zwingend durch genügend hohe Auflösung der untersuchten Strömung ein Einfluß dieses aus der mathematischen Formulierung resultierenden Anteils minimiert werden. Auch aus diesem Grund erfolgt deshalb in den für weitere Analysen relevanten Bereichen eine hohe räumliche Diskretisierung[13]. Im folgenden soll aus Gründen der Übersichtlichkeit auf den Index * verzichtet werden.

Ein besonders hervorzuhebendes Problem der Relation (2.45) besteht in der Bestimmung eines universellen Proportionalitätsfaktors, der unabhängig vom Typ der Strömung zufriedenstellende Ergebnisse bei gleichzeitiger numerischer Stabilität und Effizienz bietet. Eine Schwäche des Ansatzes besteht in der linearen Verknüpfung von Scher- und Spannungstensor, die Hauptachsen beider Tensoren werden stets als kollinear betrachtet. Weitere Mängel und Schwierigkeiten der Wirbelviskositätshypothese im Zusammenhang mit der Grobstruktursimulation beschreibt unter anderem Germano et al. (1991). Eine umfassende Darstellung ist bei Bernert und Eppler (1996) zu finden.

Lokale Isotropie der Turbulenz ist in den Ergebnissen experimenteller Untersuchungen sowie direkter numerischer Berechnungen besonders bei Scherströmungen erst in der Größenordnung der Kolmogorov’schen Skalen gegeben, was die Forderung nach möglichst hoher Auflösung des Rechengebiets durch das numerische Gitter unterstützt. Auch ist wegen der verschiedenen Relaxationszeiten der Skalen eine Gleichgewichtsbedingung grober und feiner Strukturen nicht notwendigerweise gegeben, besonders dann nicht, wenn eine instationär angeregte Strömung vorliegt. Feinskalen reagieren weniger träge als die Grobstruktur und erreichen folglich schneller wieder einen Gleichgewichtszustand, der durch die von außen wirkende Anregung gestört wurde (Sagaut, 2001). Daraus folgt eine, wenn auch nur zeitweilige, Abweichung vom Energiegleichgewicht. Liegt hingegen keine äußere Anregung der Strömung vor, ist eine verschiedene Relaxation unterschiedlicher Skalen von untergeordneter Bedeutung.

2.6.1 Das Modell von Smagorinsky

Eines der am weitest verbreiteten Modelle entspricht dem Vorschlag von Smagorinsky (1963) und wurde ursprünglich für atmosphärische Strömungen in der Meteorologie entwickelt. Hierin

13 Im untersuchten Nahbereich des Brennerauslasses liegt bei beiden untersuchten Strömungen das Verhältnis ${}^{sgs}\nu/\nu$ im Bereich zwischen 2 und 5, weshalb der Einfluß des mittleren Turbulenzdrucks als vernachlässigbar angesehen wird. Weitere, daraus resultierende Konsequenzen werden in Abschnitt 5.3 beschrieben.

wird die turbulente Viskosität ν_t als Funktion von Filterweite $\overline{\Delta}$ und Betrag des Deformationsgeschwindigkeitstensors formuliert,

$$\nu_t = \left(C_S\overline{\Delta}\right)^2 |\overline{S}| \qquad \text{mit} \qquad |\overline{S}| = \sqrt{2\overline{S}_{ij}\overline{S}_{ij}}. \tag{2.48}$$

Der Ansatz folgt der Formulierung Reynolds'scher Spannungen nach den Prandtl'schen Mischungsweganssatz (vgl. z. B. Schlichting, 1982). Charakteristisches Längen- ($C_S\overline{\Delta}$) und Geschwindigkeitsmaß ($C_S\overline{\Delta}|\overline{S}|$) beinhalten gleichsam eine empirische Modellkonstante, deren Werte vorwiegend im Bereich $0,065 \leq C_S \leq 0,336$ gewählt werden, abhängig vom Typ der untersuchten Strömung (Überblick: Bernert und Eppler, 1996). Forkel (2000) nennt einen praxisrelevanten Bereich der Größenordnung $0,2$ für C_S, während Deardorff (1970) (zit. in Germano et al., 1991) den Wert $C_S = 0,1$ vorschlägt. Aus Gleichung (2.48) folgt unmittelbar $\nu_t \geq 0$ und zeigt so den stets global dissipativen Charakter des Modells von Smagorinsky.

Der stark von der betrachteten Strömungssituation abhängige (konstante) Modellparameter C_S und die formal quadratische Abhängigkeit des *sgs*-Spannungstensors von dieser Konstante stellt die Anwendbarkeit dieses Modells generell in Frage. Auch existiert keine eindeutige Trennung turbulenter Fluktuationen von laminaren bzw. im statistischen Mittel existierenden Gradienten. Betrachtet man viskose Unterschichten an Wänden, so sind dort die größten Geschwindigkeitsgradienten vorhanden und es folgen aus Gleichung (2.48) die höchsten Werte der turbulenten Viskosität, obgleich in diesem Bereich keinerlei Turbulenz mehr vorhanden ist. Bei Problemfällen ohne relevanten Einfluß fester Wände auf die Strömungsgrößen innerhalb des Rechengebiets stellt dies allerdings keine Einschränkung dar. Der entscheidende Nachteil eines *a priori* zu definierenden und per Definition konstanten Parameters taucht im Zusammenhang mit der Forderung nach beliebig angepaßten Rechengittern auf. Gerade Kontrollvolumina mit stark unterschiedlichen Seitenverhältnissen, wie beispielsweise in rotationssymmetrischen Konfigurationen vorhanden, machen die Wahl eines einzigen konstanten Parameters unmöglich, da die Filterlänge stets räumlich homogen beschrieben ist (vgl. Gleichung (2.28) bis (2.31)). Im Rechengebiet variierende Zellgrößen sind durch konstante Werte ebenfalls nur unzureichend beschreibbar, weil die Lage der Cut-Off-Frequenz, bestimmt durch das numerische Gitter und die Schwankungsbewegung, nicht notwendigerweise in den Trägheitsbereich des turbulenten Spektrums fallen muß.

Die den sogenannten dynamischen Modellen zugrunde liegenden Überlegungen eines variablen Parameters sollen am Beispiel des Ansatzes von Germano et al. (1991) gezeigt und diskutiert werden. Motiviert durch die mangelnde Vorhersagequalität bei Berechnungen stark gescherter und rotierender Strömungsprobleme sowie, wie bereits angesprochen, bei signifikanten Einflüssen fester Wände und variabler Zellgröße, versucht der dynamische Ansatz eine vom gegebenen Strömungsfall sowie von der räumlichen Diskretisierung unabhängige Modellierung der sgs-Spannungen.

2.6.2 Dynamisches Modell nach Germano

Die „Dynamik“ des Ansatzes von Germano et al. (1991) basiert auf einer Erweiterung des Wirbelviskositätsmodells von Smagorinsky um eine raum- wie zeitabhängige Bestimmung des Modellparameters unter (impliziter) Annahme der Selbstähnlichkeit des turbulenten Spannungstensors auf verschiedenen Wellenzahlen. Durch Anwendung zweier Filter mit den Weiten $\overline{\Delta}$,

$\widetilde{\Delta} \geq 0$, wobei stets $\widetilde{\Delta} \geq \overline{\Delta}$ gilt, ist eine exakte algebraische Identität der resultierenden Spannungen beider Filterstufen ableitbar (im folgenden als *Germano-Identität* bezeichnet). Die Annäherung dieser Spannungen durch ein Modell (den Ansatz von Smagorinsky) ermöglicht eine von den eingehenden Filterweiten unabhängige Bestimmung des Modellparameters. Einzig das Verhältnis der beiden Gitterweiten ist dabei *a priori* zu definieren,

$$\widetilde{\Delta} = \alpha \overline{\Delta}, \tag{2.49}$$

wobei der konstante Faktor α üblicherweise aus dem Bereich zwischen 1,4 und 2,0 gewählt wird (Forkel, 2000). Bei einem räumlichen Testfilter ($\widetilde{\Delta}$) definiert durch die angrenzenden Kontrollvolumina ($\overline{\Delta}$), wie er für die Grobstrukturrechnungen eingesetzt wurde, und einem konstanten Vergrößerungsfaktor der Gitterweiten (pro Raumrichtung) resultieren allerdings Werte größer 2,0. Für die mit Faktor χ anwachsenden Gitterweiten in der *i*-ten Koordinatenrichtung folgt für das Gitterweitenverhältnis des *m*-ten Volumens (Råde und Westergren, 1997):

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta}_i^m &= \overline{\Delta}_i^0 (1+\chi)^m \\
\widetilde{\Delta}_i^m &= 1/2\,\overline{\Delta}_i^{m-1} + \overline{\Delta}_i^m + 1/2\,\overline{\Delta}_i^{m+1} \\
&= 2\overline{\Delta}_i^0 (1+\chi)^m + 1/2\,\overline{\Delta}_i^0 (1+\chi)^{m-1} \chi^2 \\
&= 2\overline{\Delta}_i^m + 1/2\,\overline{\Delta}_i^{m-1} \chi^2 \\
\Rightarrow \frac{\widetilde{\Delta}_i^m}{\overline{\Delta}_i^m} &= 2 + \frac{\chi^2}{2(1+\chi)} > 2 \quad \forall \chi > -1.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

Bei Verwendung eines typischen Faktors in der Größenordnung von 2% ist der zusätzliche Summand allerdings vernachlässigbar klein ($< 0,1\%$).

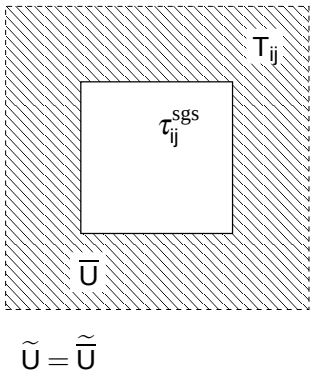


Bild 2.7. Skizze zur Germano-Identität.

Aus der Leonard'schen Dreifachdekomposition (vgl. (2.44)) folgt für den Tensor τ_{ij}^{sgs} und die kleinsten aufgelösten Skalen ein unmittelbarer Zusammenhang. Die zu modellierende Spannung innerhalb einer Gitterzelle ist somit als Funktion der durch die Gitterweite $\overline{\Delta}$ definierten kleinsten Skalen zu verstehen, $\tau_{ij}^{\mathrm{sgs}} = \overline{f}(\overline{U}\,\overline{U}, \overline{UU}, \overline{\Delta})$. Wegen der Invarianz gegenüber der verwendeten Gitterweite gilt der Zusammenhang ohne weitere Einschränkung auch für den Testfilter mit $\widetilde{\Delta}$, $T_{ij} = \widetilde{f}(\widetilde{U}\widetilde{U}, \widetilde{UU}, \widetilde{\Delta})$. Bild 2.7 skizziert dies anhand der zuvor getroffenen Voraussetzung $\widetilde{\Delta} \geq \overline{\Delta}$. Es ist zu beachten, daß die Hintereinanderschaltung der beiden Filter stets den Testfilter als Resultat besitzt, $\overline{f}\,\widetilde{f} = \widetilde{f}\,\overline{f} = \widetilde{\overline{f}} \overset{!}{=} \widetilde{f}$. Bild 2.8 stellt dies am Beispiel eines an 100 diskreten Werten definierten sinusförmigen Eingangssignals dar, auf welches zwei Filterstufen angewendet werden. Hierbei entspricht der Filter $\overline{f}$ einer Weite von fünf Stützpunkten, $\widetilde{f}$ besitzt eine Weite von 20 Stützpunkten. Das Resultat der zweifachen Operation (die rechte Spalte in Bild 2.8) ist für die Operationen $\overline{f}\,\widetilde{f}$ und $\widetilde{f}\,\overline{f}$ identisch dem Ergebnis des Filters $\widetilde{f}$. Aus den beiden Filterstufen resultieren folgende Vorschriften für die zu modellierenden Spannungen:

$$\tau_{ij}^{\mathrm{sgs}} = \overline{U_i U_j} - \overline{U}_i \overline{U}_j \tag{2.51}$$

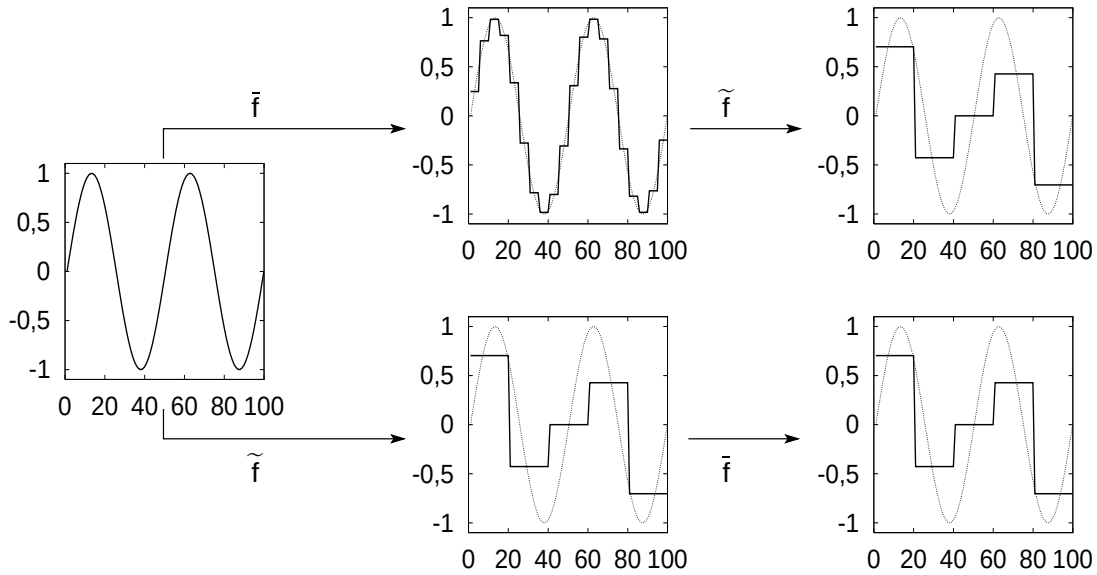


Bild 2.8. Zur zweistufigen Filterung.

und

$$T_{ij} = \widetilde{\overline{U_i U_j}} - \widetilde{\overline{U}}_i \widetilde{\overline{U}}_j, \tag{2.52}$$

wobei hier die rechte Seite der Gleichung (2.52) aus der Anwendung des hintereinandergeschalteten Filters $\widetilde{\overline{f}}$ folgt. Eine Verknüpfung von (2.51) und (2.52) durch den Tensor $\mathfrak{L}_{ij}$,

$$\mathfrak{L}_{ij} = T_{ij} - \widetilde{\tau_{ij}^{\mathrm{sgs}}} = \widetilde{\widetilde{\overline{U}_i \overline{U}_j}} - \widetilde{\overline{U}}_i \widetilde{\overline{U}}_j \tag{2.53}$$

beschreibt dabei algebraisch exakt den formalen Zusammenhang von aufgelösten Spannungen $\widetilde{\widetilde{\overline{U}_i \overline{U}_j}}$ und jenen aus dem „Zwischenbereich“ beider Filter $\widetilde{\overline{U}}_i \widetilde{\overline{U}}_j$, stellt also eine für die weitere Modellierung verwendbare Bestimmungsgleichung dar. Wegen der konzeptionellen Ähnlichkeit mit dem Leonard'schen Tensor wird hier ein $\mathfrak{L}$ in Frakturschrift zur eindeutigen Unterscheidung verwendet. Die algebraische Beziehung

$$T_{ij} = \mathfrak{L}_{ij} + \widetilde{\tau_{ij}^{\mathrm{sgs}}} \tag{2.54}$$

wird als *Germano-Identität* bezeichnet (Germano et al., 1991; Lilly, 1992; Bernert und Eppler, 1996). Eine Approximation beider Tensoren durch den Ansatz von Smagorinsky mit nur *einem* (konstanten) Modellparameter, unabhängig von der eingehenden Filterweite, setzt hierbei implizit eine Ähnlichkeit der turbulenten Längenskalen voraus. Interpretiert man die Vorfaktoren $(C_S\overline{\Delta})^2$ und $(C_S\widetilde{\overline{\Delta}})^2$ als Mischungslängen $\overline{l}$ und $\widetilde{\overline{l}}$, so besteht zwischen beiden Längen ein lineares Funktional mit dem Proportionalitätsfaktor α aus Gleichung (2.49).

Unter Verwendung der Gleichung (2.46) und (2.48) folgt jeweils für den anisotropen Teil:

$$\mathfrak{D}\tau_{ij}^{\mathrm{sgs}} = \tau_{ij}^{\mathrm{sgs}} - \frac{1}{3}\tau_{kk}^{\mathrm{sgs}}\delta_{ij} \approx 2\left(C_S\overline{\Delta}\right)^2|\overline{S}|\overline{S}_{ij} \coloneqq \quad 2\mathfrak{C}\overline{\Delta}^2\mathsf{A}_{ij}, \tag{2.55}$$

$$\mathfrak{D}T_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3}T_{kk}\delta_{ij} \approx 2\left(C_S\widetilde{\overline{\Delta}}\right)^2|\widetilde{\overline{S}}|\widetilde{\overline{S}}_{ij} \coloneqq \quad 2\mathfrak{C}\widetilde{\overline{\Delta}}^2\mathsf{B}_{ij}, \tag{2.56}$$

mit dem (konstanten) Parameter C_S identisch dem des Smagorinsky-Modells (2.48) und dem dynamischen Parameter $\mathfrak{C}$, wiederum zur eindeutigen Unterscheidung in Frakturschrift dargestellt.

Die Substitution der durch einen Modellansatz beschriebenen Tensoren τ_{ij}^{sgs} und T_{ij} in der Germano-Identität ist nun der entscheidende Schritt hin zur Entwicklung einer orts- und zeitabhängigen Bestimmungsgleichung des dynamischen Parameters. Allerdings führt dies dazu, daß Gleichung (2.54) nicht mehr exakt definiert ist. Zudem folgt aus *sechs* unabhängigen Gleichungen zur Bestimmung *eines* skalaren Parameters $\mathfrak{C}$ unmittelbar eine Überbestimmtheit des Systems. Germano et al. schlagen die Kontraktion mit $\overline{S}_{ij}$ und eine Mittelung in homogener Richtung vor, für dessen Anwendung laut Ronchi et al. (1992) allerdings keinerlei physikalische Begründung zu finden ist, und die außerdem den Approximationsfehler vollkommen außer acht läßt. Die Mittelung begründet sich dabei ausschließlich numerisch, da durch sie ein verschwindender Nenner in der Formulierung vermieden wird (Germano et al., 1991; Lilly, 1992). Dem Vorschlag von Lilly folgend kann dem Approximationsfehler durch die Minimierung des Gesamtfehlers (Modell- und Diskretisierungsfehler) Rechnung getragen werden und es erfolgt gleichzeitig eine Kontraktion des überbestimmten Systems[14],

$$\frac{\partial \mathsf{E}_{ij}\mathsf{E}_{ij}}{\partial\mathfrak{C}} = 0,$$

mit dem Fehlertensor (Lilly, 1992; Schulz, 1997):

$$\begin{aligned}\mathsf{E}_{ij} &=_{\mathfrak{D}} \mathfrak{L}_{ij} +_{\mathfrak{D}} \widetilde{\tau_{ij}^{\mathrm{sgs}}} -_{\mathfrak{D}} T_{ij}\\ &=_{\mathfrak{D}} \mathfrak{L}_{ij} + 2\mathfrak{C}\widetilde{\overline{\Delta}^2\mathsf{A}_{ij}} - 2\mathfrak{C}\widetilde{\overline{\Delta}}^2\mathsf{B}_{ij} \neq 0.\end{aligned}$$

Erst die Vernachlässigung der Kopplung benachbarter Punkte aufgrund der Testfilterung durch die Annahme $\mathfrak{C}\widetilde{\overline{\Delta}^2\mathsf{A}_{ij}} \approx \mathfrak{C}\overline{\Delta}^2\widetilde{\mathsf{A}}_{ij}$ ermöglicht die Bestimmung des Minimums:

$$\mathsf{E}_{ij} =_{\mathfrak{D}} \mathfrak{L}_{ij} + 2\mathfrak{C}\overline{\Delta}^2\widetilde{\mathsf{A}}_{ij} - 2\mathfrak{C}\widetilde{\overline{\Delta}}^2\mathsf{B}_{ij}, \tag{2.57}$$

und es folgt aus der Auswertung des Gradienten

$$\mathfrak{C}\overline{\Delta}^2 = \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{D}\mathfrak{L}_{ij}\mathsf{N}_{ij}}{\mathsf{N}_{kl}\mathsf{N}_{kl}} \quad \text{mit} \quad \mathsf{N}_{ij} = \underbrace{\frac{\widetilde{\overline{\Delta}}^2}{\overline{\Delta}^2}}_{\alpha^2}\mathsf{B}_{ij} - \widetilde{\mathsf{A}}_{ij}, \tag{2.58}$$

mit α dem nach Gleichung (2.49) definierten Verhältnis beider Filterweiten. Gleichung (2.58) ist dabei stets das Minimum des Fehlerquadrats, da $\partial^2\mathsf{E}_{ij}\mathsf{E}_{ij}/\partial\mathfrak{C}^2 \geq 0 \,\forall\, \mathsf{E}_{ij},\mathfrak{C}$ gilt. Das Fehlen

14 Zudem entfällt die Notwendigkeit der Mittelung in homogener Richtung.

des Smagorinsky-Parameters C_S im funktionalen Zusammenhang (2.58) macht deutlich, daß die Notwendigkeit zu dessen Bestimmung im dynamischen Ansatz entfällt. Der in Gleichung (2.50) beschriebene Fehler resultierend aus nicht äquidistanten Gitterweiten wird dabei ebenfalls als Teil des Gesamtfehlers betrachtet und spielt so keine Rolle für das beschriebene Modell (Forkel, 2000).

Als nachteilig an dieser Formulierung zu betrachten ist das mögliche Auftreten von numerischen Instabilitäten aufgrund negativer Werte des Parameters $\mathfrak{C}$, und folglich einer negativen turbulenten Viskosität ν_t. Zwar können lokal beschränkte negative Viskositätswerte zur Beschreibung von *backscatter*-Effekten genutzt werden, es ist dann aber auch mit einer exponentiellen Verstärkung lokaler Störungen anstelle ihrer Dämpfung zu rechnen und Instabilitäten sind die Folge (Bernert und Eppler, 1996). Zudem besteht keine Klarheit darüber, ob diese Effekte tatsächlich durch einen lokal negativen Wert der Wirbelviskosität ν_t abbildbar sind (Forkel, 2000). Härtel et al. (1994) und Piomelli et al. (1996) schließen dies sogar vollkommen aus. Eine Relevanz dieses inversen Energieflusses ist bei genügend feiner räumlicher Auflösung ohnehin von untergeordneter Bedeutung, wie aus der Publikation von Domaradzki et al. (1993) abzuleiten ist.

Das in dieser Arbeit verwendete Simulationsprogramm beschränkt den Wertebereich von $\mathfrak{C}$ auf positive Werte inklusive der Null, $\mathbb{W}(\mathfrak{C}) = \mathbb{R}_0^+$, und schließt so explizit negative Werte der turbulenten Viskosität aus. Hierdurch kann zwar global eine leichte Erhöhung der turbulenten Viskosität resultieren, da lokal negative Werte ausdrücklich nicht berücksichtigt sind. Diese Einschränkung trägt aber signifikant zur Stabilität des iterativen Berechnungsprozesses bei. Eine Beschränkung des Wertebereichs von $\mathfrak{C}$ führt zu einem global dissipativen Charakter des Ansatzes analog jenem des Smagorinsky-Modells. Die Bestimmungsgleichung des dynamischen Parameters lautet somit:

$$\mathfrak{C}\overline{\Delta}^2 \equiv \max\{\mathfrak{C}\overline{\Delta}^2, 0\}. \tag{2.59}$$

Auch die von Bernert und Eppler in einem Überblick angesprochene relativ geringfügige Sensitivität des Modells bzgl. der verwendeten Filterklasse und der Lage der Filter im turbulenten Spektrum unterstützt die Bevorzugung eines numerisch robusten Verfahrens. In der Praxis erhält man demnach günstige Ergebnisse sowohl für den Fall, daß beide Filterweiten im Trägheitsbereich liegen (also bei gegebener Skalenähnlichkeit streng nach Definition des Modells), als auch für $\overline{\Delta}$ und selbst für $\widetilde{\overline{\Delta}}$ *und* $\overline{\Delta}$ im dissipativen Bereich des Spektrums. Piomelli (1993) sieht selbst bei der Wahl der Filterweiten im Bereich der energiereichen Strukturen noch die Möglichkeit, brauchbare Ergebnisse zu erhalten. Bei genügend hoher Auflösung ist also dem Feinstrukturmodell nur ein kleiner Fehleranteil an der Gesamtlösung zuzuordnen.

Erweiterte Modellansätze, die u. a. zusätzliche Transportgleichungen für die Turbulenzenergie der Feinstruktur lösen (Ronchi et al., 1992; Wong, 1992), seien hier lediglich erwähnt. Die Lösung zusätzlicher Gleichungen und die lokal dynamische Anpassung an die statistische Struktur der aufgelösten Skalen gewährleistet zwar eine erhöhte Genauigkeit der dissipativ wirkenden Feinstruktur, geht aber gleichzeitig mit einem höheren numerischen Aufwand einher. Wegen des, wie in Abschnitt 5.3 detailliert erläutert, relativ geringen Einflusses der modellierten Spannungen, werden solche Ansätze in vorliegender Arbeit nicht weiter betrachtet.

3 Statistische Mittelung

Die im dreidimensionalen Raum transient durchgeführten Grobstruktursimulationen verlangen nach einer adäquaten Auswerteroutine, um die gewünschte Information über die Beobachtungsgrößen zu erhalten. Da im allgemeinen nur statische Größen, also Mittelwerte, Auto- und Kreuzkorrelationen für die Datenanalyse von Wichtigkeit sind, ist die Kenntnis des exakten transienten Verhaltens der Strömung zweitrangig. Zudem erlauben die resultierenden Datenmengen auch bei der heute zur Verfügung stehenden Rechnerleistung und Datenträgerkapazität keine effiziente Analyse. Folgendes Beispiel soll dies verdeutlichen: Die Berechnung einer mit ca. vier Millionen Kontrollvolumina diskretisierten Geometrie über einen typischen Beobachtungszeitraum von ca. $0,5$ s, ergäbe, bei der Speicherung der Geschwindigkeitskomponenten und des Druckes mit einfacher Präzision (4 Byte) an 10^5 diskreten Zeitpunkten, eine Datenmenge in der Größenordnung von

$$4 \cdot 10^6 \,\mathrm{KV} \cdot 4\,\mathrm{Größen}/\,\mathrm{KV} \cdot 4\,\mathrm{Byte}/\,\mathrm{Größe} \cdot 10^5 = 64 \cdot 10^{11}\,\mathrm{Byte} \approx 6.000\,\mathrm{GB},$$

wobei bei der meist verwendeten doppelten Genauigkeit nochmals mit einem Faktor 2 multipliziert werden muß. Selbst wenn dieses Speichervolumen zur Verfügung stehen würde, so wäre doch die Effizienz der Auswertung allein aus Gründen der fehlenden Übersichtlichkeit stark reduziert. Folglich wurden in der vorliegenden Arbeit statistische Methoden angewendet, um zu einer signifikanten Reduktion der Datenmenge bei gleichzeitiger Wahrung des Informationsgehaltes zu gelangen.

3.1 Ergoden-Theorem

Hamilton (1994) folgend, beschreibt das Ergoden-Theorem im statistischen Sinne die Gleichheit einer unendlichen Wiederholung des Ziehens einer Stichprobe und einer unendlich großen Anzahl von Stichproben, die genau einmal aufgenommen wurde. Somit beinhaltet eine unendlich lange Zeitreihe von Daten dieselbe Information über alle Zustände der Beobachtungsgröße, wie sie auch in unendlich vielen zeitlich gleichen Momentaufnahmen einer Beobachtungsgröße gegeben ist. Dies gilt uneingeschränkt für einen im Mittel stationären statistischen Prozeß. Mathematisch notiert lautet dies,

$$\overline{\phi}^{\mathrm{T}} = \overline{\phi}^{\mathrm{E}}$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \phi\left(\underline{x}, t'\right) dt' = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \phi_i\left(\underline{x}, t\right).$$

Eine unendlich große Anzahl von Stichproben (zeitlich wie räumlich) ist in einer realen Untersuchung nicht zu erhalten. Deshalb bedient man sich im Regelfall der arithmetischen Mittelwertbildung einer endlichen Anzahl von n Werten einer Zeitreihe,

$$\phi_n\left(\underline{x}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \phi_i\left(\underline{x}, t\right), \tag{3.1}$$

und postuliert diese Größe als das statistische Mittel $\phi_n(\underline{x}) \equiv \overline{\phi}$. Für statistisch unabhängige Eingangsgrößen ist diese Abschätzung mit einem Fehler $1/\sqrt{n}$ behaftet und kann folglich, bei genügend großer Anzahl n, vernachlässigt werden (Sagaut, 2001). Neben Mittelwerten skalarer Größen können auch solche von funktionalen Zusammenhängen durch Gleichung (3.1) bestimmt werden (Oberlack, 1994).

3.2 Dynamische Mittelung

Im Gegensatz zur klassischen Mittelwertbildung nach Gleichung (3.1), bei der alle eingehenden Stichproben ϕ_i separat gespeichert und nach Abschluß der Simulation ausgewertet werden, ist beim dynamischen Ansatz nur eine weitere Variable (pro Größe ϕ) während der Simulation notwendig, die den zum Zeitpunkt i jeweils aktuellen Mittelwert beinhaltet. Der zusätzlich benötigte Arbeitsspeicherplatz ist um Größenordnungen kleiner als das Speichervolumen, das für die Bereitstellung aller betrachteten Stichproben nötig werden würde.

Betrachtet man obigen formalen Zusammenhang des Mittelwertes aus n Stichproben, so läßt sich leicht eine Vorschrift für $n+1$ Proben entwickeln:

$$\overline{\phi}_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left[n\left(\frac{1}{n}\sum_{0}^{n}\phi_n\right)+\phi_{n+1}\right] = \frac{n}{n+1}\overline{\phi}_n + \frac{1}{n+1}\phi_{n+1}. \tag{3.2}$$

Gespeichert wird folglich nur die bis zum Zeitpunkt n gewonnene Summe $\sum_0^n \phi_i$ der Momentanwerte von ϕ sowie n selbst. Die Summation des mit Faktor $n/(n+1)$ gewichteten Mittels und des neu hinzukommenden Momentanwerts gewichtet mit $1/(n+1)$ bestimmt nun das neue Mittel $\overline{\phi}_{n+1}$.

Die in die Mittelung eingehende Anzahl von Stichproben ist durch ein zuvor definiertes Beobachtungsfenster zu beschränken, dessen Länge so gewählt wird, daß die größten, im relevanten Bereich der Strömung auftretenden turbulenten Strukturen noch genügend häufig berücksichtigt werden. Numerisch bedingte Probleme in Form von Rundungsfehlern (der Wichtungsfaktor neu hinzukommender Stichproben verhält sich reziprok zu ihrer Anzahl (Gleichung (3.2))) oder einer bleibenden Dominanz von Einzelereignissen im Mittelwert sind so weitestgehend auszuschließen. Vorstellbare Ereignisse dieser Art können beispielsweise aus noch nicht vollständig entwickelten Strukturen der Strömung resultieren.

Zur Veranschaulichung des hierbei auftretenden Fehlers soll im folgenden ein sinusförmiges Signal ohne Phasenverschiebung mit dem Mittelwert 10 und einer Amplitude von 30 betrachtet werden:

$$f(t) = 10 + 30\sin(2\pi f t),$$

mit t der Zeit und f=10 Hz der Frequenz des Eingangssignals. Tastet man dieses Signal mit einer Frequenz von 100 Hz über einen Zeitraum von $\Delta t = 2$s ab (es muß stets gelten: $f_{\text{Signal}} < f_{\text{Nyquist}} = 1/2\, f_{\text{Sampling}}$), so folgen $\Delta t\, f_{\text{Sampling}} = 200$ diskrete Werte. Trägt man die nach Gleichung (3.2) definierte dynamische Entwicklung des resultierenden Mittelwerts über die gesamte zeitliche Periode von 2 s an, so zeigt sich der in Bild 3.1 dargestellte Verlauf.

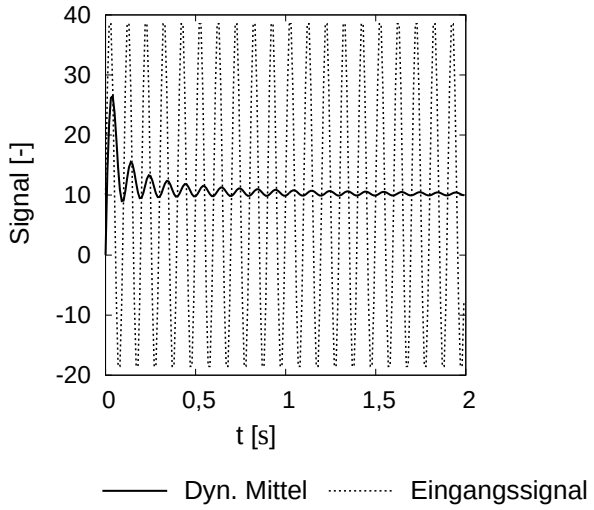


Bild 3.1. Entwicklung des dynamisch bestimmten Mittelwertes eines sinusförmigen Signals.

Die maximale Abweichung ist wie zu erwarten bei einer sehr geringen Anzahl von eingehenden Stichproben zu finden und liegt in der Größenordnung der Amplitude des Signals. Die relative Abweichung des dynamisch errechneten Mittels nähert sich nach Überschreiten dieses (lokalen) Maximums beidseitig asymptotisch dem tatsächlichen Mittel an und beträgt im vorliegenden Beispiel mit lediglich 20 vollausgeprägten Schwingungen zum Zeitpunkt 2 s 0,5%, also in der erwarteten Größenordnung von $1/\sqrt{\Delta t\, f_{\text{Sampling}}} = 0,7\%$.

Für ein turbulentes Signal bedeutet dies, daß bei einer Abtastfrequenz, die die kleinsten vorkommenden Wirbel erfassen kann, und einer (zeitlichen) Mittelungslänge, die eine genügend große Anzahl der größten vorkommenden Wirbel abzubilden vermag, eine dynamische Mittelung ohne Verlust an Genauigkeit durchführbar ist.

Neben Mittelwerten von Beobachtungsgrößen sind auch Momente höherer Ordnung zu untersuchen (Reynolds'sche Spannungen, Tripelkorrelationen der Geschwindigkeitsfluktuation, Druck-Scher-Korrelation et cetera). Deren relative Abweichung vom tatsächlichen Wert skaliert mit entsprechend höherer Ordnung mit der Anzahl der Stichproben. Beispielhaft zeigt dies die Autokorrelation einer Beobachtungsgröße. Die gemittelte Autokorrelation einer Größe (z. B. $\overline{u_i' u_i'}$) entspricht ihrer Varianz, formal zu bestimmen durch den mathematischen Zusammenhang:

$$\sigma^2(\phi) = \frac{1}{n-1} \sum_0^n \left(\phi_i - \overline{\phi}\right)^2. \tag{3.3}$$

Hierbei ist σ^2 die Varianz und $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$ die Standardabweichung, für die im allgemeinen Fall $\neq 0$ gilt (vgl. Gleichung (2.13)). Aus der gesamten Anzahl n der Beobachtungen beschreibt ϕ_i den i-ten Wert und $\overline{\phi}$ den Mittelwert aller n Beobachtungen. Ersetzt man nun $\overline{\phi}$ durch den aus der dynamischen Betrachtung resultierenden aktuellen Mittelwert $\overline{\phi}_n$, so ist leicht zu erkennen, daß der darin enthaltene Fehler $1/\sqrt{n}$ noch zusätzlich quadratisch in die Berechnung der Varianz einfließt (zweite binomische Formel) und so ein Fehler der Größenordnung $(1/\sqrt{n} + 1/n)$

resultiert. Zur Berechnung höherer Momente ist generell eine größere Anzahl von Stichproben notwendig, die allerdings durch Gewährleistung eines bereits gut konvergierten Mittels reduziert werden kann.

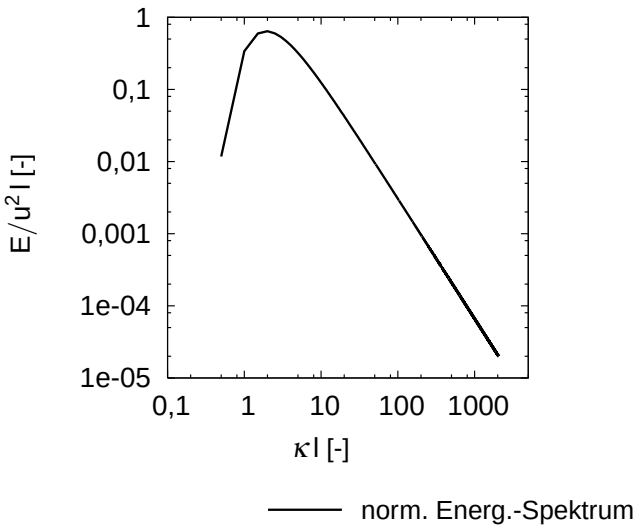
Zur Veranschaulichung sei nun ein pseudo-turbulentes Signal gegeben. Den aus der Gleichung für das normalisierte Energiespektrum (Tennekes und Lumley, 1972),

$$E(\kappa) = \alpha\varepsilon^{2/3}\kappa^{-5/3}\exp\left[-3/2\pi\beta\alpha^{1/2}(\kappa l)^{-4/3}\right] \tag{3.4}$$

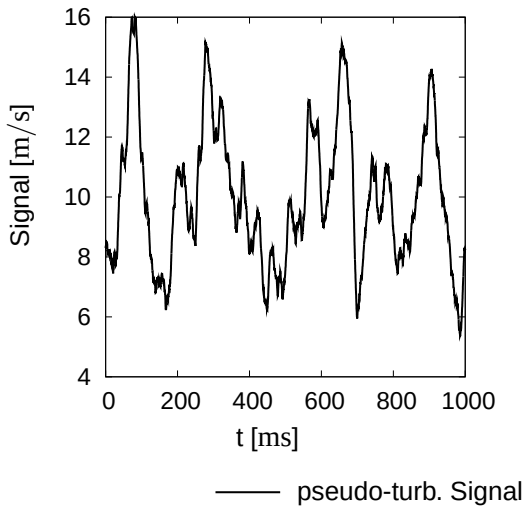
berechneten Verlauf zeigt Bild 3.2.a, das nach der Transformation in den physikalischen Raum resultierende Signal mit einem Mittel von 10, Bild 3.2.b. Hierbei entspricht κ der Wellenzahl, l dem integralen Längenmaß der größten auftretenden Wirbel und ε der Dissipationsrate der Turbulenz. Die Konstanten lauten nach Tennekes und Lumley $\alpha = 1,5$ und $\beta = 0,3$. Gleichung (3.4) beinhaltet dabei lediglich die sogenannten Produktionswellenzahlen, also solche in der Nähe des unteren Endes des Inertialbereichs. Dissipative Effekte werden *nicht* berücksichtigt, da sie für die hier angestellte Veranschaulichung der Konvergenz dynamischer Mittelwerte keinen relevanten Beitrag leisten. Berechnet man nun mit Hilfe der zuvor betrachteten Gleichungen die Entwicklung der Mittelwerte und der Varianz und plottet sie über die Anzahl der eingehenden Stichproben, so zeigt sich, daß nach Überschreiten der maximal auftretenden Fluktuation eine Annährung an den Zielwert erfolgt (Bild 3.2.c und Bild 3.2.d). Angesichts der schnellen Konvergenz des dynamischen Ansatzes erscheint dieser als geeignet zur Berechnung mittlerer Größen und trägt maßgeblich zu einer signifikanten Reduktion des benötigten Datenspeichervolumens bei. Allerdings muß *a priori* eine sinnvolle Abschätzung der Meßdauer aller vorkommenden Skalen durchgeführt werden, um gewährleisten zu können, daß auch alle relevanten Skalen häufig genug betrachtet werden und so ein vernachlässigbar kleiner Fehler im Mittel resultiert.

3.3 Räumliche Mittelung

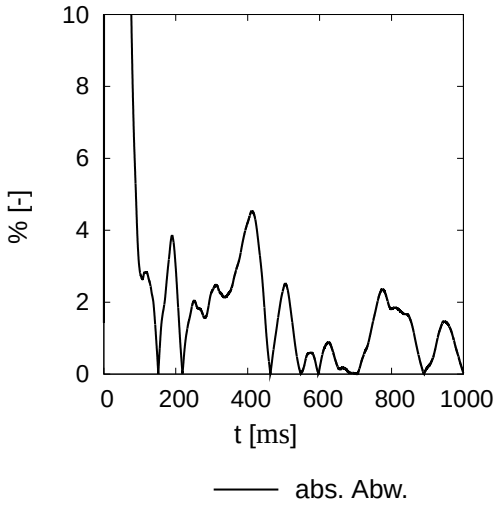
Für statisch stationäre Prozesse gilt, wie in Abschnitt 3.1 beschrieben, die Ergoden-Hypothese. Wendet man nun dieses Prinzip auf zeitliche Mittelwerte von Beobachtungsgrößen an vergleichbaren Positionen (im $\mathbb{R}^3$) an, so kann durch Mittelung dieser die Anzahl der eingehenden Stichproben für eine bestimmte Position signifikant erhöht werden, ohne den numerischen Aufwand immens zu vergrößern. Konkret bedeutet dies im vorliegenden Fall, daß innerhalb der untersuchten rotationssymmetrischen Geometrie an allen Kontrollvolumina zeitliche (Ensemble-) Mittel gebildet werden, die in einem nachfolgenden Schritt über die Umfangskomponente φ nochmals (räumlich) gemittelt werden. Grundlage für diese Vorgehensweise ist, der Ergoden-Hypothese folgend, eine statistisch stationäre Situation, daß heißt, die zeitlichen Ensembles müssen Rotationssymmetrie über die Umfangskomponente aufweisen. Zudem verlangt dies eine Betrachtung in Zylinderkoordinaten, alle relevanten Größen müssen zuvor von der kartesischen in die zylindrische Formulierung überführt werden. In Anhang K sind hierfür alle Vorschriften aufgelistet.



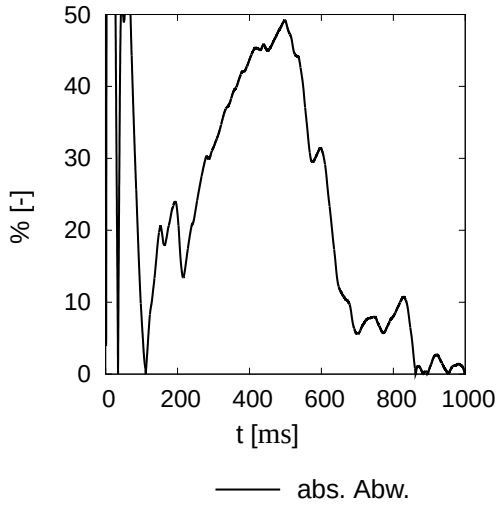
a. Normalisiertes turbulentes Energiespektrum nach Tennekes und Lumley (1972)



b. Pseudo-turbulentes Signal mit einem Mittel von 10



c. Entwicklung des Mittelwerts. Absolute Abweichung des dynamisch berechneten Mittels vom tatsächlichen des Signals



d. Entwicklung der Varianz. Absolute Abweichung der dynamisch berechneten Varianz von der tatsächlichen des Signals

Bild 3.2. Entwicklung des dynamischen Mittelwerts auf Basis eines pseudo-turbulenten Eingangssignals.

4 Überblick über die numerische Methode

Technisch relevante Strömungen entziehen sich aus Gründen erhöhter Komplexität ihrer Randbedingungen, äußerer Geometrie aber auch innerhalb der Strömung ablaufender Prozesse nahezu ausschließlich einer direkten, analytischen Lösung der nichtlinearen Differentialgleichungen. Folglich muß eine Approximationsmethodik gefunden werden, die eine weitestgehend genaue Berechnung bei vertretbarem Aufwand auch für diese Typen ermöglicht. Die u. a. von Patankar (1980) oder Hirsch (1988) eingehend beschriebene Methode der Finiten Volumen (FV) überführt die partiellen Differentialgleichungen in ein algebraisches System, dessen Lösung an zuvor definierten Stützstellen im Raum $\mathbb{R}^3$ mit geeigneten Algorithmen bestimmbar wird. Hierbei sind Näherungsannahmen zu treffen, die einen signifikanten Einfluß auf die Genauigkeit der Methode besitzen und folglich stets beachtet werden müssen. Dieses, von den meisten Berechnungsprogrammen eingesetzte Verfahren, ist im Gegensatz zur Methode der Finiten Differenzen (FD) vollkonservativ und gewährleistet das Gesetz der Massenerhaltung (Gleichung (2.1)) automatisch. Die folgenden Abschnitte sollen einen kurzen Überblick dieser Methode geben, für Details sei der Leser auf die angegebene Literatur verwiesen. Am Ende des Kapitel werden die für die Grobstruktursimulation verwendeten Modelle kurz angesprochen.

4.1 Räumliche Diskretisierung

Das Verfahren der Finiten Volumen unterteilt das zu betrachtende Strömungsgebiet in ein Gitter von Stützstellen und definiert um jeden dieser diskreten Punkte im $\mathbb{R}^3$ ein sogenanntes Kontrollvolumen. Es resultiert somit eine Unterteilung des Rechengebietes in kleinste zusammenhängende, nicht überlappende Einheiten. Die Integration der partiellen Differentialgleichungen über diese Volumina ΔV erfolgt unter Zuhilfenahme des Gauß'schen Integralsatzes (siehe z. B. Bronstein et al., 1999),

$$\iiint_{\Delta V} \underline{\nabla}\,\underline{\phi}\, dV = \iint_{\delta(\Delta V)} \underline{\phi}\,\underline{n}^{A_i}\, dA, \tag{4.1}$$

wobei die nun vorhandenen Oberflächenflüsse auf geeignete Weise approximiert werden müssen. Entscheidend bei dieser Operation ist die Überführung der Differentialgleichungen in ein algebraisches System, welches numerisch bestimmbar ist. In obiger Gleichung beschreibt der Integrationsbereich $\delta(\Delta V)$ die Summe der das *gesamte* Kontrollvolumen ΔV umschließenden Flächen. Das Integral der Divergenz der (vektoriellen) Größe $\underline{\phi}$ über das Volumen ΔV ist somit gleich dem Fluß von $\underline{\phi}$ über die umhüllenden Flächen A_i mit entsprechendem Normalenvektor $\underline{n}^{A_i} = \left(n_1^i, n_2^i, n_3^i\right)^T = \underline{n_j^i}$. Das Volumenintegral wird als Oberflächenintegral der ein- und ausströmenden konvektiven und diffusiven Flüsse über die begrenzenden Flächen aufgefaßt. Allgemein

formuliert erhält man, unter der Annahme einer homogenen Verteilung der Größe ϕ innerhalb des Kontrollvolumens

$$\int_{\Delta V} \underbrace{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\,dV}_{L_{ij}} + \int_{\delta(\Delta V)} \left[\underbrace{\frac{\partial(\rho U_j \phi)}{\partial x_j}}_{C_{ij}} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right)}_{D_{ij}} \right] n_k^j \, dA_j = \int_{\Delta V} S_\phi \, dV, \tag{4.2}$$

mit L_{ij} der zeitlich (lokalen), C_{ij} der konvektiven und D_{ij} der diffusiven Änderung einer beliebigen Strömungsgröße ϕ. Γ_ϕ repräsentiert dabei den Diffusionskoeffizienten und S_ϕ eine Quelle bzw. Senke, z. B. Wärmezufuhr durch Verbrennung.

Die Berechnung der diffusiven und konvektiven Flüsse über die einhüllenden Flächen der Kontrollvolumina bedarf der Kenntnis verschiedenster Eingangsgrößen an eben diesen Stellen, also *zwischen* den Stützstellen des numerischen Gitters. Der Verlauf der Variablen muß mittels Diskretisierungsschemata approximiert werden, wobei Kriterien wie Genauigkeit, Stabilität der iterativen Lösung und Vermeidung numerischer Diffusion zu beachten sind. An dieser Stelle sollen lediglich die wichtigsten Verfahren kurz angesprochen und diskutiert werden, eine Übersicht grundlegender Verfahren findet sich in Patankar (1980) und Noll (1993).

Wird das numerische Gitter an die äußere Geometrie des Strömungsproblems angepaßt, so bedarf diese Implementierung der Definition lokaler Koordinatensysteme (je Kontrollvolumen) und folglich der Transformation der globalen Koordinaten in diese Systeme. Hieraus resultieren zusätzliche Komponenten in den integralen Erhaltungsgleichungen, die aber zum grundlegenden Verständnis nicht beitragen und somit an dieser Stelle nur erwähnt seien. Eine eingehende Darstellung der speziellen Behandlung beliebiger Kontrollvolumina findet sich in Perić (1985), Leister (1994) und Hirsch (1988).

Im Falle der Diffusion D_{ij} werden die notwendigen Gradienten der Größe $\partial\phi/\partial x_j$ sowie die Diffusionskoeffizienten Γ_ϕ meist durch die Annahme eines linearen Verlaufs zwischen den Stützstellen bestimmt (Zentraldifferenzen, CDS). Dieser Ansatz beinhaltet eine Genauigkeit zweiter Ordnung im Raum, $\mathcal{O}\left(\Delta x^2\right)$.

Die Diskretisierung des konvektiven Anteils C_{ij} bedarf hingegen einer genaueren Prüfung des angewendeten Schemas. Die Verwendung eines linearen Interpolationsansatzes kann unter Umständen zu einer Destabilisierung des iterativen Berechnungsprozesses führen und in physikalisch unrealistische Ergebnisse münden. Dies geschieht genau dann, wenn das Verhältnis von Konvektion und Diffusion, charakterisiert durch die Peclét-Zahl Pe, einen Grenzwert überschreitet:

$$\mathrm{Pe} = \frac{\rho\,|U|\,\Delta x}{\Gamma} > 2.$$

Eine Möglichkeit der Abhilfe besteht beispielsweise im sogenannten „Flux-Blending“-Verfahren nach Khosla und Rubin (1974), das neben hoher Genauigkeit auch Stabilität gewährleistet. Durch Wichtung von Zentraldifferenzen- und Upwind-Verfahren (UDS) mit einem Faktor γ, $\gamma \in [0,1]$, erhält man je nach vorliegender Strömungssituation ein stabiles Interpolationsschema mit hoher Genauigkeit.

Die verbleibenden Quellen S_ϕ der rechten Seite von Gleichung (4.2) werden entsprechend diskretisiert. Enthalten sie keinerlei Gradienten, so können sie nach Multiplikation mit ΔV zur rechten Seite des Gleichungssystems addiert werden.

4.2 Entwicklung in der Zeit

Um die zeitliche Entwicklung der transient betrachteten Strömung beschreiben zu können, muß neben den konvektiven und diffusiven Anteilen der Transportgleichung auch die zeitliche Änderung L_{ij} bestimmt werden. Hierfür integriert man zunächst über das Kontrollvolumen unter Verwendung des volumetrischen Mittels,

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} dV = \int_{\Delta V} L_{ij} = \overline{\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}} \Delta V,$$

wobei die Näherung $\overline{\partial(\rho\phi)/\partial t} \approx \partial(\rho\phi)/\partial t$ getroffen wird, da innerhalb des betrachteten Volumens lediglich der Wert am diskreten Punkt bekannt ist. Diese Annahme homogenen Verhaltens innerhalb eines Kontrollvolumens wird in Analogie zur Annahme räumlicher Homogenität bei Konvektion und Diffusion getroffen. Die eigentliche Entwicklung in der Zeit beschreibt das Integral über einen, durch zwei diskrete Zeitpunkte $n-1$ und n definierten, Zeitschritt Δt. Nach Patankar handelt es sich bei der Zeit um eine sogenannte „one-way"-Koordinate, Einflüsse können nur aus der Vergangenheit resultieren, nicht aber aus zukünftigen Ereignissen. Die Beschreibung anhand zweier diskreter Zeitpunkte erscheint somit legitim.

Neben impliziten und expliziten Euler-Verfahren ist das implizite Crank-Nicolson-Verfahren eines der am häufigsten zum Einsatz kommenden. Es handelt sich formal um ein Verfahren zweiter Ordnung mit einem Abbruchfehler der Größenordnung $\mathcal{O}\left(\Delta t^2\right)$ und beschreibt die Entwicklung der Größe ϕ_P^n innerhalb der Zeitschrittweite Δt als linearen Verlauf zwischen altem, $n-1$, und neuem, n, Zeitpunkt.

Gegenüber der vollimpliziten Eulermodellierung zeichnet sich das Verfahren nach Crank-Nicolson durch eine höhere Genauigkeit bei nur geringfügig erhöhtem numerischen Aufwand aus. Press et al. bestätigen dies und auch Patankar benennt die höhere Genauigkeit besonders bei kleinen Schrittweiten, wie sie in dieser Arbeit aufgrund der benötigten hohen zeitlichen Diskretisierung verwendet werden müssen. Sie sind deshalb so gewählt, daß für das Kriterium von Courant et al. (1928) stets Werte kleiner 1 resultieren:

$$\mathrm{CFL} = \frac{\Delta t |u|}{\Delta x} < 1. \tag{4.3}$$

Die CFL-Zahl[1] ist ein Maß für den Informationstransport bezogen auf einen Zeitabschnitt Δt und eine räumliche Ausdehnung Δx_i.

Erweiterte Verfahren höherer Ordnung wie beispielsweise ein mehrstufiger Runge-Kutta-Ansatz oder die Euler-leap-frog-Methode werden wegen eines für die Untersuchung zu großen numerischen Aufwandes nicht in Erwägung gezogen. Eine qualitative Steigerung der durch die beschriebenen typischen Zeitschrittweiten ohnehin hochaufgelösten Skalen ist nicht zu erwarten.

1 Die Bestimmung der Courant-Zahl lautet dabei wie folgt:

$$\mathrm{CFL} = \Delta t \max\{|U/\Delta x| + |V/\Delta y| + |W/\Delta z|\},$$

mit den lokalen Werten der Geschwindigkeitskomponenten U, V und W und den Abmessungen des Kontrollvolumens $\Delta x, \Delta y$ und Δz. Relevant ist das Maximum aller Volumina.

4.3 Kopplung von Druck und Geschwindigkeit

Eine Berechnung der Impulsgleichungen erfolgt auf Basis von bekannten Massenflüssen und Druckverteilungen, also aus gegebenen Randbedingungen und Ergebnissen vorhergehender Iterationsschritte. Folglich ist das Gesetz der Impulserhaltung mit den resultierenden Werten gegeben, die Kontinuität hingegen ist nicht mehr erfüllt. Der so entstehende Massendefekt wird nun genutzt, um eine Korrekturgleichung für das Druckfeld zu formulieren, mit dem Ziel, iterativ ein Druck- und Geschwindigkeitsfeld zu erhalten, das sowohl die Massen- als auch die Impulserhaltung gewährleistet. Der Algorithmus basiert auf dem *SIMPLE*-Verfahren von Patankar (1980). Eine eingehende Beschreibung ist dort zu finden. Auch Noll (1993) erklärt detailliert die notwendigen Schritte, sodaß an dieser Stelle auf die Literatur verwiesen werden soll.

4.4 Lösung des Gleichungssystems

Das iterative Rechenverfahren wird im allgemeinen dann abgebrochen, wenn die Änderung der berechneten Lösungen innerhalb eines Iterationschrittes kleiner als eine zuvor festgelegte Genauigkeitsgrenze ϵ ist. Relevant für die Definition der eingehenden Änderungen ist das Residuum $\Re$ einer Gleichung, definiert als die Differenz von rechter und linker Seite der zu lösenden algebraischen Gleichung,

$$\Re^n = (\text{linke Seite})^n - (\text{rechte Seite})^n, \tag{4.4}$$

wobei der hochgestellte Index n die n-te Iteration meint. Die (Betrags-) Summe der Residuen aller Punkte P im Rechengebiet muß nun vor dem Vergleich mit der Grenze ϵ geeignet normiert werden. Das verwendete Programm benutzt hierfür die am Einströmrand gegebenen Werte für die hier betrachteten Geschwindigkeits- und Druckresiduen, gekennzeichnet durch tiefgestellte Indizes $P, 0$. Die resultierenden normierten Größen sind somit stets dimensionslos, ein direkter Vergleich mit der Grenze ist möglich:

$$\frac{\sum |\Re^n|}{\phi_{P,0}} \leq \epsilon. \tag{4.5}$$

Da die Randwerte der Geschwindigkeitskomponenten (und so implizit der Massenstrom) im hier untersuchten Fall stets von Null verschieden sind (Definition einer *Dirichilet* Randbedingung), läßt die verwendete Normierungsprozedur keine Probleme erwarten. Die im Rechengebiet vorliegenden Geschwindigkeits- und Druckfelder sind direkt von den am Rand definierten Größen bestimmt, ein so normiertes Residuum stellt somit ein Maß für die insgesamt auftretenden Flüsse zwischen den Kontrollvolumina dar. Ist die Bedingung (4.5) für *alle* zu lösenden Gleichungen erfüllt, wird die Iteration abgebrochen und die Lösung innerhalb einer Zeitschrittweite ist erreicht.

4.5 Verwendetes Programm für die Grobstruktursimulation

Zur Beschreibung der Grobstruktursimulationen dienen die in Abschnitt 2.5.2 vorgestellten gefilterten Bewegungsgleichungen sowie der Modellansatz nach Germano et al. für die nicht aufgelösten turbulenten Strukturen aus Abschnitt 2.6. Das bereits von Wegner et al. (2004a,b) erfolgreich zur Beschreibung von verdrallten Strömungen eingesetzte Berechnungswerkzeug FASTEST (2006) wird hierzu verwendet. Bei diesem Programm handelt es sich um einen Strömungslöser mit einer Genauigkeit zweiter Ordnung in Raum und Zeit (räumlich: „Flux-Blending“, zeitlich: Crank-Nicolson), wobei die Bewegungsgleichungen auf einem blockförmig strukturierten, der Geometrie angepaßten Rechengitter (räumlich) diskretisiert werden. Das numerische Gitter besteht dabei ausschließlich aus Hexaedern. Die Kopplung von Geschwindigkeits- und Druckfeld ist durch den Interpolationsansatz nach Rhie und Chow (1983) (zit. in Noll, 1993; Lien und Durbin, 1996) gewährleistet. Zur Durchführung der transienten Simulationsrechnungen wird, wie bereits angesprochen, die CFL-Zahl in der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ bzw. kleiner gewählt, um eine möglichst genaue Bestimmung aller Skalen bis hinunter zur Gitterskala zu erreichen und gleichzeitig die Stabilität des iterativen Berechnungsprozesses zu erhalten. In den untersuchten Fällen ergeben sich unter dieser Bedingung typische Zeitschritte der Größenordnung 10^{-5} s. Eine Grenze von $\epsilon = 10^{-4}$ für das maximale Residuum stellte sich im vorliegenden Fall als bester Kompromiß zwischen Genauigkeit und numerischem Aufwand dar.

5 Ergebnisse

In diesem Kapitel wird eine Auswahl der Ergebnisse von Rechnungen stark verdrallter Strahlen vorgestellt. Neben einer eingehenden Beschreibung der numerischen Randbedingungen und der getroffenen Einstellungen werden die untersuchten Fälle anhand einer Analyse einzelner interessanter Punkte des Strömungsfeldes sowie im gesamten Brennernahbereich charakterisiert. Ebenfalls wird eine Problemanalyse durchgeführt, die versucht, die Unzulänglichkeiten und Schwierigkeiten der verwendeten Vorgehensweise zu identifizieren und deren Wirkung zu zeigen.

5.1 Darstellung der Simulation

Bei den in dieser Arbeit betrachteten Konfigurationen handelt es sich um zwei isotherme, stark verdrallte Strömungen, wobei erstere von einer Modellbrennkammer umschlossen ist und die zweite einen Drallfreistrahl darstellt. Die konstante, mit Hilfe eines sogenannten „movable-block“ Drallgenerators eingestellte (theoretische) Drallzahl beträgt in beiden Fällen $S_0 = 0,95$.

Die Abbildung der Geometrie erfolgt stark vereinfacht. Dies begründet sich in einer gesteigerten Effizienz im Sinne einer Reduktion von Kontrollvolumina in Bereichen, die nur einen minderen Einfluß auf die Ausbildung der Strömung besitzen. Wie in Wegner et al. (2004a) gezeigt, hat die genaue Modellierung des Drallerzeugers nur einen Einfluß auf die Ausprägung des inneren Bereichs der Strömung (kohärente Strukturen, Präzession des Wirbelkerns), die allerdings im Zusammenhang mit drallverstärkter Intermittenz (in der äußeren Scherschicht) nur von untergeordneter Bedeutung ist. Deshalb wird in dieser Arbeit eine blockförmige Vorgabe konstanter Geschwindigkeitsprofile bevorzugt. Blockprofile in axialer und tangentialer Richtung (U=18 m/s, sowie W=24 m/s) werden 100 mm stromauf des Brennerauslasses in Form von *Dirichlet* Randbedingungen definiert. Eine Vorlaufstrecke von 100 mm stellt sich als lang genug heraus, um eine vollständige Ausprägung der gewünschten Turbulenzstruktur zu erreichen. Künstliche Störungen der Randbedingung in Form von Zufallssignalen oder Modellen (vgl. Klein et al., 2003) sind deshalb nicht notwendig, was den numerischen Aufwand zusätzlich reduziert.

Analog dem experimentellen Aufbau von Holzäpfel (1996) besteht der eingeschlossene Fall, skizziert in Bild 5.1, aus einer zylindrischen Brennkammer mit einem Durchmesser von 447 mm und einer Länge von 765 mm mit einem ringförmigen, koaxialen Auslaß der Länge 150 mm. Dort ist eine *von Neumann* Randbedingung gesetzt, folglich sind alle Gradienten an dieser Stelle gleich Null.

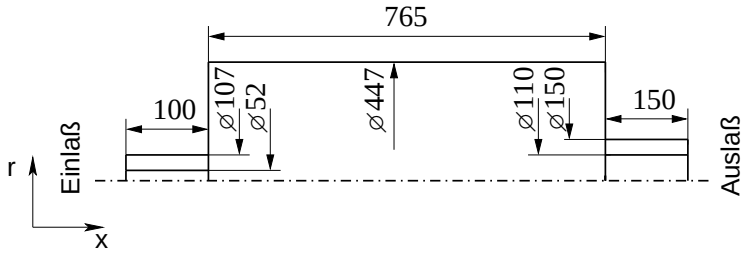


Bild 5.1. Schema der Drallbrennkammer; Dimensionen in [mm].

Den schematischen Aufbau des Freistrahls zeigt Bild 5.2. Das Rechengebiet ist im Vergleich zum eingeschlossenen Falls auf einen Durchmesser von 1.400 mm ausgedehnt, und in axialer Richtung auf eine Länge von 1.200 mm gestreckt. Eine umschließende koaxiale Strömung im Außenbereich der Geometrie gewährleistet die Erfüllung der Massenbilanz. Unter Verwendung der Meßergebnisse von Holzäpfel (1996) sowie der Arbeit von Maier (1968) folgt hierfür eine Mindestgeschwindigkeit von etwa 1 m/s als zusätzliche Randbedingung im mit „Coflow“ gekennzeichneten äußeren Bereich des numerischen Gitters.

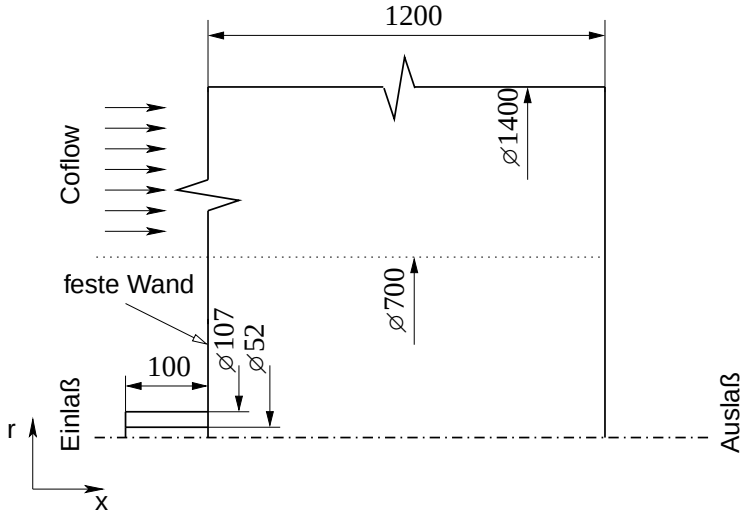


Bild 5.2. Schema des Freistrahls; Dimensionen in [mm].

Bild 5.3 zeigt einen Transversalschnitt durch das Rechengebiet. Der größte Anteil ist hierbei aus einem zylindrischen Gitter aufgebaut, mit Ausnahme des zentralen Bereichs, der mittels eines sogenannten „O-Grids“ diskretisiert wird. Durch diese Vorgehensweise werden degenerierte Volumina und folglich Singularitäten in der Nähe der Rotationsachse verhindert.

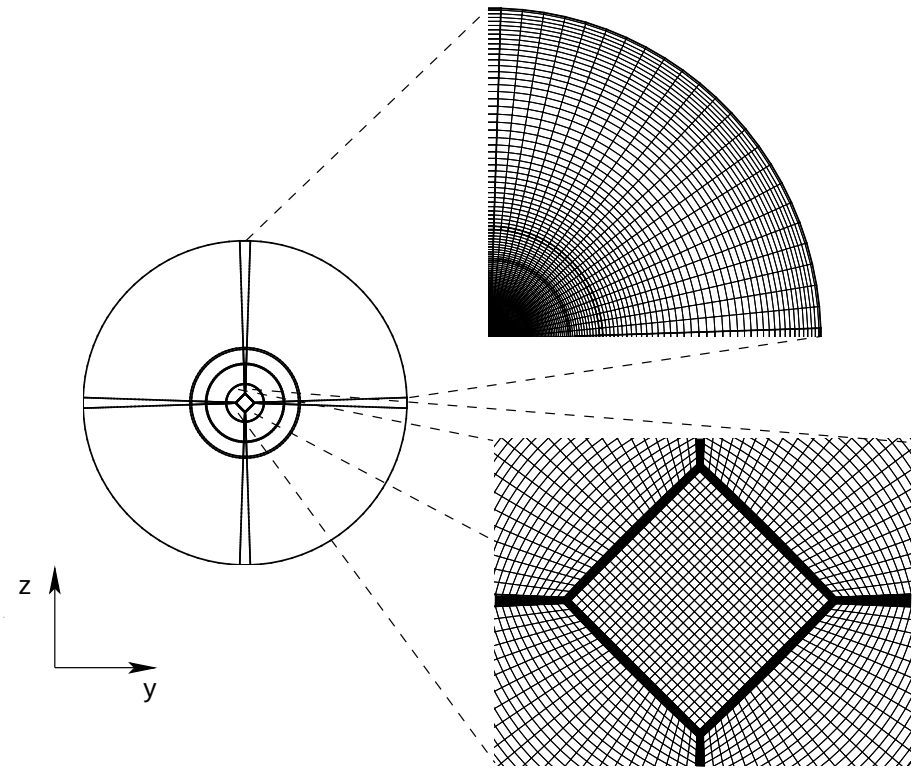


Bild 5.3. Querschnitt des Rechengebiets. Die geschwärzten Flächen in der Nahaufnahme des inneren Bereichs (rechts unten) entsprechen überlappenden Volumina beteiligter Blöcke, über die eine Kommunikation in der Parallelrechnung stattfindet.

In beiden Fällen besteht das numerische Gitter aus etwa $4 \cdot 10^6$ Kontrollvolumina, wobei im unmittelbaren Bereich des Querschnittssprungs (Ringspaltauslaß) Seitenlängen der Größenordnung 1 mm gewählt wurden, die mit zunehmendem Abstand (axial wie radial) linear um ca. 2% bezogen auf die vorhergehende Länge anwachsen. Aufgrund der blockstrukturierten Organisation des Berechnungsprogramms und darauf aufbauender Parallelisierbarkeit mit der „Message Passing Interface“-Bibliothek (siehe MPI, 2005) wird das gesamte Rechengebiet weitestgehend zu gleichen Teilen auf insgesamt acht Prozessoren aufgeteilt[1]. Hierdurch konnte in Verbindung mit einer hochoptimierten Erstellung des Programms durch entsprechende Wahl der Compileroptionen eine signifikante Reduktion der Rechenzeit erreicht werden. In dieser Arbeit wird allein durch die Nutzung eines speziell auf den verwendeten Prozessor (Intel® Pentium® CPU (32 bit) mit einer Leistung von $3,4$ GHz) abgestimmten Compilers[2] sowie höchster Optimierungsstufe inklusive Vektorisierung und Parallelisierung des Codes eine Beschleunigung des iterativen Lösungsprozesses um bis zu 25% erreicht.

1 Eine größere Anzahl von Prozessoren stellte sich wegen der eingeschränkten Verfügbarkeit als unpraktikabel heraus. Die Wahl von acht CPUs begründet sich *nicht* im Optimum der Skalierbarkeit des Strömungsproblems.

2 Intel® bietet z.Z. (Frühjahr 2006) die Software für den nicht kommerziellen Einsatz kostenlos an (Intel, 2006).

5.2 Bilanzierung der statistischen Konvergenz

Eine erste Untersuchung bzgl. der Konvergenz der gemittelten Datensätze aus der Grobstruktursimulation erfolgt mit Hilfe der entsprechenden Differentialgleichungen, wobei als Beurteilungsgröße das resultierende Residuum $\Re_\phi$ definiert als die Differenz von linker und rechter Seite (vgl. Abschnitt 4.4) und normiert mit dem führenden Term der Gleichung dient. Ausgehend von der allgemeinen (integrierten) Form der Transportgleichung einer beliebigen Größe ϕ (siehe z. B. Patankar, 1980), folgt die Definition der Residuen:

$$\Re_\phi = \mathrm{a_P}\phi_\mathrm{P} - (\sum_\mathrm{nb} \mathrm{a_{nb}}\phi_\mathrm{nb} + S_\phi), \tag{5.1}$$

mit dem Index P zur Identifikation eines beliebigen Punktes im Rechengebiet und nb dessen benachbarten Punkten. Die Normierungsgröße entspricht dem Maximum der Terme auf der rechten Seite von Gleichung (5.1), $\max\{\mathrm{a_P}\phi_\mathrm{P}, \sum_\mathrm{nb} a_\mathrm{nb}\phi_\mathrm{nb}, S_\phi\}$.

Umfangsgemittelte Geschwindigkeiten und Spannungskomponenten werden nun in die Kontinuitäts- (2.15) und Impulsgleichungen (2.16) eingesetzt und die Komponenten des Reynolds'schen Spannungstensors zudem noch in die exakte Transportgleichung (2.19). Dies geschieht gleichwohl für die Terme der rechten Seite von Gleichung (2.19), Produktion P_{ij}, Druck-Scher-Korrelation Π_{ij} als Summe von Φ_{ij} und $\mathscr{D}^p_{ij}$, sowie turbulente $\mathscr{D}^t_{ij}$ und molekulare Diffusion $\mathscr{D}^\nu_{ij}$.

Aufgrund der Verwendung des Wirbelviskositätsansatzes (Feinstrukturmodell) in den vorliegenden Grobstruktursimulationen ist die tatsächlich vorhandene Dissipationsrate ε_{ij} nicht aus den Daten ableitbar. Die in der Bilanzierung eingesetzte Dissipation wird deshalb in Übereinkunft mit der Kolmogorov'schen Hypothese als isotrop angenommen. Auf Basis eines energetischen Gleichgewichts von Produktion und Dissipation bieten sich zur Berechnung von ε zweierlei Annahmen an. Zum einen ist dies die Identität von ε und Produktionsrate im Bereich der kleinsten Skalen, also der Feinstrukturproduktion turbulenter Energie:

$$_\mathrm{sgs}\varepsilon \stackrel{!}{=} P = 2\,\overline{\nu^\mathrm{sgs} S_{ij} S_{ji}}, \tag{5.2}$$

mit $S_{ij} = 1/2\left(\partial\overline{U}_i/\partial x_j + \partial\overline{U}_i/\partial x_i\right)$ dem Schertensor und ν^sgs der turbulenten Viskosität aus dem Feinstrukturmodell nach Germano et al.. Zum anderen ist diese Identität aber auch auf den größten Skalen unter Verwendung der Definition turbulenter kinetischer Energie k, mit $k = 1/2\,\overline{u_i' u_i'}$ bestimmbar:

$$_\mathscr{P}\varepsilon = \mathscr{P} - \frac{\partial\left(\overline{U_i\,k}\right)}{\partial x_i} + D^k, \tag{5.3}$$

wobei der Diffusionsterm D^k analog der turbulenten kinetischen Energie als die (halbe) Spursumme aller diffusiven Anteile der Reynolds'schen Spannungen errechnet wird, $D^k = 1/2\,(\mathscr{D}^t_{ii} + \mathscr{D}^\nu_{ii} + \mathscr{D}^p_{ii})$. Ist das numerische Gitter so gewählt, daß die Separierung großer, direkt berechneter und kleiner, modellierter Skalen stets im Trägheitsbereich des turbulenten Spektrums resultiert, so sind aus beiden Ansätzen identische Werte zu erwarten. Werden hingegen aufgrund einer hohen räumlichen Auflösung bereits dissipative Effekte direkt berechnet, so folgen aus Gleichung (5.2) i. allg. zu geringe Werte. Wie sich im Verlauf dieser Arbeit herausstellte, sind aber

gerade die relevanten Bereiche der betrachten Strömung so fein diskretisiert, daß unter Verwendung des Ansatzes nach Gleichung (5.2) mit falschen Ergebnissen ist rechnen ist. Abschnitt 5.3.2 zeigt und diskutiert diesen Zusammenhang ausführlich. Es sei an dieser Stelle auf diese Erkenntnis vorgegriffen, verwendet werden folglich die berechneten Dissipationswerte nach Gleichung (5.3). Es bleibt unabhängig vom verwendeten Ansatz zu beachten, daß wegen der angenommenen Isotropie lediglich die Spurelemente des Dissipations*tensors* von Null verschieden sind:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon/3\,\delta_{ij}. \tag{5.4}$$

	Zyklon		Freistrahl	
Größe	(a)	(b)	(a)	(b)
$\overline{m}$	$< 0{,}01$ %	$\ll 0{,}01$ %	$< 0{,}01$ %	$\ll 0{,}01$ %
$\overline{U}$	2,4 %	0,3 %	2,0 %	0,1 %
$\overline{V}$	5,7 %	0,2 %	3,6 %	0,3 %
$\overline{W}$	0,1 %	0,02 %	2,0 %	0,2 %
$\overline{u'u'}$	3,6 %	0,6 %	5,3 %	0,3 %
$\overline{v'v'}$	3,1 %	0,5 %	7,5 %	0,2 %
$\overline{w'w'}$	5,0 %	1,1 %	7,2 %	0,4 %
$\overline{u'v'}$	19,9 %	5,3 %	18,2 %	1,7 %
$\overline{u'w'}$	18,6 %	6,4 %	26,6 %	2,2 %
$\overline{v'w'}$	36,2 %	13,0 %	18,0 %	1,3 %

Tabelle 5.1. Mittelwerte der normierten Residuen. (a) Entnommen aus dem gesamten (umfangsgemittelten) Rechengebiet, (b) Entnommen aus hoch turbulenten Teilbereichen mit $\mathrm{Re}_t > 2000$.

Tabelle 5.1 zeigt die mittleren Werte der Residuen im gesamten (umfangsgemittelten) Rechengebiet (a), sowie in einem hochturbulenten Teilbereich (b), beschränkt auf turbulente Reynoldszahlen $\mathrm{Re}_t > 2000$ [3] sowohl für den eingeschlossenen als auch den freien Strahl, wobei die Mittelung mit Hilfe der Summation über alle Punkte und anschließender Quotientenbildung durchgeführt wurde. Abweichungen in der Größenordnung von 5 % und weniger bzgl. des Impulses und ein vernachlässigbar kleines Residuum der Kontinuitätsgleichung weisen unabhängig vom Beobachtungsbereich auf eine hohe Genauigkeit der Momente erster Ordnung hin. Bei den Ergebnissen der Reynolds'schen Spannungen muß nochmals auf die zuvor getroffenen Annahme isotroper Dissipationsraten hingewiesen werden. Da die reale Größe auf den eingehenden Skalen keine vollausgeprägte Isotropie aufweist, führt die Vereinfachung unumgehbar zu größeren Abweichungen. Trotz dieser Einschränkung des Gültigkeitsbereich aber sind die Normalkomponenten des Spannungstensors bereits recht gut beschrieben, der mittlere Fehler liegt im Bereich von 5% bis 10%. Im hochturbulenten Bereich zeigen auch die Tangentialkomponenten nur geringe mittlere Abweichungen in Folge dort bereits deutlich ausgeprägter Isotropie.

3 $\mathrm{Re}_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon\nu}$ mit $C_\mu = 0{,}09$.

Eine Konsistenz der gemittelten Daten ist somit in ausreichender Weise erreicht und die Abweichungen der Momente zweiter Ordnung resultieren hauptsächlich aus der getroffenen Annahme vollausgeprägter Isotropie. Die Notwendigkeit dieser Vereinfachung aber liegt in der Natur des Ansatzes und *muß* folglich stets getroffen werden.

5.3 Analyse diskreter Punkte

Ein an diskreten Punkten durchgeführter Vergleich der Simulationsergebnisse mit den experimentellen Daten von Holzäpfel (1996) soll im folgenden dazu dienen, das Phänomen der drallverstärkten Intermittenz zu charakterisieren und gleichzeitig zeigen, daß auch mit verhältnismäßig pragmatischer Wahl der Randbedingungen und kurzen Simulationszeiten eine numerische Abbildung möglich ist. Holzäpfel folgend, werden an verschiedenen radialen Positionen (r=40 mm, 60 mm, 80 mm und 100 mm) in zwei transversalen Schnittebenen (x=100 mm und 200 mm) Geschwindigkeitskomponenten zeitabhängig aufgezeichnet. Die radialen Positionen werden jeweils unter einem Winkel von $n\pi/4$ mit $n \in \{1,3,5,7\}$ in der y-z-Ebene des Querschnitts verteilt. Es ergeben sich folglich jeweils vier Positionen auf der Winkelhalbierenden der Quadranten I bis IV, bezogen auf das y-z-Koordinatensystem in der Schnittebene (im folgenden mit dem tiefgestellten Index „geo“ bezeichnet). Die geometrische Lage der Meßstellen ist in Bild 5.4 dargestellt. Bereits anhand der Position im Strömungsfeld ist im Freistrahlfall mit intermittenten Effekten besonders an den beiden äußeren radialen Positionen zu rechnen, da hier ein signifikanter Einfluß durch das aus der Umgebung angesaugte Fluid vorliegt. Die Stromlinien sind in der äußeren Scherschicht durch eine hohe Dichte und einen hohen Grad der Durchmischung von Strahl- und Umgebungsfluid charakterisiert, erkennbar an Werten größer Eins der mit dem Eingangsmassenstrom normierten Stromfunktion.

Da in der von Holzäpfel zusätzlich beschriebenen Ebene x=40 mm noch keine Bimodalität der Verbundwahrscheinlichkeitsdichten ersichtlich ist, wird in dieser Arbeit auf eine Analyse dieser Ebene komplett verzichtet. Im Experiment wird das Signal mit einer Frequenz von 200 Hz über eine Zeitdauer von insgesamt 512 s abgetastet, um konvergentes Verhalten der Wahrscheinlichkeitsdichten zu gewährleisten. Aus Gründen einer exorbitanten Rechenzeit für die Simulation von 512 s realer Strömungszeit, wird hier zwar auf eine vergleichbar große Anzahl von Stichproben des Eingangssignals zurückgegriffen, die simulierte Echtzeit ist aber um ein Vielfaches kürzer. Im Falle der eingeschlossenen Strömung stehen $1,24$ s zur Verfügung, im Falle der freien $0,45$ s. Die Generierung tatsächlich konvergenter Zeitreihen mit einer Länge von mehreren Hundert Sekunden mittels dieser Methodik bleibt wohl auch in naher Zukunft nur eingeschränkt erreichbar, da allein für die in dieser Arbeit erstellten Datensätze Rechenzeiten von etwa 6 Monaten notwendig wurden.

Auf Basis der Zeitreihen können Längen- und Zeitmaße der lokal vorliegenden Turbulenz bestimmt werden. Ein Vergleich mit der in der Literatur (z. B. Tennekes und Lumley, 1972) beschriebenen Theorie zur homogenen isotropen Turbulenz ermöglicht eine qualitative Analyse der Ergebnisse.

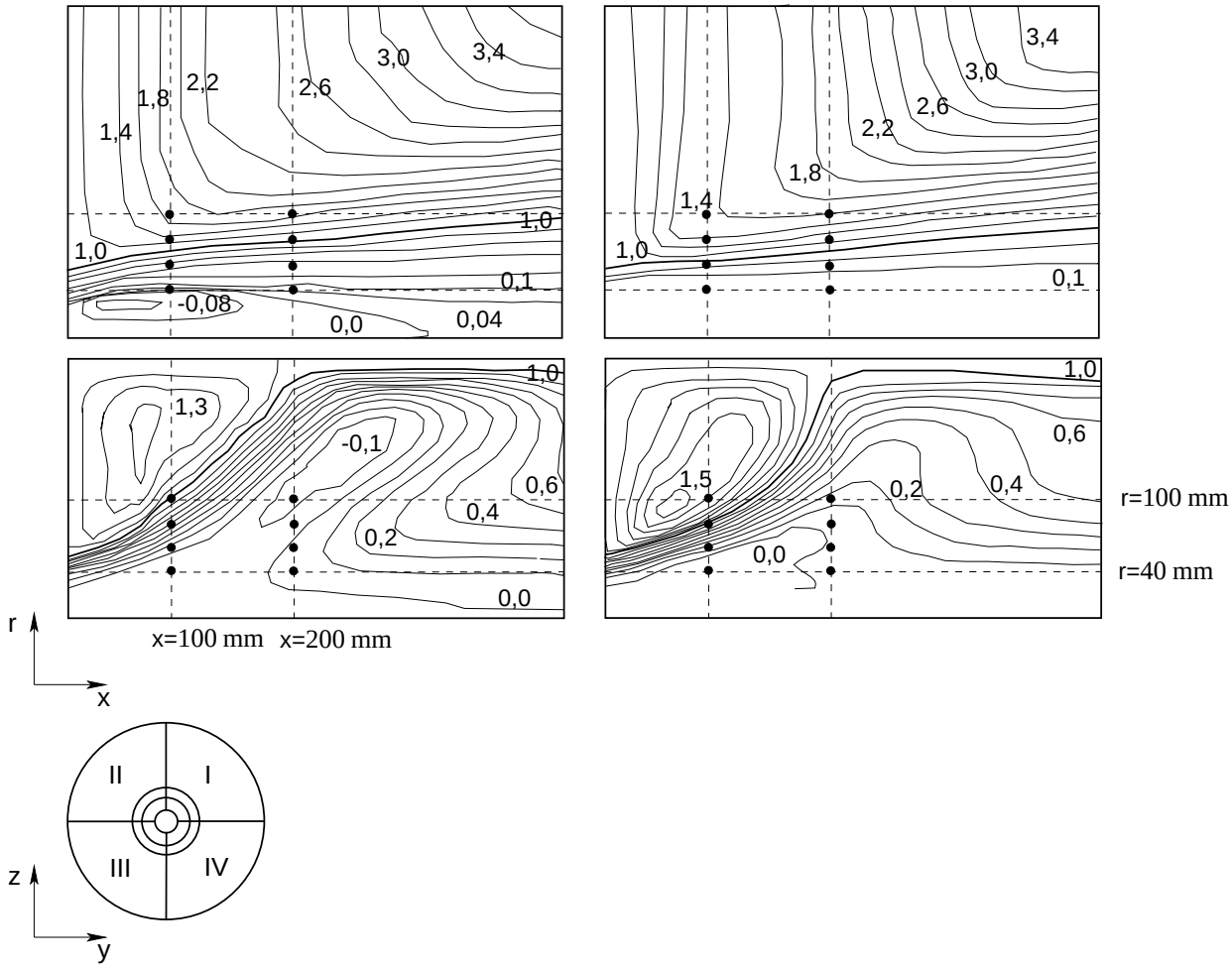
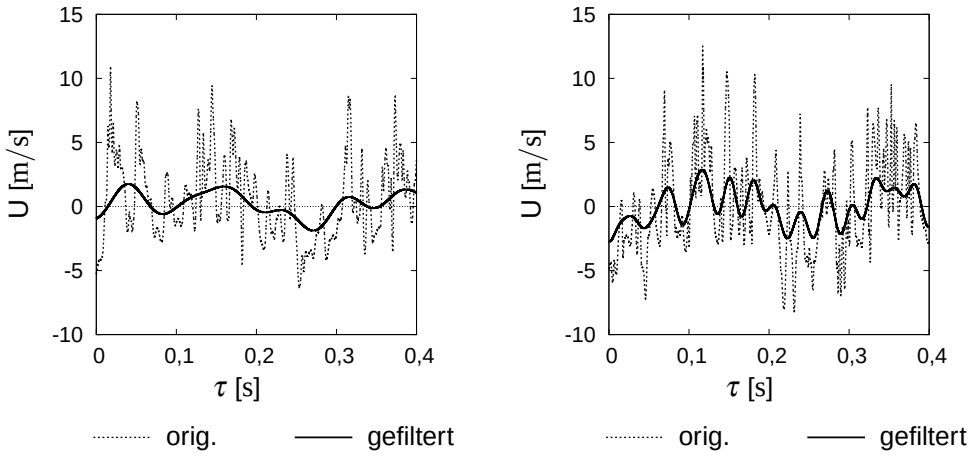


Bild 5.4. Zur Position der Meßstellen; Projektion in die x-r-Ebene: Freistrahl (oben) und Zyklon (mitte). Dargestellt sind die Isolinien der mit dem Eingangsmassenstrom normierten Stromfunktion jeweils für die experimentellen Ergebnisse (nach Hirsch, 1995; Holzäpfel, 1996) (links) und die Ergebnisse der Grobstruktursimulationen (rechts).
Projektion in die y-z-Ebene (unten): Lage der Quadranten I bis IV des numerischen Gitters.

5.3.1 Zeitreihen des Geschwindigkeitsvektors

Vor der spektralen Analyse der Grobstrukturdaten sollen die an den diskreten Punkten im Raum aufgezeichneten Zeitreihen untersucht werden. Bild 5.5 zeigt exemplarisch für beide Strömungskonfigurationen die Axialgeschwindigkeit über ein Zeitfenster von $\Delta\tau$=0,4 s in der Schnittebene x=200 mm bei einem Radius von r=100 mm. Die Zeitfenster sind dabei aus dem mittleren Bereich des gesamten Beobachtungszeitraumes entnommen. Schon bei Betrachtung des ungefilterten Signals (punktierte Linie) ist bei freier als auch bei eingeschlossener Strömung eine niederfrequente Schwingung deutlich erkennbar. Durch Tiefpaßfilterung beider Signale mit einer Cut-Off-Frequenz von $f_c \sim$15 Hz lassen sich die offensichtlich vorhandenen niederfrequenten Strukturen mit $f \leqq f_c$ extrahieren (volle Linie).

Hieraus läßt sich unmittelbar ableiten, daß voll konvergente Ergebnisse auf Basis der vorhandenen Zeitreihen *nicht* zu erwarten sind, da auftretende niederfrequente Signalanteile nicht hinreichend häufig berücksichtigt werden können. Quantitative Aussagen sind somit nicht möglich, qualitative Trends können aber durchaus identifiziert werden. Vielfach längere Reihen von Stichproben über einen, dem Experiment vergleichbaren, Zeitraum von $\Delta t \approx 100$ s könnten dies zwar gewährleisten, sind bei der aktuellen Leistungsfähigkeit von Rechensystemen noch nicht effizient zu erstellen. Dennoch erscheint eine weitere Analyse der erhaltenen Datensätze sinnvoll, da die niederfrequenten Anteile nicht so große Amplituden aufweisen und so an der Gesamtenergie nur einen kleinen Anteil haben (dies wird in Abschnitt 5.3.2 deutlich). Desweiteren besteht kein unmittelbarer Einfluß dieser Strukturen auf den Effekt der drallverstärkten Intermittenz. Bei einer weitergehenden Interpretation der Daten bleibt die Existenz dieser Strukturen aber stets zu beachten. Zudem ist bei einer räumlichen Mittelung von Stichproben, wie später in Abschnitt 5.4 durchgeführt, eine ausgeprägte statistische Stationarität zwingend notwendig. Nur wenn der Einfluß der tieffrequenten Schwingung im Mittel vernachlässigbar klein wird, ist eine derartige Analyse ohne weitere Einschränkung möglich. Ist dies nicht gegeben, so muß eine Diskussion der Ergebnisse auf Basis lokaler Werte im $\mathbb{R}^3$ erfolgen und kann *nicht* durch Mittelung in Richtung einer Raumkoordinate auf ein zweidimensionales Problem reduziert werden.



a. Zyklon b. Freistrahl

Bild 5.5. Zeitreihen der Axialgeschwindigkeit, Zyklon und Freistrahl bei x=200 mm und r=100 mm im Quadranten$_{geo}$ I. Das gefilterte Signal beinhaltet alle Frequenzen $f \leqq 15$ Hz.

5.3.2 Spektrale Auswertung diskreter Punkte

Ein physikalischer Prozeß ist i. allg. sowohl durch sein *zeitliches* Verhalten als Funktion $h = h(t)$ darstellbar als auch im *spektralen Raum* als Funktion der Frequenz, $H = H(f)$. Beide Darstellungsformen sind mit Hilfe der Fourier Transformation ineinander überführbar (bijektiv) (siehe z. B. Press et al., 1992):

$$h(t) \circ\!\!-\!\!\bullet\, H(f) \bullet\!\!-\!\!\circ\, h(t)\,. \tag{5.5}$$

Die Analyse der Geschwindigkeitszeitreihen erlaubt zunächst eine Abschätzung lokaler Längen- und Zeitmaße sowie Dissipationsraten. Tabelle 5.2 zeigt einen Vergleich der Ensemble-gemittelten Werte aus der Simulationsrechnung mit einem theoretisch errechneten Wert der Dissipationsrate ${}_{\mathrm{th}}\varepsilon$. Dieser entspricht dem Mittel der Größen ${}_{\mathrm{th}}\varepsilon_i = C_\mu^{3/4}(3/2\,u_i'^2)^{3/2}/l_i \approx 0,3\,u_i'^3/l_i$ mit $C_\mu = 0,09$, wobei das Längenmaß l_i aus der Autokorrelation des Signals (abgeleitet aus dem Spektrum; Taylor-Längenmaß (Tennekes und Lumley, 1972)) bestimmt wird und u_i' aus der Quadratwurzel der Varianz des Eingangssignals folgt. Die so bestimmten Längen- und Zeitmaße zeigen mit größerer Entfernung vom Brenneraustritt erwartungsgemäß höhere Werte. Da mit größerem Abstand die Turbulenzintensität I sinkt und die Abmessungen der turbulenten Strömung zunehmen, sind i. allg. größere Strukturen zu erwarten. Dies zeigen im Besonderen die Ergebnisse des eingeschlossenen Falls (vgl. Bild 5.6), welche große Unterschiede zwischen Nah- und Fernfeld aufweisen (an der innersten radialen Position ergibt sich für das Längenmaß l ein Faktor von nahezu 4). Grund hierfür ist die Dominanz des inneren Rezirkulationsbereichs, in dem neben geringeren Geschwindigkeiten auch eine vielfach niedrigere Turbulenzintensität vorherrscht. Jene der freien Drallströmung sind weniger stark von unterschiedlichen Turbulenzintensitäten bestimmt und zeigen dieses Verhalten entsprechend in abgeschwächter Form. Auch ein Einfluß innerer Rezirkulation ist ebenfalls nur in geringem Maße erkennbar und es resultieren Verhältnisse der Längenskalen in der Größenordnung von 1,5 bis 3. Das im Vergleich zum eingeschlossenen Fall vielfach höhere Intensitätsniveau resuliert aus allgemein niedrigeren mittleren Geschwindigkeiten bei vergleichbarer Turbulenzenergie k (es gilt: $I = \sqrt{2/3k^2}/|U|$). Unter der zuvor erwähnten Annahme einer aus dem energetischen Gleichgewicht mit der Produktion turbulenter kinetischer Energie bestimmbaren Dissipationsrate folgen aus den Gleichungen (2.5) und (2.6) direkt die Kolmogorov'schen Skalen an den betrachteten Positionen. Die Skalen η und τ liegen hierbei durchgängig in einem Bereich der Größenordnung $0,03$ bis $0,1$ mm bzw. $0,04$ bis $0,11$ ms und entsprechen so den Schätzwerten aus dem Zusammenhang $\eta/l \approx \mathrm{Re}_l^{-3/4}$ bzw. $\tau|U|/l \approx \mathrm{Re}_l^{-1/2}$ mit einer Reynolds-Zahl Re_l auf Basis der Makrolängenmaße und der charakteristischen Geschwindigkeit $|U|$ (Piquet, 1999; Tennekes und Lumley, 1972). Unter Annahme eines Maximums der Dissipationsrate bei etwa $k\eta \approx f\tau \approx 0,2$ (vgl. Abschnitt 2.2) sind die ableitbaren Frequenzen gut mit dem Auftreten der höchsten Gradienten der spektralen Verläufe in Übereinkunft zu bringen (siehe Anhang A).

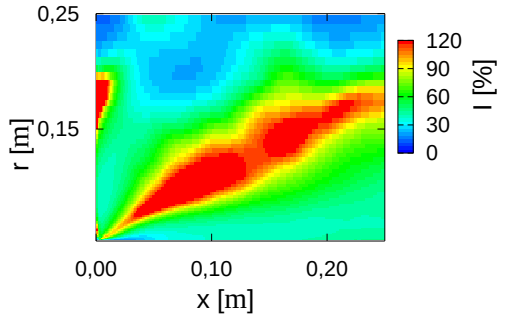
Freistrahl

	x=100 mm								x=200 mm							
	$\lvert U\rvert$ [m/s]	${}_{\text{sgs}}\varepsilon$ [m^2/s^3]	${}_{\text{th}}\varepsilon$ [m^2/s^3]	$\mathscr{P}\varepsilon$ [m^2/s^3]	l [mm]	τ_l [ms]	η [mm]	τ [ms]	$\lvert U\rvert$ [m/s]	${}_{\text{sgs}}\varepsilon$ [m^2/s^3]	${}_{\text{th}}\varepsilon$ [m^2/s^3]	$\mathscr{P}\varepsilon$ [m^2/s^3]	l [mm]	τ_l [ms]	η [mm]	τ [ms]
r=40 mm	12,8	4503	6475	9570	11,5	0,9	0,03	0,04	8,6	722	2156	2532	14,3	1,7	0,04	0,08
r=60 mm	17,2	3796	5445	7841	16,9	1,0	0,03	0,05	11,2	962	1545	2627	17,0	1,5	0,04	0,08
r=80 mm	10,0	3048	4846	5862	13,4	1,3	0,03	0,06	10,2	953	1043	2596	17,9	1,9	0,04	0,08
r=100 mm	3,6	1254	3767	1769	7,2	2,0	0,04	0,10	7,4	753	551	1546	25,8	4,0	0,04	0,11

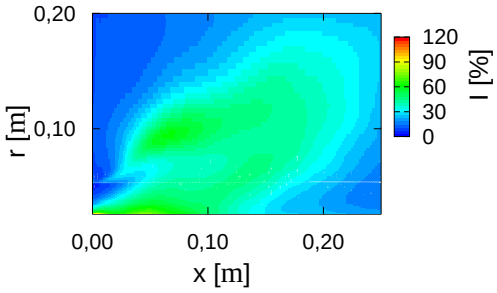
Zyklon

	x=100 mm								x=200 mm							
	$\lvert U\rvert$ [m/s]	${}_{\text{sgs}}\varepsilon$ [m^2/s^3]	${}_{\text{th}}\varepsilon$ [m^2/s^3]	$\mathscr{P}\varepsilon$ [m^2/s^3]	l [mm]	τ_l [ms]	η [mm]	τ [ms]	$\lvert U\rvert$ [m/s]	${}_{\text{sgs}}\varepsilon$ [m^2/s^3]	${}_{\text{th}}\varepsilon$ [m^2/s^3]	$\mathscr{P}\varepsilon$ [m^2/s^3]	l [mm]	τ_l [ms]	η [mm]	τ [ms]
r=40 mm	11,9	2218	3238	7600	14,7	1,2	0,03	0,05	11,7	254	75	506	58,3	5,0	0,06	0,19
r=60 mm	14,1	3039	4115	7239	18,0	1,3	0,03	0,05	9,3	348	138	676	31,6	3,4	0,05	0,16
r=80 mm	13,6	2540	3139	5704	19,1	1,4	0,03	0,06	7,7	455	251	959	21,5	2,8	0,05	0,14
r=100 mm	10,6	1676	2264	2463	17,8	1,7	0,04	0,09	7,3	508	202	1050	27,7	3,8	0,05	0,13

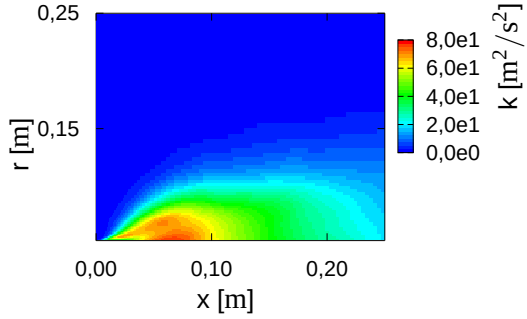
Tabelle 5.2. Spektralanalyse; Längenmaße und Dissipation ε für Freistrahl und Zyklon im Quadranten$_{\text{geo}}$ I. Alle Größen aus Ensemble-gemittelten Daten der LES mit Ausnahme der theoretisch bestimmten Werte von l und τ_l. Diese sind aus den Vektorkomponenten arithmetisch gemittelt. Die Kolmogorov'schen Skalen η und τ sind mit $\mathscr{P}\varepsilon$ berechnet.



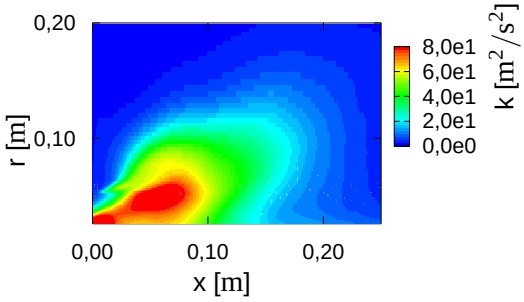
a. Turbulenzintensität; Freistrahl



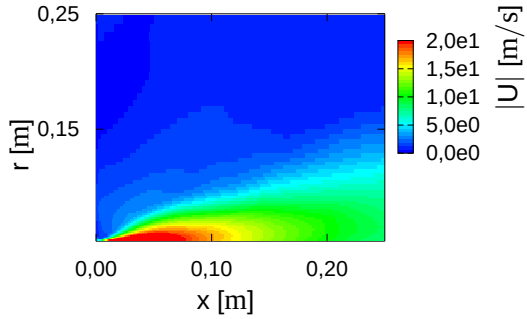
b. Turbulenzintensität; Zyklon



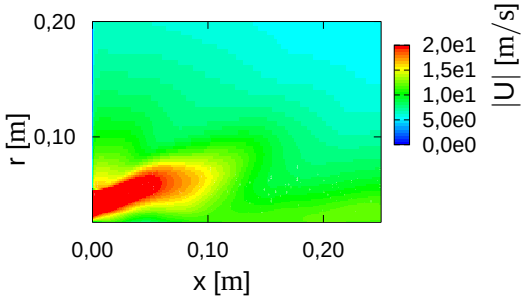
c. Turbulenzenergie; Freistrahl



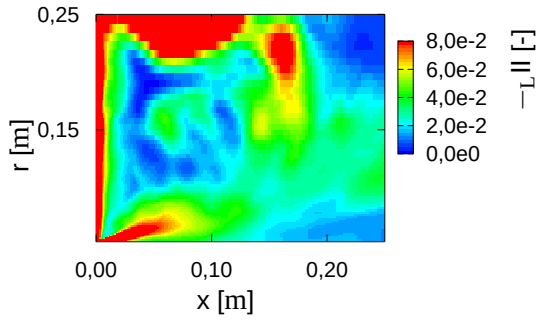
d. Turbulenzenergie; Zyklon



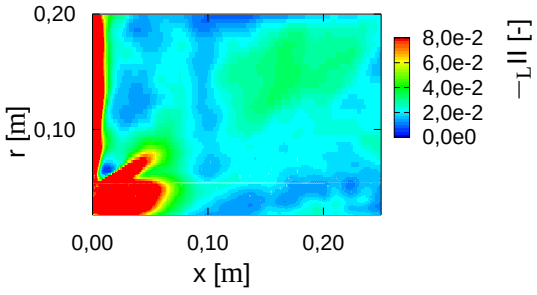
e. mittlere Geschwindigkeit; Freistrahl



f. mittlere Geschwindigkeit; Zyklon



g. Grad der Anisotropie; Freistrahl



h. Grad der Anisotropie; Zyklon

Bild 5.6. Turbulenzintensität I, -energie k, mittlere Geschwindigkeit $|U|$ und Grad der Anisotropie $-_{\mathrm{L}}II$ für Freistrahl (links) und Zyklon (rechts).

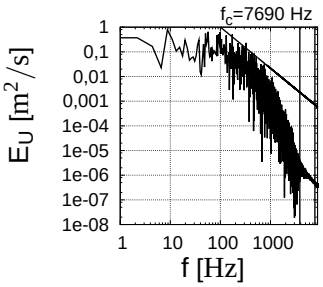
Der theoretisch bestimmte Wert der Dissipationsrate ${}_{\mathrm{th}}\varepsilon$ resultiert im Intervall zwischen ${}_{\mathrm{sgs}}\varepsilon$ und ${}_{\mathscr{P}}\varepsilon$, was darauf schliessen läßt, daß das gemittelte (isotrope) Längenmaß tendenziell größer als das tatsächlich wirkende ist. Aufgrund des sinkenden Grades der Anisotropie, dargestellt anhand der zweiten Invariante des Tensors b_{ij}[4] (vgl. Bild 5.6), ergeben sich in der weiter stromab liegenden Ebene bei x=200 mm allgemein geringere Abstände zwischen ${}_{\mathrm{th}}\varepsilon$ und ${}_{\mathscr{P}}\varepsilon$. Außerhalb des angesprochenen Intervalls resultierende Werte der theoretisch ermittelten Dissipation sind direkt mit der Lage des Meßpunktes in der Strömung verknüpft (Überblick in Bild 5.4). So weist der Fall ${}_{\mathrm{th}}\varepsilon > {}_{\mathscr{P}}\varepsilon$ auf zu kleine Längenmaße hin. Im Falle des Freistrahls sind bei x=100 mm im äußersten Meßpunkt vielfach höhere Werte für l zu erwarten, was bereits einen Hinweis für Intermittenz darstellt. Für ${}_{\mathrm{th}}\varepsilon < {}_{\mathrm{sgs}}\varepsilon$ gilt dies entsprechend umgekehrt mit tatsächlich kleineren Längenmaßen. Der Meßpunkt x=200 mm und r=100 mm befindet sich im Bereich des angesaugten Umgebungsfluids, welches durch den intermittierenden Austausch mit dem Strahlfluid von dessen (geringeren) Längenmaßen beeinflußt wird. Gleiches gilt für die stromab befindliche Meßposition im Falle der eingeschlossenen Strömung, da auch in diesem Fall, wenn auch in vielfach geringerer Ausprägung, ein Austausch zwischen Strahlfluid und Rezirkulationszone stattfindet. Detaillierte Ergebnisse werden in Abschnitt 5.3.3 vorgestellt.

Die Transformation von Geschwindigkeitszeitreihen resultiert in Energiedichtespektren, deren Verläufe eine qualitative Beurteilung der durchgeführten Simulation erlauben. Unter Berücksichtigung der lokalen Cut-Off-Frequenz f_c ist eine Aussage über den tatsächlich aufgelösten Anteil des turbulenten Energiespektrums zu treffen, woraus unmittelbar der Einfluß des sub-grid-scale Modells ersichtlich wird[5]. Exemplarisch sollen hier nur Ergebnisse der Axialgeschwindigkeitszeitreihen im $\mathrm{Quadranten}_{\mathrm{geo}}$ I dargestellt und diskutiert werden, alle anderen Komponenten sowie Meßstellen befinden sich im Anhang A.

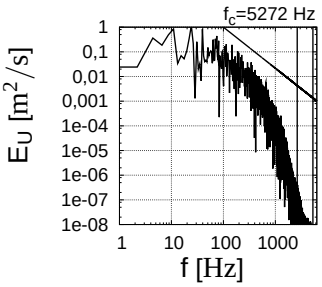
Bilder 5.7.a und 5.7.c stellen die Energiedichten der axialen Geschwindigkeitskomponente in der Ebene x=100 mm an der innersten und äußersten radialen Meßposition im Freistrahl dar. Vergleicht man in Bild 5.7.a den Verlauf der Dichtefunktion mit der Linie des $-5/3$-Abfalls der Turbulenz (parallel der monoton fallenden Linie in den Graphen), so zeigt sich über einen Bereich von etwa einer Dekade der Frequenz eine gute Übereinstimmung. Im Anschluß daran ist ein starker Abfall der Energiedichte zu verzeichnen, es sind folglich bereits Dissipationsmechanismen innerhalb des aufgelösten Geschwindigkeitsfeldes zu erkennen. Die lokale Cut-Off-Frequenz f_c berechnet aus dem maximalen Betrag der jeweiligen Geschwindigkeitskomponente, $|U| = \max\{|U_i|\}$, und dem arithmetischen Mittel der Abmessungen des Kontrollvolumens, $\overline{\Delta} = (\Delta x + \Delta y + \Delta z)/3$, indiziert die Grenze der maximal aufgelösten Fluktuation. $f_c/2$ folgt dabei aus dem Nyquist-Kriterium (vgl. Abschnitt 2.3). Aus der gewählten räumlichen Auflösung der Strömung folgt unmittelbar, daß die mit der sub-grid-scale-Produktion im Gleichgewicht stehende Dissipation ${}_{\mathrm{sgs}}\varepsilon$ stets geringer als der im Trägheitsbereich (Bereich des $-5/3$-Abfalls) geltende Wert sein muß, da lokale Grenzfrequenzen f_c durchgehend im dissipativen Bereich liegen. Tabelle 5.2 bestätigt dies für alle untersuchten Meßpunkte.

4 Es gilt die Definition nach Gleichung (D.3), die sich lediglich durch einen konstanten Vorfaktor von jener nach Gleichung (2.24c) unterscheidet.

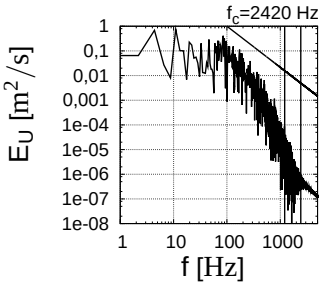
5 Es ist zu beachten, daß die räumliche „top-hat-Filterung“ durch das numerische Gitter im spektralen Raum *nicht* zu einer scharfen Begrenzung des Frequenzbereichs führt (vgl. u. a. Sagaut, 2001). Der aufgelöste Frequenzbereich endet nicht exakt an der Cut-Off-Frequenz f_c.



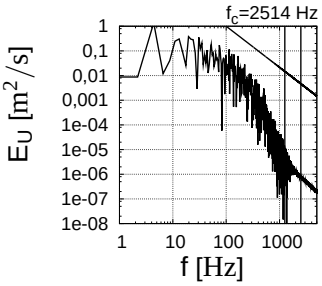
a. Freistrahl;
r=40 mm, x=100 mm



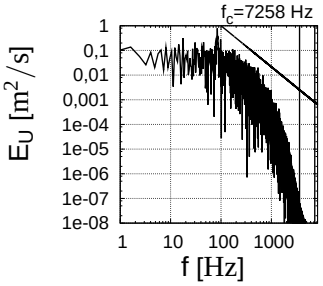
b. Freistrahl;
r=40 mm, x=200 mm



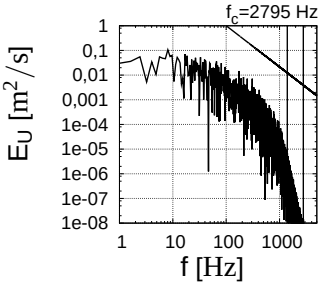
c. Freistrahl;
r=100 mm, x=100 mm



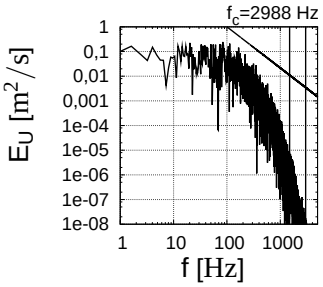
d. Freistrahl;
r=100 mm, x=200 mm



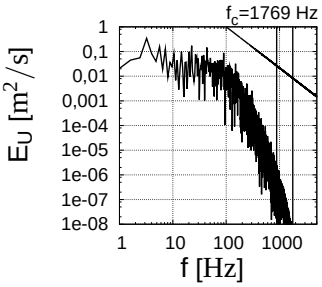
e. Zyklon; r=40 mm, x=100 mm



f. Zyklon; r=40 mm, x=200 mm



g. Zyklon; r=100 mm, x=100 mm



h. Zyklon; r=100 mm, x=200 mm

Bild 5.7. Energiedichten E_U; Freistrahl (oben), Zyklon (unten), x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), $\text{Quadrant}_{\text{geo}}$ I. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.

Ein nicht mehr ganz über eine Dekade der Frequenz reichender Trägheitsbereich an der äußersten Position bei r=100 mm ist auf eine geringere turbulente Reynoldszahl $\mathrm{Re}_l = u' l/\nu$ zurückzuführen (die Turbulenzenergie sinkt wobei die Längenmaße in etwa konstant bleiben) (Tennekes und Lumley, 1972), woraus ebenfalls ein kleinerer Flächeninhalt unterhalb der Energiedichtefunktion resultiert. Die Flächensumme unterhalb aller Energiedichtefunktionen der einzelnen Geschwindigkeitskomponenten entspricht dabei (dem doppelten) der gesamten turbulenten Energie *k*. Dies ist noch besser im weiter stromab liegenden Schnitt zu erkennen. Es zeigen sich auch hier bereits dissipative Mechanismen.

Bilder 5.7.b und 5.7.d zeigen die Ergebnisse der Querschnittsebene x=200 mm. Es sind Parallelen zu den bereits diskutierten Funktionen in der stromauf liegenden Ebene deutlich erkennbar: ein weiter Bereich, indem ein dem $-5/3$-Abfall folgender Verlauf dominiert und im Anschluß ein starker Abfall aufgrund dissipativer Effekte, die noch im von der Simulation aufgelösten Bereich diesseits der Cut-Off-Frequenz stattfinden. Folglich resultiert wiederum ein zu niedriger Wert der skalaren Dissipation ${}_{\mathrm{sgs}}\varepsilon$ aus dem sub-grid-scale-Modell (vgl. Tabelle 5.2).

Betrachtet man in analoger Weise die Energiedichten der Meßpunkte im eingeschlossenen Fall (Bilder 5.7.e bis 5.7.h), so sind die gleichen Charakteristika erkennbar. In der Querschnittsebene x=100 mm wird ein weiter Bereich des turbulenten Spektrums durch die Simulationsrechnung direkt bestimmt. Die Cut-Off-Frequenz f_c befindet sich weit jenseits des Trägheitsbereiches und eine dissipative Dämpfung der Turbulenz ist im spektralen Verlauf deutlich erkennbar.

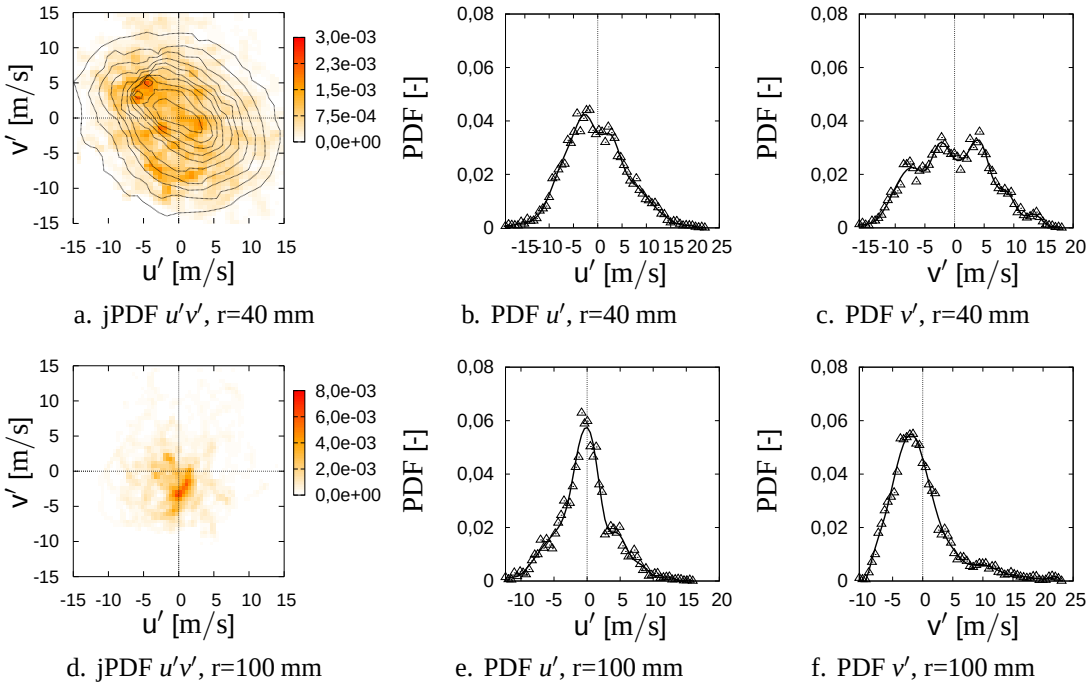
Aus der Spektralanalyse läßt sich ableiten, daß im Nahbereich des Brennermundes der Großteil turbulenter Fluktuationsbewegung sowohl für die freie Drallströmung als auch für den eingeschlossenen Strahl direkt gelöst wird. Die durch das numerische Gitter definierte Cut-Off-Frequenz f_c befindet sich an nahezu allen untersuchten Stellen in großer Entfernung des Trägheitsbereiches bei vielfach höheren Frequenzen. Somit ist einerseits eine hohe Qualität der Simulation gewährleistet (man kann bereits einen Übergang der LES in die DNS erkennen), andererseits wird aber ein Vergleich von tatsächlich wirkender skalarer Dissipationsrate ε und sub-grid-scale-Dissipation ${}_{\mathrm{sgs}}\varepsilon$ nicht mehr möglich. Die Wahl einer *a priori* hohen räumlichen Auflösung, ausführlich begründet in Abschnitt 2.6, ist hierfür verantwortlich. Detaillierte Parameterstudien bzgl. der notwendigen Gitterauflösung waren in dieser Arbeit nicht möglich, weshalb trotz eines erhöhten numerischen Aufwandes ein Gitter gewählt wurde, welches in jedem Fall eine ausreichende räumliche Diskretisierung gewährleistet, um eine exakte Darstellung der Turbulenz aller relevanten Skalen zu ermöglichen. Die bei der Durchführung von Grobstruktursimulationen geltende Forderung nach direkter Bestimmung von mindestens 80% des turbulenten Energiespektrums ist hier in jedem Fall erfüllt (Ferziger (1977) zit. in Bernert und Eppler (1996)). Als Folge nicht gegebener Vergleichbarkeit der Feinstrukturdissipation wird für alle weiteren Untersuchungen auf eine skalare Dissipationsrate ${}_{\mathscr{P}}\varepsilon$ zurückgegriffen (Gleichung (5.3)). Wegen des Fehlens eines signifikanten Maximums der Energiedichte im Bereich kleiner Frequenzen wird an dieser Stelle postuliert, daß die in Abschnitt 5.3.1 beschriebenen niederfrequenten Schwingungen der Geschwindigkeitssignale einen *vernachlässigbar* geringen Anteil der Gesamtenergie beinhalten und somit eine weiterreichende Analyse der Signale möglich ist. Es läßt sich die Vermutung anstellen, daß es sich auch bei den niederfrequenten Anteilen um Turbulenz handelt.

5.3.3 Wahrscheinlichkeits- und Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktionen

Wie schon von Hirsch (1995) und später auch von Holzäpfel (1996) beschrieben, resultiert aufgrund der Massenansaugung („entrainment“) des turbulenten Freistrahls ein Mitreißen und Einrollen („engulfment“) großskaliger Strukturen am Strahlrand. Hierbei handelt es sich um drallfreies Umgebungsfluid, dessen Turbulenzgrad um ein Vielfaches geringer ist als der des Strahls. Die mitgerissenen Fluidballen nehmen durch das Einrollen Impuls des Strahlmediums auf, wodurch ein intermittierender Bereich entsteht, in dem sowohl rotationsbehaftetes Strahlmedium als auch rotationsfreies Umgebungsmedium feststellbar ist. Holzäpfel vermutet, daß schon der Einschließungsprozeß wegen einer Instabilität der Geschwindigkeit am Strahlrand zu einer Selbstverstärkung führt. Ein einmal in den Strahlrand eingedrungenes Fluidelement beschleunigt aufgrund einer zusätzlich wirkenden Kraft (aus der Differenz der auf das Element selbst und seiner Umgebung wirkenden Zentrifugalkräfte) solange in Richtung der Rotationsachse, bis es durch Wechselwirkungen mit der Umgebung dessen Tangentialgeschwindigkeit aufgenommen hat und folglich keine effektiv wirkende Kraft (-differenz) mehr vorhanden ist. Der Fluidballen wird auf diesem Wege mehr und mehr deformiert, gestreckt und geschert, und seine Wirkung verliert sich. Besitzt das Element allerdings aufgrund der anfänglichen Größe eine lange Lebensdauer, so kann es weit in den Strahl eindringen und entsprechende Wirkungen auf das Mischungsverhalten und den Turbulenzgrad sind zu erwarten. Für eine eingehende Beschreibung dieses Effektes sei auf die genannten Arbeiten von Hirsch (1995) und Holzäpfel (1996) verwiesen. Holzäpfel folgend sollen zur Verdeutlichung Verbundwahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (jPDF) in normierter Darstellung herangezogen werden. Diese lassen zwar aufgrund der bereits angesprochenen Problematik bzgl. der Konvergenz keine voll quantitativen Aussagen über den beobachteten Effekt zu, zeigen aber bereits charakteristische Merkmale und sollen so als Nachweis der Auflösung der Intermittenz in den Simulationsrechnungen dienen. Es werden aus Zeitreihen aller (momentanen) Geschwindigkeitskomponenten die fluktuierenden Anteile extrahiert und ihre Wahrscheinlichkeiten innerhalb der Minima und Maxima bestimmt. Der Wertebereich des Signals wird hierbei in 64 äquidistant verteilte Abschnitte diskretisiert, die Verbundwahrscheinlichkeit wird also mit 64×64 Wertepaaren aufgelöst. Neben den Verbundwahrscheinlichkeiten sind jeweils die Wahrscheinlichkeitsdichten (PDF) der einzelnen Geschwindigkeitsfluktuationen dargestellt. Zur besseren Darstellung wurden diese Werte durch den mit der durchgezogenen Linien (kubisch) interpolierten Verlauf angenähert. An dieser Stelle sollen ebenfalls lediglich die Ergebnisse der Zeitreihen aus dem $\text{Quadranten}_{\text{geo}}$ I des Gitters gezeigt und diskutiert werden, alle weiteren Meßpunkte befinden sich im Anhang B.1 und B.2. Durch die Darstellung der drei Verbundwahrscheinlichkeiten und der Einzelkomponenten (PDF) werden die im folgenden getroffenen Aussagen unterstützt. Aus den numerischen Simulationsdaten berechnete Verbundwahrscheinlichkeiten sind als Farbkonturen dargestellt. Die überlagerten vollen Linien zeigen experimentelle Ergebnisse soweit in der Arbeit von Holzäpfel vorhanden. Im folgenden wird der Begriff „Quadrant“ bzgl. des Achsensystems der Verbundwahrscheinlichkeiten in der jeweiligen Darstellung verwendet.

Betrachtet man die Ebene bei x=100 mm des Freistrahls, so kann die Entwicklung der Verbundwahrscheinlichkeiten trotz der Einschränkung bzgl. der geforderten Konvergenz der Signale recht gut mit den Versuchsergebnissen in Übereinkunft gebracht werden. Sowohl äußere Form wie auch die Position der Maxima kann durch die Simulation adäquat abgebildet werden. Wäh-

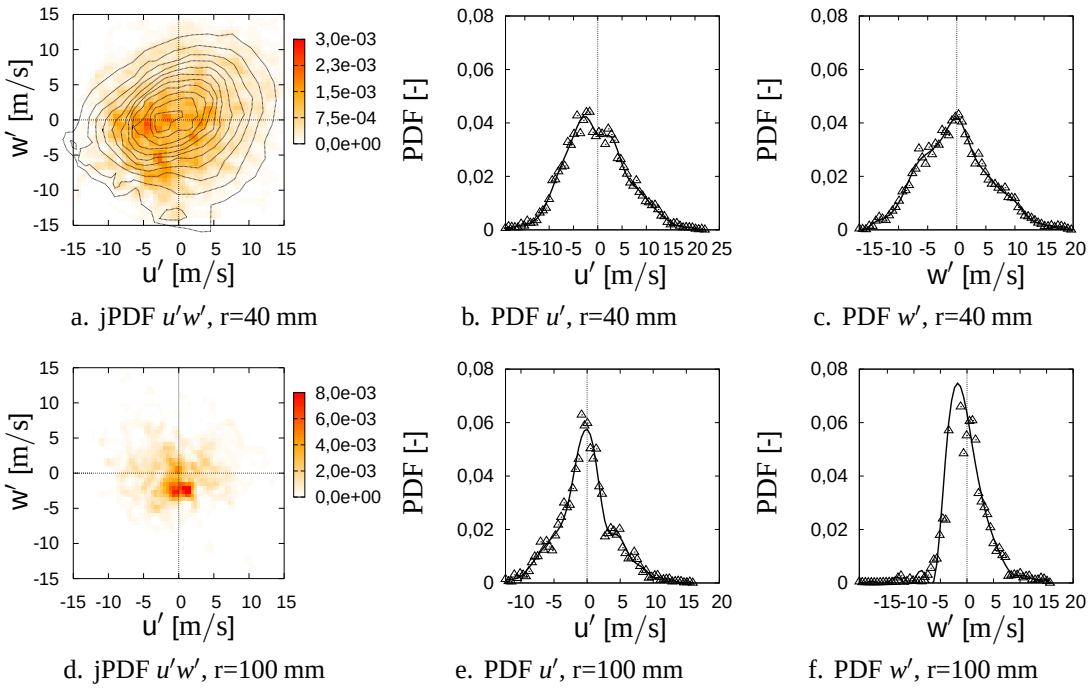
rend bei einer radialen Position von r=40 mm noch keine signifikante Schiefe der Funktionen erkennbar ist, nimmt diese bei größeren Radien zu. Die zunächst nahezu runde Form der jPDF von $u'v'$ (Bild 5.8.a) geht mit zunehmendem Abstand von der Rotationsachse mehr und mehr in eine Ellipse über und beinhaltet bei einem Radius von r=100 mm eine deutlich erkennbare Häufung der Wahrscheinlichkeit außerhalb des Ursprungs (Bild 5.8.d). Gleiches gilt für $u'w'$ (Bild 5.9.a bis 5.9.d) und $v'w'$ (Bild 5.10.a bis 5.10.d). Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses konzentriert sich also mit zunehmendem Radius auf bestimmte Bereiche, während bei kleineren Radien eine Gleichverteilung vorherrscht. Die Verbundfunktion erscheint rund bis elliptisch und weist keine ausgeprägten Bereiche von Wahrscheinlichkeitsanhäufungen auf. Erhöhte Wahrscheinlichkeiten im dritten und vierten Quadranten der $u'v'$-Verteilung indizieren eine stark nach innen gerichtete Strömung (vgl. Bild 5.8.d), gleichzeitig ist ansatzweise ein Defizit von Axialimpuls erkennbar (Häufung im dritten Quadranten). Eine im dritten Quadranten erhöhte Dichte der $u'w'$-Verteilung ist ein Hinweis für das Einrollen rotationsfreier Strukturen aus der Umgebung. Negative w'-Werte verweisen dabei auf einen verminderten Tangentialimpuls. Bild 5.9.a bis 5.9.d sowie Bild 5.10.a bis 5.10.d zeigen diesen Trend bereits ansatzweise recht gut. Zudem wird die starke Konzentration im dritten Quadranten aller Spannungskomponenten bei großen Radien (r=80 mm und 100 mm; vgl. auch Anhang B) durch die Simulationsrechnung eindeutig wiedergegeben. Grundlegende Charakteristika sind folglich schon mit einer vergleichsweise geringen Anzahl eingehender Stichproben abzubilden. Im Gegensatz zur experimentellen Untersuchung sind Aussagen bezüglich einer Bi- oder gar Multimodalität der Verbundwahrscheinlichkeiten nicht zu treffen. Zwar zeigen sich an der äußersten radialen Position (Teilbilder 5.8.d, 5.9.d und 5.10.d) zwei Maxima, diese sind aber nicht klar voneinander zu trennen und befinden sich nicht, wie im Experiment von Holzäpfel, in gegenüber liegenden Quadranten der Wahrscheinlichkeitsverteilung. Andererseits läßt die Charakteristik der Funktionen bereits auf einen intermittierenden Effekt Rückschlüsse ziehen, zwar nicht durch die klare Trennung mehrfach auftretender Maxima, aber durchaus durch die gehäufte Wahrscheinlichkeit der Stichproben im dritten Quadranten mit zunehmendem radialen Abstand von der Rotationsachse. Die Wahrscheinlichkeitsdichten (PDFs) der einzelnen Geschwindigkeitsfluktuationen unterstützen die getroffenen Aussagen. So ist eine in Richtung negativer Werte geneigte PDF radialer Geschwindigkeitsfluktuation v' Indikator für eine nach innen tendierende Bewegung (vgl. auch die strichpunktierten Linien in Bild 2.2). Häufungen im negativen Wertebereich der Tangentialfluktuation w' weisen auf ein Defizit tangentialen Impulses hin. Die Abbildungen zeigen deutlich, daß mit zunehmendem radialen Abstand auch die Schiefe der Wahrscheinlichkeitsdichten zunimmt. Am deutlichsten ist dies an der Verteilung der v'-Komponente erkennbar (Bild 5.8), aber auch die PDF von w' läßt diesen Trend erkennen. Auf Basis zuvor getroffener Überlegungen ist dies sehr gut mit der Intermittenzerscheinung in Einklang zu bringen. Das Einrollen der vergleichsweise gering drall- und turbulenzbehafteten Fluidballen der Strahlumgebung geschieht im Strahlrandbereich, folglich muß die radial nach innen gerichtete (Eindring)-Bewegung sowie der Fehlbetrag von Tangentialimpuls bei großen Radien am stärksten ausgeprägt sein. Wegen des verminderten Einflusses eindringender Umgebungsfluidballen mit wachsender Eindringtiefe, ist bei kleinen Radien nur mehr eine geringe Wechselwirkung mit dem Strahlfluid gegeben. In Folge nimmt die Schiefe der PDFs ab und sie weisen zunehmend Symmetrie auf.



a. jPDF $u'v'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF v', r=40 mm

d. jPDF $u'v'$, r=100 mm e. PDF u', r=100 mm f. PDF v', r=100 mm

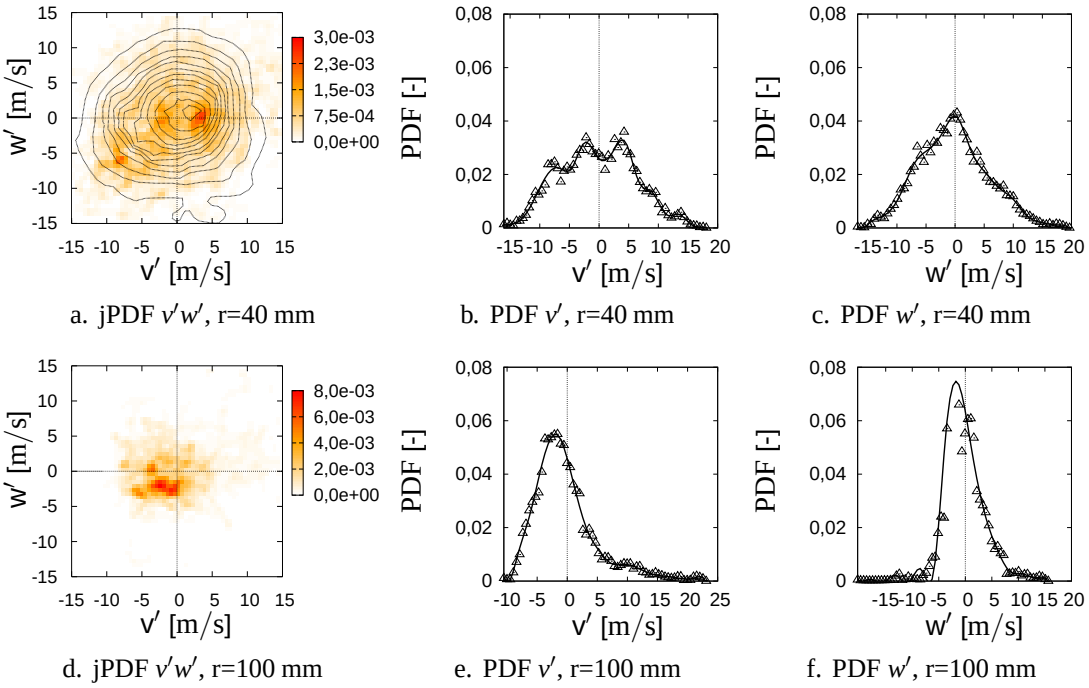
Bild 5.8. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ I. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



a. jPDF $u'w'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm

d. jPDF $u'w'$, r=100 mm e. PDF u', r=100 mm f. PDF w', r=100 mm

Bild 5.9. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ I. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



a. jPDF $v'w'$, r=40 mm b. PDF v', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm

d. jPDF $v'w'$, r=100 mm e. PDF v', r=100 mm f. PDF w', r=100 mm

Bild 5.10. Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ I. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).

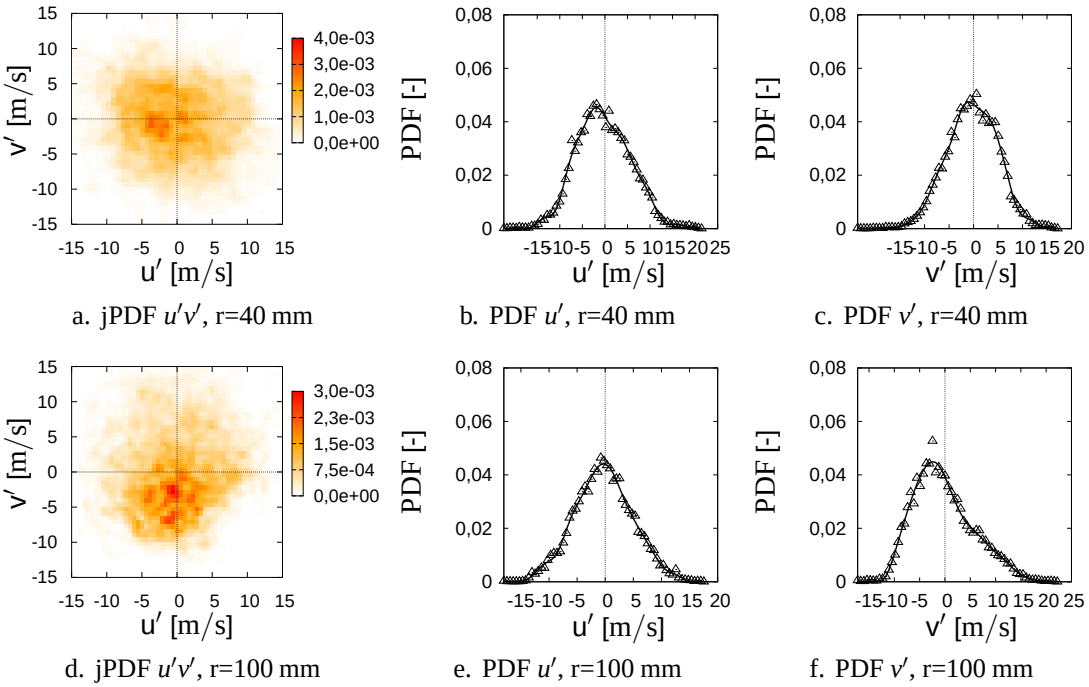
Die Verteilungen in der Ebene x=200 mm zeigen größtenteils mit denen der Ebene x=100 mm übereinstimmende Charakteristika, weshalb deren Darstellung ausschließlich im Anhang B.2 erfolgt (siehe Bild B.13 bis B.15). So ist, wenn auch wegen der geringeren Turbulenz an dieser Stelle in weniger starker Ausprägung, eine Verschiebung kreisförmiger in Richtung elliptischer Form der jPDFs erkennbar. Ebenfalls zeigt die $u'v'$-Verteilung mit Vergrößerung des Abstands von der Rotationsachse eine steigende Wahrscheinlichkeitsdichte im dritten Quadranten (Bild B.13.a bis B.13.j). Eine Konzentration der Wahrscheinlichkeiten kann bei den beiden anderen Komponenten $u'w'$ und $v'w'$ zwar beobachtet werden, ist aber weniger stark in Richtung des dritten Quadranten der jPDF gerichtet. Die $v'w'$-Verteilung an der Stelle r=100 mm in Bild B.15.j weist sogar einen Maximalwert im zweiten Quadranten auf. Die parallel zu den Verbundwahrscheinlichkeiten dargestellten Wahrscheinlichkeitsdichten der einzelnen Fluktuationen lassen an dieser Stelle leichter Rückschlüsse auf die vorhandenen Effekte zu, da wegen einer größeren Anzahl von Stichproben pro Klasse signifikantere Verläufe folgen. Analog zu den Ergebnissen an der axialen Position x=100 mm zeigt sich eine zunehmende Schiefe der v'- und w'-Verteilung mit Vergrößerung des radialen Abstands. Der Einfluß eindringender Fluidelemente aus der Umgebung ist auch hier deutlich an der gehäuften Wahrscheinlichkeit nach innen gerichteter Bewegung erkennbar, das Defizit des Tangentialimpulses zeigt sich ebenfalls, wenn auch weniger stark ausgeprägt. Aufgrund des in dieser Schnittebene bereits reduzierten tangentialen Impulsstromes der Hauptströmung, kann eingeschlossenes Umgebungsfluid das Defizit schneller ausgleichen, was zur Folge hat, daß eine signifikante Schiefe der PDF von w' lediglich am äußersten radialen Meßpunkt auftritt. Der Strahl ist bereits soweit aufgeweitet, daß die äußere Scherschicht in diesem radialen Bereich liegt. Die bereits fortgeschrittene Aufweitung des Strahls in Kombination

mit vergleichsweise niedrigem Tangentialgeschwindigkeitsniveau bedeutet ein im Mittel radial breiteres Profil der Axialgeschwindigkeit und einen in axialer Richtung vergrößerten Einflußbereich der eingerollten Fluidelemente aus der Umgebung. D.h. ein aus der Umgebung eindringender und nach innen beschleunigter Fluidballen erfährt einen im Verhältnis zur stromauf liegenden Position größeren Axialimpuls. Die für das Eindringen ausschlaggebende Differenz an Tangentialimpuls ist nicht mehr so groß wie an der weiter stromauf befindlichen Stelle, vergleichbare Eindringtiefen sind somit nicht zu erwarten. Differenzen im Impuls werden schneller ausgeglichen, aus eben dieser Differenz resultierende Kräfte kommen weniger stark zum Tragen. Interessant erscheint noch die im Gegensatz zum Ergebnis bei x=100 mm ausgeprägte Schiefe der u'-Wahrscheinlichkeit (Bild B.13). Allgemein größere Skalen in dieser Ebene lassen detaillierte Aussagen wegen der vergleichsweise kurzen Zeitreihe nicht weiter zu. Es sind aber eindeutige Charakteristika des von Hirsch und Holzäpfel beschriebenen Effektes klar erkennbar.

Analog der Betrachtung des Freistrahls werden die Ergebnisse des Zyklons nur an der innersten und äußersten radialen Position des $\text{Quadrant}_{\text{geo}}$ I vorgestellt. Die ähnlichen Resultate der weiteren Meßpositionen im Raum sind wiederum im Anhang B.3 und B.4 zu finden.

In der Ebene x=100 mm (Bild 5.11 bis 5.13) fällt zunächst auf, daß im Gegensatz zum Freistrahlfall eine vom Radius abhängige Form der Verbundwahrscheinlichkeiten nicht gegeben ist. Die bei Radius 40 mm nahezu kreisrunde Charakteristik bleibt mit zunehmendem Abstand von der Symmetrieachse grundlegend erhalten. Maxima sind stets in unmittelbarer Nähe des Ursprungs zu finden, wobei die geringfügige Verschiebung im Falle der $u'v'$- und $v'w'$-Verbundverteilung bei r=100 mm (Bild 5.11.d und 5.13.d) aus der Lage des Beobachtungspunktes resultiert. Der am äußeren Strahlrand befindliche Punkt liegt in einem Gebiet äußerer Rezirkulation (siehe Bild 5.4). Dies ist mit einem Strahlrand einer freien Scherströmung insofern vergleichbar, als das in der Nähe bei größeren Radien mit einer Instabilität zu rechnen ist (Defizit von Tangentialimpuls in der Rezirkulationszone). Es erscheint nachvollziehbar, daß auch hier eine bevorzugte, radial nach innen gerichtete Geschwindigkeit beobachtet werden kann, wenn auch in vielfach geringerer Ausprägung als beim Drallfreistrahl. Experimentelle Erkenntnisse von Holzäpfel et al. (2002) bestätigen dies. Eine Schiefe der v'-PDF ist deutlich erkennbar (Bild 5.11.e). Die w'-Verteilung (Bild 5.12.f) weist hingegen keine Schiefe auf, was vermutlich an der Ausprägung eines quasi Potentialwirbels mit $W \sim cr^n$ und $n \approx -1$ liegt. Aufgrund ähnlicher Längen- und Zeitskalen, sowie der vergleichbaren Turbulenzintensität von Fluidballen in unmittelbarer Nähe dieses Bereiches (also des dominierenden Strahls und des angesaugten Mediums), bleibt ein weitgehender Einfluß auf weiter innen liegende Bereiche der Strömung ausgeschlossen. Die konstante äußere Form ist bei allen drei Verteilungsfunktionen erkennbar, stark ausgeprägte und verschiedene Schiefen der Verteilungen wie im Falle des Freistrahls sind nicht gegeben. Ebenfalls zeigen die Wahrscheinlichkeitsdichten der einzelnen Komponenten eine nahezu konstante Symmetrie bzgl. der Nullachse auf. Ausnahme ist hier lediglich die radiale Komponente am Strahlrand, die zu negativen Werten, also nach innen gerichtet, tendiert.

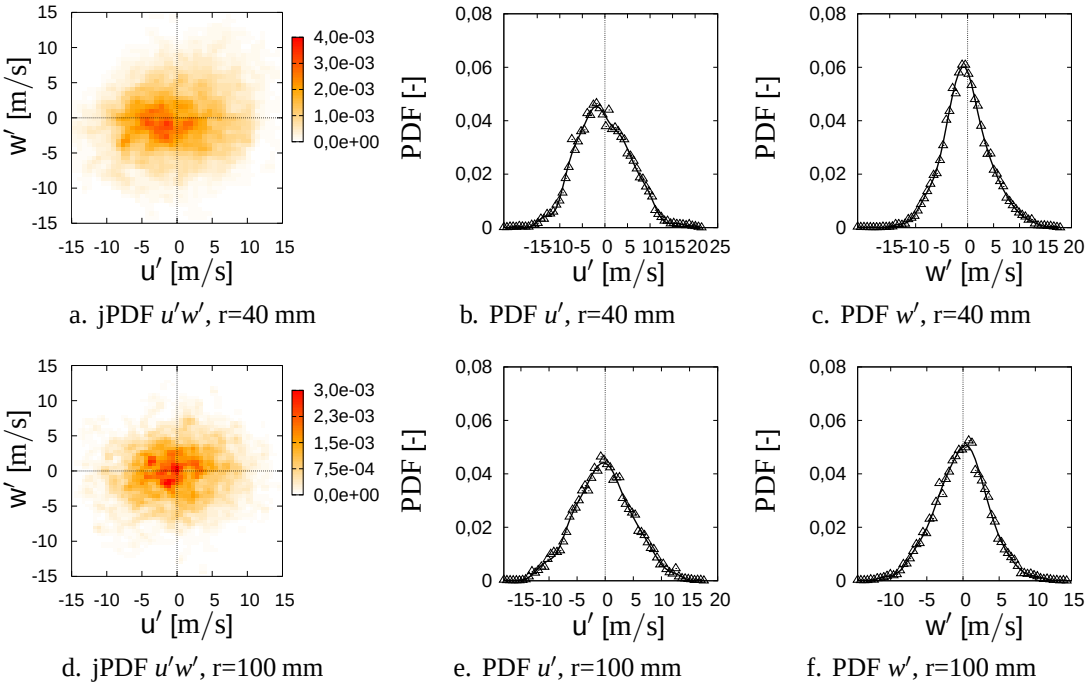
Auch in der Ebene bei x=200 mm ist keine dem Freistrahlfall vergleichbare Schiefe der Verbundwahrscheinlichkeiten erkennbar (siehe Bild B.37 bis B.39 im Anhang). Die äußere Form der Funktionen ist weitgehend kreisrund und enthält folglich keine bevorzugte Richtung. Wie schon in der weiter stromauf liegenden Ebene ist hier eine leichte Exzentrizität der maximalen Wahrscheinlichkeiten bei größeren Radien (r=80 mm und 100 mm) zu sehen, allerdings bei den jPDFs von $u'v'$- und $u'w'$.



a. jPDF $u'v'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF v', r=40 mm

d. jPDF $u'v'$, r=100 mm e. PDF u', r=100 mm f. PDF v', r=100 mm

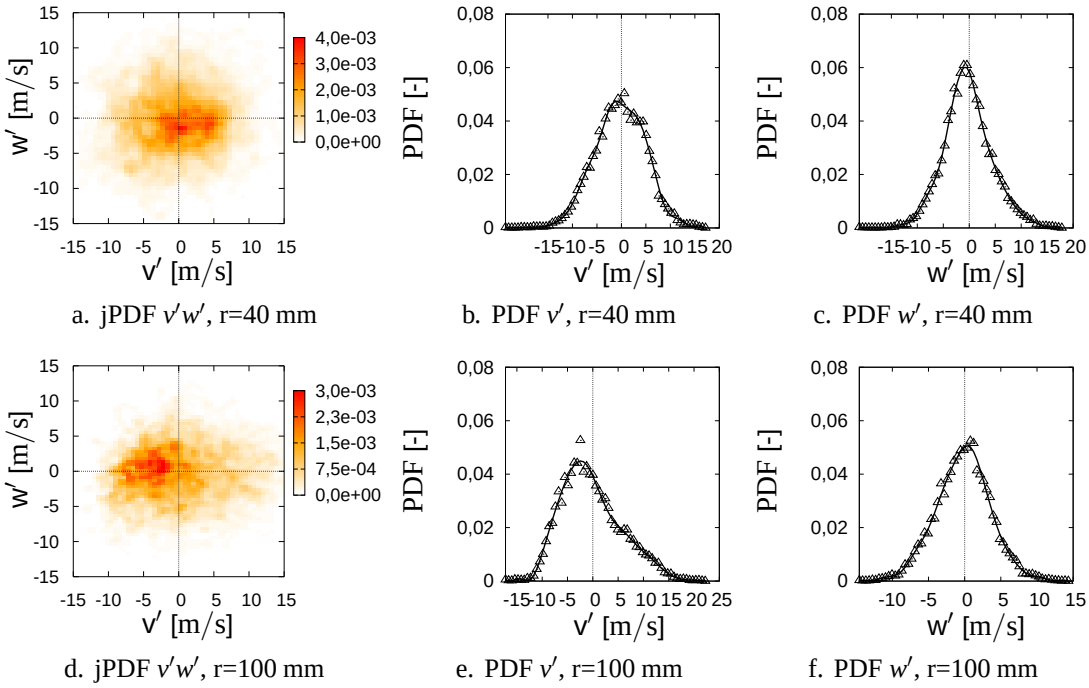
Bild 5.11. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Zyklon, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ I.



a. jPDF $u'w'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm

d. jPDF $u'w'$, r=100 mm e. PDF u', r=100 mm f. PDF w', r=100 mm

Bild 5.12. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Zyklon, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ I.



a. jPDF $v'w'$, r=40 mm b. PDF v', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm

d. jPDF $v'w'$, r=100 mm e. PDF v', r=100 mm f. PDF w', r=100 mm

Bild 5.13. Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Zyklon, x=100 mm, $\text{Quadrant}_{\text{geo}}$ I.

An diesen Beobachtungspunkten befindet sich der Übergangsbereich von innerer Rezirkulation, also stromauf gerichteter Bewegung des Fluids, und Hauptströmung (Bild 5.4). Der Verlauf der u'-PDF an diesen radialen Positionen (Bild B.37.h und B.37.k) weist aufgrund der Schiefe deutlich auf ein gehäuftes Auftreten negativer axialer Fluktuationen hin und identifiziert diese als Grund für die beobachtete Exzentrizität. Die an dieser Position vorhandene Schiefe der u'-PDF bildet in betrachteter Ebene allerdings die Ausnahme. Alle verbleibenden Wahrscheinlichkeitsdichten sind nahezu symmetrisch.

Die in diesem Abschnitt präsentierten Wahrscheinlichkeitsdichten zeigen im Falle der freien Drallströmung bereits deutlich eine Häufung stochastischer Ereignisse, die gut mit dem Phänomen der drallverstärkten Intermittenz in Übereinkunft zu bringen sind. Dies wird zudem durch das Fehlen solcher Häufungen im Falle des eingeschlossenen Strahls unterstrichen. Eine von Hirsch und Holzäpfel als Grund genannte Instabilität im Bereich des Strahlrandes ist offensichtlich für die hier erkennbare Ausprägung der Wahrscheinlichkeitsfunktionen verantwortlich. Es gelingt trotz der verhältnismäßig kurzen Zeitreihen eine deutliche Hervorhebung dieses Effektes. Zwar sind hiermit keine quantitativen Schlüsse vergleichbar mit jenen aus der experimentellen Untersuchung möglich, qualitativ ist der Effekt aber durchaus gut mit der Grobstruktursimulation abbildbar.

5.4 Räumliche Analyse

Die für eine Analyse notwendigen statistischen Mittel werden nach der in Abschnitt 3.2 beschrieben Methodik bereits während der laufenden Simulationsrechnung gebildet, da ein nur in eingeschränktem Umfang vorhandener Datenträger das Speichern aller zu betrachteten Stichproben verhindert. Tabelle 5.3 gibt einen Überblick der aus Momentangrößen errechneten Mittel[6], die zur Bestimmung der Teilterme in der exakten Transportgleichung der Reynolds'schen Spannungen (Gleichung (2.19)) notwendig sind.

Momente			Andere
1. Ordnung	2.Ordnung	3. Ordnung	
$\overline{U}$	$\overline{u'u'}$	$\overline{u'u'u'}$	$\overline{2p'\frac{\partial u'}{\partial x}}$
$\overline{V}$	$\overline{v'v'}$	$\overline{v'v'v'}$	$\overline{2p'\frac{\partial v'}{\partial y}}$
$\overline{W}$	$\overline{w'w'}$	$\overline{w'w'w'}$	$\overline{2p'\frac{\partial w'}{\partial z}}$
	$\overline{u'v'}$	$\overline{u'u'v'}$	$\overline{p'\left(\frac{\partial u'}{\partial y}+\frac{\partial v'}{\partial x}\right)}$
	$\overline{u'w'}$	$\overline{u'u'w'}$	$\overline{p'\left(\frac{\partial u'}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial x}\right)}$
	$\overline{v'w'}$	$\overline{u'v'v'}$	$\overline{p'\left(\frac{\partial v'}{\partial z}+\frac{\partial w'}{\partial y}\right)}$
		$\overline{w'v'v'}$	$\overline{p'u'}$
		$\overline{w'w'u'}$	$\overline{p'v'}$
		$\overline{w'w'v'}$	$\overline{p'w'}$
		$\overline{u'v'w'}$	

Tabelle 5.3. Ensemble-gemittelte Größen aus der LES.

Die Dichte ρ wird dabei stets als konstanter (Vor-) Faktor angesehen und folglich erst im Auswerteprozeß berücksichtigt. Die Berechnung des mittleren Produktionstensors P_{ij} benötigt Ensemble-Mittelwerte des Geschwindigkeitsfeldes $\overline{U},\overline{V},\overline{W}$ und die unabhängigen Tensorkomponenten des Spannungstensors $\overline{u_i'u_j'}$. Zur Auswertung der Druck-Scher-Korrelation Φ_{ij} sind die Komponenten $\overline{p'\left(\partial u_i'/\partial x_j\right)}$ zu bestimmen, für den diffusiven Anteil $\mathscr{D}_{ij}^{p}$ die Größen $\overline{p'u_i'}$. Turbulente Diffusion $\mathscr{D}_{ij}^{t}$ beinhaltet die Dreifachkorrelation $\overline{u_i'u_j'u_k'}$, molekulare $\mathscr{D}_{ij}^{\nu}$ wiederum die

6 Aufgrund von Symmetrieeigenschaften der betrachteten Tensoren zweiter und dritter Stufe sind nicht alle Elemente explizit zu bestimmen. Es genügt im vorliegenden Fall eine Kombination (Repetition) der Fluktuation ohne Berücksichtigung der Reihenfolge. Im allgemeinen berechnet sich dies nach den Regeln der Kombinatorik (Bronstein et al., 1999):

$$K_{mW}(n,k)=\binom{n+k-1}{k}=\frac{(n+k-1)!}{k!\,(n-1)!}.$$

Für den Tensor zweiter Stufe t_{ij} mit $n=3$ und $k=2$ folgen somit 6 unabhängige Möglichkeiten, für einen dritter Stufe t_{ijk} ($n=k=3$) 10 Möglichkeiten.

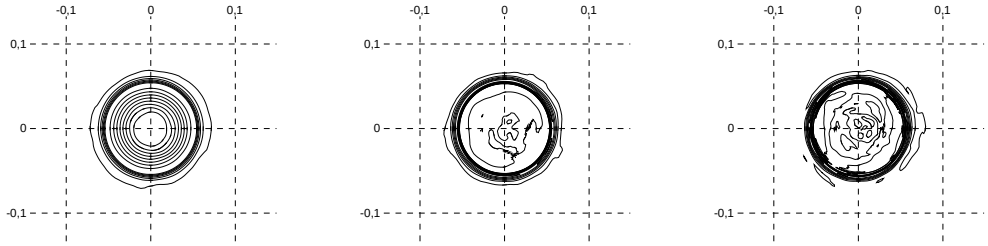
Komponenten $\overline{u_i' u_j'}$ des Spannungstensors. Eine für die im folgenden durchgeführte Modellanalyse benötigte skalare Dissipationsrate ε entspricht der Annahme nach Gleichung (5.3), wobei die tensorielle Größe isotrop gebildet wird: $\varepsilon_{ij} = \varepsilon/3\,\delta_{ij}$ mit $\varepsilon = \mathscr{P}\,\varepsilon$.

Die einfließenden Zeiträume beinhalten jeweils 40.000 Stichproben und entsprechen einer realen Strömungszeit von $0,2$ s im Falle der freien Drallströmung bzw. $0,4$ s im eingeschlossenen Fall. Folglich werden typische Längenmaße (vgl. Tabelle 5.2) im axialen Bereich bis etwa $1\,D$ mindestens 200-400 mal abgebildet, eine genügend große Anzahl voneinander unabhängiger Stichproben ist folglich gegeben. Definiert man auf Basis der Zeitreihen aller zuvor beschriebener Punkte eine mittlere, charakteristische Geschwindigkeit U_c, so läßt sich eine typische Durchflußzeit t_c ermitteln: $t_c = \frac{D}{U_c}$ mit D dem mittleren Durchmesser des einlaßseitigen Ringspaltes. Die in die Ensemble-Mittelung eingehende Zeitspanne ist beim Freistrahl etwa gleich 20 mal dieser Durchflußzeit, beim eingeschlossenen Fall werden circa 16 Durchläufe erreicht (zu beachten ist die Stärke der Rezirkulationszone).

5.4.1 Statistische Stationarität im Nahbereich

Bevor unter Annahme der Gültigkeit des Ergoden-Theorems eine räumliche Mittelung zeitlicher Ensembles durchgeführt werden kann, ist deren statistische Stationarität zu gewährleisten. Im Falle der Betrachtung homogener Richtungen (hier: Umfang φ) muß an vergleichbaren Punkten im Raum derselbe Mittelwert (Erwartungswert der Verteilung) vorliegen. Dies bezeichnet im engeren Sinne einen stationären Prozeß (Råde und Westergren, 1997). Zur Verdeutlichung sollen vier transversale Schnitte an äquidistant verteilten axialen Positionen zwischen x=20 mm und 140 mm herangezogen werden. Diskutiert werden beispielhaft die axiale Geschwindigkeit ($\overline{U}$), die radial-tangentiale Komponente des Reynolds'schen Spannungstensors ($\overline{v'w'}$) sowie eine dreifach Geschwindigkeitskorrelationen ($\overline{u'v'w'}$). Weitere Ergebnisse sind in den Anhängen C.1 und C.2 zu finden. Zunächst sollen die Ergebnisse des Freistrahls betrachtet werden.

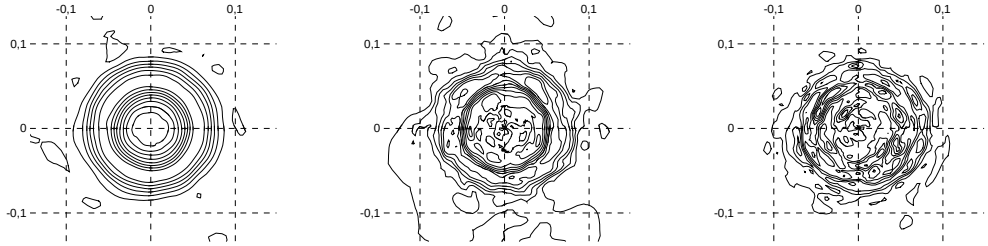
Der am weitesten stromauf liegende Querschnitt (Bild 5.14) zeigt bei allen Größen eine stark ausgeprägte Rotationssymmetrie der Stichprobenmittel, wobei bereits an dieser Stelle erkennbar ist, daß mit zunehmender Ordnung die Abweichungen in der homogenen Verteilung zunehmen. Dies zeigt sich besonders in der $\overline{u'v'w'}$-Komponente im inneren Bereich. Momente erster und zweiter Ordnung können durchwegs als stationär bezeichnet werden, im Falle der Dreifachkorrelation sind die Abweichungen noch nicht in entscheidendem Maße ausgeprägt, sodaß auch hier eine räumliche Mittelung möglich ist. Diese Charakteristika sind für Momente erster und zweiter Ordnung an den folgenden Positionen bis etwa x=100 mm gegeben. Wegen der Aufweitung des Strahls, der abnehmenden Turbulenzbewegung und der damit verbundenen Vergrößerung der Längenmaße aber nimmt die strenge Rotationssymmetrie der brennernächsten Bereiche mehr und mehr ab. Dennoch ist eine homogene Ausbildung in Umfangsrichtung erkennbar. Erst ab etwa x=80 mm ist eine Vorzugsrichtung der $\overline{v'w'}$-Spannung sowie der Dreifachkorrelationen kaum noch mit der Rotationssymmetrie in Einklang zu bringen ist (Bild C.2.j u. C.2.l bzw. bereits stärker ausgeprägt in Bild 5.14.h u. 5.14.i). Entfernt man sich noch weiter vom Ursprung, so verstärkt sich dieser Trend zusehend. Während die Isolinien der Momente erster Ordnung noch bis x=120 mm ein ausgeprägtes kreisrundes Bild darstellen (erst bei x=140 mm zeigt sich in der $\overline{U}$-Komponente eine sichelförmige Struktur im inneren Bereich), ist dies bei jenen höherer Ordnung nicht mehr erkennbar.



a. $\overline{U}$; x=20 mm;
Min.: -5,3; Max.: 24,2

b. $\overline{v'w'}$; x=20 mm;
Min.: -14,1; Max.: 33,7

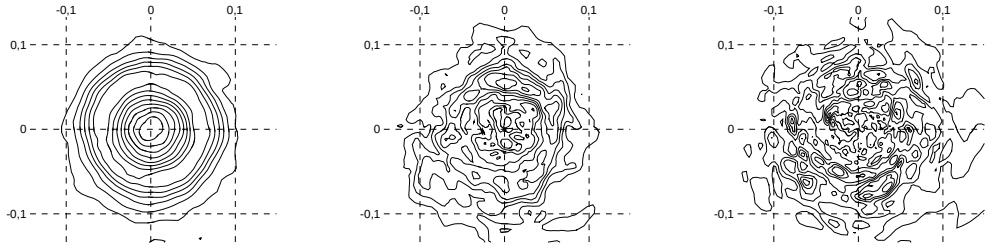
c. $\overline{u'v'w'}$; x=20 mm;
Min.: -72,4; Max.: 230,6



d. $\overline{U}$; x=60 mm;
Min.: -6,5; Max.: 18,0

e. $\overline{v'w'}$; x=60 mm;
Min.: -6,4; Max.: 24,4

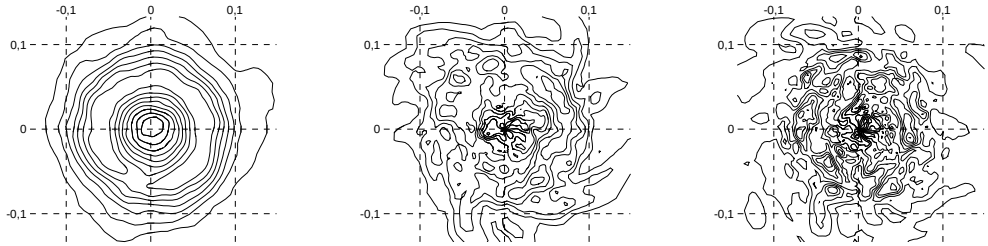
f. $\overline{u'v'w'}$; x=60 mm;
Min.: -77,1; Max.: 103,4



g. $\overline{U}$; x=100 mm;
Min.: -6,3; Max.: 14,8

h. $\overline{v'w'}$; x=100 mm;
Min.: -4,1; Max.: 24,6

i. $\overline{u'v'w'}$; x=100 mm;
Min.: -60,8; Max.: 76,5



j. $\overline{U}$; x=140 mm;
Min.: -3,1; Max.: 12,0

k. $\overline{v'w'}$; x=140 mm;
Min.: -5,3; Max.: 15,3

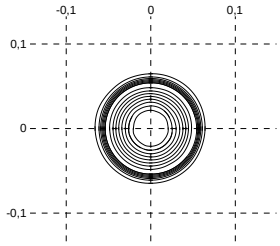
l. $\overline{u'v'w'}$; x=140 mm;
Min.: -39,2; Max.: 48,1

Bild 5.14. Verteilung ausgewählter Ensemble-Mittelwerte über die Querschnitte x=20 mm bis x=140 mm; Freistrahl. Dargestellt sind jeweils acht Isolinien, gleichverteilt zwischen den Minima und Maxima der gezeigten Größe.

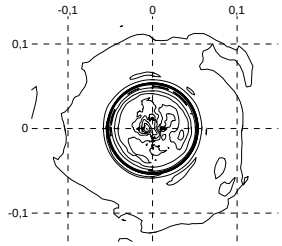
Bild 5.15 zeigt die Querschnitte für die eingeschlossene Drallströmung, wobei die im Freistrahl aufgezeigten Trends auch hier grundsätzlich enthalten sind. Bis zu einer axialen Position von 80 mm ist für die betrachteten Ensemble-Mittel eine prinzipielle Kreisstruktur erkennbar. Momente erster Ordnung zeigen dies sehr stark, mit zunehmender Ordnung der Korrelation sinkt dieses Verhalten aber erwartungsgemäß. Im transversalen Schnitt der Ebene x=100 mm zeigt sich besonders bei der $\overline{v'w'}$-Komponente des Reynolds'schen Spannungstensors schon eine recht inhomogene Verteilung der gebildeten Werte (Bild 5.15.h), bei der Tripelkorrelationen der Geschwindigkeit ist die kreisförmige Form ebenfalls nur noch ansatzweise zu erkennen. Analog zu den Ergebnissen im Freistrahlfall weitet sich dieser Trend mit zunehmendem Abstand vom Brennermund aus: bei x=140 mm ist eine homogene Verteilung nur noch bei den Geschwindigkeitsmitteln erkennbar, Spannungs- und Dreifachkorrelationskomponenten hingegen sind heterogen in der Ebene verteilt und zeigen keine bevorzugte Verteilung in Umfangsrichtung.

Die dargestellten Querschnitte belegen eindeutig, daß die über den zuvor genannten physikalischen Zeitraum von $0,2$ s bzw. $0,4$ s gebildeten Ensemble-Mittelwerte der in Tabelle 5.3 aufgeführten Größen nur bis zu einem axialen Abstand von etwa $1\,D$ eine homogene Verteilung über die Umfangsrichtung aufweisen. Alle weiter stromab befindlichen Bereiche der Strömung können allenfalls bezüglich der Momente erster Ordnung räumlich (also über die Umfangskomponente φ) gemittelt werden, die verbleibenden Größen sind dieser Methodik nicht zugänglich, da sie *keine* eindeutige Vorzugsrichtung aufweisen. Offensichtlich ist der betrachtete physikalische Zeitraum noch zu kurz, um die in diesen Bereichen bereits vielfach größeren Skalen häufig genug zu erfassen.

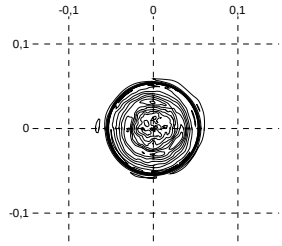
An dieser Stelle bleibt allerdings zu beachten, daß auch bei einer simplen Verdopplung oder Verdreifachung des eingehenden Beobachtungszeitraums nicht notwendigerweise mit einer qualitativen Verbesserung der Ergebnisse zu rechnen ist. Betrachtet man die aus der Spektralanalyse gewonnenen Zeitmaße (vgl. Tabelle 5.2) in der Ebene x=100 mm und außerdem die ohnehin schon doppelte Zeit im Falle der eingeschlossenen Strömung, so wird diese Behauptung gestützt. Desweiteren bestätigen dies Ergebnisse der eingeschlossenen Strömung, in die eine Gesamtmittelungsdauer von $1,3$ s einfließt. Auch hier zeigen sich die eben beschriebenen Charakteristika in den Verteilungen und ein nennenswerter Unterschied zu den hier dargestellten Ergebnissen liegt nicht vor. Allerdings sind homogene Verteilungen der Mittelwerte in beiden betrachteten Strömungsfällen bereits im Brennernahbereich erkennbar. Hieraus wird abgeleitet, daß (räumlich) stationäre Mittelwerte von Momenten höherer Ordnung in weiten Bereichen der Geometrie (bis etwa $5\,D$) erst (wenn überhaupt) nach einer vielfach größeren Beobachtungszeit erreichbar sind (mindestens ein bis zwei Größenordnungen). Dennoch beweist diese Analyse, daß in einem Nahbereich schon ein statistisch stationärer Zustand vorhanden ist und folglich eine weitere Mittelung über die Umfangskomponente uneingeschränkt möglich ist. Im folgenden Abschnitt soll zunächst ein Vergleich mittlerer Geschwindigkeiten und Reynolds'scher Spannungen aus der Grobstruktursimulation mit den experimentellen Ergebnissen von Holzäpfel (1996) vorgestellt und diskutiert werden.



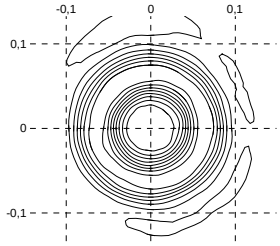
a. $\overline{U}$; x=20 mm;
Min.: -4,3 Max.: 23,9



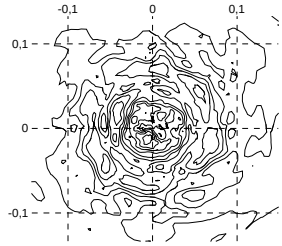
b. $\overline{v'w'}$; x=20 mm;
Min.: -16,3; Max.: 10,0



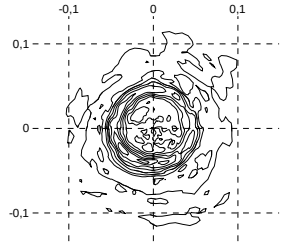
c. $\overline{u'v'w'}$; x=20 mm;
Min.: -97,2; Max.: 55,8



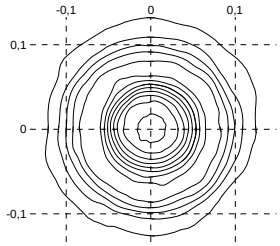
d. $\overline{U}$; x=60 mm;
Min.: -5,1; Max.: 13,2



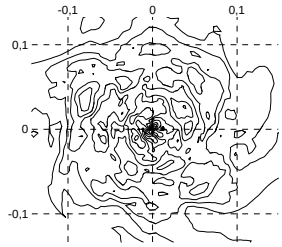
e. $\overline{v'w'}$; x=60 mm;
Min.: -8,2; Max.: 7,6



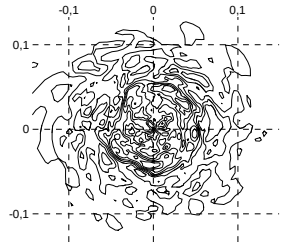
f. $\overline{u'v'w'}$; x=60 mm;
Min.: -94,3; Max.: 39,7



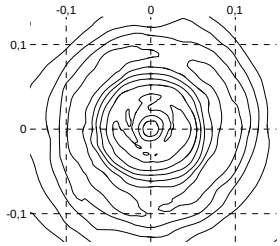
g. $\overline{U}$; x=100 mm;
Min.: -5,4; Max.: 9,1



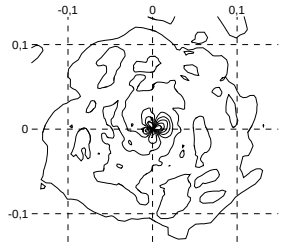
h. $\overline{v'w'}$; x=100 mm;
Min.: -3,6; Max.: 8,3



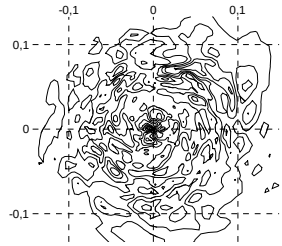
i. $\overline{u'v'w'}$; x=100 mm;
Min.: -44,6; Max.: 40,2



j. $\overline{U}$; x=140 mm;
Min.: -4,7; Max.: 6,4



k. $\overline{v'w'}$; x=140 mm;
Min.: -6,9; Max.: 8,4



l. $\overline{u'v'w'}$; x=140 mm;
Min.: -26,3; Max.: 28,2

Bild 5.15. Verteilung ausgewählter Ensemble-Mittelwerte über die Querschnitte x=20 mm bis x=140 mm; Zyklon. Dargestellt sind jeweils acht Isolinien, gleichverteilt zwischen den Minima und Maxima der gezeigten Größe.

5.4.2 Validierung mit Meßergebnissen von Holzäpfel

Basierend auf der mathematischen Herleitung von Lumley (1978) können die gewonnen Mittelwerte der Reynolds'schen Spannungen bzgl. ihrer physikalischen Plausibilität analysiert werden. Eine detaillierte Darstellung dieses Ansatzes sowie die Ergebnisse der beiden untersuchten Strömungen sind im Anhang D zu finden. An dieser Stelle sei lediglich erwähnt, daß alle erhaltenen Mittelwerte aus der Grobstruktursimulation physikalisch sinnvolle Ergebnisse darstellen und so Experiment und Simulation ohne weitere Einschränkung miteinander vergleichbar sind.

Aufbauend auf den in Abschnitt 5.4.1 gewonnenen Erkenntnissen, erfolgt eine Umfangsmittelung in einem Bereich bis einschließlich x=120 mm. Radiale Profile werden an sechs äquidistant verteilten Positionen zwischen x=20 mm und x=120 mm mit den experimentellen Ergebnissen von Holzäpfel (1996) verglichen. Die Umfangsmittelung wird hierbei nur in Bereichen mit zylindrischem Gitter durchgeführt (der innerste Bereich in Bild 5.3 wird nicht betrachtet). So wird zwar der Kernbereich von etwa r=50 mm außer acht gelassen, Singularitäten (bei $r \rightarrow 0$) während der Mittelungsprozedur können aber vermieden werden. Zudem ist dieser, von kohärenten Strukturen bestimmte, Kern der Strömung ohnehin nicht mit den experimentellen Ergebnissen vergleichbar, da aufgrund der blockförmigen Einlaßprofile in der Simulationsrechnung eine solche Struktur nicht zu erwarten ist, jedenfalls nicht in vergleichbarer Stärke.

Bild 5.16 zeigt den Vergleich axialer und azimutaler Geschwindigkeit an den eben genannten Positionen für die freie Drallströmung. Momente erster Ordnung zeigen eine gute Übereinstimmung mit den Experimenten, die globale Umverteilung von Drehimpuls mit zunehmendem axialen Abstand wird von der Grobstruktursimulation voll und ganz beschrieben. Charakteristika der Profile sind ohne Einschränkung im betrachteten Bereich durch die Simulation wiedergegeben. Der Vergleich der radialen Reynolds'schen Normalspannung ist in Bild 5.17 gezeigt. Die Simulationsergebnisse von $\overline{v'v'}$ geben das charakteristische Verhalten der experimentellen in allen betrachteten Positionen gut wieder, beinhalten aber im Bereich ab einschließlich x=60 mm ein zu hohes Maximum. Dies ist mit der fehlenden Präzessionsbewegung des Wirbelkerns zu erklären. Im beschriebenen Abschnitt der Strömung ist die radiale Geschwindigkeitskomponente noch von großen Werten im strahldominierten Bereich gekennzeichnet, die allerdings nach innen abfallen. Wäre die Präzessionsbewegung wie im Experiment ausgeprägt, so würden diese Bereiche bei der Mittelung an Einfluß gewinnen und ein betragsmäßig kleineres Maximum der radialen Normalspannung nach sich ziehen. Für die tangentiale Normalspannung (vgl. Anhang E.1) gilt dies gleichermaßen, wobei hier der von größeren Werten bestimmte Starkörperwirbelkern die mittlere Spannung hin zu höheren Werten beeinflussen würde. Ein weiterer Grund für die Abweichungen zwischen Simulationsergebnis und Messung liegt in der begrenzten Meßgenauigkeit: nach Holzäpfel et al. (1999) nimmt dabei die Genauigkeit mit steigendem Winkel der Hitzdrahtsonde zur Hauptströmung ab. Der Artikel nennt Ungenauigkeiten der Normalspannungen von etwa $\pm 10\%$, und der Tangentialkomponenten von $\pm 15\%$.

Die verbleibenden Komponenten des Spannungstensors sind in Anhang E.1 dargestellt. Man erkennt eine gute Übereinstimmung zwischen Simulation und Experiment bzgl. der axialen und tangentialen Normalspannungen in allen betrachteten Schnitten. Ebenfalls erkennbar ist eine gute Wiedergabe des Verlaufs der $\overline{u'v'}$-Spannung. Die nicht erreichten Extrema, besonders in Hinblick auf die weiter stromab liegenden Schnitte, resultieren wiederum aus der nicht vergleichbar abgebildeten Präzessionsbewegung.

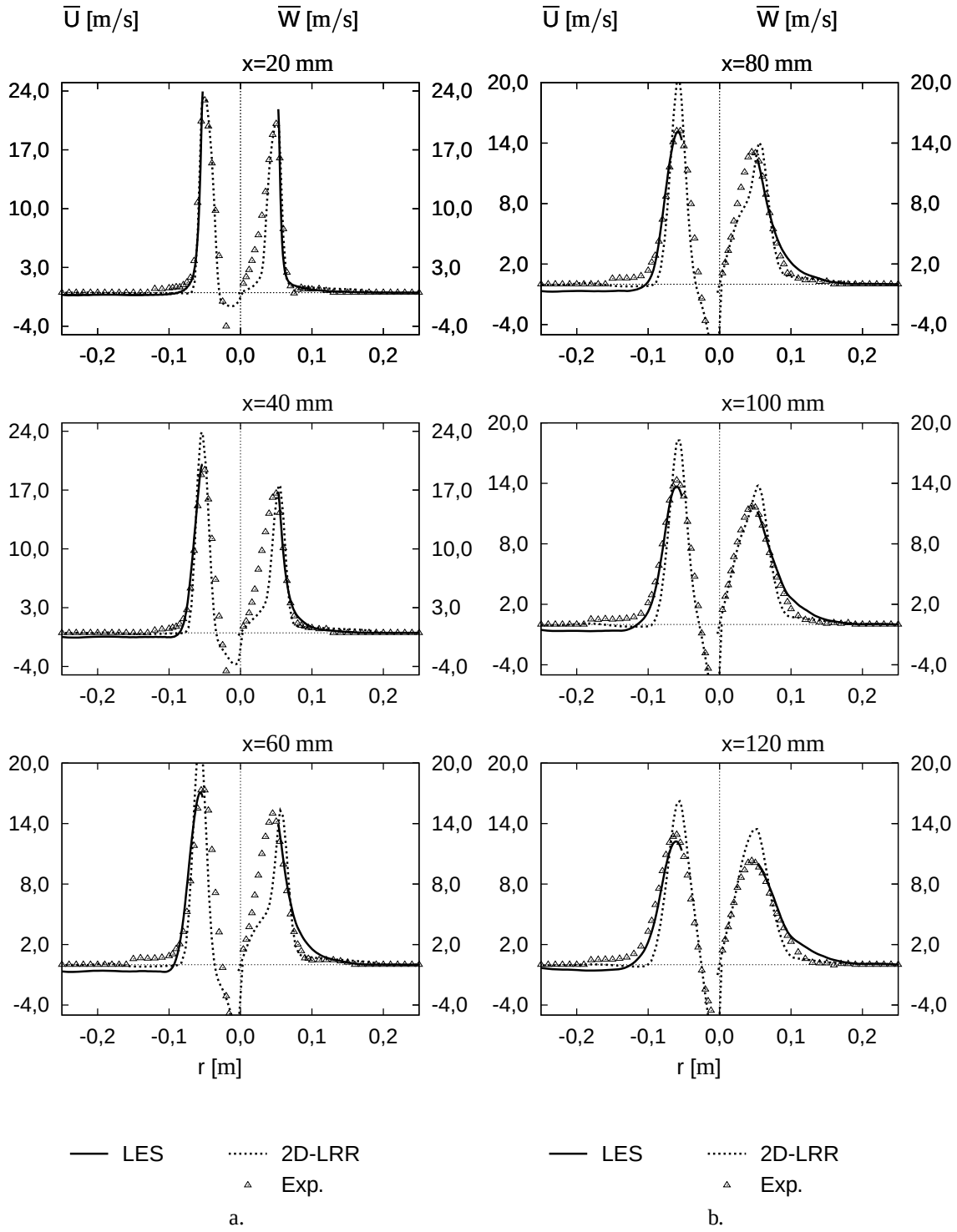


Bild 5.16. Vergleich mit Experiment von Holzäpfel und zweidimensionaler RANS; Freistrahl. Radiale Geschwindigkeitsverteilung $\overline{U}$ und $\overline{W}$ an axialen Positionen x=20 bis 120 mm.

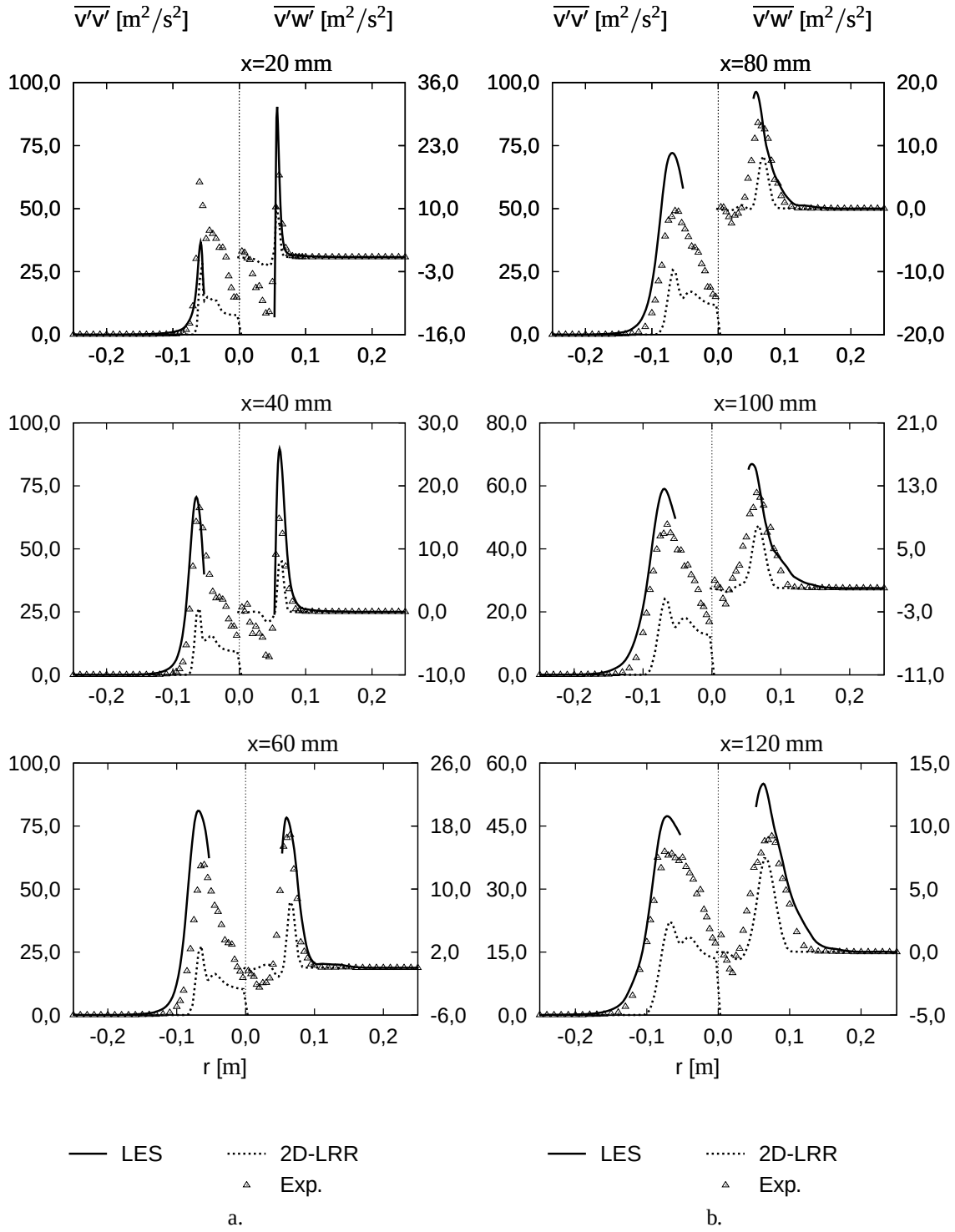


Bild 5.17. Vergleich mit Experiment von Holzäpfel und zweidimensionaler RANS; Freistrahl. Radiale Spannungsverteilung $\overline{v'v'}$ und $\overline{v'w'}$ an axialen Positionen x=20 bis 120 mm.

Die Ergebnisse des eingeschlossenen Drallstrahls im Vergleich mit dem Experiment zeigen die Bilder 5.18 bis 5.19. Wie schon bei der freien Drallströmung ist die Abbildung von Momenten erster Ordnung in allen hier betrachteten axialen Position in gute Übereinkunft mit den Meßergebnissen zu bringen. Maxima werden nahezu exakt beschrieben, der, global betrachtete, Verlauf entspricht jenem der Messung. Auch hier beschränken bereits angesprochene Probleme bei der Messung und die nicht ausgebildete Bewegung des Wirbelkernbereichs die Vorhersagemöglichkeiten der Simulationsrechnung. So ist beispielsweise ein nicht so glatter Verlauf der tangentialen Geschwindigkeit in Bereichen weiter stromab erkennbar, zudem zeigt sich hier ein minimal weiter nach innen verschobenes Axialgeschwindigkeitsprofil (Bild 5.18). Für die Profile der Reynolds'schen Spannungskomponenten gelten dieselben Schlußfolgerungen wie für den Drallfreistrahl. Aufgrund der hier gewählten Strategie der Simulation auf Basis idealisierter Randbedingungen durch eine blockförmige Vorgabe ist eine dem Experiment vergleichbare Wirbelkernpräzession nicht abbildbar. Folglich können, quantitativ betrachtet, Extrema der Spannungsprofile nicht oder nur ansatzweise abgebildet werden. Andererseits zeigt sich aber dennoch eine gute qualitative Übereinstimmung der errechneten Profilverläufe mit dem Experiment. Einen Gesamtüberblick des Vergleichs von Experiment und Simulation zeigt Anhang E.2.

Die unter den getroffenen Vereinfachungen bezüglich der Randbedingung erzeugten Ensemble-Mittelwerte aus der Grobstruktursimulation sind im bereits als statistisch stationär zu betrachtenden Nahbereich bis etwa $1\,D$ nach dem Flächensprung der Geometrie in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Ergebnissen von Holzäpfel (1996). Quantitative Abweichungen als Folge der genannten Annahmen befinden sich in einem akzeptablen Bereich und sollten nicht als gravierend angesehen werden. Es müssen in diesem Zusammenhang stets die gesteigerte numerische Effizienz durch die signifikante Reduktion notwendiger Gitterpunkte und die von Holzäpfel beschriebenen Probleme bei der experimentellen Datengewinnung beachtet werden. Der qualitative Verlauf hier vorgestellter Radialprofile unterstützt dabei die Hypothese, daß auch mit stark vereinfachten Eingangsbedingungen schon qualitativ hochwertige Ergebnisse zu erzielen sind.

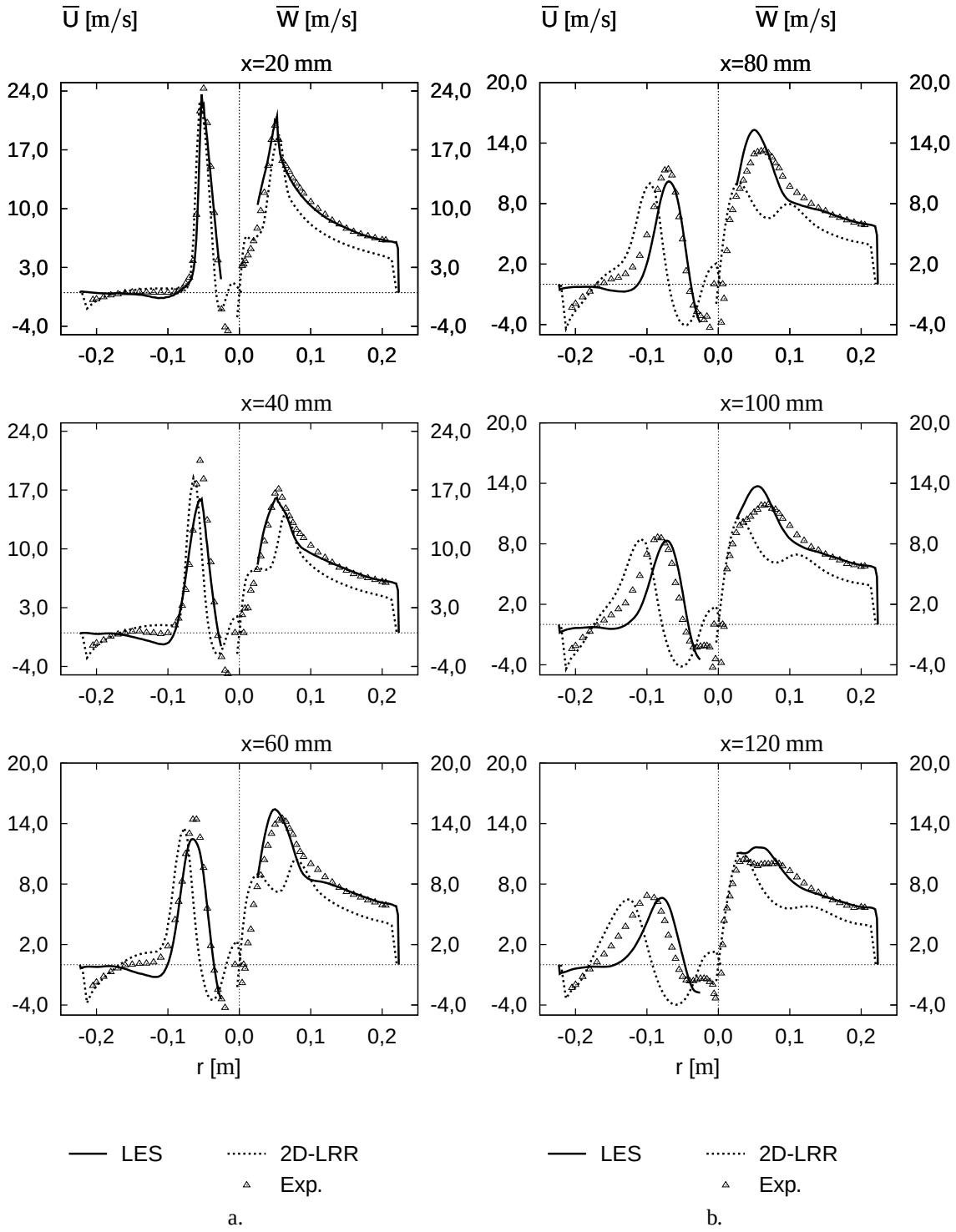


Bild 5.18. Vergleich mit Experiment von Holzäpfel und zweidimensionaler RANS; Zyklon. Radiale Geschwindigkeitsverteilung $\overline{U}$ und $\overline{W}$ an axialen Positionen x=20 bis 120 mm.

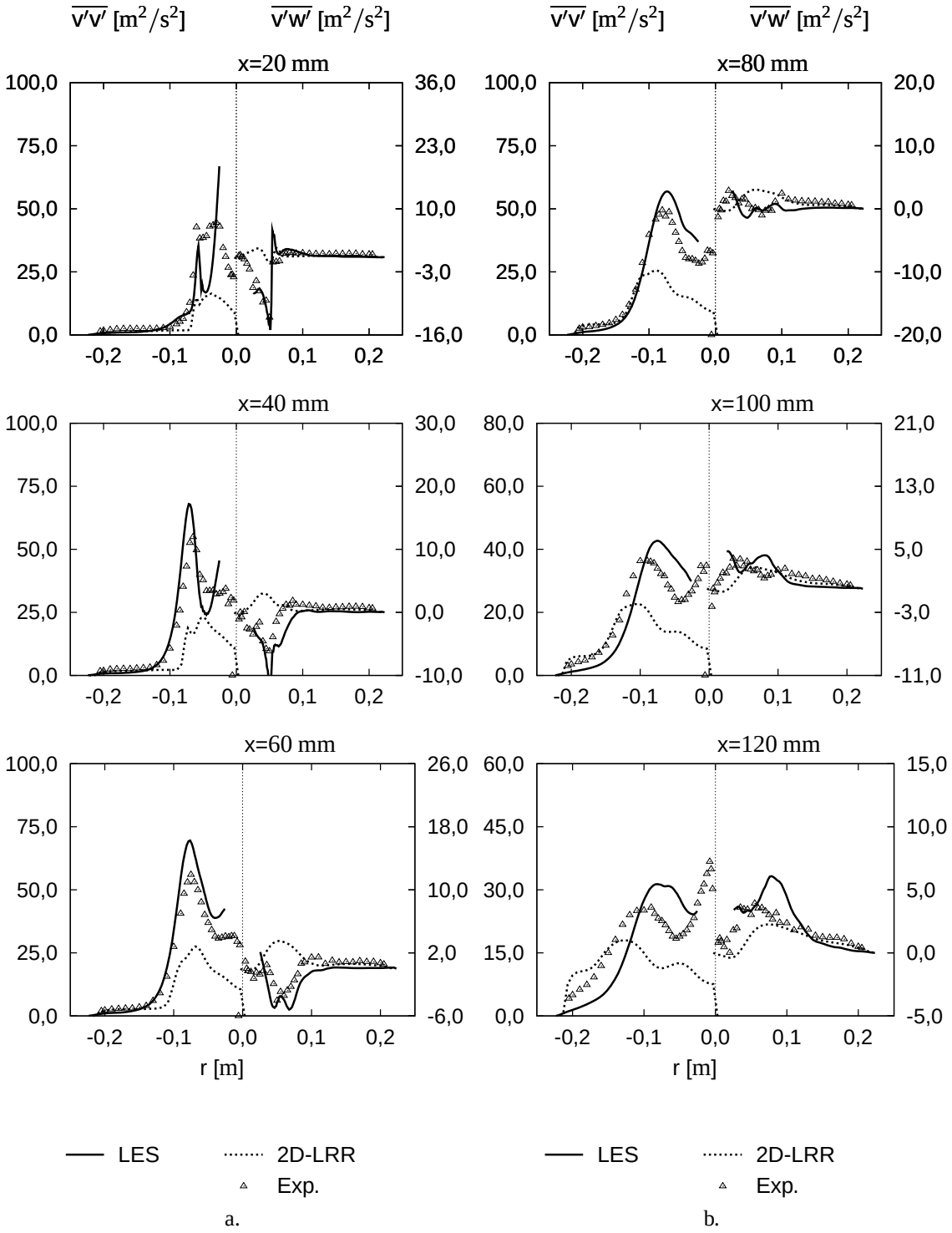


Bild 5.19. Vergleich mit Experiment von Holzäpfel und zweidimensionaler RANS; Zyklon. Radiale Spannungsverteilung $\overline{v'v'}$ und $\overline{v'w'}$ an axialen Positionen x=20 bis 120 mm.

5.5 Diffusive Anteile der Transportgleichung der Reynolds'schen Spannungen

Zu Beginn einer Analyse der modellierten Teilterme der exakten Transportgleichung für die Reynolds'schen Spannungen sollen die diffusiven Anteile $\mathscr{D}_{ij}^{t}$ und $\mathscr{D}_{ij}^{p}$ in Gleichung (2.19) betrachtet werden. Der Anteil aufgrund molekularer Effekte $\mathscr{D}_{ij}^{\nu}$ wird wegen des vernachlässigbaren Einflusses bei großen Reynoldszahlen außer acht gelassen. Für die Diffusion aufgrund der turbulenten Fluktuationsbewegung existieren Modellansätze unterschiedlicher Genauigkeit, wobei bereits im voraus angemerkt werden muß, daß wegen des wachsenden Einflusses eingehender Gradienten der Reynolds'schen Spannungen (Momente zweiter Ordnung) ein direkter Vergleich lediglich mit dem isotropen Ansatz (vgl. Gleichung (2.25)) aus Abschnitt 2.4.3 gezeigt wird. Die Ergebnisse des Modells wurden dabei kubisch interpoliert, um die Fluktuationen aus der Gradientenbildung wenigstens zu dämpfen (die Interpolation wirkt hier vergleichbar einem Tiefpaßfilter). Folglich können zwar Tendenzen extrahiert werden, eine quantitative Aussage ist nicht ableitbar. Das Modell von Daly und Harlow (DH) ist nicht nur wegen der fehlenden Galilei-Invarianz und des numerisch instabilen Verhaltens als problematisch zu betrachten. Es resultieren zudem bereits beim Einsetzen der Eingangsgrößen große Fluktuationen, die um ein vielfaches stärker sind, als beim isotropen Ansatz, da hier je Komponente *drei* Gradienten einfließen. Auf eine Angabe der Ergebnisse wird somit verzichtet. Wegen der fehlenden Modellansätze für $\mathscr{D}_{ij}^{p}$ in nicht wandnahen Bereichen erfolgt dessen Darstellung im Vergleich zu den entsprechenden Komponenten der Druck-Scher-Korrelation Φ_{ij}. Aussagen bzgl. der Größenordnung und der allgemeinen Annahme eines minderen Einflusses auf die Transportgleichung der Reynolds'schen Spannungen sind so ableitbar. In Übereinstimmung mit dem Auftreten der Tripelkorrelationen in Gleichung (2.19) sind die Größen mit *negativem* Vorzeichen dargestellt. Die folgenden Abschnitte zeigen exemplarische Ergebnisse dieses direkten Vergleichs, ein Gesamtüberblick befindet sich in den Anhängen F.1 und F.2.

5.5.1 Vergleich der Tripelkorrelationen

Bild 5.20 zeigt die Komponenten $-\overline{w'w'u'}$ und $-\overline{w'w'v'}$ im Vergleich zum Ergebnis des isotropen Modellansatzes nach Gleichung (2.25). Auffällig erscheint hier auf den ersten Blick, daß das Modell generell ein zu geringes Niveau der Korrelation vorhersagt. Zudem kann das Maximum in keiner der gezeigten axialen Positionen zwischen x=20 mm und 120 mm vom Modell abgebildet werden. Zieht man die bisher erarbeiteten Schlüsse bzgl. der Intermittenz in Betracht, so läßt sich dies anschaulich erklären. Während die Reynolds'sche Spannung $\overline{w'w'}$ per Definition stets positive Werte annimmt, zeigen sich in der Analyse der Wahrscheinlichkeitsdichten (vgl. Abschnitt 5.3.3) für die fluktuierenden Geschwindigkeiten u' und v' signifikante Häufungen im negativen Bereich, die auch im Mittel der Dreifachkorrelation zu erkennen sind. In der hier gewählten Darstellung mit negativem Vorzeichen resultieren entsprechende Maxima (im positiven Wertebereich), die vom symmetrischen Gradientenansatz nicht erfaßt werden können. In Abschnitt 2.4.1 abgeleitete Schlüsse bestätigen sich in dem hier dargestellten Vergleich eindeutig. Eine durch Intermittenz beeinflußte Strömung mit ausgeprägten Schiefen in den Wahrscheinlichkeitsfunktionen der fluktuierenden Geschwindigkeit entzieht sich dem Gültigkeitsbereich symmetrisch formulierter Modelle.

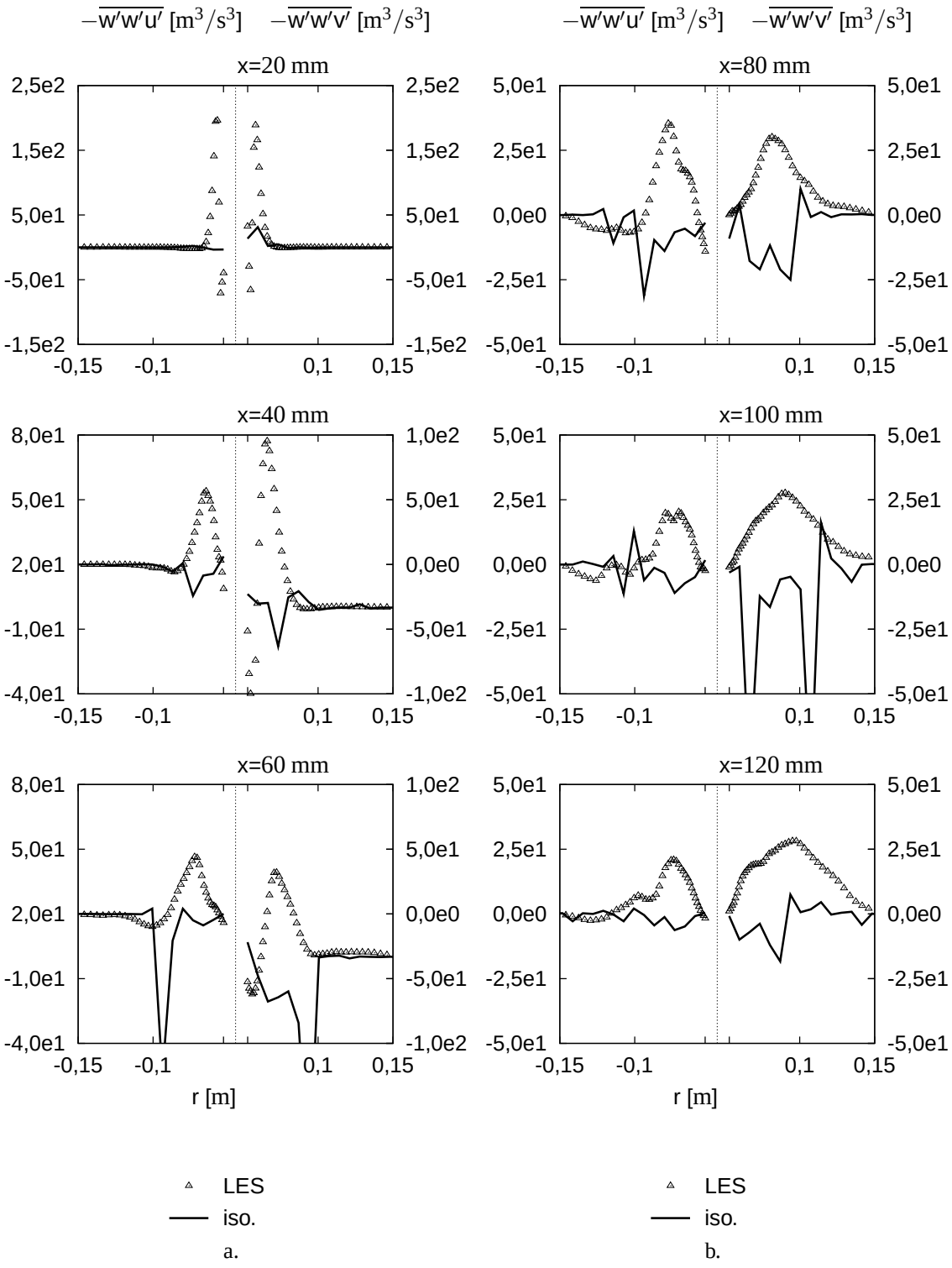


Bild 5.20. Vergleich des isotropen Modelansatzes mit LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen $-\overline{w'w'u'}$ und $-\overline{w'w'v'}$ an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. Die Ergebnisse des isotropen Modells sind kubisch interpoliert.

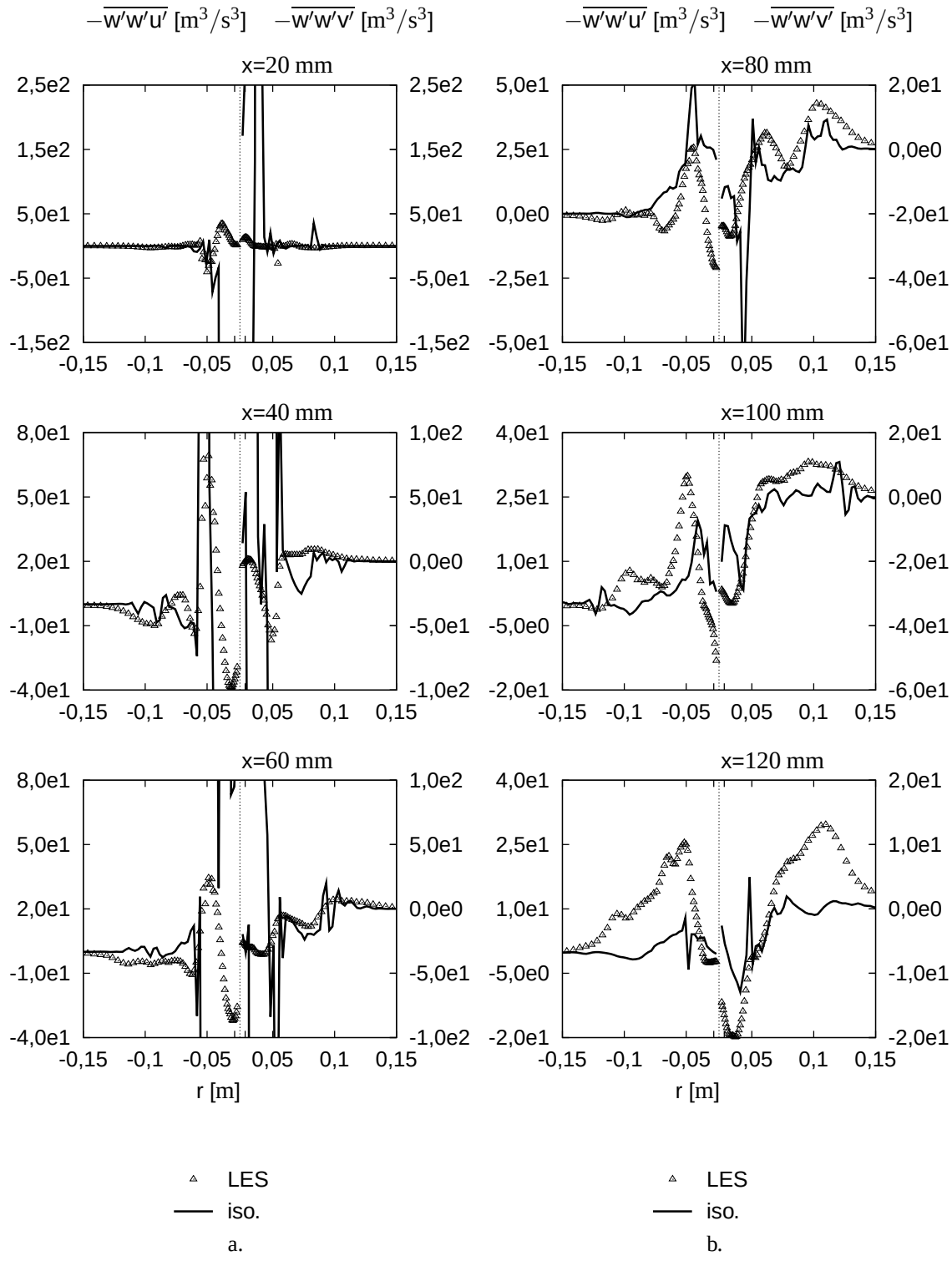


Bild 5.21. Vergleich des isotropen Modelansatzes mit LES-Daten; Zyklon. Radiale Verteilung der Größen $-\overline{w'w'u'}$ und $-\overline{w'w'v'}$ an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. Die Ergebnisse des isotropen Modells sind kubisch interpoliert.

Zusätzlich unterstützt wird diese Hypothese von den der eingeschlossenen Drallströmung entnommenen Ergebnissen identischer Größen (Bild 5.21). Zwar sind diese besonders im Nahfeld des Brennerauslasses auch nach erfolgter Interpolation noch immer von starken Fluktuationen geprägt, eine dem Freistrahl vergleichbare Abweichung zwischen Grobstrukturergebnis und Modellvorhersage ist aber nicht erkennbar. Mit Ausnahme der axialen Position bei x=120 mm zeigt das Modell eine gute Übereinstimmung mit den Mittelwerten aus der Grobstruktursimulation. Grund für diese Differenz ist ein mit zunehmendem Einfluß der inneren Rezirkulationszone leichter Versatz der Wahrscheinlichkeitsdichten von u' und v' hin zu negativen Werten (vgl. Anhang B.3 und B.4).

Die dargestellten Ergebnisse zeigen trotz der beinhalteten numerischen Instabilität eindeutig eine starke Korrelation mit den Wahrscheinlichkeitsdichten der einzelnen Geschwindigkeitsfluktuationen. Sind Häufungen der Fluktuationen im negativen Wertebereich gegeben, wie dies bei der freien Strömung bereits im Brennernahbereich der Fall ist, so ist eine Abbildung des radialen Verlaufs der Tripelkorrelationen durch einen symmetrischen Modellansatz nur fehlerhaft möglich. Beim Fehlen solcher Häufungen sind die Modellvorhersagen hingegen in guter Übereinstimmung mit den Daten der Grobstruktursimulation. Diese Charakteristik ist dabei unabhängig von der numerischen Schwingung aus der Gradientenbildung für den Modellansatz zu betrachten, da auch im Fall der eingeschlossenen Strömung, die weitaus stärker von diesen Instabilitäten geprägt ist, Abweichungen zwischen Modell und Grobstruktursimulation in eben jenen Bereichen mit einer hohen Wahrscheinlichkeit für negative Fluktuationen erkennbar sind.

Hieraus wird abgeleitet, daß einer der Versagensgründe der Reynolds'schen Spannungsmodelle bei Auftreten von Intermittenz der Modellierung des turbulenten Diffusionsanteils $\mathscr{D}_{ij}^t$ zugeordnet werden kann. Dabei ist die rein symmetrische Modellcharakteristik dafür verantwortlich, daß signifikante Schiefen von Wahrscheinlichkeitsdichten des Realfalles nicht betrachtet werden und so auch das Modell diese Eigenschaften nicht abzubilden vermag. Der Grund ist also in den eigentlichen Modellannahmen zu finden und *nicht* in der Formulierung des darauf aufbauenden Modells. Es bleibt weiterhin fraglich, ob selbst eine korrekte Formulierung der Diffusion im Stande wäre, drallverstärkte Intermittenz adäquat zu beschreiben. Da die Schiefe der Wahrscheinlichkeitsdichten aus einem *nicht* lokalen Zusammenhang resultiert, sich die Modelle aber i. allg. lokaler Größen bedienen (Einpunktstatistik), ist dies unmittelbar nicht zu erwarten.

5.5.2 Größenordnung der Diffusion infolge der Druckschwankungen

In den in dieser Arbeit diskutierten Modellen wird der Anteil der Diffusion infolge von Druckschwankungen $\mathscr{D}_{ij}^p$ nicht explizit betrachtet, sondern vielmehr dem Modell der turbulenten Diffusion $\mathscr{D}_{ij}^t$ zugeschlagen. Dies begründet sich in der allg. Annahme, daß der Anteil in nicht wandgebundenen Strömungssituationen vernachlässigbar klein oder wenigstens von untergeordneter Größenordnung im Vergleich zur turbulenten Diffusion anzusehen ist (Jakirlić, 1997). Vorhandene Modellansätze für diesen Diffusionsterm sind dabei meist implizit und als Funktion der wandgebundenen Koordinaten in „low-" Reynolds-Spannungsmodellen beinhaltet (z.B. Launder und Tselepidakis (1993) (zit. in Jakirlić, 1997)) und folglich in Gebieten fern von fes-

ten Wänden wirkungslos[7]. Ein exemplarischer Vergleich der Anteile von $\mathscr{D}_{vv}^{p}$ und $\mathscr{D}_{vw}^{p}$ mit den entsprechenden Komponenten von Φ_{ij} an drei axialen Positionen soll über die Gültigkeit der angesprochenen Annahme eines geringen Einflusses Aufschluß geben. Anhang G.1 und G.2 bietet einen Überblick über alle Größen und alle Meßpositionen bis x=120 mm stromab des Brennerauslasses.

In Bild 5.22.a und Bild 5.22.b ist leicht erkennbar, daß die Größenordnung von $\mathscr{D}^{p}$ und Φ auch weitab fester Wände im Bereich der äußeren Scherschicht sowohl für die freie als auch die eingeschlossene Strömung weitestgehend identisch ist. Dies wurde bereits aus Bild 2.5 in Abschnitt 2.4.3 deutlich. Die dreidimensionale Drallströmung wird also von der räumlich wirkenden Druckschwankung bzgl. aller Fluktuationskomponenten beeinflußt. Die Strömung mit ihrem charakteristischen „entrainment“ sowie der Ausbildung von Rezirkulationszonen besitzt offensichtlich im weitesten Sinne ähnliche Eigenschaften wie eine zweidimensionale wandgebundene (Kanal- oder Plattenströmung), in der $\mathscr{D}_{ij}^{p}$ *nicht* von untergeordneter Bedeutung ist.

Auf Basis des gezeigten Vergleichs läßt sich ableiten, daß die allg. Annahme eines geringen Einflusses der Diffusion infolge der Druckschwankungen auf die Transportgleichung der Reynolds'schen Spannungen im Falle einer verdrallten Strömung *nicht* zutreffend ist. Für weitere Modellentwicklungen ist dieser Aspekt zu beachten und entsprechend in die Modellierung mit aufzunehmen. Dabei sollte die strikte Trennung von Π_{ij} in die Summanden Φ_{ij} und $\mathscr{D}_{ij}^{p}$ erhalten bleiben, um die Spurfreiheit des Umverteilungsprozesses beizubehalten.

7 Im Druck-Scher-Modell von Launder und Tselepidakis ist also in wandnahen Gebieten effektiv die Summe von Φ_{ij} und $\mathscr{D}_{ij}^{p}$ modelliert, es gilt hier: $\Pi_{ij} = \Phi_{ij} + \mathscr{D}_{ij}^{p}$ (vgl. Gleichung (2.20)).

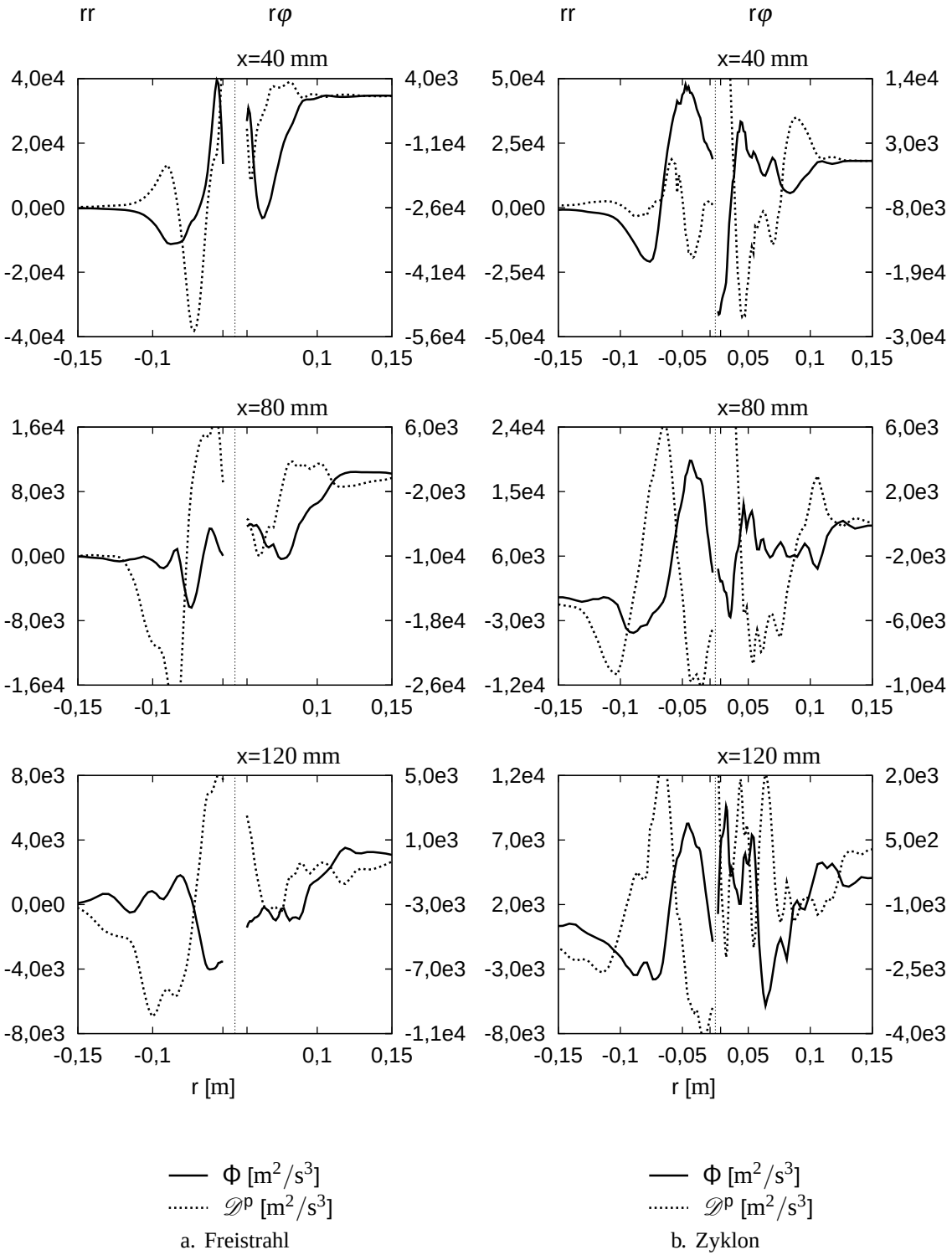


Bild 5.22. Vergleich der Größenordnung der LES-Ergebnisse von Φ und $\mathscr{D}^p$; Freistrahl und Zyklon. Radiale Verteilung der Komponenten *vv* und *ww* an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

5.6 Vergleich der Druck-Scher-Korrelation mit den Modellansätzen von Launder et al. und Speziale et al.

Ausgehend von den bis zu dieser Stelle gewonnenen Erkenntnissen über die generierten Ensemble-Mittel soll im folgenden ein direkter Vergleich der Komponenten des Druck-Scher-Terms Φ_{ij} aus der Grobstruktursimulation mit Modellansätzen im Nahbereich der Strömung durchgeführt werden. Die Einschränkung des Bereichs geschieht analog vorangegangener Abschnitte aus Gründen der statistischen Stationarität. Die Modellvergleiche basieren sowohl auf dem vereinfachten linearen Ansatz nach Launder et al. (1975) (LRR) als auch dem quadratischen nach Speziale et al. (1991) (SSG). Als Eingangsgrößen für die Bestimmung der Modellterme dienen die in Tabelle 5.3 aufgeführten Ensemble-Mittel aus der Grobstruktursimulation mit Ausnahme der skalaren Dissipation, welche nach Gleichung (5.3) bestimmt wurde.

Bilder 5.23 bis 5.24 zeigen ausgewählte Komponenten an den erwähnten axialen Positionen für den Freistrahl. Die Ergebnisse aller Größen sind in Anhang H.1 zu finden. Zunächst zeigt sich allgemein, daß der quadratische SSG-Ansatz im Vergleich zum linearen Modell ausnahmslos höhere Werte der Tensorkomponenten vorhersagt. Dies begründet sich sowohl in den verschiedenen Modellkoeffizienten[8] als auch im Einfluß der beim Ansatz nach Speziale et al. zusätzlich einfließenden Terme. Im direkten Vergleich mit den Grobstrukturdaten sind sie durchgehend schlechter zu bewerten als jene des LRR-Modells. Im Nahbereich bis etwa x=60 mm stromab des Brennermundes werden die LES-Daten der axialen Normalkomponente Φ_{uu} vom linearen Ansatz recht gut getroffen, im weiter stromab liegenden Bereich sind grundlegende Charakteristika der Profile ebenfalls wiedergegeben, wenn auch radial etwas in Richtung der Rotationsachse verschoben. Bezüglich Φ_{vv} zeigt sich ein vergleichbares Bild. Auffällig ist allerdings, daß lokal (vgl. Bild 5.23.b bei x=80 mm und 100 mm) ein entgegengesetztes Vorzeichen der Modelle resultiert. Betrachtet man die tangentiale Komponente, so ist dies im unmittelbaren Nahbereich des Brenners signifikant ersichtlich. Bis einschließlich x=60 mm axialem Abstand sind die Ergebnisse der Grobstruktursimulation durchgehend negativ, während beide Modelle positive Werte vorhersagen. Erst im entferntesten Schnitt sind die Vorzeichen über das gesamte Profil identisch, im dazwischen liegenden Bereich resultieren aus der LES wenigstens teilweise positive Werte, die Größenordnung liegt allerdings weit unterhalb der Modellergebnisse.

Desweiteren sehr auffällig in diesem Vergleich ist die radial-tangentiale Komponente Φ_{vw}. Analog der Normalkomponenten sind die Vorhersagen des quadratischen Ansatzes zu hoch, das LRR-Modell repräsentiert die LES-Daten vergleichsweise besser, wenn auch durchgehend mit zu hohen Vorhersagewerten. Eine Abbildung einer im Bereich des Strahlrandes befindlichen Ausbuchtung des Profilverlaufs (siehe Bild 5.24.a zwischen x=40 mm und 80 mm) wird allerdings weder vom linearen noch vom quadratischen Ansatz erreicht. Dieses Charateristikum ist noch stärker bei der axial-radialen Komponente Φ_{uv} (vgl. Bild H.2.a und H.2.b). Ein Vergleich der Komponente Φ_{uw} läßt keine bemerkenswerten Eigenschaften erkennen, beide Modelle ergeben ähnliche Vorhersagen, die allgemein im betrachteten Bereich gut mit den Ensemble-Mittelwerten in Übereinkunft zu bringen sind.

8 Die in der Literatur verwendeten alternativen Darstellungen des modellierten Tensors Φ_{ij} lassen sich ineinander überführen (vgl. Anhang M). Der vereinfachte Ansatz von Launder et al. mit nur zwei Koeffizienten läßt sich folglich auch in der Formulierung von Speziale et al. ausdrücken (mit dann drei Koeffzienten und unter Vernachlässigung quadratischer Terme), was die Identifikation von für das Ergebnis relevanten Termen erleichtert.

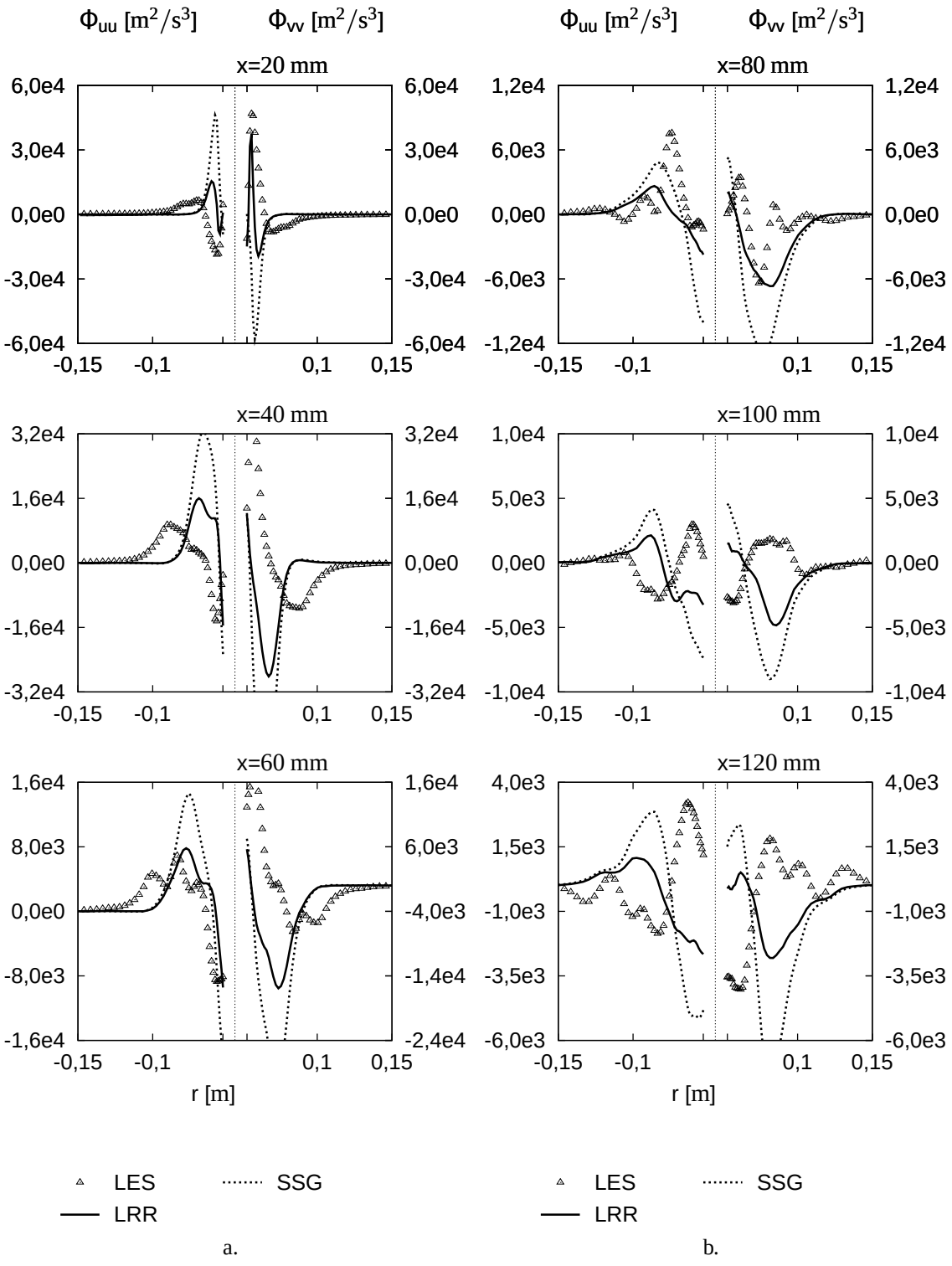


Bild 5.23. Vergleich der Modellansätze von Launder et al. und Speziale et al. mit LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen Φ_{uu} und Φ_{vv} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

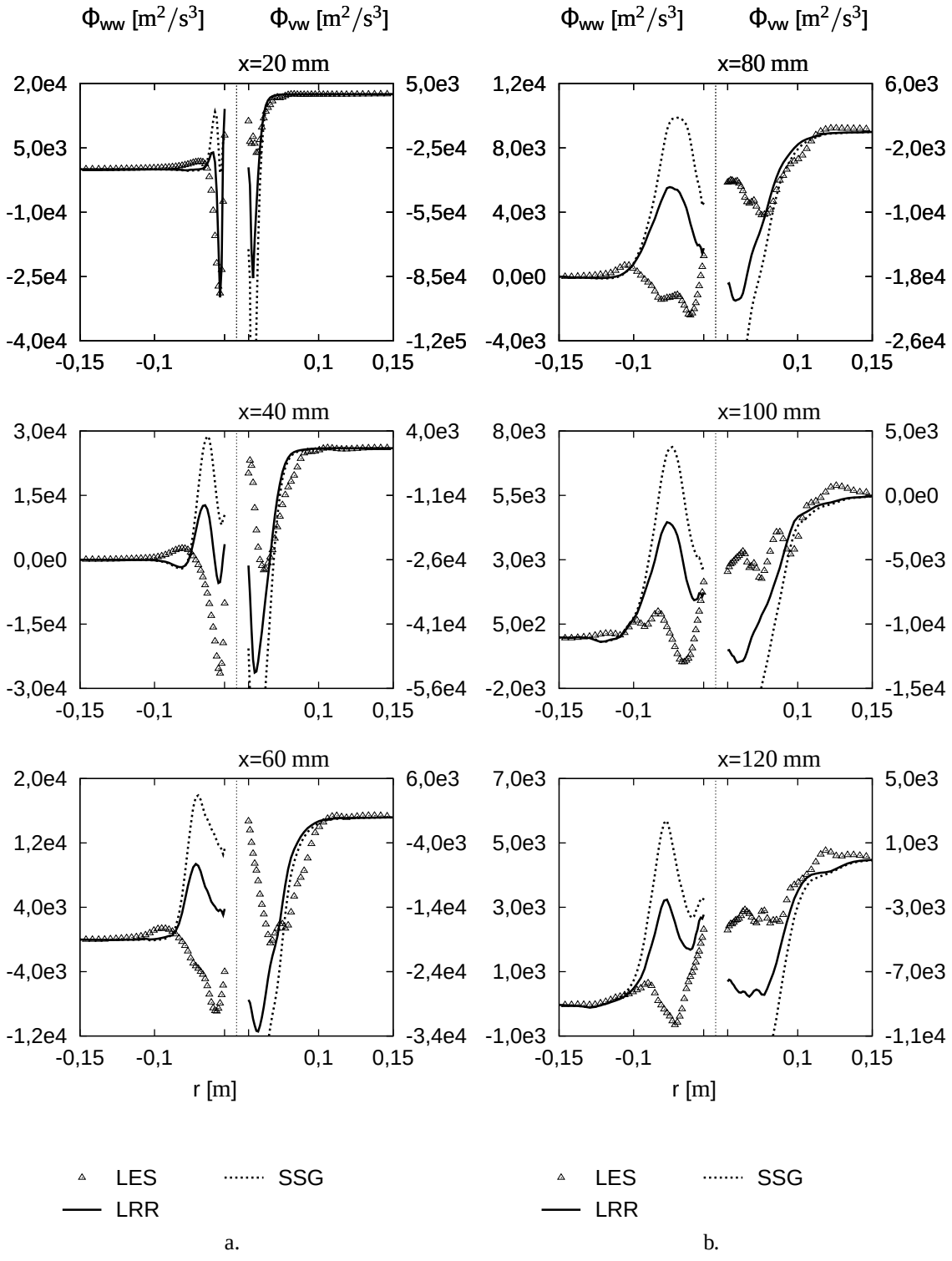


Bild 5.24. Vergleich der Modellansätze von Launder et al. und Speziale et al. mit LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen Φ_{ww} und Φ_{vw} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

Analog zum Drallfreistrahl sind in Bild 5.25 bis 5.26 exemplarische Ergebnisse für die eingeschlossene Strömung dargestellt. Die gesamten Vergleichsergebnisse in graphischer Darstellung befinden sich in Anhang H.2.

Die axialen und radialen Normalkomponenten Φ_{uu} und Φ_{vv} sind von den Modellansätzen im allgemeinen gut abgebildet, wobei lokal zu hohe Maximalbeträge des SSG-Ansatzes auffallen. Grundlegende Charakteristika sind durch beide Modelle repräsentiert, es zeigen sich augenscheinlich keine bemerkenswerten Eigenschaften wie, im Falle der freien Strömung vorhandene, entgegengesetzte Vorzeichen von LES- und Modellprofil. Einzig im Verlauf von Φ_{ww} (Bild 5.25.b) fällt im äußersten Nahbereich des Brennerauslasses ein solch umgekehrtes Vorzeichen auf. Zuvor beschriebene Ausbuchtungen im radialen Profilverlauf sind beim eingeschlossenen Drallstrahl ebenfalls nur im Nachbereich bis einschließlich x=40 mm erkennbar. Abweichungen zwischen Grobstrukturergebnis und Modellvorhersage im inneren Bereich (vgl. Bild 5.26.b) sind auf die starke Rezirkulationszone im eingeschlossenen Fall zurückführbar. Dieser Bereich, wie auch der äußerste Nahbereich in Wandnähe, beinhalten eine dem Freistrahl vergleichbare Charakteristik, da auch hier instabile Situationen denkbar sind, die ein Eindringen von Fluidballen in den Hauptstrahl verursachen können (Holzäpfel et al., 2002).

Es wird aus den Vergleichen von LES-Daten und Modellansatz beider betrachteter Strömungsfälle gefolgert, daß sich das Auftreten drallverstärkter Intermittenz in signifikanten Charakteristika der radialen Profilverläufe einzelner Komponenten des Druck-Scher-Korrelationstensors Φ_{ij} widerspiegelt. Zum einen zeigen sich in der tangentialen Normalenrichtung entgegengesetzte Vorzeichen, andererseits ist im Verlauf der Φ_{uv}- und Φ_{vw}-Profile eine Ausbuchtung erkennbar, die einen bedeutenden Einfluß auf die entsprechenden Komponenten des Spannungstensors bereits bei größeren Radien indiziert, aber von keinem der beiden Modellansätze abgebildet werden kann. Im folgenden soll die Wirkweise dieser Charakteristika an einem, der Simulation entnommenen Spannungszustand, genauer untersucht werden. Aus dem Vergleich der theoretisch durch die Modelle vorhergesagten Wirkung der Druck-Scher-Tensorkomponenten und jener der Ensemble-Mittel ergeben sich weitere Aussagen bzgl. der vorhandenen Defizite.

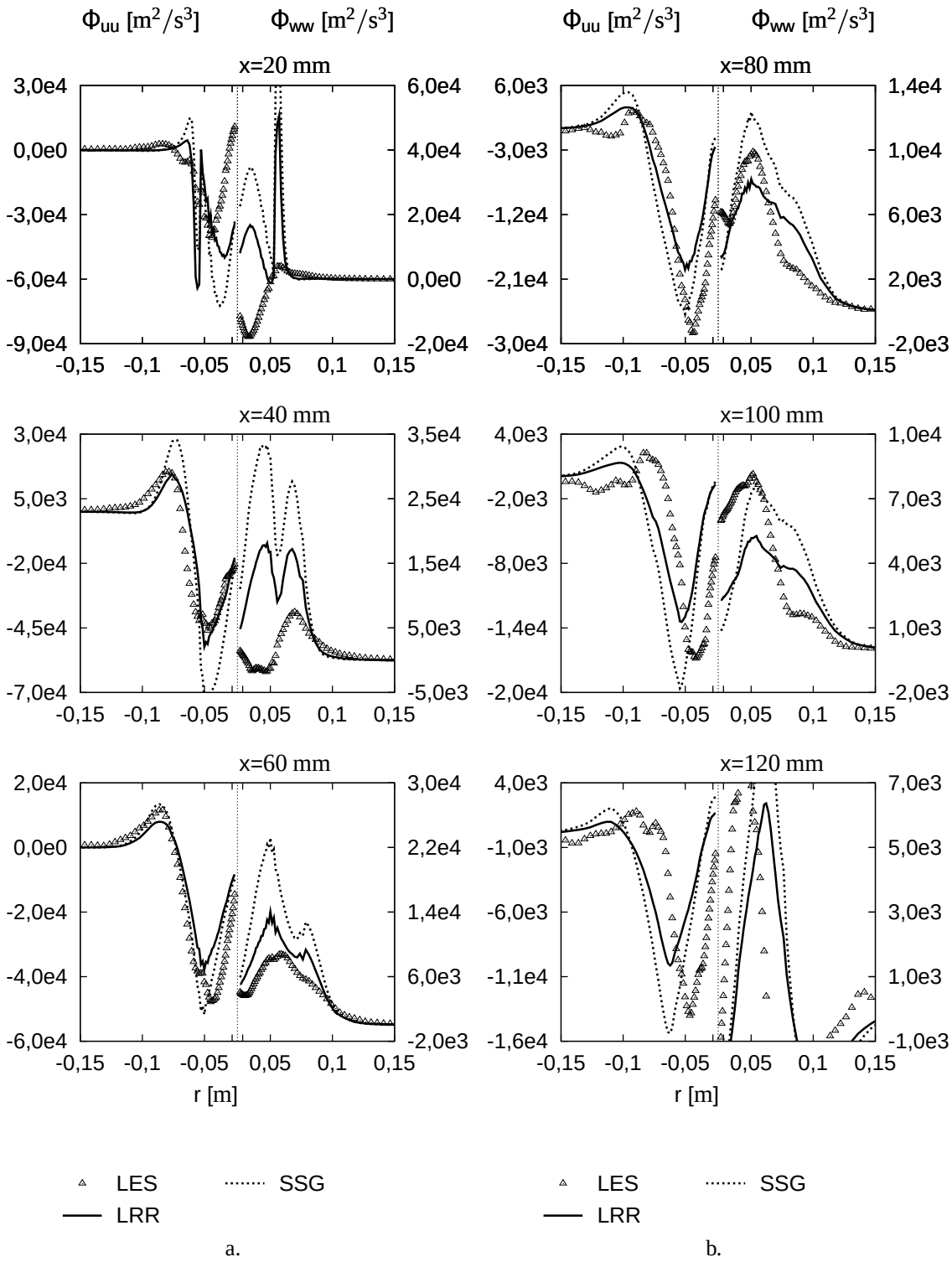


Bild 5.25. Vergleich der Modellansätze von Launder et al. und Speziale et al. mit LES-Daten; Zyklon. Radiale Verteilung der Größen Φ_{uu} und Φ_{ww} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

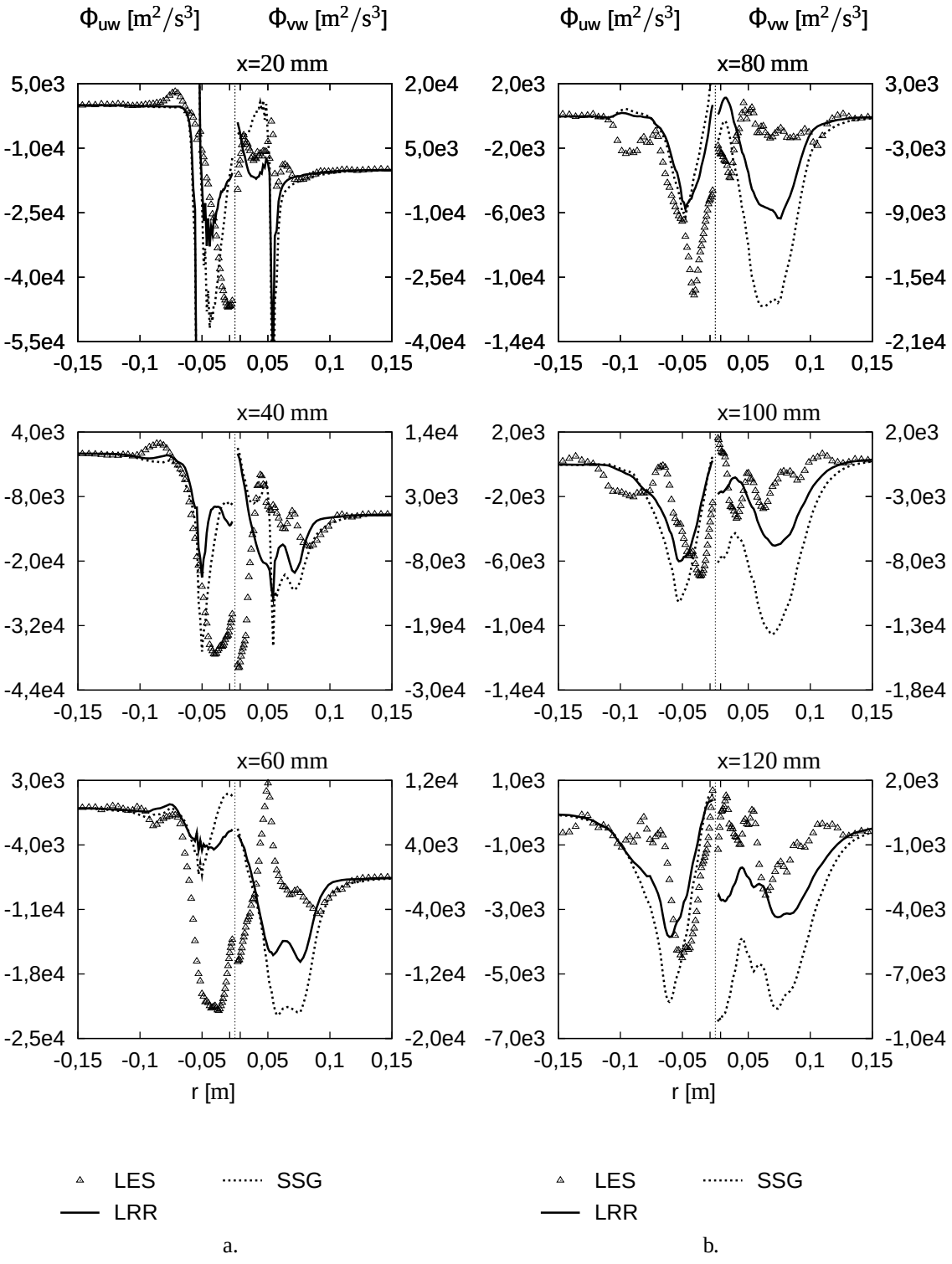
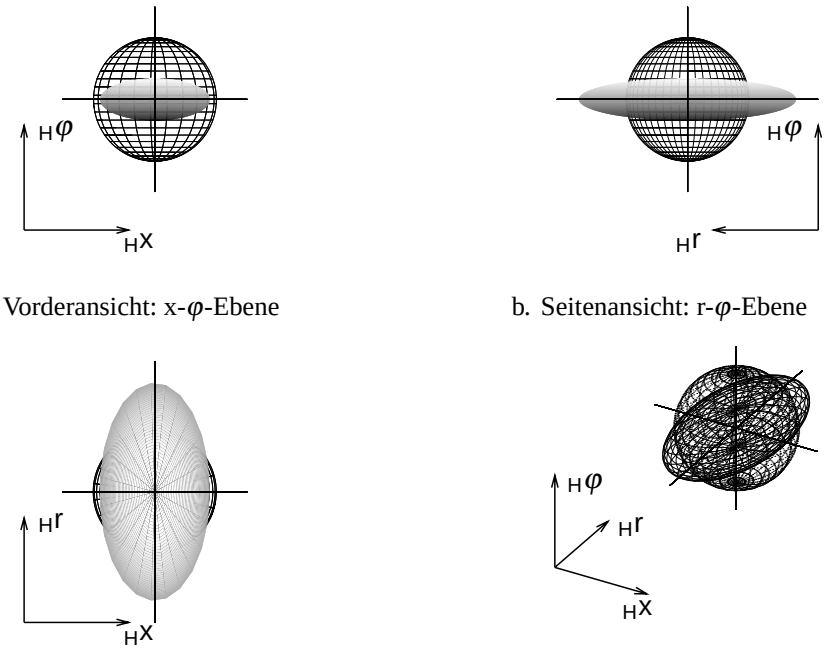


Bild 5.26. Vergleich der Modellansätze von Launder et al. und Speziale et al. mit LES-Daten; Zyklon. Radiale Verteilung der Größen Φ_{uw} und Φ_{vw} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

5.7 Wirkung der Intermittenz auf die Druck-Scher-Korrelation

Die Wirkweise der Intermittenz auf die Druck-Scher-Korrelation Φ_{ij} soll im folgenden detailliert beleuchtet werden. Hierfür wird zunächst an einem der freien Drallströmung entnommenen (anisotropen) Spannungszustand die der Modelltheorie zugrunde liegende Wirkweise ohne jegliche Intermittenzen dargestellt. Der gewählte Spannungszustand entspricht dem an der Position x=40 mm und r=75 mm und ist in seiner räumlichen Lage sowie als Projektion in alle drei Raumebenen in Bild 5.27 gezeigt. Die zusätzlich abgebildete Kugel dient dabei der Visualisierung des isotropen Spannungszustandes. Zur Vereinfachung der Darstellung wird das Spannungsellipsoid dabei in das Hauptachsensystem (Index *H*) transformiert, die Achsabschnitte entsprechen somit den Eigenwerten des Tensors (Bronstein et al., 1999). Folglich sind nur Aussagen für die Spurelemente (Diagonal-, Hauptspannungselemente) des Tensors zu treffen, da alle Schubspannungen im Hauptachsensystem verschwinden. Ohnehin ist der reale Zustand gegenüber dem Hauptachsensystem nur geringfügig verdreht[9].



a. Vorderansicht: x-φ-Ebene

b. Seitenansicht: r-φ-Ebene

c. Draufsicht: x-r-Ebene

d. Darstellung im $\mathbb{R}^3$

Bild 5.27. Spannungsellipsoid im Vergleich zum isotropen Zustand; Freistrahl. Die dargestellte Spannung entspricht dem Zustand an der Position x=40 mm und r=75 mm, transformiert in das Hauptachsensystem.

9 Mit $\overline{u_i' u_j'} = \begin{pmatrix} 21,97 & -2,94 & 0,70 \\ \ddots & 41,60 & 5,45 \\ \ddots & \ddots & 9,30 \end{pmatrix}$ und dem transformierten Tensor ${}_H\overline{u_i' u_j'} = \begin{pmatrix} 21,70 & 0,0 & 0,0 \\ \ddots & 42,85 & 0,0 \\ \ddots & \ddots & 8,30 \end{pmatrix}$ ergeben sich nach erster Abschätzung (5.6) Verdrehwinkel von weniger als 5°(Zahlenwerte in $[m^2/s^2]$).

Der Tensor Φ_{ij} überführt durch eine Umverteilung innerhalb der einzelnen Spannungskomponenten einen ursprünglich anisotropen Zustand in einen gleichverteilten (isotropen). Mit anderen Worten: der Tensor verteilt eine „Ungleichheit“ solange, bis sie nicht mehr gegeben ist. Φ_{ij} läßt sich folglich vereinfacht als Funktion der Anisotropie auffassen[10], $\Phi_{ij} = f(b_{ij}) \sim -(\overline{u_i' u_j'} - 2/3k)$, aus der für Spannungen kleiner dem isotropen Grenzfall positive Werte folgen, für solche größer $2/3k$ resultieren negative. Diese Wirkung entspricht dabei dem in Abschnitt 2.4.2 beschriebenen Gedankenexperiment von Rotta. Entsprechend dem Vorzeichen ist der Druck-Scher-Term als Quelle („+“) bzw. als Senke („-“) in der Transportgleichung der jeweiligen Spannung zu verstehen. Die Quelle führt im Falle einer, relativ betrachtet, zu geringen Spannung zu einer Vergrößerung der Komponente, die Senke ist in entgegengesetzter Weise tätig. Bildlich gesprochen wird das Spannungsellipsoid so gestaucht bzw. gestreckt, daß letztlich eine Kugel entsteht. Zum leichteren Verständnis folgender Ausführungen seien an dieser Stelle nochmals die Ergebnisse des Vergleichs von Ensemble-Mittel und Modellvorhersage für den Freistrahl graphisch dargestellt, allerdings nur die des linearen Ansatzes von Launder et al..

Betrachtet man die Projektion des Ellipsoiden und der isotropen Kugel in der x-r-Ebene (Bild 5.27.c) und folgt den eben getroffenen Überlegungen, so muß Φ_{uu} als Quelle wirken, da der vorhandene Achsabschnitt kleiner als der des isotropen Zustandes ist. Für die $\overline{v'v'}$-Spannung gilt das Gegenteil, Φ_{vv} ist eine Senke. Die tangentiale Normalspannung $\overline{w'w'}$ ist im gezeigten Fall kleiner als im isotropen Zustand, Φ_{ww} wirkt als Quelle (vgl. Bild 5.27.a und 5.27.b). Laut obigen Ausführungen wird das Ellipsoid in r-Richtung gestaucht sowie in x- und besonders in φ-Richtung gestreckt. Bild 5.28.a und 5.29.a zeigen bei der hier zugrunde liegenden Position (x=40 mm, r=75 mm) bzgl. der Modellvorhersagen exakt diese Tendenzen, für die x- und φ-Richtung resultiert eine Quelle während für die radiale Richtungen eine Senke in der Transportgleichung auftritt. Das Ergebnis ist dabei nicht überraschend, da sich die untersuchten Modelle auf die Grundlagen von Rotta stützen.

Die aus der Simulation gewonnenen Profile hingegen bestätigen die Wirkweise lediglich für die axiale Normalspannung $\overline{u'u'}$: Φ_{uu}^{LES} ist größer Null. Φ_{vv}^{LES} weist an dieser Stelle einen Nulldurchgang auf (und ist somit wirkungslos) und Φ_{ww}^{LES} besitzt entgegen der Modellvorhersage *negative* Werte. Das Ellipsoid wird in x-Richtung zwar gestreckt, in radialer Richtung, in der die größte Anisotropie vorliegt, ist quasi kein Einfluß gegeben und in Umfangsrichtung wird der Grad der Abweichung sogar noch vergrößert. Dieses Verhalten ist im gesamten Bereich bis etwa $1D$ axialem Abstand vom Brennermund erkennbar (Bild 5.28.a bis 5.29.b), wobei ab einem Wert x=80 mm auch in der Φ_{uu}-Komponente ein entgegengesetztes Vorzeichen bei LES-Ergebnis und Modellvorhersage erkennbar ist, unabhängig vom verwendeten Ansatz. Die Ausbuchtungen in den Profilverläufen der Nebendiagonalelemente des Φ-Tensors resultieren aus der erhöhten Differenz der eingehenden Hauptrichtungen I, J, K des Tensors. Winkler und Aurich (1984) folgend gilt bei einer Drehung um *eine* Hauptachse:

$$\Phi_{ij} \sim (\Phi_{ii}^{I} - \Phi_{jj}^{J}) \sin(2\chi) \quad \forall \quad i \neq j \tag{5.6}$$

mit dem Winkel χ zwischen Normal- und Hauptrichtung des Tensors. Die hochgestellten Indizes beziehen sich dabei auf die Hauptrichtung. Für die im Realfall vorhandene Drehung um *drei* Achsen sind entsprechend alle Drehwinkel χ, ψ, ω zu beachten.

10 Dies gilt uneingeschränkt im Falle fehlender Geschwindigkeitsgradienten (vgl. Gleichung (M.11) (Rotta, 1951a)).

Das offensichtlich nicht der dem Modell zugrundeliegenden Theorie folgende Ergebnis muß dabei in unmittelbarem Zusammenhang mit der drallverstärkten Intermittenz stehen, da ja, wie in Abschnitt 5.6 dargestellt, im Falle der eingeschlossenen Strömung der Vergleich von Modellansatz und LES-Ergebnis zufriedenstellende Übereinstimmungen liefert. Charakteristika der Verbundwahrscheinlichkeiten sollen deshalb zur Klärung des Einflusses der Intermittenz auf die Druck-Scher-Korrelation dienen.

Die in Abschnitt 5.3.3 eingehend diskutierten Wahrscheinlichkeitsverteilungen zeigen, als Folge des Einrollens von Fluidballen der Umgebung, eine ausgeprägte Schiefe der Wahrscheinlichkeitsdichten von v' und w', die mit Annäherung an die Rotationsachse abnimmt. Konkret bedeutet dies eine erhöhte Wahrscheinlichkeit von negativen Fluktuationen („Impulsdefizit“), sowohl der radialen als auch der tangentialen. Diese eingerollten Elemente kommen direkt aus der Umgebung und besetzen die durch ausgeschleuderte Fluidballen der Hauptströmung freigewordenen Plätze. Unabhängig von diesem Effekt tritt beim Freistrahl, stets eine Wechselwirkung des Strahlmediums mit der Umgebung auf. Fluidelemente der ruhenden Umgebung werden mitgerissen („entrainment“), der Strahl weitet sich, es erfolgt ein Impulsaustausch zwischen den bzgl. Turbulenz und Drall grundverschiedenen Fluiden. Unter Beachtung der Definition des Druck-Scher-Korrelationstensors, $\Phi_{ij} = 2\,\overline{p'/\rho\, s'_{ij}}$ mit s'_{ij} dem fluktuierenden Schertensor, ist eine detaillierte Beschreibung der einzelnen Profilverläufe möglich. Abweichende Modellvorhersagen sind so ebenfalls erklärbar. Nimmt man für die folgende Beschreibung kleine Winkel im Zylinderkoordinatensystem an, so entspricht die radiale Koordinate „r“ dem „y“ im kartesischen System und „z“ entsprechend der Umfangsrichtung „φ“. Folgt man wiederum dem Gedankenexperiment von Rotta (1951a) zur Beschreibung der Druck-Scher-Korrelation (vgl. Abschnitt 2.4.2), in dem sich zwei turbulente Fluidballen mit einer definierten Schwankungsbewegung aufeinander zu bewegen und infolgedessen ein Druckmaximum zwischen beiden resultiert, kann die in der Definition der Druck-Scher-Korrelation enthaltene Druckfluktuation stets als positiv angenommen werden. Die Interpretation vereinfacht sich so. Folgende Absätze sollen für alle Tensorkomponenten Φ_{ij} unter Zuhilfenahme der Wahrscheinlichkeitsfunktionen die aus der Grobstruktursimulation erhaltenen Ergebnisse und Abweichungen der Modellansätze erklären.

Betrachtet man sich unter diesen Gesichtspunkten die Verläufe der axialen Normalkomponente des Tensors, $\Phi_{uu} = 2\overline{p'/\rho\, \partial u'/\partial x}$, so läßt sich die besonders in unmittelbarer Nähe des Brennerauslasses stark ausgeprägte Ausbuchtung des Profils am Strahlrand mit eben jenem Herausschleudern von hochturbulentem Fluid begründen (vgl. Bild 5.28.a, x=20 mm und x=40 mm). Turbulenter Axialimpuls wird an die Umgebung abgegeben, dem ruhenden Fluid Turbulenz aufgeprägt, in axialer Richtung resultiert ein positiver Gradient der u'-Fluktuation. Mit zunehmendem axialen Abstand wird dieser Austausch geringer, da der im Nahbereich sehr große Gradient der beiden Turbulenzniveaus von Strahl und Umgebung bereits weitestgehend abgebaut ist. Innerhalb des Strahls auftretende negative Werte sind unmittelbar durch den Impulsabbau zu erklären, der besonders in den Profilen ab x=80 mm deutlich erkennbare Anstieg des Profilverlaufs hin zu kleinen Radien begründet sich in der inneren Rezirkulationszone der Strömung. Die dem Vergleich zugrundeliegenden Modellansätze sind dabei nur ansatzweise in der Lage, diesen radialen Profilverlauf abzubilden, und dies auch nur in einem Bereich bis etwa 80 mm stromab des Flächensprungs. Ein, weiter stromab liegender Vorzeichenwechsel wird nicht wiedergegeben.

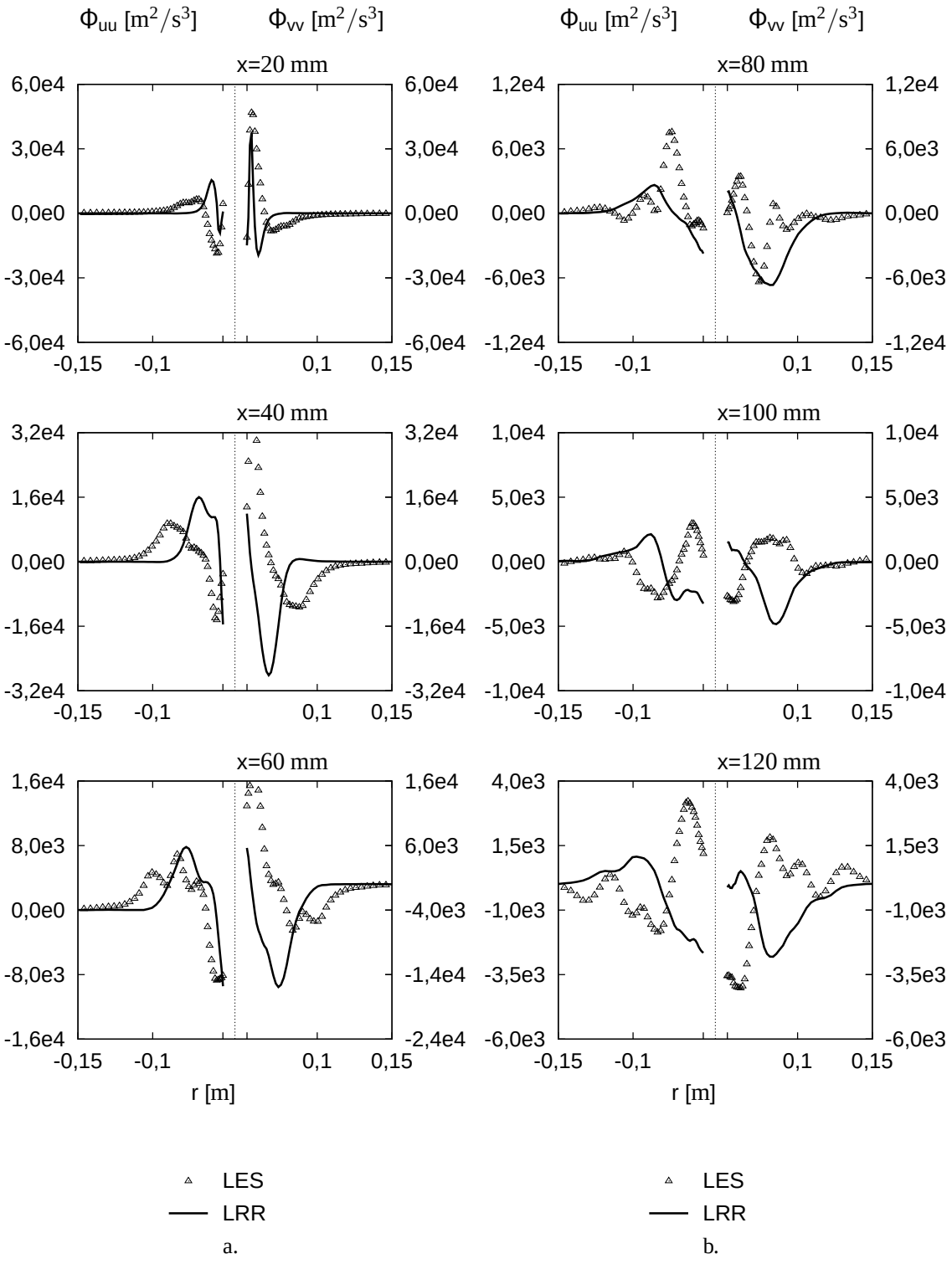


Bild 5.28. Vergleich des Modellansatzes von Launder et al. mit LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen Φ_{uu} und Φ_{vv} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

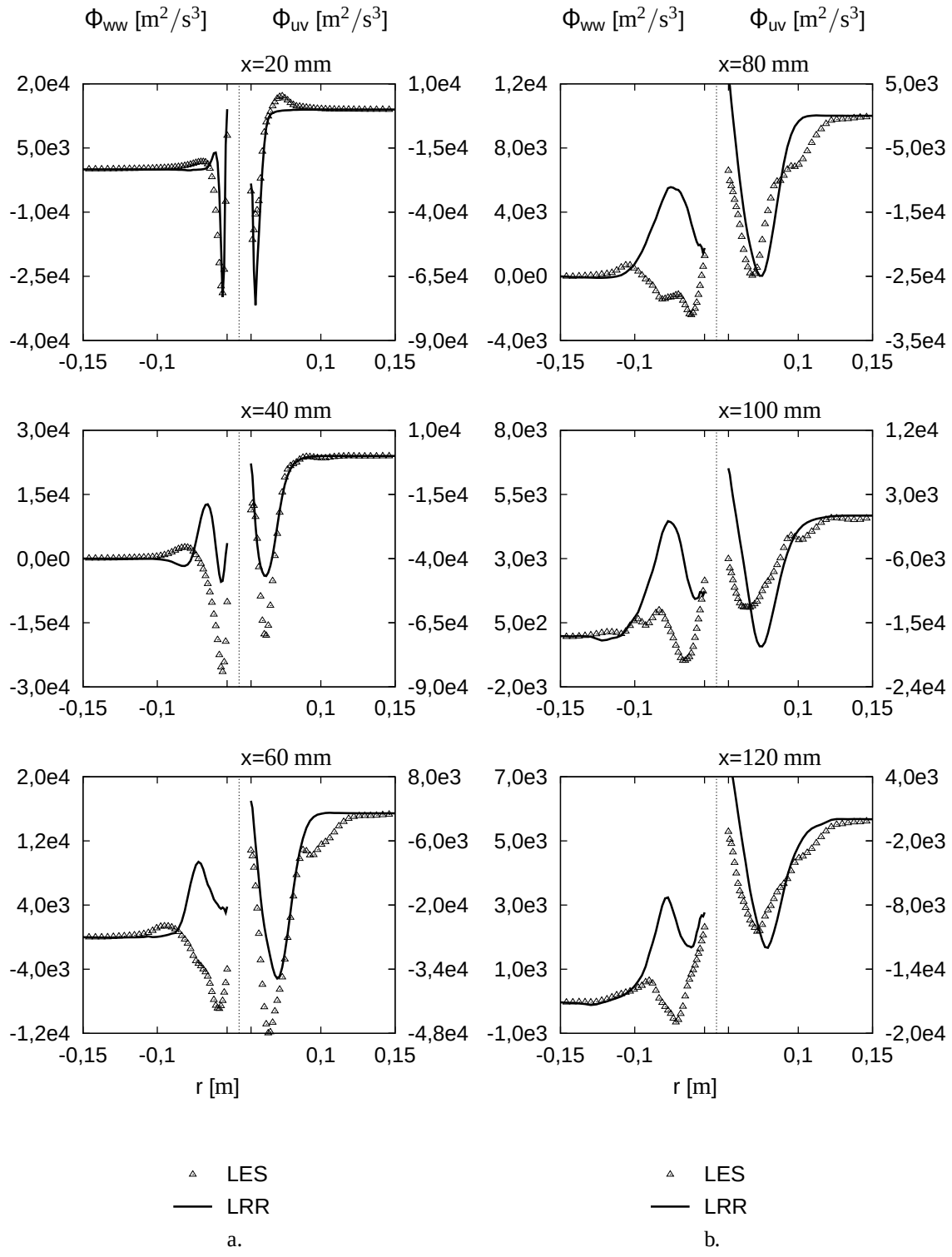


Bild 5.29. Vergleich des Modellansatzes von Launder et al. mit LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen Φ_{ww} und Φ_{uv} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

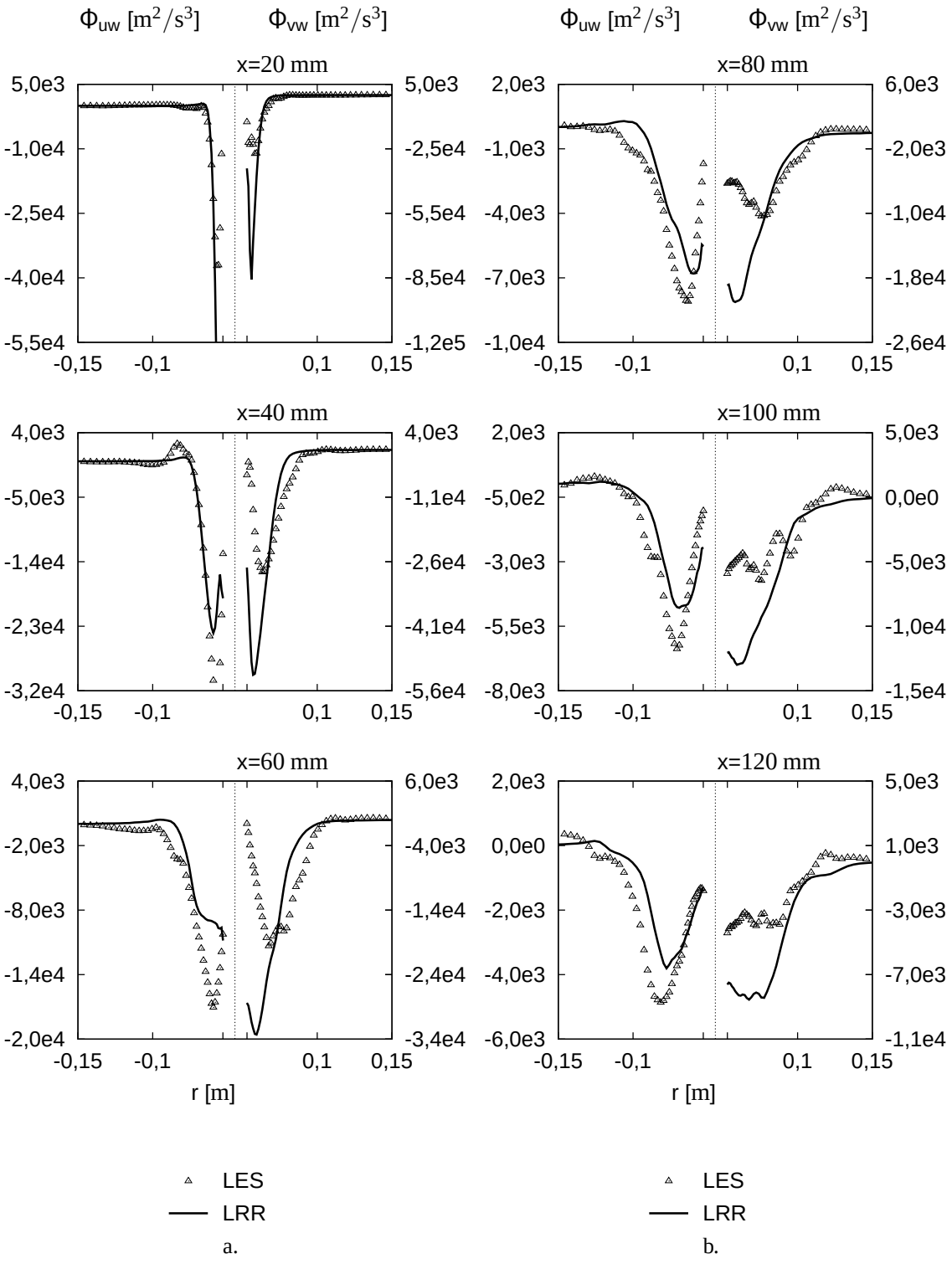


Bild 5.30. Vergleich des Modellansatzes von Launder et al. mit LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen Φ_{uw} und Φ_{vw} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

Die radiale Normalkomponente des Tensors $\Phi_{vv} = 2\overline{p'/\rho\,\partial v'/\partial y}$ zeigt bei geringen axialen Abständen vom Auslaß des Drallgenerators gleichfalls die Ausbuchtung in unmittelbarer Nähe des Strahlrandes. Wie schon bei der Diskussion der Wahrscheinlichkeitsfunktionen beschrieben, zeichnet sich die nach innen gerichtete Eindringbewegung durch eine Schiefe in den Verteilungsfunktionen aus, die mit zunehmender Tiefe (in radialer Sichtweise nach innen) abnimmt. Folglich resultiert im Mittel ein negativer Gradient von v'. Die bei kleineren Radien deutlich positiven Werte stehen in unmittelbarem Zusammenhang mit der radialen Aufweitung des Strahls (positive Radialgeschwindigkeit), wie teilweise auch vom Modellansatz korrekt wiedergegeben. Charakteristische Wechsel der Vorzeichen bleiben dem Modell aber ebenfalls unzugänglich.

Der Einfluß in den Hauptstrahl eindringender Fluidballen aus dem Umgebungsfluid ist am deutlichsten an der tangentialen Komponente ersichtlich, da hier eine klare Trennung von verdralltem Fluid des Freistrahls und unverdralltem der Umgebung gegeben ist (siehe Bild 5.29.a und 5.29.b). Für die Tensorkomponente gilt der Zusammenhang $\Phi_{ww} = 2\overline{p'/\rho\,\partial w'/\partial z}$. Ein tangential ausgeschleudertes Element aus dem Strahl gibt Drehimpuls an das in unmittelbarer Nähe des äußeren Randes befindliche Umgebungsfluid ab. Folglich ist in diesem Bereich ein positiver Gradient in z-Richtung zu erwarten und auch durch die Grobstrukturdaten abgebildet. Im nicht oder nur geringfügig von Intermittenz beeinflußten Bereich (unmittelbarer Nahbereich bei x=20 mm) ist im Strahlinneren aufgrund des tangentialen Geschwindigkeitsprofils mit negativen Gradienten zu rechnen, was auch durch die Modellvorhersage sehr gut wiedergegeben wird. Andererseits sind im Falle auftretender Intermittenz die eindringenden Ballen zunächst frei von Drall und nehmen erst im Laufe ihres (spiralförmigen) Weges in Richtung Rotationsachse Drehimpuls auf. Die Situation dreht sich im Vergleich zum Strahlrand um, der Gradient in z-Richtung wird negativ („Impulsverlust“). Dies ist in unmittelbarer Nähe des Strahleintritts in die beruhigte Umgebung am stärksten erkennbar, mit zunehmender Entfernung treten immer weniger drallfreie (drallreduzierte) Fluidelemente in den Strahl ein und der radiale Verlauf von Φ_{ww} wird entsprechend der Modellvorhersage positiv. Ein direkt mit dem Eindringen von drallfreiem Umgebungsfluid in den hochverdrallten Strahl in Zusammenhang stehender Impulsverlust ist somit der Grund für die erkennbaren *negativen* Werte von Φ_{ww} im Bereich x$\geq$40 mm. Das Versagen der Modelle bzgl. der Abbildung dieses Profilverlaufs ist dabei in direktem Zusammenhang mit ihrer Formulierung als rein symmetrische Funktion zu betrachten. Die in einer signifikanten Schiefe der Wahrscheinlichkeitsfunktionen erkennbare Eindringbewegung des Umgebungsfluids kann vom Modell *nicht* erfaßt werden.

Die beiden tangentialen Komponenten Φ_{uv} und Φ_{uw} sind von beiden Modellansätzen gut getroffen, was auf einen vernachlässigbar geringen Einfluß der Intermittenz schliessen läßt. Einzig die besonders bei Position x=40 mm und x=60 mm auffällige Ausbuchtung im Profilverlauf sei zu beachten. Wie bereits zuvor angesprochen ist dies einerseits rein mathematisch ersichtlich, da die Komponenten direkt mit der Differenz der Normalspannungen ihrer Wirkebene verbunden sind und diese mit unterschiedlichem Vorzeichen in die Differenz eingehen. Andererseits weisen die in $\Phi_{uv} = \overline{p'/\rho(\partial v'/\partial x + \partial u'/\partial y)}$ und $\Phi_{uw} = \overline{p'/\rho(\partial w'/\partial x + \partial u'/\partial z)}$ beinhalteten Gradienten nicht auf eine nennenswerte Beeinflussung durch die eindringenden Fluidballen hin. Die hohe Umfangsgeschwindigkeit und der in Folge resultierende schraubenförmige Weg des Umgebungsteilchens führt nicht zu einer nachhaltigen Beeinflussung der axialen Fluktuationen in radialer und tangentialer Richtung. Auch sind eben wegen der Steigung des Pfads in axialer Richtung nur marginale Wechselwirkungen zu erwarten.

Die bei Φ_{vw} erkennbare Ausbuchtung in Bild 5.30.a und 5.30.b folgt dem eben vorgestellen rein mathematischen Zusammenhang. Die im dargestellten Bereich bis einschließlich x=120 mm durchwegs (betragsmäßig) kleineren Werte der Ensemble-Mittel, im direkten Vergleich zu den Modellvorhersagen, weisen deutlich auf eine nachhaltige Beeinflussung der mittleren Turbulenzstruktur durch die eingerollten Fluidelemente hin. Offensichtlich wird eine Umverteilung dieser Komponente und folglich ein Abbau von Anisotropie stark gedämpft. Der spiralförmig in der y-z- bzw. r-φ-Ebene verlaufenden Pfad der Umgebungsballen steht im direkten Zusammenhang mit der Komponente Φ_{vw} des Umverteilungstensors. Aus der Wechselwirkung von Strahl und eindringendem Fluid, der einhergehenden Streckung und Scherung, sowie des turbulenten Impulsaustausches, folgt eine „Konservierung“ der Anisotropie. Dies zeigt sich auch in den entgegen der theoretischen Vorhersage vergrößerten Längenskalen im Bereich der äußeren Scherung (Tabelle 5.2 in Abschnitt 5.3.2).

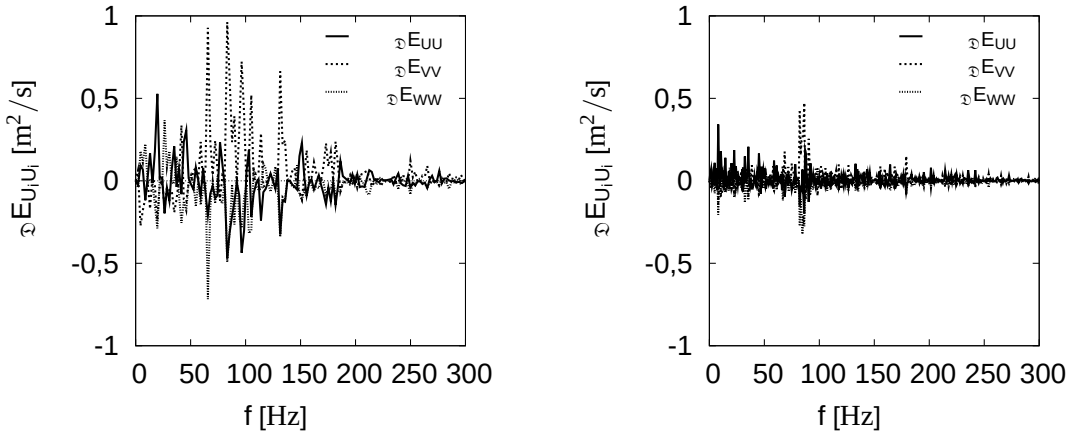
Es kann anhand grundlegender Charakteristika des freien, hochverdrallten Strahls eine Wirkung auf den Umverteilungstensor abgeleitet werden. Eine aufgrund des Einrollens von drallfreiem, wenig turbulentem Umgebungsfluid in den Hauptstrahl resultierende Wechselwirkung steht in direktem Zusammenhang mit einer im Vergleich zu den Modellvorhersagen abweichenden Turbulenzstruktur. Die Beeinflussung des Druck-Scher-Tensors ist dabei offensichtlich nicht nur lokal in der äußeren Scherschicht zu verzeichnen, sondern zeigt sich vielmehr noch weit innerhalb des Hauptstrahls und dies im gesamten betrachteten axialen Bereich bis etwa $1D$ nach dem Flächensprung.

Folgender Abschnitt soll an dieser Stelle einen weiteren Grund für das allgemeine Versagen der Modellansätze diskutieren.

5.7.1 Diskussion der allgemeinen Modellierungspraxis der Druck-Scher-Korrelation im Zusammenhang mit Intermittenz

Die in der Arbeit von Rotta (1951a) eingehend beschriebene Ableitung eines räumlichen Integrals über Geschwindigkeitskorrelationen an zwei versetzten Punkten im $\mathbb{R}^3$ zur Beschreibung der Druck-Scher-Korrelation bildet die Grundlage aller Modellierungsansätze. Eine Reduktion der Zweipunkt- auf eine Einpunktstatistik beinhaltet eine Approximation der räumlichen Zusammenhänge allein durch lokale Größen und ist deshalb von einer Reihe vereinfachender Annahmen gekennzeichnet (Ristorcelli et al., 1995). Grundvoraussetzung für die Gültigkeit dieser Annahmen ist u. a. eine *nicht* stark ausgeprägte Anisotropie der Energiespektren (die Längenmaße müssen in allen drei Raumrichtungen in ähnlicher Größenordnung liegen, da ansonsten die Annahme lokaler Homogenität nicht mehr getroffen werden kann) sowie ein nur kurzes Erinnerungsvermögen der Turbulenzstruktur mit einem auf das integrale Längenmaß beschränkten Einflußbereich. Die soeben gewonnenen Erkenntnisse bzgl. des Einflußbereichs der Intermittenz auf den Druck-Scher-Tensor aber lassen gerade diese Annahme fraglich erscheinen.

Bild 5.31 zeigt die Deviatoren der Energiespektren, $_{\mathfrak{D}}E_{U_iU_i} = E_{U_iU_i} - 1/3 \sum_{k=1}^{3} E_{U_kU_k}$, beispielhaft in einem Bereich, der im Falle der freien Drallströmung stark von der Intermittenz beeinflußt wird, im direkten Vergleich mit der vom Effekt unberührten eingeschlossenen Strömung. Es sind deutliche Abweichungen für den links dargestellten Drallfreistrahl zwischen 50 Hz und 150 Hz erkennbar, während der eingeschlossene Strahl mit Ausnahme eines recht schmalen Frequenz-



a. Freistrahl b. Zyklon

Bild 5.31. Deviatoren der Energiespektren bei x=100 mm und r=80 mm.

bandes zwischen etwa 80 Hz und 100 Hz kaum vom isotropen Zustand abweicht. Der beobachtete Frequenzbereich entspricht dabei in etwa den von Holzäpfel bestimmten charakteristischen Zeitmaßen der eingeschlossenen Fluidballen in diesem Bereich der Strömung von ca. 7 bis 12 ms (aus dem Frequenzband folgen 6,67 bis 20 ms).

Hieraus läßt sich direkt ableiten, daß die Annahme einer nur geringfügigen Anisotropie der Energiespektren besonders im stark von der Intermittenz beeinflußten Bereich nicht getroffen werden kann und lokale Homogenität nicht gegeben ist (die „Konservierung“ wirkt in einem weiteren Bereich als das turbulente Längenmaß). Je nach Größe und entsprechender Lebensdauer der eingerollten Ballen kommt es zu einer Beeinflussung der Strahlstruktur, die weitaus, im räumlichen Sinne, größer als das turbulente Längenmaß ist. Die dem Modellansatz zugrundeliegenden räumlichen Integrale sind also durchaus von zeitlichen Entwicklungen der Turbulenz beeinflußt, je nach Anzahl, Größe und Intensität der mitgeführten Umgebungselemente. Ist, wie im eingeschlossenen Fall, *keine* oder nur geringe Intermittenz zu verzeichnen, sind die Annahmen offensichtlich ohne Einschränkung zu treffen.

Beide, in vorliegender Arbeit untersuchten Modellansätze sind also nicht in der Lage, die Wirkung von Intermittenz in adäquater Weise zu beschreiben, wobei der Grund hierfür u. a. in der bereits im Grundlagenabschnitt 2.4.2 beschriebenen rein symmetrischen Formulierung zu finden ist, aber auch in der fälschlichen Annahme einer lokal homogenen Verteilung turbulenter Strukturen. Trotz der identifizierten Mängel der Ansätze bietet sich an dieser Stelle an, eine in der Vergangenheit häufig vorgeschlagene Variation der Koeffizienten des linearen Ansatzes (z.B. Gibson und Younis, 1986; Weber et al., 1990) genauer zu betrachten, da einerseits in den entsprechenden Publikationen durchaus eine Verbesserung der Vorhersagequalität erreicht werden konnte (wenn auch nicht im Zusammenhang mit Intermittenz), und andererseits daraus gewonnene Erkenntnisse in einen potentiellen Korrekturterm einfließen könnten. Eine Sensitivitätsanalyse soll Aufschluß darüber geben, ob die Auswirkungen der Intermittenz durch eine Variation der in der linearen Modellierung beinhalteten Koeffizienten „simulierbar“ sind. Phy-

sikalische Konsistenz dieser Variation ist durch ein aus empirischen Ergebnissen abgeleitetes Funktional gegeben.

5.8 Variation der Modellkonstanten des linearen Ansatzes

Auf Basis experimenteller Untersuchungen von Scherströmungen läßt sich eine lineare Funktion der beiden Koeffizienten C_1 und C_2 in Gleichung (2.22) definieren, es gilt nach Gibson und Younis (1986) folgender Zusammenhang: $f(C_1,C_2) = (1-C_2)/C_1 = 0,23$. Neben dem am häufigsten zur Anwendung kommenden Koeffizientenpaar $C_1 = 1,8$ und $C_2 = 0,6$ (Gibson und Launder, 1978), werden an dieser Stelle die Werte von Gibson und Younis (1986) (3,0 bzw. 0,3) sowie jene von Visser et al. (1987) (2,5 und 0,55) mit den Extrema der linearen Verknüpfung verglichen. Für $C_1 \to 0$ folgt $C_2 \to 1$ als Grenzwert, der die Anisotropie des Spannungstensors vollkommen außer Acht läßt. $C_2 \to 0$ und entsprechend $C_1 \to 4,35$ beinhaltet lediglich die Anisotropie eben des Spannungstensors und berücksichtigt nicht die sogenannte „Isotropisierung der Produktion“, die Anisotropie des Produktionstensors der Reynolds'schen Spannungen. Der angestellte Vergleich der aus der Koeffizientenvariation resultierenden Ergebnisse mit jenen der Grobstruktursimulation des Freistrahls ist in Bild 5.32 und 5.33 exemplarisch für ausgezeichnete Tensorkomponenten gegeben. Anhang I gibt einen Gesamtüberblick über die Ergebnisse sowohl für den Freistrahl als auch für die eingeschlossene Drallströmung.

Die in axialer Richtung wirkende Normalkomponente reagiert nur mäßig sensitiv auf die Variation der Konstanten. Charakteristische Verläufe werden von allen Konstantenpaaren wiedergegeben, lediglich der absolute Wert auftretender Extrema ist durch die Variation beeinflußt. Ein im Vergleich zum Ensemble-Mittel umgekehrtes Vorzeichen wird nicht erreicht (siehe Bild 5.32.a, x=20 mm). Gleiches gilt für die Φ_{vv}-Komponente. Betrachtet man hingegen die Verläufe von Φ_{ww} (Bild 5.32.a u. 5.32.b) und im Besonderen das Wertepaar $C_1 = 0,0$ und $C_2 = 1,0$ (lang strichpunktierte Linie), so ist mit dieser, von Spannungsanisotopie unabhängigen Modellbeschreibung, global die beste Abbildung des Ensemble-Mittels möglich. Die bei den Normalkomponenten zu beobachtenden Tendenzen spiegeln sich auch im Radialprofil von Φ_{uv} wider, die Konstanten nach Gibson und Launder (1,8 und 0,6) bilden hier die Ergebnisse der Grobstruktursimulation am besten ab. Die axial-tangentiale Tensorkomponente ist analog Φ_{ww} durch den rein von Produktion bestimmten Ansatz mit $C_1 = 0,0$ und $C_2 = 1,0$ mit Ausnahme des äußersten Nahbereichs nahezu perfekt beschrieben, im Falle von Φ_{vw} hingegen zeigt sich ein genau gegensätzliches Verhalten: hier liefert der Ansatz ohne Berücksichtigung von Anisotropie der Produktion (4,35 und 0,0) das im direkten Vergleich mit den Ensemble-Mitteln beste Resultat. Allgemein ist keine der untersuchten Kombinationen in der Lage, eine dem LES-Ergebnis vergleichbare Ausbuchtung in den Verläufen der Nebendiagonalelemente des Φ-Tensors zu reproduzieren. Zudem erscheint einerseits wegen der gegenläufigen Tendenzen sowie der, im vorangegangenen Abschnitt diskutierten, nur geringen Wirkung der Intermittenz auf diese axial-radiale und -tangentiale Komponente eine Modellvariation ohnehin wenig sinnvoll.

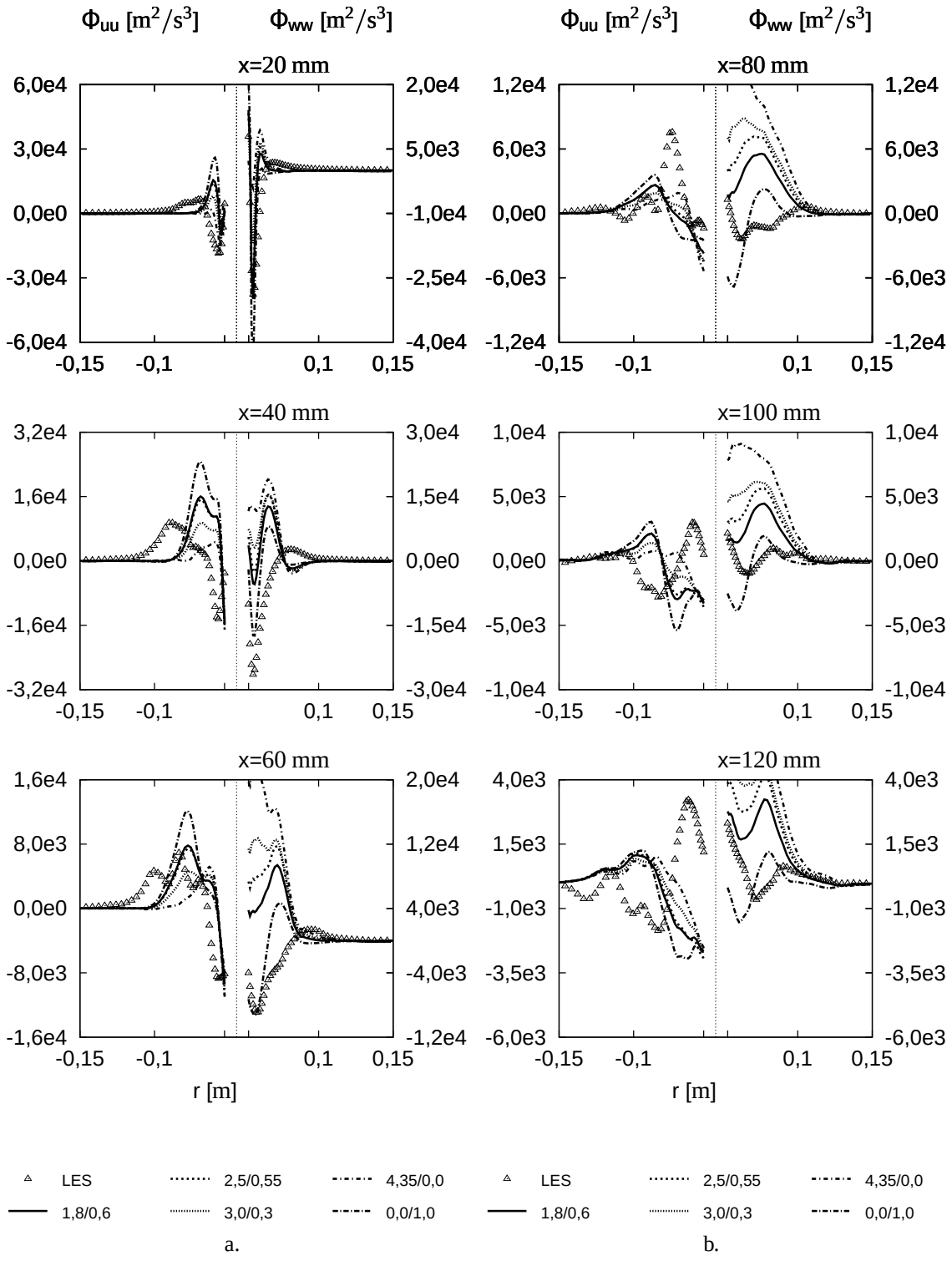


Bild 5.32. Variation der Modellkonstanten des linearen Modells im Vergleich mit den LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen Φ_{uu} und Φ_{ww} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. In der Legende sind jeweils C_1/C_2 gegeben.

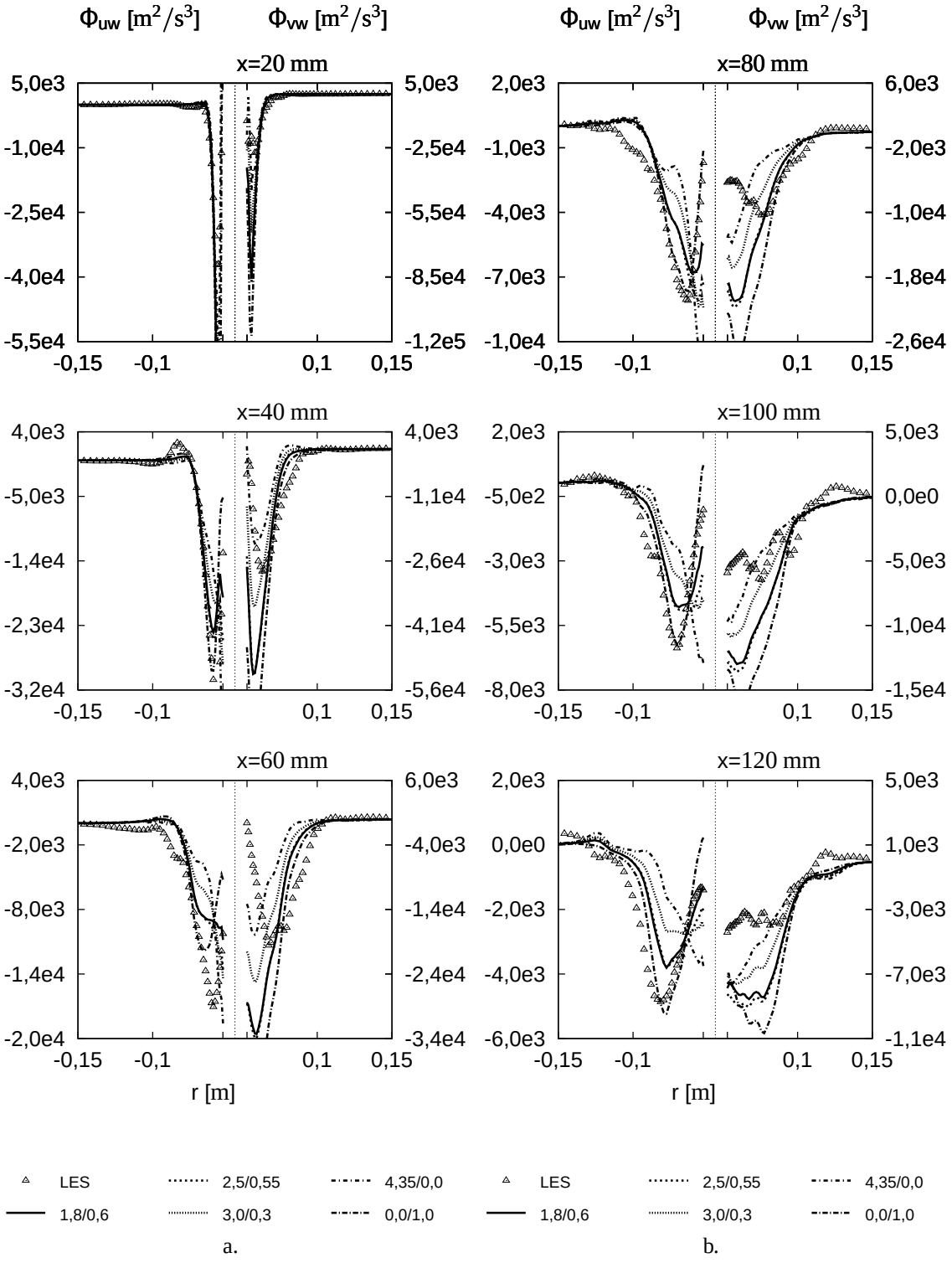


Bild 5.33. Variation der Modellkonstanten des linearen Modells im Vergleich mit den LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen Φ_{uw} und Φ_{vw} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. In der Legende sind jeweils C_1/C_2 gegeben.

Aus der Sensitivitätsanalyse läßt sich schlußfolgern, daß durch Verwendung alternativer Koeffizientenpaare zwar bei einzeln betrachteten Komponenten eine Verbesserung der Vorhersagequalität des linearen Modellansatzes möglich ist, es findet sich aber keine optimale Kombination, die für *alle* gleichzeitig zu dieser Verbesserung führt. Wegen des entgegengesetzten Verhaltens (vgl. u. a. Φ_{uw} und Φ_{vw} in Bild 5.33) führt der aus einer vergleichenden Betrachtung zu ziehende Kompromiß letztlich zum etablierten Ansatz von Gibson und Launder. Zwar scheint auf Grundlage dieser Erkenntnisse eine strömungsabhängige Variation von Konstanten *einzelner* Tensorkomponenten möglich, die steife numerische Kopplung und die zu erwartenden Instabilitäten während des iterativen Lösungsprozesses stellen die Anwendbarkeit aber stark in Frage. Eine numerisch robuste „Simulation“ der Intermittenz kann also durch eine simple Neuwichtung der beinhalteten Terme *nicht* erreicht werden.

Es wird daher gefolgert, daß der für den vorliegenden Fall einzig praktikable Weg in einem den Effekt beschreibenden, zusätzlichen Element im Gleichungssystem (Term oder ggf. Transportgleichung) liegen könnte, der durch einen die Intermittenz identifizierenden Parameter beschreibbar sein muß. Denkbar wäre beispielsweise eine Transportgleichung, deren Quelle in Entstehungsbereichen der Intermittenz wirkt und deren Senke (Dissipation) mit dem Auflösen der eingedrungenen Ballen im Hauptstrahl korreliert. Zwei mögliche Ansätze für eine den Bereich der Entstehung identifizierenden Parameter werden im folgenden Abschnitt diskutiert.

5.9 Parameter zur Identifikation von Intermittenz

Grundlage zur Darstellung und Ableitung von Korrelationsparametern des (normiertem) Druck-Scher-Tensors Φ_{ij} bildet eine Betrachtung im lokalen Strombahnsystem, wobei die Bildung der orthogonalen Koordinatenbasis der Überlegung folgt, daß in einem stationären Strömungszustand der gemittelte Geschwindigkeitsvektor $\underline{U}$ stets tangential zur Strombahn liegt. Normal zum Geschwindigkeitsvektor ist die Richtung der stärksten Krümmung mit Kenntnis der Zentripedalbeschleunigung bestimmbar und aus der Binormalen folgt die dritte Komponente der Basis (vgl. Meyberg und Vachenauer, 1997). Eine anschauliche Beschreibung des mathematischen Vorgehens bietet Hirsch in seiner Arbeit, Anwendungen finden sich bei Holzäpfel (2004, 2005).

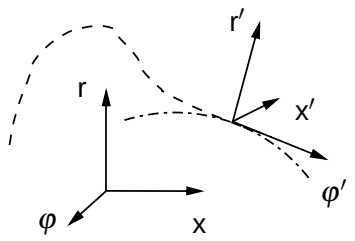


Bild 5.34. Relative Lage des Strombahnsystems.

Es bleibt jedoch zu erwähnen, daß diese Betrachtungsweise streng genommen nicht der Forderung nach Galilei-Invarianz genügen kann, da als Eingangsgröße die totale Beschleunigung dient (Piquet, 1999; Sagaut, 2001). Folglich kann für bewegte Systeme eine Allgemeingültigkeit *nicht* erreicht werden, im hier betrachteten Fall einer *ruhenden* Geometrie ist dies aber gegeben. Mit Kenntnis der Orthogonalbasis kann Φ_{ij} nach dem von Bronstein et al. beschriebenen Zusammenhang transformiert werden (vgl. Gleichung (K.2) in Anhang K). Dabei gilt (Bild 5.34):

$$x \rightarrow x', \quad r \rightarrow r' \quad \text{und} \quad \varphi \rightarrow \varphi',$$

mit φ' der tangentialen Richtung (der Strombahn), r' der hierzu normalen Richtung vom Krümmungsmittelpunkt entfernend und x' der Binormalen. Die Normierung erfolgt aus Dimensionsgründen mit der skalaren Disspiationsrate $\mathscr{D}\varepsilon$. Die Transformation in das lokale System führt zu

einer „natürlichen“ Sensitivität bzgl. der im zylindrischen Koordinatensystem definierten Gradienten. Entspricht also die lokale Strombahnkrümmung in etwa der radialen Richtung des globalen Systems, so fällt r' und r zusammen. Die Strombahn „sieht“ unmittelbar den Gradienten. Ist hingegen die Krümmung gering oder verschwindet sogar, so verschwindet auch die Sicht des Gradienten und somit sein Einfluß.

Als Vergleichsgröße dient zum einen ein auf die turbulente kinetische Energie bezogene „Störenergie“ formuliert auf Basis des radialen Totaldruckgradienten,

$$_{\mathfrak{R}}\frac{\partial P_{tot}}{\partial r} = \frac{1/\rho\,(\partial P_{tot}/\partial r)\,l_t}{k} = C_\mu^{3/4}\,\frac{k^{1/2}}{\rho\;_{\mathscr{P}}\varepsilon}\,\frac{\partial P_{tot}}{\partial r}, \tag{5.7}$$

wobei der Totaldruck dem Zusammenhang $P_{tot} = P + \rho/2\,|U|$ folgt und die Gleichung des turbulenten Längenmaßes $l_t = C_\mu^{3/4} k^{3/2}/{}_{\mathscr{P}}\varepsilon$ lautet. Der Parameter verknüpft die im Druck- *und* Geschwindigkeitsfeld beinhaltete Arbeit über ein typisches (turbulentes) Längemaß mit der Turbulenzenergie selbst. Ein instabiler Zustand wird demnach erst dann erreicht, wenn die Turbulenzenergie dem Druck- *und* Geschwindigkeitsfeld entgegen wirken kann.

Als weiterer Parameter dient eine von Philipp (1991) abgeleitete modifizierte Richardson-Zahl,

$$\mathrm{Ri_P} = 0,123\left(\frac{k}{_{\mathscr{P}}\varepsilon}\right)^2 \frac{\partial/\partial r\,[\rho\,(\overline{W}\,r)^2]}{\rho\,r^3}, \tag{5.8}$$

auf Basis des turbulenten Längenmaßes und des Stabilitätskriterium nach Rayleigh für Strömungen mit radialem Zirkulationsgradienten, ebenfalls im lokalen Koordinatensystem. Es ist dabei zu beachten, daß die radiale Druckverteilung in dieser Betrachtung nur *implizit* beinhaltet ist[11].

Die Ergebnisse dieser Betrachtung zeigt Bild 5.35 und 5.36 für Normalkomponenten des freien und eingeschlossenen Strahls, wobei die berechneten Größen wie in den vorangegangenen Abschnitten aus einem Bereich kleiner etwa 1,0 D stromab des Flächensprungs entnommen sind. Ein Vergleich aller Größen des normierten Druck-Scher-Tensors beider Fälle befindet sich in Anhang J.

Folgt man den Überlegungen aus Abschnitt 5.7 so ist unmittelbar einsichtig, daß die Intermittenz zu einem überwiegenden Anteil die Komponenten tangential (φ') und normal (r') *zur Strombahn* beeinflussen wird. Während bei den im Vergleich mit dem Totaldruckgradienten aufgetragenen Komponenten ${}^{\mathrm{s}}_{\mathfrak{R}}\Phi_{r'r'}$ und ${}^{\mathrm{s}}_{\mathfrak{R}}\Phi_{\varphi'\varphi'}$ neben einer erhöhten Häufigkeit in der Nähe des Ursprungs auch eine sich klar abzeichnende Anhäufung von Ereignissen mit negativen Werten von ${}_{\mathfrak{R}}\partial P_{tot}/\partial r$ zu erkennen ist, zeigt sich dies im Vergleichsbild von ${}^{\mathrm{s}}_{\mathfrak{R}}\Phi_{x'x'}$ nicht. Es existiert ein deutlich abgegrenzter Bereich, indem entgegen der Modellvorhersagen die Anisotropie in radialer Richtung verstärkt (der „Arm“ von ${}^{\mathrm{s}}_{\mathfrak{R}}\Phi_{r'r'}$ liegt im Bereich positiver Werte) und der in tangentialer vermindert wird (${}^{\mathrm{s}}_{\mathfrak{R}}\Phi_{\varphi'\varphi'}$ zeigt die Korrelation für Werte kleiner Null). Die Anisotropie wird somit nicht abgebaut, sondern besonders in Bereichen mit negativem Totaldruckgradienten verstärkt oder wenigstens konserviert. Vorhandene Intermittenzen sind dabei offensichtlich ausschlaggebend, da vergleichbare Korrelationen im Falle der eingeschlossenen Strömung nicht erkennbar sind (vgl. die rechten Spalten der Bilder 5.35 und 5.36). Auch im Vergleich mit der Richardsonzahl sind die beschriebenen Tendenzen zu sehen, wobei hier eine Trennung zweier Bereiche allerdings nicht gegeben ist.

11 Für den idealisierten Fall radial konstanter Zirkulation und ungestörtem radialen Druckfeld gilt: $\partial\overline{P}/\partial r \approx \rho\overline{W}^2/r$.

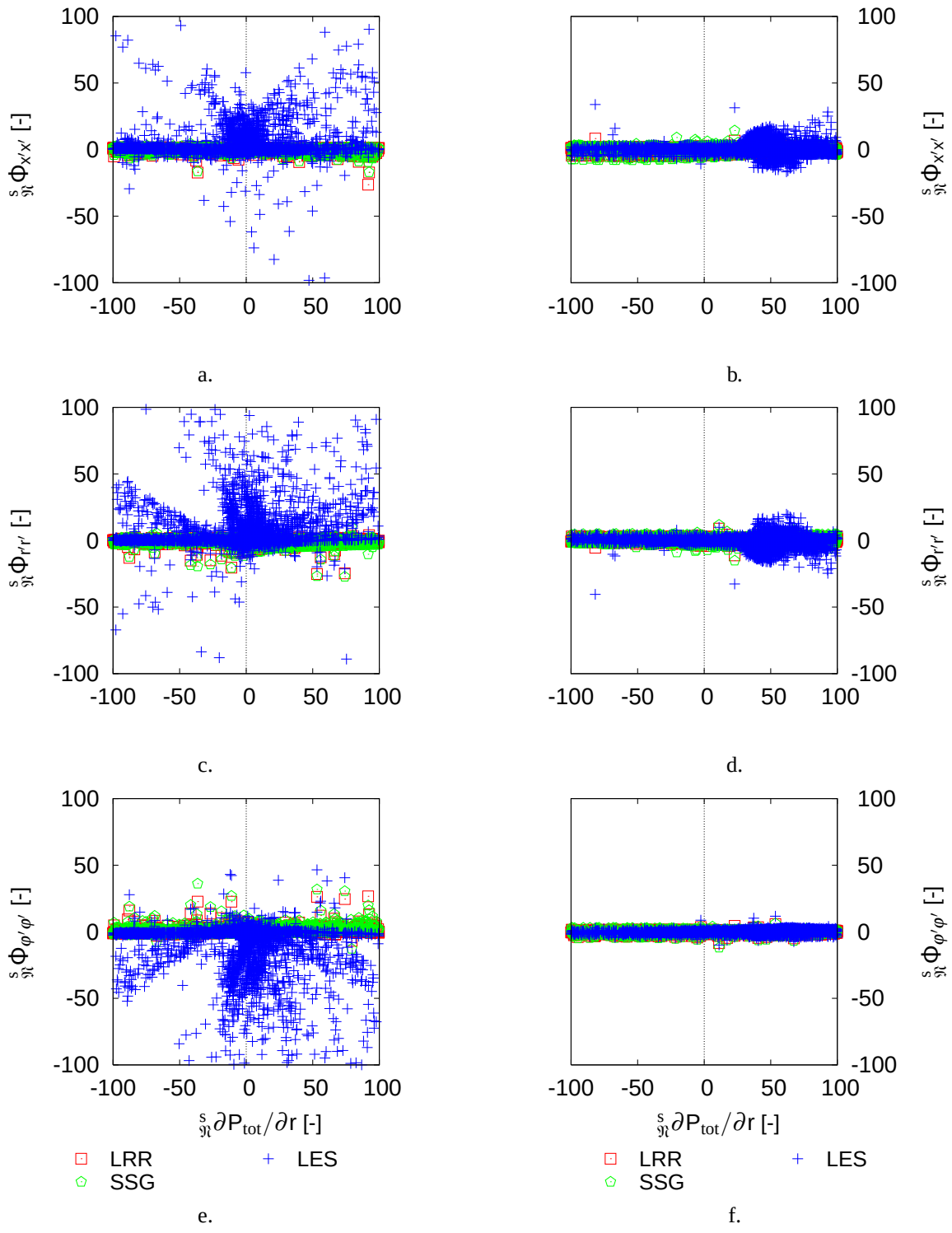


Bild 5.35. Scatter-Plot Totaldruckgradient. Normierte und im Strombahnsystem betrachtete Komponenten von Φ_{ii} über dem Totaldruckgradienten für den Freistrahl (links) und den Zyklon. ${}^{s}_{\Re}\partial P_{tot}/\partial r$ ist aus Darstellungsgründen mit Faktor 10^2 multipliziert.

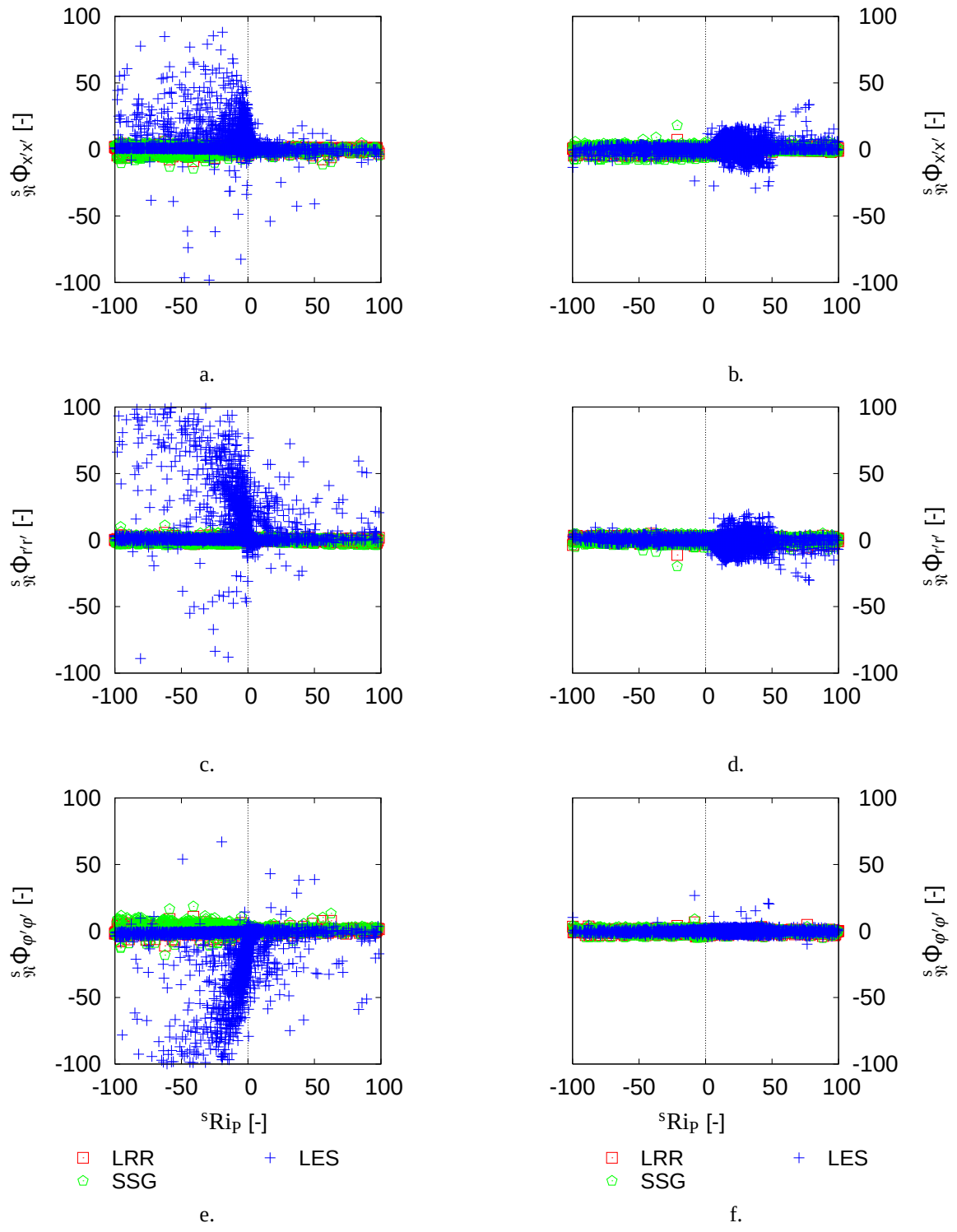


Bild 5.36. Scatter-Plot Richardsonzahl. Normierte und im Strombahnsystem betrachtete Komponenten von Φ_{ii} über der Richardsonzahl für den Freistrahl (links) und den Zyklon. ^{s}Ri$_{P}$ ist aus Darstellungsgründen mit Faktor 10^3 multipliziert.

Die Ergebnisse der Modelle von Launder et al. und Speziale et al. zeigen keinerlei Korrelation mit den Stabilitätsparametern, was zusätzlich die Hypothese stützt, daß ein klassischer Modellansatz nicht in der Lage ist, intermittente Ereignisse in adäquater Weise zu beschreiben.

Die dargestellten Vergleiche weisen eindeutig auf einen Einfluß des negativen radialen Totaldruckgradienten auf den Druck-Scher-Tensor Φ_{ij} hin und zeigen gleichzeitig auf, daß er im Gegensatz zum modifizierten Richardson-Parameter auf Basis des Zirkulationsgradienten besser geeignet erscheint, diesen Einfluß zu beschreiben. Die Existenz des stark ausgeprägten negativen Gradienten in radialer Sicht ist dabei von entscheidender Wichtigkeit. Ist er, wie im Falle der eingeschlossenen Strömung nicht oder nur ansatzweise gegeben, so sind auch keine Intermittenzeffekte erkennbar (mit Ausnahme eines schmalen Bereichs in unmittelbarer Nähe des Brennerauslasses). Allerdings weist die, wenn auch weniger stark ausgeprägte, Korrelation mit dem Richardson-Parameter auch auf einen Zusammenhang mit dem klassischen Zirkulationsgradientenansatz hin. Die eindeutige Identifizierung eines beschreibenden Parameters kann somit nicht erreicht werden. Hierfür wäre eine größere Anzahl unabhängiger Simulationsrechnungen nötig, deren Durchführung auf Grundlage des *gesamten* Strömungsgebiets allerdings jeglichen zeitlichen Rahmen sprengen würde.

Hieraus wird abgeleitet, daß für weitere Modellierungsansätze eine Hinzunahme dieser Beschreibung eine Verbesserung der Vorhersagequalität bedeuten könnte, natürlich unter der Voraussetzung einer eindeutigen Korrelation zwischen dem Parameter und dem Effekt der Intermittenz. Diese zusätzliche Modellabhängigkeit muß dabei zwingend mit der lokalen Strombahnkrümmung in direktem Zusammenhang formuliert sein, um die zuvor angesprochene natürliche Sensitivität zu gewährleisten und physikalisch unsinnige Ergebnisse bei nicht gegebener Krümmung zu vermeiden. Als geeignet erscheint dabei nach wie vor trotz fehlender Galilei-Invarianz eine Transformation in das lokale Strombahnsystem. Zu erwartende numerische Instabilitäten durch eine Modifikation einzelner Transportgleichungen des Reynolds'schen Spannungstensors widersprechen dabei der Forderung nach Robustheit eines möglichen Ansatzes, woraus gefolgert wird, daß trotz des erhöhten Aufwandes aufgrund mindestens einer zusätzlich zu lösenden Gleichung die Formulierung einer entsprechenden Intermittenzgleichung erfolgversprechender erscheint.

Dies wird auch aus der Überlegung deutlich, daß zwar die Entstehung von drallverstärkter Intermittenz von lokalen Größen bestimmt ist, die durch einen geeigneten Parameter identifiziert werden können, das Eindringen von Fluidballen und die entsprechende Wechselwirkung hingegen ein *nicht* lokales Phänomen darstellt, dessen Beschreibung nach einer eigenständigen Gleichung verlangt.

6 Resümee

In früheren Studien wurden in hochverdrallten Strömungen, wie sie für die Anwendung in Gasturbinen typisch sind, signifikante Defizite in der Vorhersagequalität des Reynolds-Spannungs-Modells identifiziert. Zur weiteren Untersuchung der Versagensgründe dient die in vorliegender Arbeit mit Hilfe der Grobstruktursimulation erstellte, vollkonsistente Datenbasis gemittelter Strömungsgrößen. Die physikalisch fundierten Daten besitzen dabei das Potential, als Basis für zukünftige Entwicklungen robuster Modell- bzw. Korrekturansätze zur Verbesserung der Vorhersagequalität zu dienen.

Im Gegensatz zu experimentell durchgeführten Studien erlaubt die eingesetzte Methode auch die Berücksichtigung von ansonsten unzugänglichen Strömungsgrößen, wie dem fluktuierendem Anteil des statischen Druckes simultan zur Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes. Neben der Untersuchung spezieller Modellterme der Transportgleichungen Reynolds'scher Spannungen konnte dabei gezeigt werden, daß selbst mit verhältnismäßig einfachen Randbedingungen und stark vereinfachter Geometrie ein mit dem Experiment in hohem Maße übereinstimmendes Ergebnis aus der Simulation ableitbar ist. Allerdings bleibt aufgrund der Formulierung der Differentialgleichungen im inkompressiblen Fall zu beachten, daß stets eine genügend hohe räumliche Diskretisierung des Rechengebiets durchgeführt wird, um durch einfließende Modellannahmen die Ergebnisqualität nicht zu schmälern. Auch ist die Verwendung eines dynamischen Modells für die Gitterspannungen bei der Verwendung von nicht äquidistanten, streng orthogonalen Rechengittern zwingend notwendig. Die allgemeine Forderung nach direkter Lösung von mindestens 80% des turbulenten Energiespektrums muß in jedem Fall erfüllt sein. Unabhängig davon wird in dieser Arbeit aber auch deutlich, daß eine exorbitante Rechenzeit bis zur *vollen* Konvergenz aller gemittelten Strömungsgrößen im *gesamten* Beobachtungsgebiet die Generierung solcher Datensätze mit heute verfügbaren Ressourcen verhindert, wenigstens in Umfeld industrieller Entwicklungen. Gerade bei im Verhältnis zu klassischen akademischen Strömungstypen wie Rohr- oder Kanalströmung komplexen Geometrien, ist neben der Möglichkeit einer Berechnung auf angepaßten Gittern auch eine soweit als möglich vereinfachte Beschreibung des Strömungsproblems nötig und wünschenswert.

Es gelang trotz der verhältnismäßig kurzen Zeitreihen eine deutlich erkennbare Abbildung von Intermittenzeffekten, die sich in einer Häufung stochastischer Ereignisse widerspiegeln. Interpolationsschemata mit einer Genauigkeit zweiter Ordnung erscheinen hierfür vollkommen ausreichend um Charakteristika von Wahrscheinlichkeitsfunktionen, wie sie aus experimentellen Untersuchungen bekannt sind, in hoher Qualität durch die Grobstruktursimulation abzubilden. Gleiches gilt für die Ergebnisse mittlerer Strömungsgrößen, die sich im direkten Vergleich mit den experimentell ermittelten Daten ebenfalls durch eine hohe Qualität auszeichnen.

Als einer der Hauptgründe für das Versagen von Reynolds-Spannungsmodellen läßt sich die stets symmetrische Charakteristik dieser Ansätze nennen. Dies konnte anhand einer Analyse der gängigen Modellierungspraxis im Vergleich mit den experimentellen Ergebnissen und denen der

Simulation abgeleitet werden. Bei Auftreten von Intermittenz werden signifikante Schiefen von Wahrscheinlichkeitsdichten nicht betrachtet und können deshalb von symmetrischen Modellen für den turbulenten Diffusionsanteil $\mathscr{D}_{ij}^{t}$ ebenfalls nicht abgebildet werden. Dies liegt dabei in den Modellannahmen begründet und ist nicht von der Modellformulierung abhängig. Es wurde zudem gezeigt, daß eine Vernachlässigung des Diffusionsanteils infolge von Druckschwankungen $\mathscr{D}_{ij}^{p}$ im Falle verdrallter Strömungen nicht zulässig erscheint.

Es konnte anhand grundlegender Charakteristika in den radialen Verläufen der Komponenten des Druck-Scher-Tensors Φ_{ij} eine Wirkung der Intermittenz abgeleitet werden, die in direktem Zusammenhang mit der Wechselwirkung von eingerolltem, drallfreiem und wenig turbulentem Umgebungsfluid in den Hauptstrahl steht. Hervorzuheben ist, daß weder lineare noch quadratisch formulierte Modellansätze in der Lage sind, diesen Effekt adäquat abzubilden, was wiederum in der grundlegenden symmetrischen Formulierung der Modellannahme begründet ist. Eine Koeffizientenvariation des linearen Modells, wie sie in der Vergangenheit des öfteren durchgeführt wurde, führt zu keinen allgemeingültigen Resultaten und ist somit in zukünftigen Modellentwicklungen nicht anzuraten. Der einzig praktikable Weg erscheint in einem, die Intermittenz beschreibenden, zusätzlichen Element im Gleichungssystem (Term oder ggf. Transportgleichung), um die Lücke zwischen fehlender Modellgenauigkeit einerseits und der Forderung nach hoher numerischer Stabilität bei vergleichsweise kurzen Rechenzeiten andererseits zu schliessen.

Als Stabilitätsparameter stellte sich ein normierter radialer Totaldruckgradienten im Gegensatz zum von Philipp modifizierten Richardson-Parameter als geeigneter heraus. Allerdings sind auch mit der Richardson-Zahl Korrelationen zu erkennen, was den Rückschluß zuläßt, daß beide Kennzahlen im Zusammenhang mit Intermittenz Bedeutung besitzen. Die klare Identifikation *eines* beschreibenden Parameters konnte deshalb nicht erreicht werden. Festzuhalten bleibt, daß eine Kenngröße mit der lokalen Strombahnkrümmung in direktem Zusammenhang stehen muß und der Definition einer Quelle für eine beschreibende Transportgleichung dienen kann.

Für zukünftige Untersuchungen praxisrelevanter Geometrien sollte zunächst eine eingehende Analyse der notwendigen räumlichen wie zeitlichen Auflösung des Problems durchgeführt werden, wobei die Auflösung der Intermittenzballen gewährleistet werden muß. Denkbar wäre hierfür die Vorgabe einer Reynolds-gemittelten Startlösung, welche mit einer konsistenten Turbulenzstruktur überlagert wird. Auf diese Weise ist ein Optimum zwischen notwendiger Diskretisierung einerseits und gewünschter Genauigkeit andererseits leichter zu finden und in Folge dessen die eigentliche Simulationsrechnung um ein Vielfaches effizienter durchführbar. Auch sind Analysen bzgl. weiterer Vereinfachungen und (geometrischer) Reduktionen des zu beschreibenden Strömungsgebiets in Betracht zu ziehen, da in einer Verkleinerung des Rechengebiets noch immer die höchste Effizienzsteigerung erreicht wird, ohne dabei die Auflösung des Problems zu verringern.

Das entscheidende Fazit der vorliegenden Arbeit aber lautet, daß eine Grobstruktursimulation dem durch Korrekturterme verbesserten Reynolds-gemittelten Ansatz vorzuziehen ist, da bei relativ geringem Modellierungsaufwand das Potential der Abbildung von physikalischen Effekten wie der drallverstärkten Intermittenz stets gegeben ist. Die Mühen und Kosten der Entwicklung robuster und einfach formulierter Korrekturen sind gerade in Hinblick auf die bereits aktuell vorhandene Rechnerleistung und diesbezüglich steigender Prognosen für die Zukunft kaum noch zu rechtfertigen.

Literaturverzeichnis

[Barr 1989] BARR, A. H.: The Einstein Summation Notation: Introduction and Extensions. In: *In SIGGRAPH 89 Course notes #30 on Topics in Physically-Based Modeling* (1989), S. J1 – J12

[Bernert und Eppler 1996] BERNERT, K. ; EPPLER, A.: *Large-Eddy-Simulation – grundlagenorientierte und anwendungsbezogene Untersuchungen zu Modellierungs- und numerischen Komponenten*. Forschungsbericht, Technische Universität Chemnitz, 1996

[Boussinesq 1877] BOUSSINESQ, J.: Théorie de l'écoulement tourbillant. In: *Mém. Prés. Acad. Sci.* 22 (1877), S. 46 ff.

[Bradshaw 1969] BRADSHAW, P.: The analogy between streamline curvature and buoyancy in turbulent shear flow. In: *Journal of Fluid Mechanics* 36 (1969), S. 177 ff.

[Bronstein et al. 1999] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A. ; MUSIOL, G. ; MÜHLIG, H.: *Taschenbuch der Mathematik*. Frankfurt am Main, Thun : Verlag Harri Deutsch, 1999. – ISBN 3-8171-2014-1

[Buche 2001] BUCHE, A.: *Deformationsgesetze für große elastisch-plastische Verzerrungen unter Berücksichtigung der Substruktur*, Fakultät für Maschinenwesen und Verfahrenstechnik, TU Chemnitz, Dissertation, 2001

[Courant et al. 1928] COURANT, R. ; FRIEDRICHS, K. O. ; LEWY, H.: Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik. In: *Math. Ann.* 100 (1928), S. 32 – 74

[Daly und Harlow 1970] DALY, B. J. ; HARLOW, F. H.: Transport Equations in Turbulence. In: *Phys. Fluids* 13 (1970), November, Nr. 11, S. 2634 – 2649

[Davidson 1995] DAVIDSON, L.: Prediction of the Flow Around an Airfoil Using a Reynolds Stress Transport Model. In: *ASME Transactions Journal of Fluids Engineering* 117 (1995), March, S. 50 – 57

[Deardorff 1970] DEARDORFF, J.W.: A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. In: *Journal of Fluid Mechanics* 41 (1970), S. 453 – 480

[Döbbeling 1990] DÖBBELING, K.: *Experimentelle und theoretische Untersuchungen an stark verdrallten, turbulenten isothermen Strömungen*, Fakultät für Chemieingenieurwesen, TH Karlsruhe, Dissertation, 1990

[Domaradzki et al. 1993] DOMARADZKI, J. A. ; LIU, W. ; BRACHET, M. E.: An analysis of subgrid-scale interactions in numerically simulated isotropic turbulence. In: *Phys. Fluids A* 5 (1993), July, Nr. 7, S. 1747 – 1759

[Drosdowski 1989] DROSDOWSKI, G. ; WISS. RAT U. MITARB. D. DUDENREDAKTION (Hrsg.): *Duden - Deutsches Universalwörterbuch*. 2., völlig neu bearb. u. stark erw. Aufl. Mannheim : Dudenverlag, 1989

[FASTEST 2006] FNB - FACHBEREICH MASCHINENBAU: *FASTEST - **F**low **A**nalysis **S**olving **T**ransport **E**quations with **S**imulated **T**urbulence*. 2006. – URL `http://www.fnb.maschinenbau.tu-darmstadt.de/de/software/`. – Fachgebiet für Numerische Berechnungsverfahren im Maschinenbau, TU Darmstadt

[Ferziger 1977] FERZIGER, J. H.: Large eddy simulation of turbulent flows. In: *AIAA Journal* 15 (1977), Nr. 9, S. 1261 – 1267

[Forkel 2000] FORKEL, H.: *Über die Grobstruktursimulation turbulenter Wasserstoff-Diffusionsflammen*. Düsseldorf : Fortschritt-Berichte VDI Reihe 6 Nr. 428, VDI Verlag, 2000

[Freitag und Klein 2005] FREITAG, M. ; KLEIN, M.: Direct Numerical Simulation of a Recirculating, Swirling Flow. In: *Flow Turbulence Combustion* 75 (2005), S. 51 – 66

[Fu et al. 1988] FU, S. ; HUANG, P. G. ; LAUNDER, B. E. ; LESCHZINER, M. A.: A comparison of algebraic and differential second-moment closures for axisymmetric turbulent shear flows with and without swirl. In: *ASME Transactions Journal of Fluids Engineering* 110 (1988), S. 216 – 221

[Fu et al. 1987] FU, S. ; LAUNDER, B. E. ; LESCHZINER, M. A.: Modelling Strongly Swirling Recirculating Jet Flow with Reynolds Stress Transport Closures. In: *Proc. 6th Symp. Turb. Shear Flows*. Toulouse, 1987

[Fu et al. 2005] FU, Y. ; CAI, J. ; JENG, S.-M. ; MONGIA, H.: Confinement effects on the swirling flow of a counter-rotating swirl cup. In: *ASME Turbo Expo 2005: Land, Sea and Air, ASME paper **GT2005-68622***. Reno-Tahoe, Nevada, USA, 2005

[Gantmacher 1986] GANTMACHER, F. R.: *Matrizentheorie*. Berlin Heidelberg New York Tokyo : Springer-Verlag, 1986. – ISBN 3-540-16582-7

[Germano et al. 1991] GERMANO, M. ; PIOMELLI, U. ; MOIN, P. ; CARBOT, W.: A dynamic subgrid-scale eddy viscosity model. In: *Phys. Fluids* 7 (1991), July, Nr. A 3, S. 1760 – 1765

[Gibson und Launder 1978] GIBSON, M. M. ; LAUNDER, B. E.: Ground effects on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. In: *Journal of Fluid Mechanics* 86 (1978), June, S. 491 – 511

[Gibson und Younis 1986] GIBSON, M. M. ; YOUNIS, B. R.: Calculation of Swirling Jets with a Reynolds-Stress Model. In: *Phys. Fluids* 29 (1986), Nr. 1, S. 38 ff.

[Grunert 2000] GRUNERT, K.: *Untersuchung zur Turbulenzmodellierung und Berechnung verdrallter Innenströmungen*, Hermann–Föttinger–Institut für Strömungsmechanik, TU Berlin, Dissertation, 2000

[Hamilton 1994] HAMILTON, J. D.: *Time Series Analysis*. Princeton, New Jersey : Princeton University Press, 1994. – ISBN 0-691-04289-6

[Härtel et al. 1994] HÄRTEL, C. ; KLEISER, L. ; UNGER, F. ; FRIEDRICH, R.: Subgrid-scale energy transfer in the near-wall region of turbulent flows. In: *Phys. Fluids* 6 (1994), September, Nr. 9, S. 3130 – 3143

[Heisenberg 1948] HEISENBERG, W.: Zur statistischen Theorie der Turbulenz. In: *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* 124 (1948), Juli, Nr. 7-12, S. 628 – 657

[Hinze 1959] HINZE, J. O.: *Turbulence - An Introduction to Its Mechanism and Theory*. New York : McGraw-Hill Book Company, Inc., 1959

[Hirsch 1995] HIRSCH, C.: *Ein Beitrag zur Wechselwirkung von Turbulenz und Drall*, Fakultät für Chemieingenieurwesen, TH Karlsruhe, Dissertation, 1995

[Hirsch et al. 1997] HIRSCH, C. ; POLIFKE, W. ; HOLZÄPFEL, F.: Modelling Turbulent Swirling Flows: Can LES help? In: *Workshop DNS and LES of Complex Flows: Numerical and Modelling Aspects*. Univ. of Twente, Enschede, NL, 1997

[Hirsch 1988] HIRSCH, Ch.: *Numerical Computation of Internal & External Flows - Volume 1: Fundamentals of Numerical Discretization*. John Wiley & Sons Ltd., 1988. – ISBN 0-471-91762-1

[Holzäpfel 1996] HOLZÄPFEL, F.: *Zur Turbulenzstruktur freier und eingeschlossener Drehströmungen*, Fakultät für Chemieingenieurwesen, TH Karlsruhe, Dissertation, 1996

[Holzäpfel 2004] HOLZÄPFEL, F.: Adjustment of Subgrid-Scale Parameterisations to Strong Streamline Curvature. In: *AIAA Journal* 42 (2004), Nr. 7, S. 1369 – 1377

[Holzäpfel 2005] HOLZÄPFEL, F.: *Aircraft Wake Vortex Evolution and Prediction*, TU München, Habilitationsschrift, 2005. – URL `http://elib.dlr.de/20511`

[Holzäpfel et al. 2002] HOLZÄPFEL, F. ; DÖBBELING, K. ; LENZE, B.: Velocity-Fields, Reynolds Stresses and Swirl-Induced Intermittency in Free and Enclosed Rotating Flows. In: WITTIG, S. (Hrsg.) ; VÖHRINGER, O. (Hrsg.) ; KIM, S. (Hrsg.): *Final Report of the Collaborative Research Centre 167 "Hochbelastete Brennräume – stationäre Gleichdruckverbrennung"* DFG Deutsche Forschungsgemeinschaft (Veranst.), Wiley-VCH, 2002, S. 135–155. – ISBN 3-527-27731-5

[Holzäpfel und Lenze 1997] HOLZÄPFEL, F. ; LENZE, B.: Swirl-induced intermittency - Assessment of a novel effect modifying the turbulence structure of swirling jets. In: LENZE, B. (Hrsg.): *Feuerungstechnik – Kaleidoskop aus aktueller Forschung und Entwicklung*. Karlsruhe, 1997, S. 67 – 91. – ISBN 3-00-001593-0

[Holzäpfel et al. 1996] HOLZÄPFEL, F. ; LENZE, B. ; LEUCKEL, W.: Swirl-Induced Intermittency: A Novel Effect Modifying the Turbulence Structure of Swirling Free Jets. In: *Symposium International on Combustion* 26 (1996), Nr. 1, S. 187–194

[Holzäpfel et al. 1999] HOLZÄPFEL, F. ; LENZE, B. ; LEUCKEL, W.: Quintuple Hot-Wire Measurement of the Turbulence Structure in Confined Swirling Flows. In: *Journal of Fluids Engineering* 121 (1999), Nr. 3, S. 517–525

[INFINIBAND 2006] INFORMATIK X -RECHNERTECHNIK UND RECHNERORGANISATION / PARALLELRECHNERARCHITEKTUR: *INFINIBAND at LRR-TUM*. 2006. – URL `http://www.lrr.in.tum.de/Par/arch/infiniband/`. – Informatik X: Rechnertechnik und Rechnerorganisation / Parallelrechnerarchitektur, TU München

[Intel 2006] INTEL CORPORATION: *Maximize your Application Performance on Intel® Architecture*. 2006. – URL `http://www.intel.com`

[Jacquin et al. 1990] JACQUIN, L. ; LEUCHTER, O. ; CAMBON, C. ; MATHIEU, J.: Homogeneous turbulence in the presence of rotation. In: *Journal of Fluid Mechanics* 220 (1990), S. 1 – 52

[Jakirlić 1997] JAKIRLIĆ, S.: *Reynolds-Spannungs-Modellierung komplexer turbulenter Strömungen*, Technische Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg, Dissertation, 1997. – ISBN 3-89675-215-4

[Jones und Musonge 1988] JONES, W. P. ; MUSONGE, P.: Closure of the Reynolds stress and scalar flux equations. In: *Phys. Fluids* 31 (1988), Nr. /12, S. 3589 – 3604

[Khosla und Rubin 1974] KHOSLA, P. K. ; RUBIN, S. G.: A diagonally dominant second-order accurate implicit scheme. In: *Comput. Fluids* 2 (1974), August, Nr. 2, S. 207 – 209

[Kiesewetter 2005] KIESEWETTER, F.: *Persönliche Korrespondenz*. 2005

[Kiesewetter 2006] KIESEWETTER, F.: *Modellierung des verbrennungsinduzierten Wirbelaufplatzens in Vormischbrennern*, Technische Universität München, Dissertation, 2006

[Klein et al. 2003] KLEIN, M. ; SADIKI, A. ; JANICKA, J.: A digital filter based generation of inflow data for spatially developing direct numerical or large eddy simulations. In: *Journal of Computational Physics* 186 (2003), Nr. 2, S. 652 – 665

[Launder und Li 1994] LAUNDER, B. E. ; LI, S.-P.: On the elimination of wall-topography parameters from second-moment closure. In: *Phys. Fluids* 6 (1994), Nr. 2, S. 999 – 1006

[Launder et al. 1977] LAUNDER, B. E. ; PRIDDIN, C. H. ; SHARMA, B. I.: The Calculation of Turbulent Boundary Layers on Spinning and Curved Surfaces. In: *ASME Transactions Journal of Fluids Engineering* 99 (1977), March

[Launder et al. 1975] LAUNDER, B. E. ; REECE, G. J. ; RODI, W.: Progress in the development of a Reynolds-stress turbulence closure. In: *Journal of Fluid Mechanics* 68 (1975), S. 537 – 566

[Launder und Spalding 1972] LAUNDER, B.E. (Hrsg.) ; SPALDING, D.B. (Hrsg.): *Mathematical Models of Turbulence*. London : Academic Press, 1972

[Launder und Tselepidakis 1993] LAUNDER, B.E. ; TSELEPIDAKIS, D.P.: Contribution to the Modelling of Near-Wall Turbulence. In: DURST, F. (Hrsg.): *Turbulent Shear Flows* Bd. 8. New York : Springer-Verlag, 1993, S. 81 – 96

[Leister 1994] LEISTER, H.-J.: *Numerische Simulation dreidimensionaler zeitabhängiger Strömungen unter dem Einfluß von Auftriebs- und Trägheitskräften*, Lehrstuhl für Strömungsmechanik, Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg, Dissertation, 1994

[Leonard 1974] LEONARD, A.: Energy cascade in large-eddy simulations of turbulent fluid flows. In: *Adv. Geophys. A* 18 (1974), S. 237 – 248

[Leschziner und Rodi 1983] LESCHZINER, M. A. ; RODI, W.: Computation of strongly swirling axi-symmetric free jets / Universität Karlsruhe. April 1983. – Forschungsbericht. SFB 80/T/216

[Leuckel 1967] LEUCKEL, W.: Swirl Intensities, Swirl Types and Energiy Losses of Different Swirl Generating Devices / Institut für Gastechnik, Feuerungstechnik und Wasserchemie der Universität Karlsruhe. 1967. – Forschungsbericht

[Lien und Durbin 1996] LIEN, F. S. ; DURBIN, P.A.: Non-linear k-ε-v^2 modeling with application to high-lift. In: *Center for Turbulent Research, Annual Research Briefs 1996* (1996). – URL `http://ctr.stanford.edu/Summer96/lien.ps.Z`

[Lien und Leschziner 1993] LIEN, F. S. ; LESCHZINER, M. A.: Second-Moment Modelling of Recirculating Flow with a Non-Orthogonal Colocated Finite-Volume Algorithm. In: DURST, F. (Hrsg.): *Turbulent Shear Flows 8*, Springer Verlag, 1993, S. 205 – 222

[Lilly 1992] LILLY, D. K.: A proposed modification of the Germano subgrid-scale closure method. In: *Phys. Fluids* 3 (1992), March, Nr. A 4, S. 633 – 635

[Lucca-Negro und O'Doherty 2001] LUCCA-NEGRO, O. ; O'DOHERTY, T.: Vortex breakdown: a review. In: *Prog. Energy Combust. Sci* (2001), Nr. 27, S. 431 – 481

[Lumley 1978] LUMLEY, J. L.: Computational Modeling of Turbulent Flows. In: *Adv. Appl. Mech.* (18) (1978), S. 123 – 176

[Maier 1968] MAIER, P.: Untersuchung isothermer drallbehafteter Freistrahlen. In: *Forschung im Ingenieurwesen* 34 (1968), Nr. 5, S. 133 – 140

[Meyberg und Vachenauer 1997] MEYBERG, K. ; VACHENAUER, P.: *Springer Lehrbuch*. Bd. 4: *Höhere Mathematik 1 - Differential- und Integralrechnung, Vektor- und Matrizenrechnung*. Berlin : Springer, 1997

[MPI 2005] MATHEMATICS AND COMPUTER SCIENCE DIVISION, ARGONNE NATIONAL LABORATORY: *The Message Passing Interface (MPI) standard*. 2005. – URL `http://www-unix.mcs.anl.gov/mpi/`

[Noll 1993] NOLL, B.: *Numerische Strömungsmechanik*. Berlin : Springer, 1993. – ISBN 0-89116-522-3

[Oberlack 1994] OBERLACK, M.: *Herleitung und Lösung einer Längenmaß- und Dissipationstensorgleichung für turbulente Strömungen*, Fakultät für Maschinenwesen, RWTH Aachen, Dissertation, 1994

[Patankar 1980] PATANKAR, S. V.: *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. New York : Hemisphere Publishing Corporation, 1980. – ISBN 0-89116-522-3

[Perić 1985] PERIĆ, M.: *A Finite Volume Method for the Prediction of Three-Dimensional Fluid Flow in Complex Ducts*, University of London, Dissertation, 1985

[Pfuderer 1997] PFUDERER, D.: *Über das Potential klassischer statistischer Modelle zur Beschreibung turbulenter Strömungen*, Fakultät für Maschinenbau, TU Darmstadt, Dissertation, 1997

[Philipp 1991] PHILIPP, M.: *Experimentelle und theoretische Untersuchungen zum Stabilitätsverhalten von Drallflammen mit zentraler Rückströmzone*, Fakultät für Chemieingenieurwesen, TH Karlsruhe, Dissertation, 1991

[Piomelli 1993] PIOMELLI, U.: High Reynolds number calculations using the dynamic subgrid-scale stress model. In: *Phys. Fluids A* 5 (1993), July, Nr. 6, S. 1484 – 1490

[Piomelli et al. 1996] PIOMELLI, U. ; YU, Y. ; ADRIAN, R. J.: Subgrid-scale energy transfer and near-wall turbulence structure. In: *Phys. Fluids* 8 (1996), January, Nr. 1, S. 215 – 224

[Piquet 1999] PIQUET, J.: *Turbulent Flows*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 1999. – ISBN 3-540-65411-9

[Prandtl 1961] PRANDTL, L.: *Einfluß stabilisierender Kräfte auf die Turbulenz, Gesammelte Abhandlungen*. Springer, 1961

[Press et al. 1992] PRESS, W. H. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T. ; FLANNERY, B. P.: *Numerical Recipes in Fortran 77 - The Art of Scientific Computing*. 2nd. Cambridge, New York, Port Melbourne : Cambridge University Press, 1992

[Råde und Westergren 1997] RÅDE, L. ; WESTERGREN, B.: *Springers mathematische Formeln : Taschenbuch für Ingenieure, Naturwissenschaftler, Wirtschaftsingenieure*. Berlin, 2., korr. und erw. Aufl. : Springer, 1997

[Rayleigh 1917] RAYLEIGH, Lord O. M.: On the dynamics of revolving fluids. In: *Proc. Royal Soc.* Series A, 93 (1917), S. 148 – 157

[Reynolds 1895] REYNOLDS, O.: On the dynamical theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. In: *Philosophical Transactions of the Royal Society* Ser. A **186-I** (1895), S. 123 – 164

[Rhie und Chow 1983] RHIE, C. M. ; CHOW, W. L.: Numerical Study of the Turbulent Flow past an Airfoil with Trailing -Edge Separation. In: *AIAA Journal* 21 (1983), S. 1525 – 1532

[Ristorcelli et al. 1995] RISTORCELLI, J. R. ; LUMLEY, J. L. ; ABID, R.: A rapid-pressure covariance representation consistent with the Taylor-Proudman theorem materially frame indifferent in the two-dimensional limit. In: *Journal of Fluid Mechanics* 292 (1995), S. 111 – 152

[Rodi 1976] RODI, W.: A new algebraic relation for calculating the Reynolds-stress. In: *ZAMM* 56 (1976), S. T 219 – T 221

[Ronchi et al. 1992] RONCHI, C. ; YPMA, M. ; CANUTO, V. M.: On the application of the Germano identity to subgrid-scale modeling. In: *Phys. Fluids* 4 (1992), December, Nr. 12, S. 2927 – 2929

[Rotta 1951a] ROTTA, J.: Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz - 1. Mitteilung. In: *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* 129 (1951), S. 547 – 572

[Rotta 1951b] ROTTA, J.: Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz - 2. Mitteilung. In: *Zeitschrift für Physik A Hadrons and Nuclei* 131 (1951), S. 51 – 77

[Sagaut 2001] SAGAUT, P.: *Large Eddy Simulation for Incompressible Flows - An Introduction*. Berlin : Springer, 2001

[Schlichting 1982] SCHLICHTING, H.: *Grenzschicht-Theorie*. Karlsruhe : 8. Auflage, Braun, 1982

[Schulz 1997] SCHULZ, C. G.: *Grobstruktursimulation turbulenter Freistrahlen*, RWTH Aachen, Dissertation, 1997

[Schwarz und Bradshaw 1994] SCHWARZ, W. R. ; BRADSHAW, P.: Term-by-term tests of stress-transport turbulence models in a three-dimensional boundary layer. In: *Phys. Fluids* 8 (1994), Nr. 2, S. 986 – 989

[Sloan 1985] SLOAN, D. G.: *Modelling of Swirl in Turbulent Systems*, Department of Chemical Engineering, Brigham Young University, Dissertation, 1985

[Smagorinsky 1963] SMAGORINSKY, J.: General Circulation Experiments with the Primitive Equations, I. The Basic Experiment. In: *Monthly Weather Review* 91 (1963), March, Nr. 3

[Speziale 1995] SPEZIALE, C. G.: A review of Reynolds stress models for turbulent shear flows. Linthicum Heights, MD: NASA Center for AeroSpace Information, 1995. – Forschungsbericht

[Speziale und Gatski 1997] SPEZIALE, C. G. ; GATSKI, T. B.: Analysis and modelling of anisotropies in the dissipation rate of turbulence. In: *Journal of Fluid Mechanics* 344 (1997), S. 155 – 180

[Speziale und Mac Giolla Mhuiris 1989] SPEZIALE, C. G. ; MAC GIOLLA MHUIRIS, N.: Scaling laws for homogeneous turbulent shear flows in a rotating frame. In: *Phys. Fluids A* 1 (1989), February, Nr. 2, S. 294 – 301

[Speziale et al. 1991] SPEZIALE, C. G. ; SARKAR, S. ; GATSKI, T. B.: Modelling the pressure-strain correlation of turbulence: an invariant dynamical systems approach. In: *Journal of Fluid Mechanics* 227 (1991), S. 245 – 272

[Spurk 2004] SPURK, J. H.: *Strömungslehre - Eine Einführung in die Theorie der Strömungen*. Berlin, Heidelberg : Springer-Verlag, 2004. – ISBN 3-540-40166-0

[Taulbee 1992] TAULBEE, D. B.: An improved algebraic Reynolds stress model and corresponding nonlinear stress model. In: *Phys. Fluids A* 11 (1992), Nr. 4, S. 2555 – 2561

[Taylor 1921] TAYLOR, G. I.: Experiments with rotating fluids. In: *Proc. Roy. Soc.* Series A 100 (1921), S. 114 ff.

[Tennekes und Lumley 1972] TENNEKES, H. ; LUMLEY, J. L.: *A First Course in Turbulence*. Cambridge, Massachusetts, and London, England : The MIT Press, 1972. – ISBN 0-262-20019-8

[Visser et al. 1987] VISSER, B. M. ; BOYSAN, F. ; WEBER, R.: Computations of isothermal swirling flows in the near burner zone. Results of the MMF 1-1 investigations. 1987. – Forschungsbericht. IFRF Re. Doc. F336/a/9

[Weber et al. 1990] WEBER, R. ; VISSER, B. M. ; BOYSAN, F.: Assessment of turbulence modelling for engineering prediction of swirling vortices in the near burner zone. In: *Intl. J. Heat and Fluid Flow* 11 (1990), Nr. 3, S. 225 ff.

[Wegner et al. 2004a] WEGNER, B. ; KEMPF, A. ; SCHNEIDER, C. ; SADIKI, A. ; DREIZLER, A. ; JANICKA, J. ; SCHÄFER, M.: Large eddy simulation of combustion processes under gas turbine conditions. In: *Progress in Computational Fluid Dynamics* 4 (2004), Nr. 3-5, S. 257 – 263

[Wegner et al. 2004b] WEGNER, B. ; MALTSEV, A. ; SCHNEIDER, C. ; SADIKI, A. ; DREIZLER, A. ; JANICKA, J.: Assessment of unsteady RANS in predicting swirl flow instability based on LES and Experiments. In: *International Journal of Heat and Fluid Flow* 25 (2004), S. 528 –536

[Wilcox 1998] WILCOX, D. C.: *Turbulence Modelling for CFD*. DCW Industries, Inc., 1998. – 1998. ISBN 3-540-65228-0

[Winkler und Aurich 1984] WINKLER, J. ; AURICH, H.: *Technische Mechanik*. 3. Auflage. VEB Fachbuchverlag Leipzig, 1984

[Wong 1992] WONG, V. C.: A proposed statistical-dynamic closure method for the linear or nonlinear subgrid-scale stresses. In: *Phys. Fluids A* 4 (1992), May, Nr. 5, S. 1080 – 1082

[Zierep 1984] ZIEREP, J.: *Grundzüge der Strömungslehre*. Karlsruhe : G. Braun, 1984

[Zurmühl und Falk 1984] ZURMÜHL, R. ; FALK, S.: *Matrizen und ihre Anwendungen; Teil 1: Grundlagen*. Berlin Heidelberg New York Tokyo : Springer, 1984. – ISBN 3-540-12848-4

Abbildungsverzeichnis

1.1 Querschnitt der Versuchsanlage von Holzäpfel 5
1.2 Isolinien der normierten Stromfunktion 6
1.3 Vergleich rad. Profile; eingeschl. Drallströmung 7
1.4 Vergleich der normierten Stromfunktion am Drallfreistrahl 8
1.5 Vergleich rad. Profile; Drallfreistrahl 9
1.6 Isolinien der Verbundwahrscheinlichkeitsdichte 10

2.1 Turbulentes Energiespektrum 16
2.2 Wahrscheinlicheitsdichten 24
2.3 Transportgleichung der Reynolds'schen Spannungen 26
2.4 Zum Gedankenexperiment von Rotta 27
2.5 Beiträge der rechten Seite der exakten Transportgleichung 28
2.6 Auswirkung der Filterung 32
2.7 Zur Germano-Identität 40
2.8 Zur zweistufigen Filterung 41

3.1 Entwicklung des dynamischen Mittelwertes 47
3.2 Dynamischer Mittelwert, pseudo-turbulentes Signal 49

5.1 Schema der Drallbrennkammer 58
5.2 Schema des Freistrahls 58
5.3 Querschnitt des Rechengebiets 59
5.4 Zur Position der Meßstellen 63
5.5 Zeitreihen der Axialgeschwindigkeit, x=200 mm u. r=100 mm 64
5.6 Turbulenzintensität, -energie, mittlere Geschwindigkeit u. $-_{\mathrm{L}}II$ 67
5.7 Energiedichten E_U; Quadr.$_{\mathrm{geo}}$ I 69
5.8 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadr.$_{\mathrm{geo}}$ I 73
5.9 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadr.$_{\mathrm{geo}}$ I 73
5.10 Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadr.$_{\mathrm{geo}}$ I 74
5.11 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Zyklon, x=100 mm, Quadr.$_{\mathrm{geo}}$ I 76
5.12 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Zyklon, x=100 mm, Quadr.$_{\mathrm{geo}}$ I 76
5.13 Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Zyklon, x=100 mm, Quadr.$_{\mathrm{geo}}$ I 77
5.14 Ensemble-Mittelwerte; Querschnitte x=20 mm bis x=140 mm; Freistrahl 80
5.15 Ensemble-Mittelwerte; Querschnitte x=20 mm bis x=140 mm; Zyklon 82
5.16 Vergleich mit Experiment; Freistrahl. Geschw. $\overline{U}$ und $\overline{W}$ 84
5.17 Vergleich mit Experiment; Freistrahl. Spannungen $\overline{v'v'}$ und $\overline{v'w'}$ 85
5.18 Vergleich mit Experiment; Zyklon. Geschw. $\overline{U}$ und $\overline{W}$ 87
5.19 Vergleich mit Experiment; Zyklon. Spannungen $\overline{v'v'}$ und $\overline{v'w'}$ 88
5.20 Vergleich Model mit LES-Daten; Freistrahl. $-\overline{w'w'u'}$ und $-\overline{w'w'v'}$ 90

5.21 Vergleich Model mit LES-Daten; Zyklon. $-\overline{w'w'u'}$ und $-\overline{w'w'v'}$ 91
5.22 Vergleich Φ und $\mathscr{D}^p$; Freistrahl u. Zyklon. vv und ww 94
5.23 Vergleich Modell mit LES-Daten; Freistrahl. Φ_{uu} und Φ_{vv} 96
5.24 Vergleich Modell mit LES-Daten; Freistrahl. Φ_{ww} und Φ_{vw} 97
5.25 Vergleich Modell mit LES-Daten; Zyklon. Φ_{uu} und Φ_{ww} 99
5.26 Vergleich Modell mit LES-Daten; Zyklon. Φ_{uw} und Φ_{vw} 100
5.27 Ellipsoid 101
5.28 Vergleich lin. Modell mit LES-Daten; Freistrahl. Φ_{uu} und Φ_{vv} 104
5.29 Vergleich lin. Modell mit LES-Daten; Freistrahl. Φ_{ww} und Φ_{uv} 105
5.30 Vergleich lin. Modell mit LES-Daten; Freistrahl. Φ_{uw} und Φ_{vw} 106
5.31 Deviatoren der Energiespektren 109
5.32 Variation von Modellkonstanten. Φ_{uu} und Φ_{ww} 111
5.33 Variation von Modellkonstanten. Φ_{uw} und Φ_{vw} 112
5.34 Strombahnsystem 113
5.35 Scatter-Plot; Totaldruckgradient 115
5.36 Scatter-Plot; Richardsonzahl 116

A.1 Energiedichten E_U; Freistrahl, Quadr.$_{\text{geo}}$ I 138
A.2 Energiedichten E_U; Freistrahl, Quadr.$_{\text{geo}}$ II 139
A.3 Energiedichten E_U; Freistrahl, Quadr.$_{\text{geo}}$ III 140
A.4 Energiedichten E_U; Freistrahl, Quadr.$_{\text{geo}}$ IV 141
A.5 Energiedichten E_V; Freistrahl, Quadr.$_{\text{geo}}$ I 142
A.6 Energiedichten E_V; Freistrahl, Quadr.$_{\text{geo}}$ II 143
A.7 Energiedichten E_V; Freistrahl, Quadr.$_{\text{geo}}$ III 144
A.8 Energiedichten E_V; Freistrahl, Quadr.$_{\text{geo}}$ IV 145
A.9 Energiedichten E_W; Freistrahl, Quadr.$_{\text{geo}}$ I 146
A.10 Energiedichten E_W; Freistrahl, Quadr.$_{\text{geo}}$ II 147
A.11 Energiedichten E_W; Freistrahl, Quadr.$_{\text{geo}}$ III 148
A.12 Energiedichten E_W; Freistrahl, Quadr.$_{\text{geo}}$ IV 149
A.13 Energiedichten E_U; Zyklon, Quadr.$_{\text{geo}}$ I 152
A.14 Energiedichten E_U; Zyklon, Quadr.$_{\text{geo}}$ II 153
A.15 Energiedichten E_U; Zyklon, Quadr.$_{\text{geo}}$ III 154
A.16 Energiedichten E_U; Zyklon, Quadr.$_{\text{geo}}$ IV 155
A.17 Energiedichten E_V; Zyklon, Quadr.$_{\text{geo}}$ I 156
A.18 Energiedichten E_V; Zyklon, Quadr.$_{\text{geo}}$ II 157
A.19 Energiedichten E_V; Zyklon, Quadr.$_{\text{geo}}$ III 158
A.20 Energiedichten E_V; Zyklon, Quadr.$_{\text{geo}}$ IV 159
A.21 Energiedichten E_W; Zyklon, Quadr.$_{\text{geo}}$ I 160
A.22 Energiedichten E_W; Zyklon, Quadr.$_{\text{geo}}$ II 161
A.23 Energiedichten E_W; Zyklon, Quadr.$_{\text{geo}}$ III 162
A.24 Energiedichten E_W; Zyklon, Quadr.$_{\text{geo}}$ IV 163

B.1 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadr.$_{\text{geo}}$ I 166
B.2 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadr.$_{\text{geo}}$ I 167
B.3 Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadr.$_{\text{geo}}$ I 168

B.4 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ II 169
B.5 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ II 170
B.6 Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ II 171
B.7 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ III 172
B.8 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ III 173
B.9 Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ III 174
B.10 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ IV 175
B.11 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ IV 176
B.12 Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ IV 177
B.13 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ I 180
B.14 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ I 181
B.15 Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ I 182
B.16 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ II 183
B.17 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ II 184
B.18 Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ II 185
B.19 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ III 186
B.20 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ III 187
B.21 Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ III 188
B.22 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ IV 189
B.23 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ IV 190
B.24 Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ IV 191
B.25 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Zyklon, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ I 194
B.26 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Zyklon, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ I 195
B.27 Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Zyklon, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ I 196
B.28 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Zyklon, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ II 197
B.29 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Zyklon, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ II 198
B.30 Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Zyklon, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ II 199
B.31 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Zyklon, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ III 200
B.32 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Zyklon, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ III 201
B.33 Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Zyklon, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ III 202
B.34 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Zyklon, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ IV 203
B.35 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Zyklon, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ IV 204
B.36 Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Zyklon, x=100 mm, Quadr.$_{geo}$ IV 205
B.37 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Zyklon, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ I 208
B.38 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Zyklon, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ I 209
B.39 Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Zyklon, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ I 210
B.40 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Zyklon, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ II 211
B.41 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Zyklon, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ II 212
B.42 Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Zyklon, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ II 213
B.43 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Zyklon, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ III 214
B.44 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Zyklon, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ III 215
B.45 Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Zyklon, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ III 216
B.46 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Zyklon, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ IV 217
B.47 Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Zyklon, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ IV 218
B.48 Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Zyklon, x=200 mm, Quadr.$_{geo}$ IV 219

C.1 Ensemble-Mittelwerte im Querschnitt x=20 mm u. x=40 mm; Freistrahl 222
C.2 Ensemble-Mittelwerte im Querschnitt x=60 mm u. x=80 mm; Freistrahl 223
C.3 Ensemble-Mittelwerte im Querschnitt x=100 mm u. x=120 mm; Freistrahl 224
C.4 Ensemble-Mittelwerte im Querschnitt x=140 mm u. x=160 mm; Freistrahl 225
C.5 Ensemble-Mittelwerte im Querschnitt x=180 mm u. x=200 mm; Freistrahl 226
C.6 Ensemble-Mittelwerte im Querschnitt x=20 mm u. x=40 mm; Zyklon 228
C.7 Ensemble-Mittelwerte im Querschnitt x=60 mm u. x=80 mm; Zyklon 229
C.8 Ensemble-Mittelwerte im Querschnitt x=100 mm u. x=120 mm; Zyklon 230
C.9 Ensemble-Mittelwerte im Querschnitt x=140 mm u. x=160 mm; Zyklon 231
C.10 Ensemble-Mittelwerte im Querschnitt x=180 mm u. x=200 mm; Zyklon 232

D.1 Zustände der Anisotropie im Lumley-Dreieck 233
D.2 Zustände der Anisotropie im Lumley-Dreieck; Freistrahl 235
D.3 Zustände der Anisotropie im Lumley-Dreieck; Zyklon 236

E.1 Vergleich mit Experiment; Freistrahl. Geschw. $\overline{U}$ und $\overline{W}$ 238
E.2 Vergleich mit Experiment; Freistrahl. Spannungen $\overline{u'u'}$ und $\overline{v'v'}$ 239
E.3 Vergleich mit Experiment; Freistrahl. Spannungen $\overline{w'w'}$ und $\overline{u'v'}$ 240
E.4 Vergleich mit Experiment; Freistrahl. Spannungen $\overline{u'w'}$ und $\overline{v'w'}$ 241
E.5 Vergleich mit Experiment; Zyklon. Geschw. $\overline{U}$ und $\overline{W}$ 244
E.6 Vergleich mit Experiment; Zyklon. Spannungen $\overline{u'u'}$ und $\overline{v'v'}$ 245
E.7 Vergleich mit Experiment; Zyklon. Spannungen $\overline{w'w'}$ und $\overline{u'v'}$ 246
E.8 Vergleich mit Experiment; Zyklon. Spannungen $\overline{u'w'}$ und $\overline{v'w'}$ 247

F.1 Vergleich Model mit LES-Daten; Freistrahl. $-\overline{u'u'u'}$ und $-\overline{v'v'v'}$ 250
F.2 Vergleich Model mit LES-Daten; Freistrahl. $-\overline{w'w'w'}$ und $-\overline{u'u'v'}$ 251
F.3 Vergleich Model mit LES-Daten; Freistrahl. $-\overline{u'u'w'}$ und $-\overline{w'w'u'}$ 252
F.4 Vergleich Model mit LES-Daten; Freistrahl. $-\overline{u'v'v'}$ und $-\overline{w'w'v'}$ 253
F.5 Vergleich Model mit LES-Daten; Freistrahl. $-\overline{w'v'v'}$ und $-\overline{u'v'w'}$ 254
F.6 Vergleich Model mit LES-Daten; Zyklon. $-\overline{u'u'u'}$ und $-\overline{v'v'v'}$ 256
F.7 Vergleich Model mit LES-Daten; Zyklon. $-\overline{w'w'w'}$ und $-\overline{u'u'v'}$ 257
F.8 Vergleich Model mit LES-Daten; Zyklon. $-\overline{u'u'w'}$ und $-\overline{w'w'u'}$ 258
F.9 Vergleich Model mit LES-Daten; Zyklon. $-\overline{u'v'v'}$ und $-\overline{w'w'v'}$ 259
F.10 Vergleich Model mit LES-Daten; Freistrahl. $-\overline{w'v'v'}$ und $-\overline{u'v'w'}$ 260

G.1 Vergleich Φ und $\mathscr{D}^p$; Freistrahl. *uu* und *vv* 262
G.2 Vergleich Φ und $\mathscr{D}^p$; Freistrahl. *ww* und *uv* 263
G.3 Vergleich Φ und $\mathscr{D}^p$; Freistrahl. *uw* und *vw* 264
G.4 Vergleich Φ und $\mathscr{D}^p$; Zyklon. *uu* und *vv* 266
G.5 Vergleich Φ und $\mathscr{D}^p$; Zyklon. *ww* und *uv* 267
G.6 Vergleich Φ und $\mathscr{D}^p$; Zyklon. *uw* und *vw* 268

H.1 Vergleich Modell mit LES-Daten; Freistrahl. Φ_{uu} und Φ_{vv} 270
H.2 Vergleich Modell mit LES-Daten; Freistrahl. Φ_{ww} und Φ_{uv} 271
H.3 Vergleich Modell mit LES-Daten; Freistrahl. Φ_{uw} und Φ_{vw} 272
H.4 Vergleich Modell mit LES-Daten; Zyklon. Φ_{uu} und Φ_{vv} 274

H.5 Vergleich Modell mit LES-Daten; Zyklon. Φ_{ww} und Φ_{uv} 275
H.6 Vergleich Modell mit LES-Daten; Zyklon. Φ_{uw} und Φ_{vw} 276

I.1 Variation von Modellkonstanten. Φ_{uu} und Φ_{vv}; Freistrahl 278
I.2 Variation von Modellkonstanten. Φ_{ww} und Φ_{uv}; Freistrahl 279
I.3 Variation von Modellkonstanten. Φ_{uw} und Φ_{vw}; Freistrahl 280
I.4 Variation von Modellkonstanten. Φ_{uu} und Φ_{vv}; Zyklon 282
I.5 Variation von Modellkonstanten. Φ_{ww} und Φ_{uv}; Zyklon 283
I.6 Variation von Modellkonstanten. Φ_{uw} und Φ_{vw}; Zyklon 284

J.1 Scatter-Plot Freistrahl; Totaldruckgradient 286
J.2 Scatter-Plot Freistrahl; Richardsonzahl 287
J.3 Scatter-Plot Zyklon; Totaldruckgradient 290
J.4 Scatter-Plot Zyklon; Richardsonzahl 291

K.1 Beliebiger Vektor in kartesischem und zylindrischem System 293
K.2 Tensor 3. Stufe 296

Tabellenverzeichnis

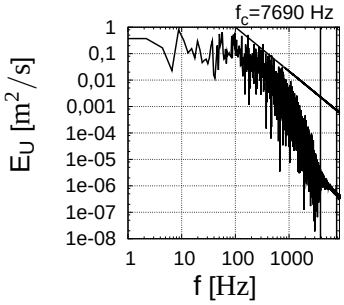
5.1 Mittelwerte normierter Residuen 61
5.2 Spektralanalyse; Längenmaße und Dissipation im Quadr.$_{geo}$ I 66
5.3 Ensemble-gemittelte Größen 78

K.1 Transformation von K nach K' 297
K.2 Transformation von K' nach K 298

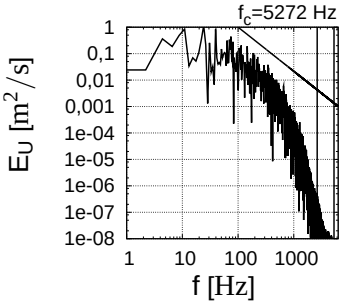
Anhang A

Energiedichtefunktionen

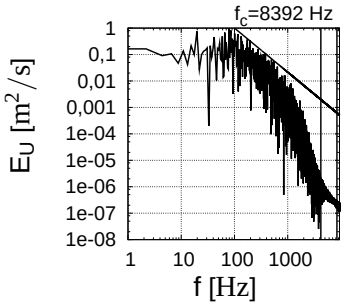
A.1 Freistrahl



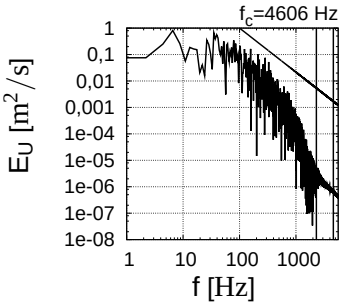
a. r=40 mm, x=100 mm



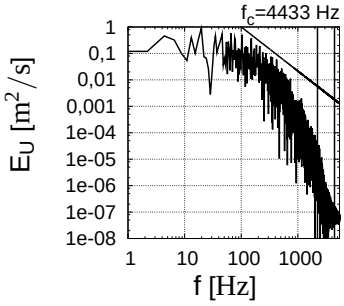
b. r=40 mm, x=200 mm



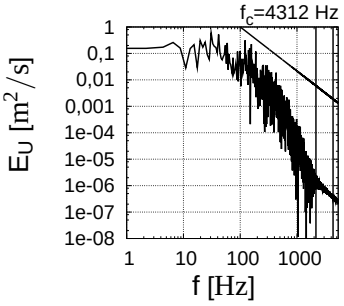
c. r=60 mm, x=100 mm



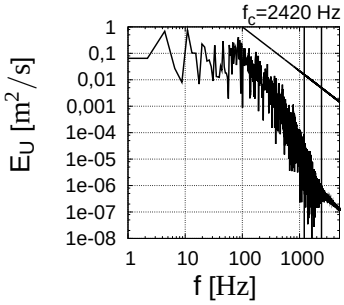
d. r=60 mm, x=200 mm



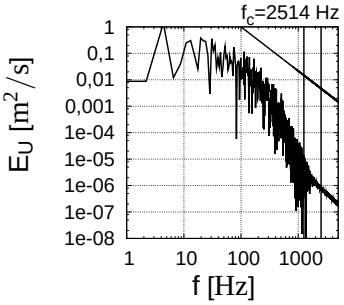
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

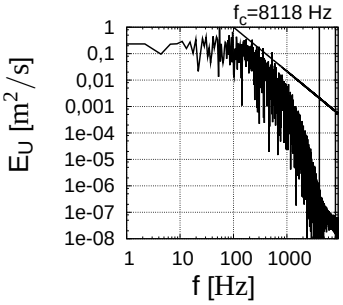


g. r=100 mm, x=100 mm

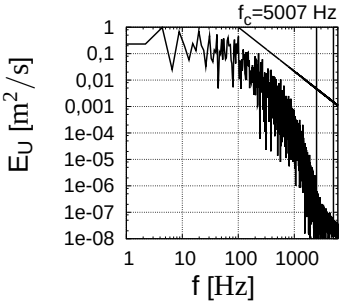


h. r=100 mm, x=200 mm

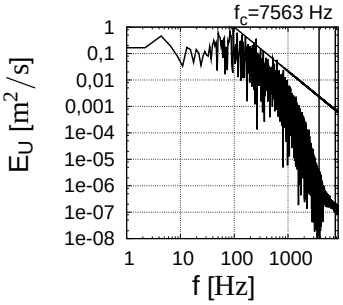
Bild A.1. Energiedichten E_U; Freistrahl, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{geo}$ I. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



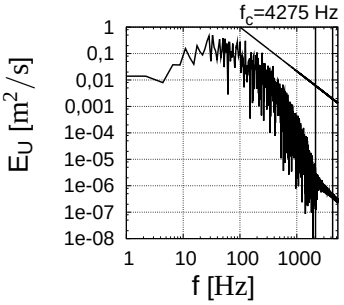
a. r=40 mm, x=100 mm



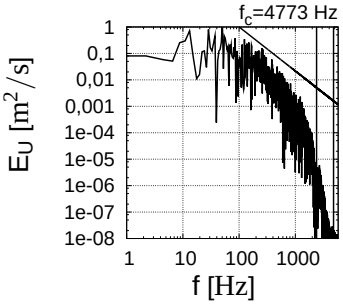
b. r=40 mm, x=200 mm



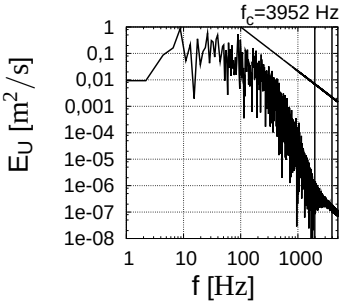
c. r=60 mm, x=100 mm



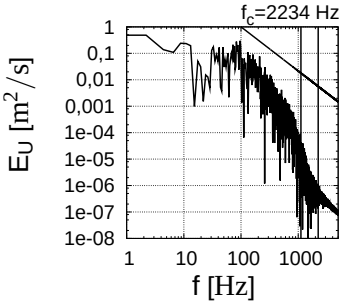
d. r=60 mm, x=200 mm



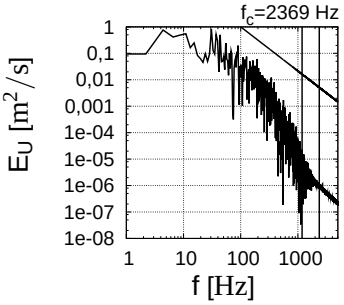
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

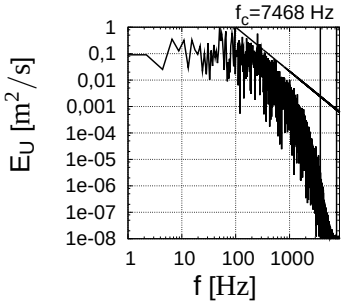


g. r=100 mm, x=100 mm

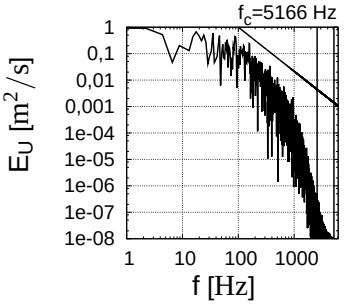


h. r=100 mm, x=200 mm

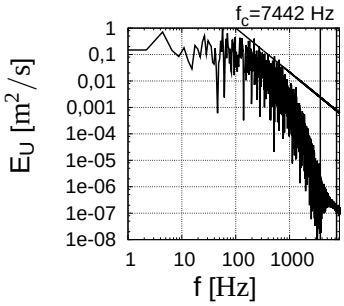
Bild A.2. Energiedichten E_U; Freistrahl, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{geo}$ II. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



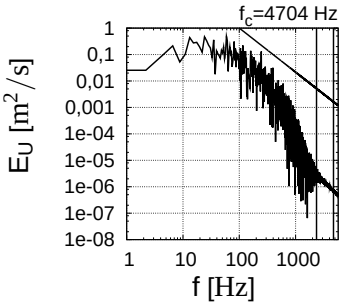
a. r=40 mm, x=100 mm



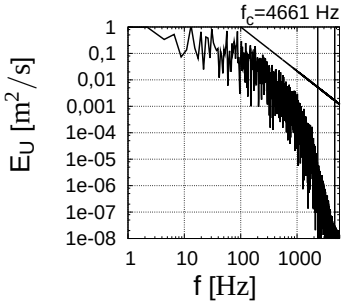
b. r=40 mm, x=200 mm



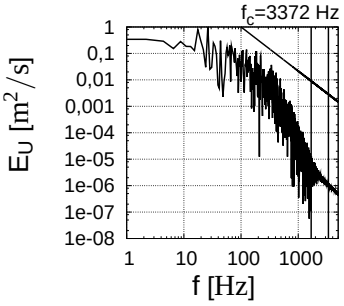
c. r=60 mm, x=100 mm



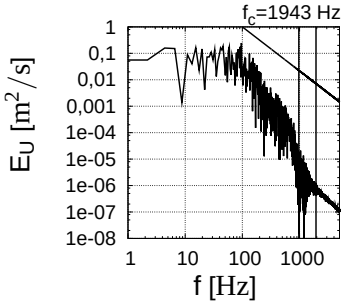
d. r=60 mm, x=200 mm



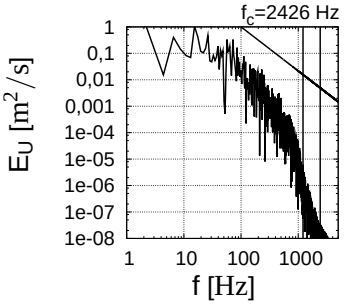
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

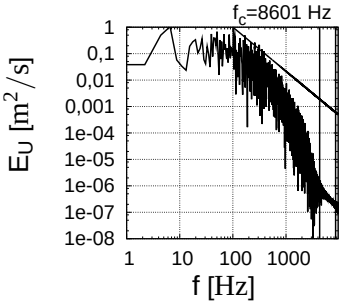


g. r=100 mm, x=100 mm

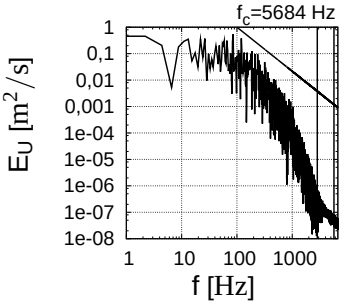


h. r=100 mm, x=200 mm

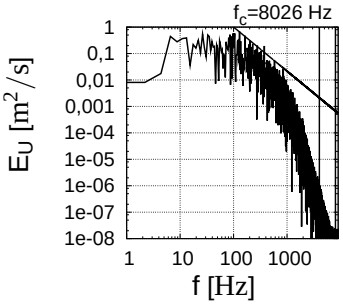
Bild A.3. Energiedichten E_U; Freistrahl, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{geo}$ III. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



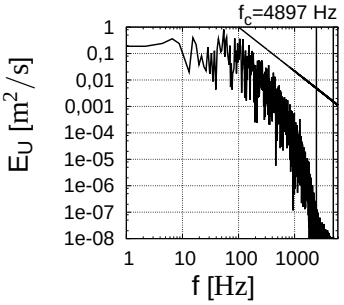
a. r=40 mm, x=100 mm



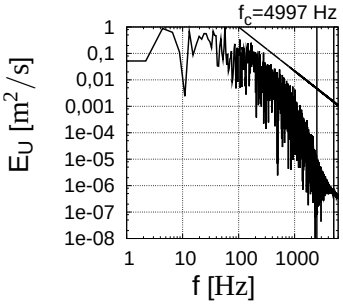
b. r=40 mm, x=200 mm



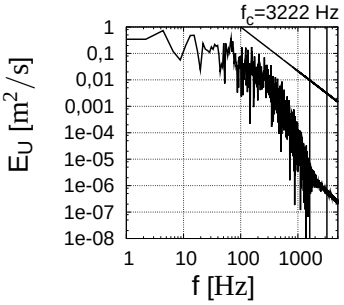
c. r=60 mm, x=100 mm



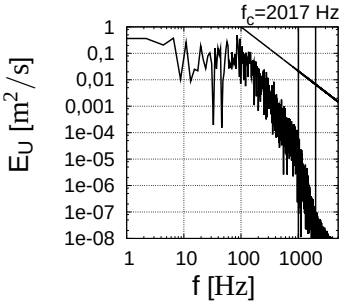
d. r=60 mm, x=200 mm



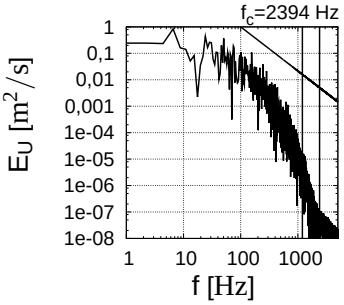
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

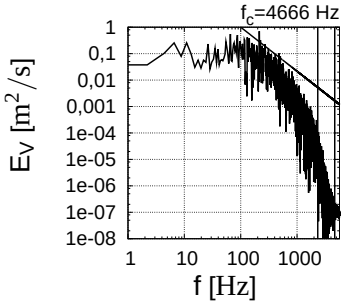


g. r=100 mm, x=100 mm

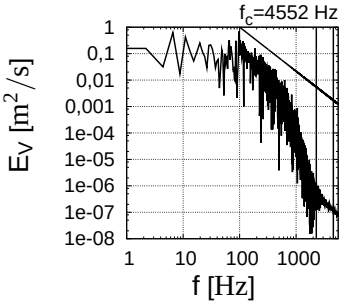


h. r=100 mm, x=200 mm

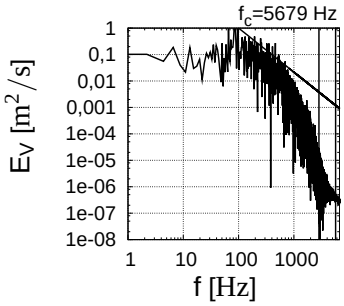
Bild A.4. Energiedichten E_U; Freistrahl, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{geo}$ IV. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



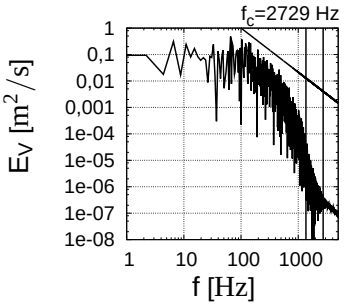
a. r=40 mm, x=100 mm



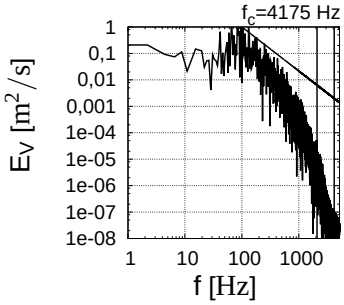
b. r=40 mm, x=200 mm



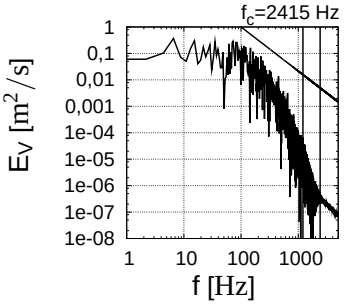
c. r=60 mm, x=100 mm



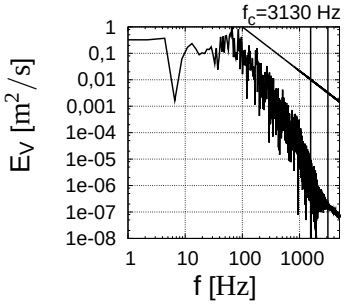
d. r=60 mm, x=200 mm



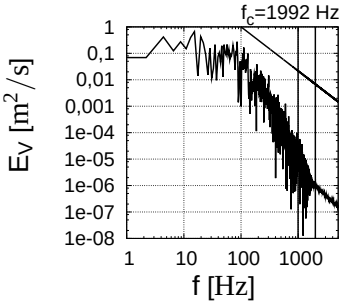
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

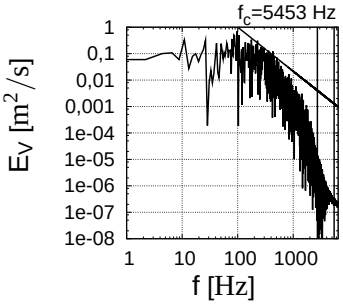


g. r=100 mm, x=100 mm

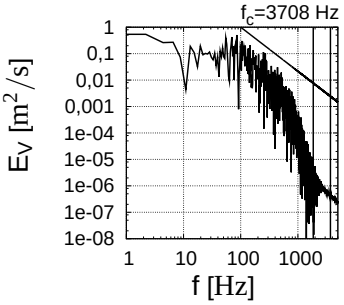


h. r=100 mm, x=200 mm

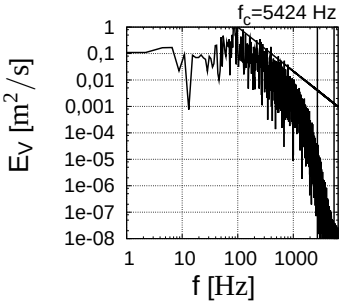
Bild A.5. Energiedichten E_V; Freistrahl, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{geo}$ I. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



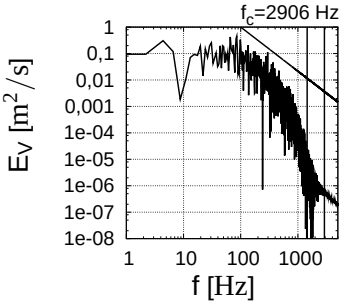
a. r=40 mm, x=100 mm



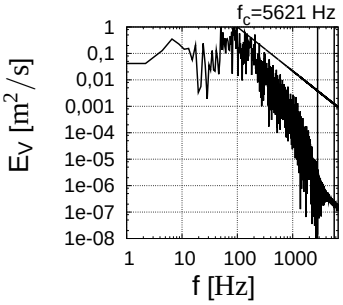
b. r=40 mm, x=200 mm



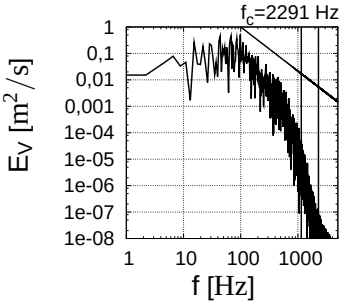
c. r=60 mm, x=100 mm



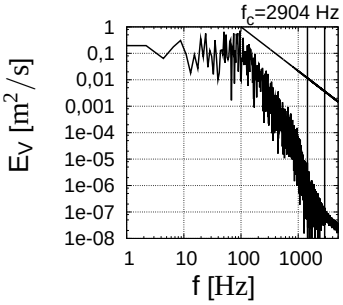
d. r=60 mm, x=200 mm



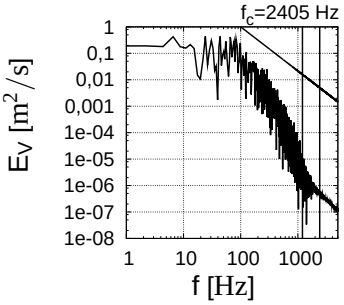
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

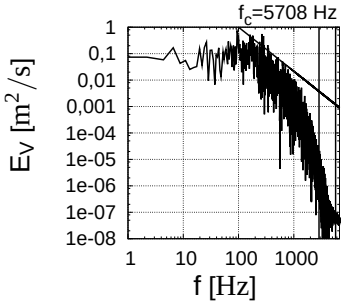


g. r=100 mm, x=100 mm

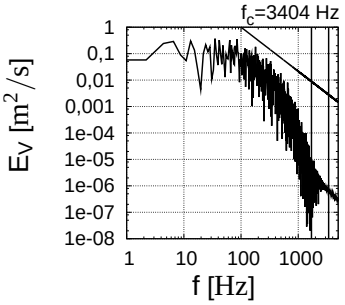


h. r=100 mm, x=200 mm

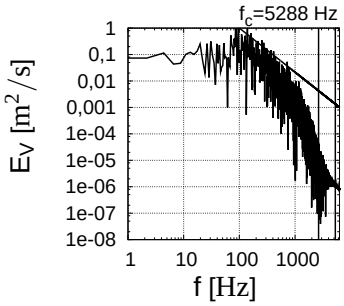
Bild A.6. Energiedichten E_V; Freistrahl, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{geo}$ II. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



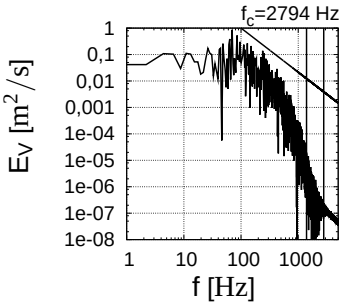
a. r=40 mm, x=100 mm



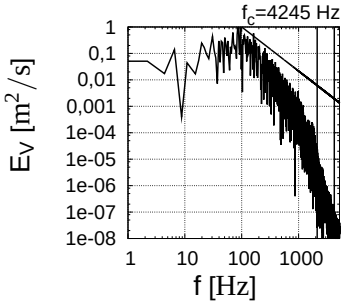
b. r=40 mm, x=200 mm



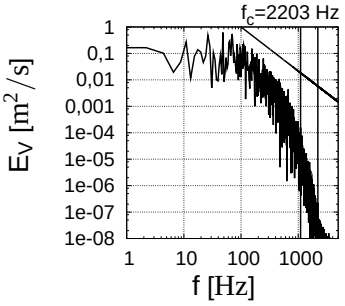
c. r=60 mm, x=100 mm



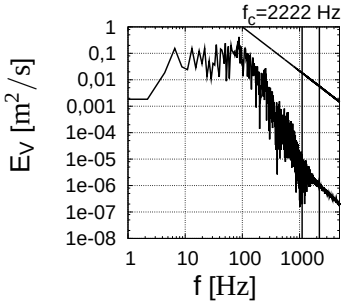
d. r=60 mm, x=200 mm



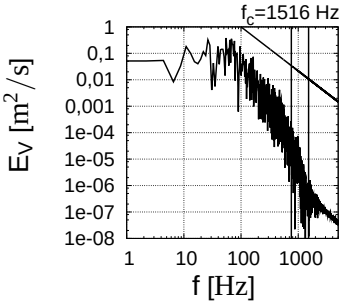
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

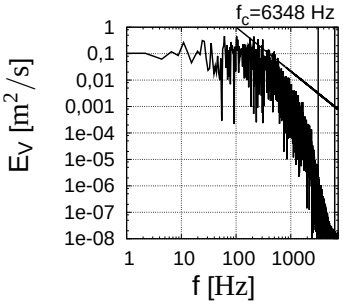


g. r=100 mm, x=100 mm

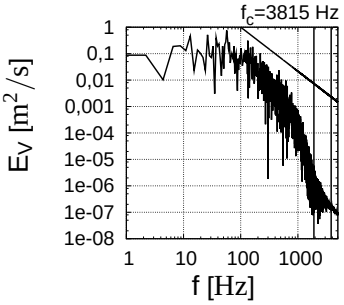


h. r=100 mm, x=200 mm

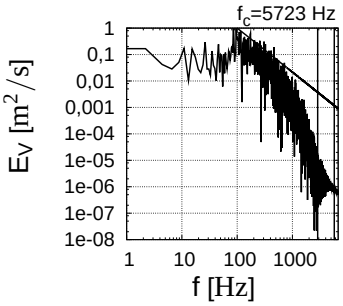
Bild A.7. Energiedichten E_V; Freistrahl, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{geo}$ III. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



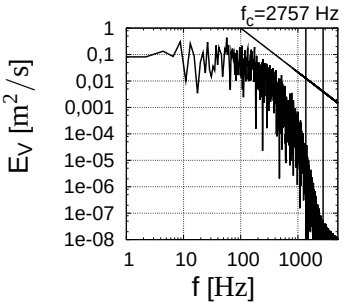
a. r=40 mm, x=100 mm



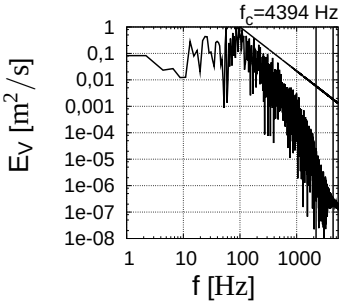
b. r=40 mm, x=200 mm



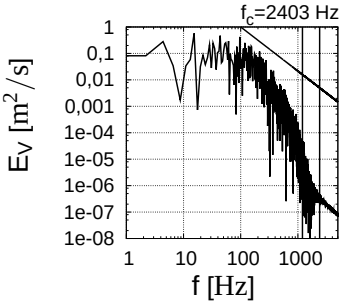
c. r=60 mm, x=100 mm



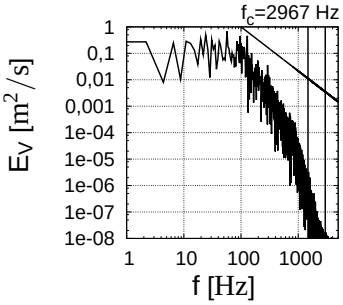
d. r=60 mm, x=200 mm



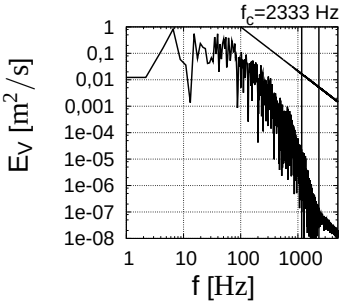
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

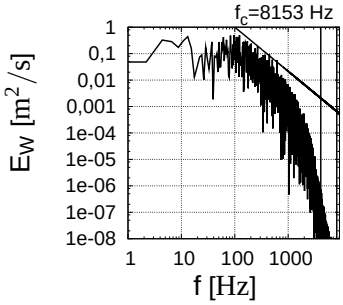


g. r=100 mm, x=100 mm

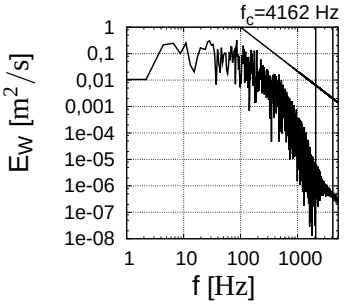


h. r=100 mm, x=200 mm

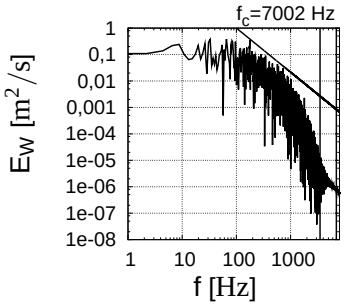
Bild A.8. Energiedichten E_V; Freistrahl, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{geo}$ IV. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



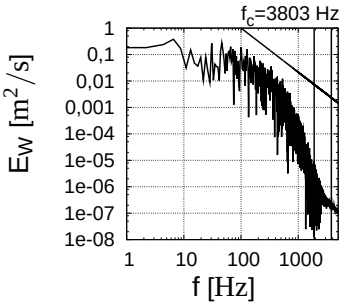
a. r=40 mm, x=100 mm



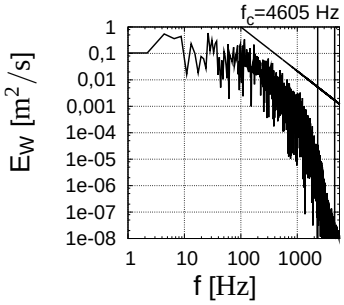
b. r=40 mm, x=200 mm



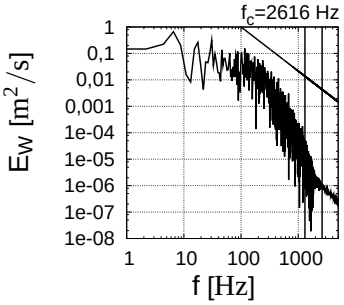
c. r=60 mm, x=100 mm



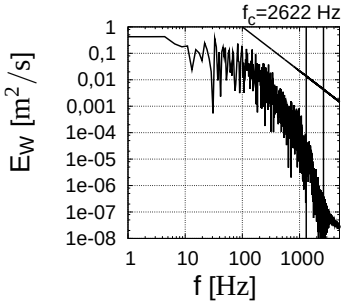
d. r=60 mm, x=200 mm



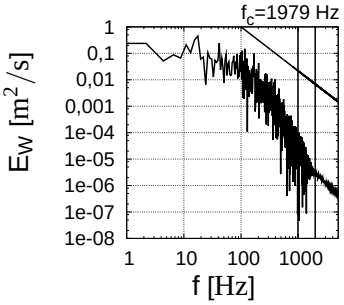
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

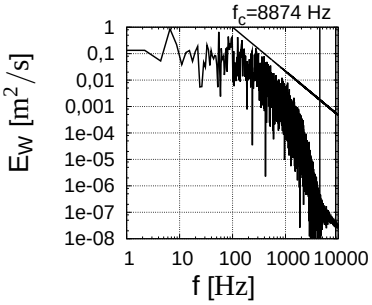


g. r=100 mm, x=100 mm

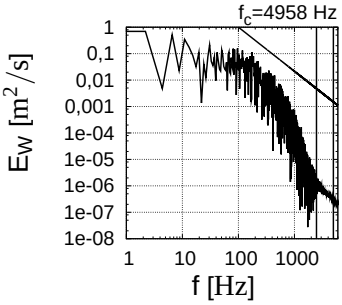


h. r=100 mm, x=200 mm

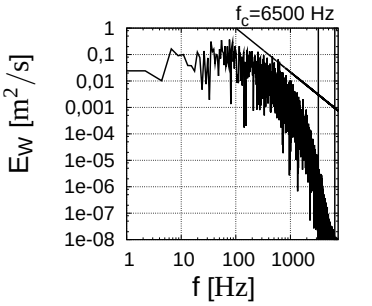
Bild A.9. Energiedichten E_W; Freistrahl, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{geo}$ I. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



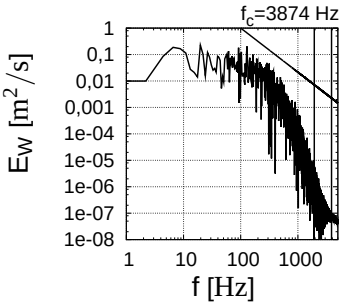
a. r=40 mm, x=100 mm



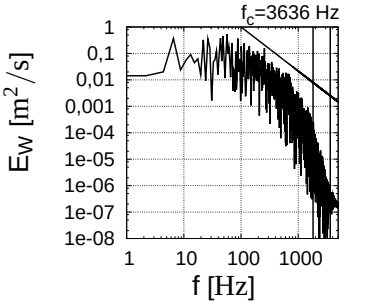
b. r=40 mm, x=200 mm



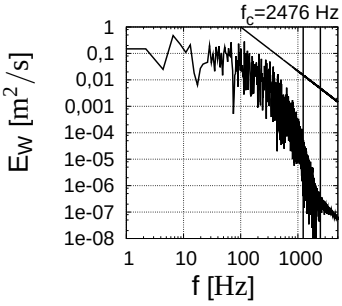
c. r=60 mm, x=100 mm



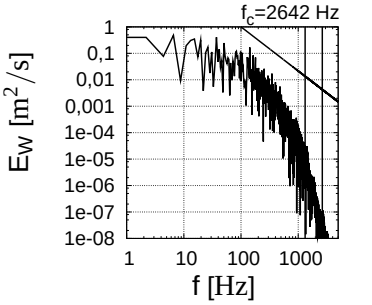
d. r=60 mm, x=200 mm



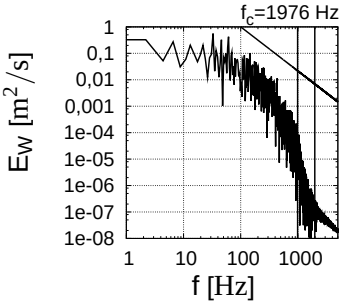
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

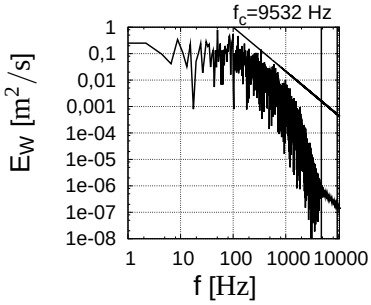


g. r=100 mm, x=100 mm

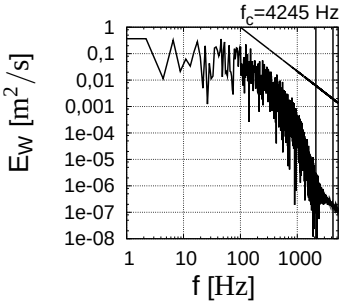


h. r=100 mm, x=200 mm

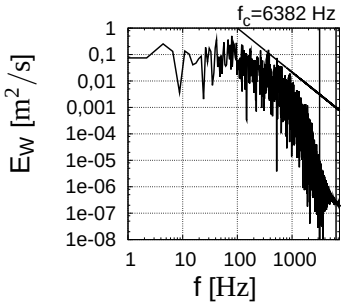
Bild A.10. Energiedichten E_W; Freistrahl, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{geo}$ II. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



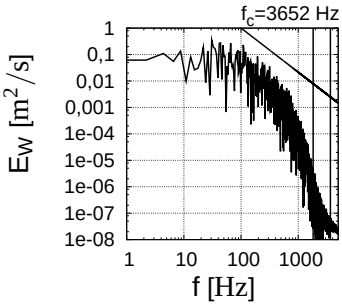
a. r=40 mm, x=100 mm



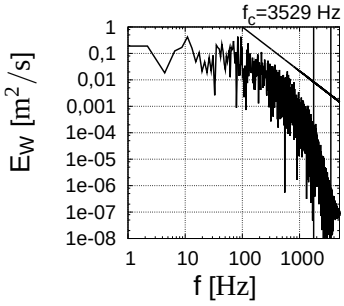
b. r=40 mm, x=200 mm



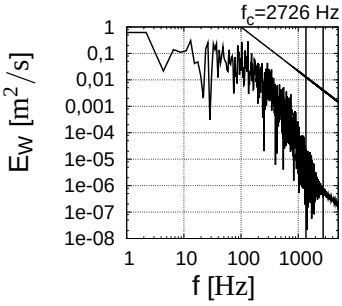
c. r=60 mm, x=100 mm



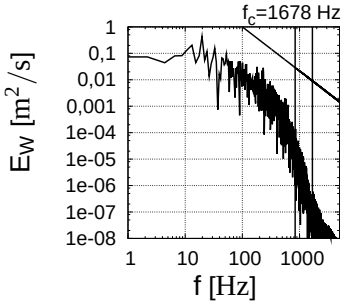
d. r=60 mm, x=200 mm



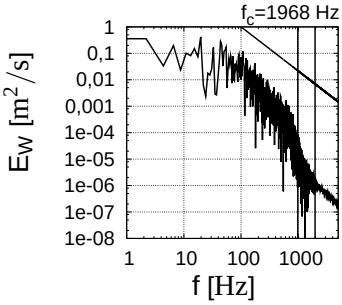
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

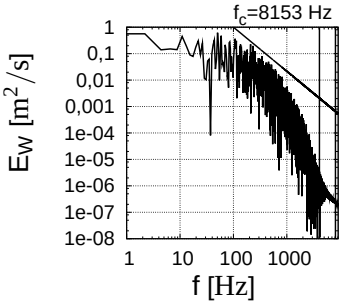


g. r=100 mm, x=100 mm

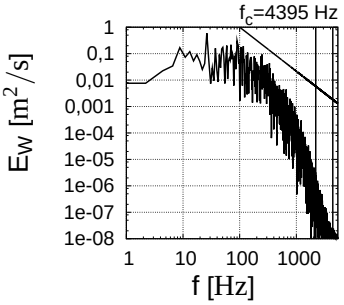


h. r=100 mm, x=200 mm

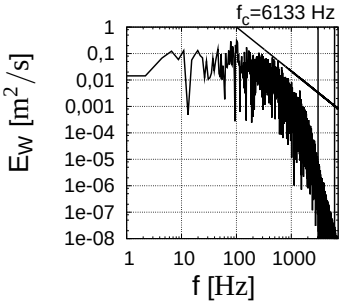
Bild A.11. Energiedichten E_W; Freistrahl, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{\text{geo}}$ III. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



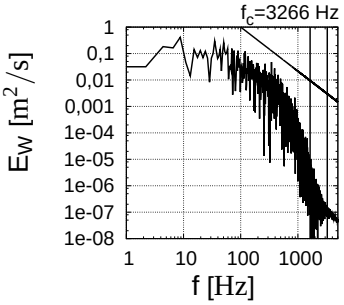
a. r=40 mm, x=100 mm



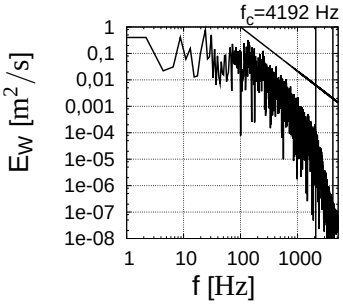
b. r=40 mm, x=200 mm



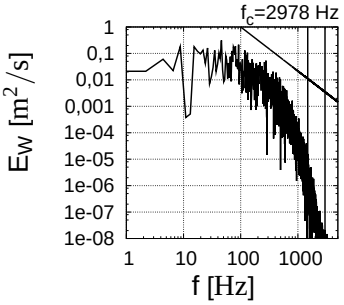
c. r=60 mm, x=100 mm



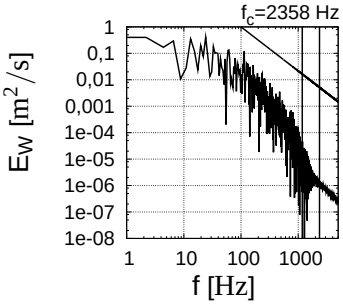
d. r=60 mm, x=200 mm



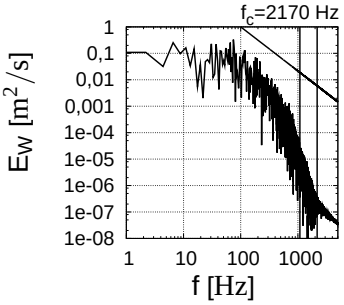
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm



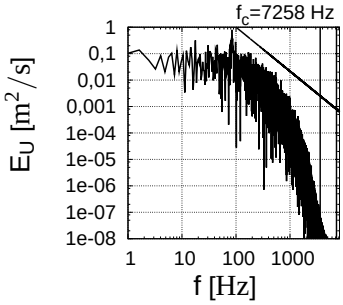
g. r=100 mm, x=100 mm



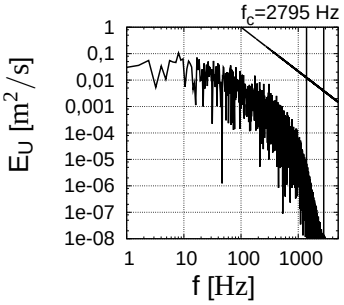
h. r=100 mm, x=200 mm

Bild A.12. Energiedichten E_W; Freistrahl, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{geo}$ IV. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.

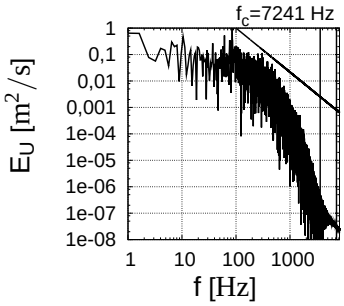
A.2 Zyklon



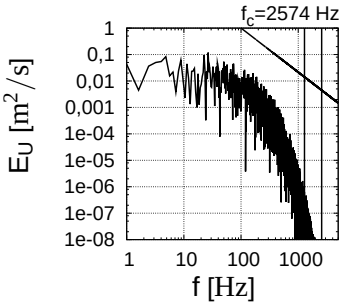
a. r=40 mm, x=100 mm



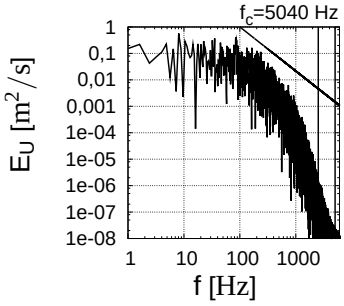
b. r=40 mm, x=200 mm



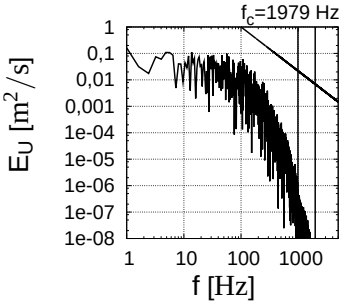
c. r=60 mm, x=100 mm



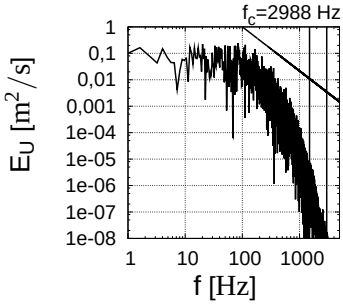
d. r=60 mm, x=200 mm



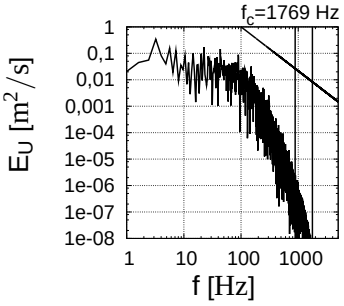
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

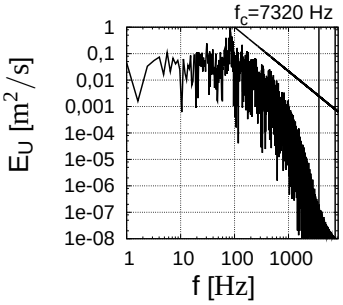


g. r=100 mm, x=100 mm

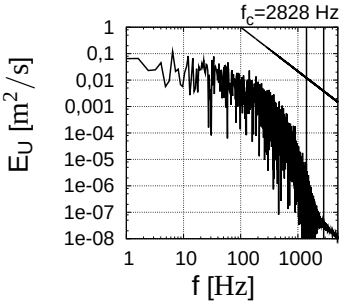


h. r=100 mm, x=200 mm

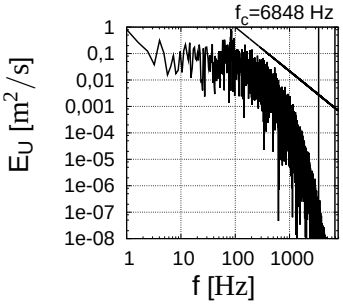
Bild A.13. Energiedichten E_U; Zyklon, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{geo}$ I. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



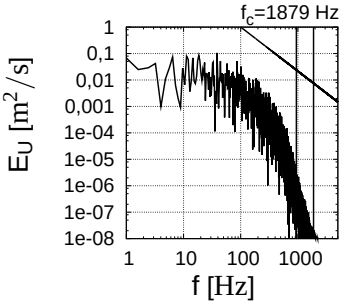
a. r=40 mm, x=100 mm



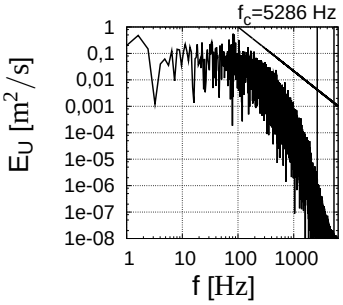
b. r=40 mm, x=200 mm



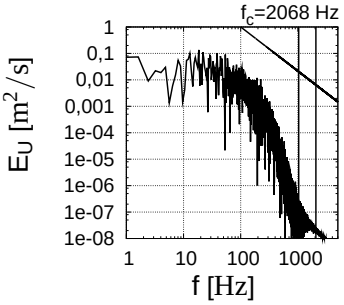
c. r=60 mm, x=100 mm



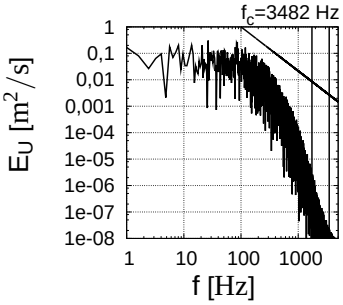
d. r=60 mm, x=200 mm



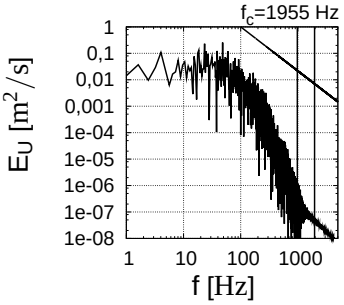
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

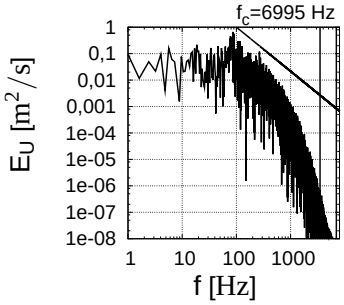


g. r=100 mm, x=100 mm

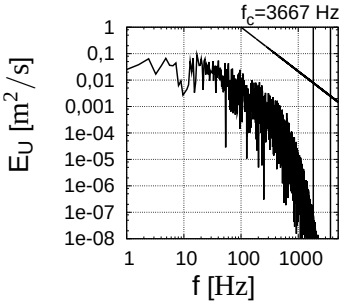


h. r=100 mm, x=200 mm

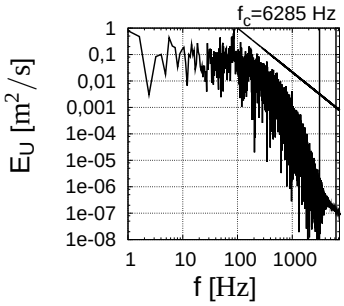
Bild A.14. Energiedichten E_U; Zyklon, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{\text{geo}}$ II. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



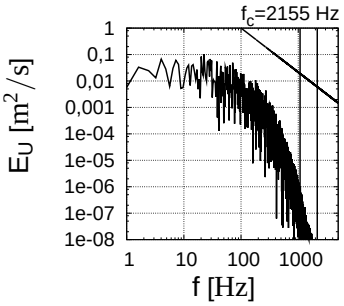
a. r=40 mm, x=100 mm



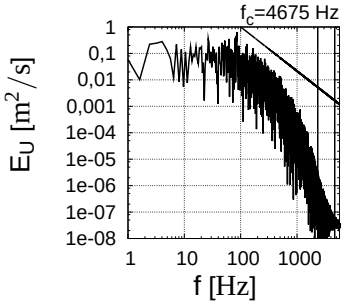
b. r=40 mm, x=200 mm



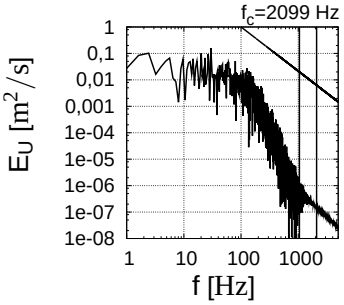
c. r=60 mm, x=100 mm



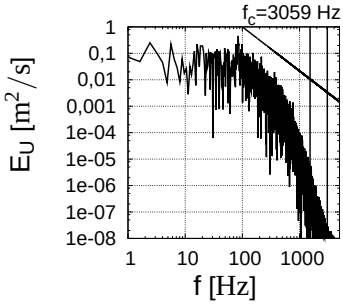
d. r=60 mm, x=200 mm



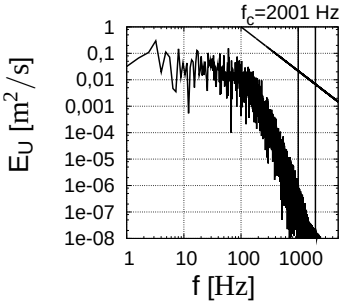
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

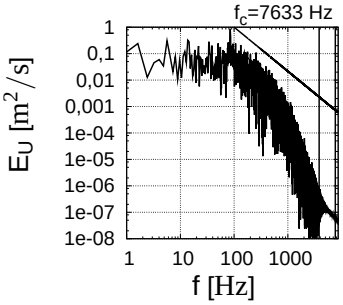


g. r=100 mm, x=100 mm

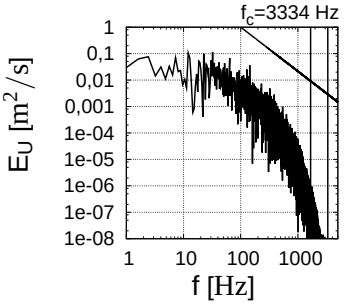


h. r=100 mm, x=200 mm

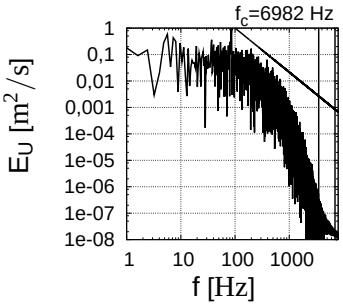
Bild A.15. Energiedichten E_U; Zyklon, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{geo}$ III. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



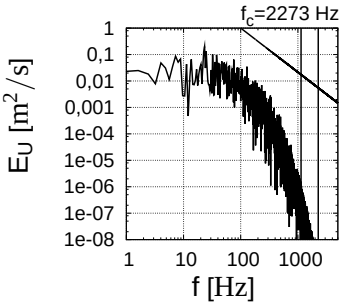
a. r=40 mm, x=100 mm



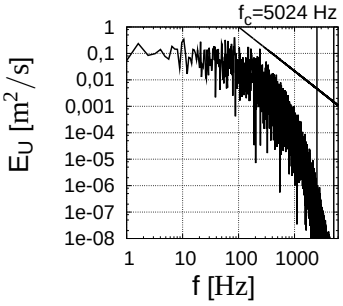
b. r=40 mm, x=200 mm



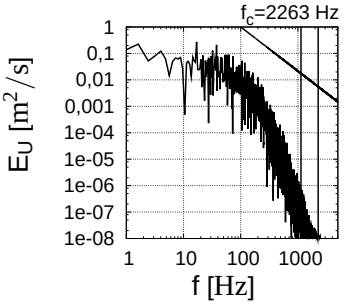
c. r=60 mm, x=100 mm



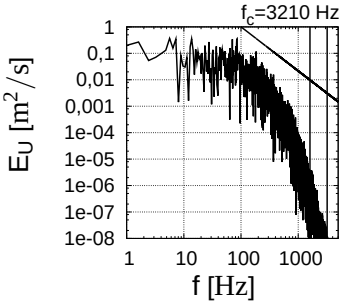
d. r=60 mm, x=200 mm



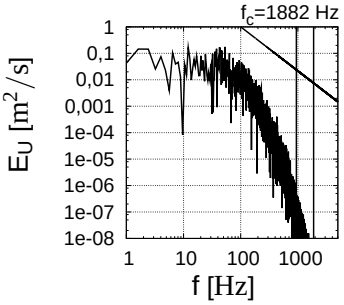
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

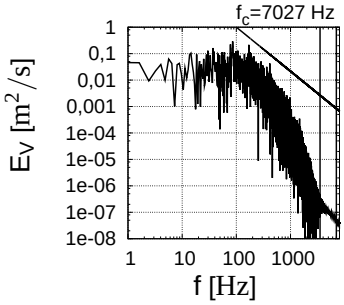


g. r=100 mm, x=100 mm

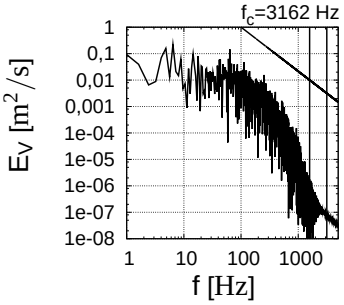


h. r=100 mm, x=200 mm

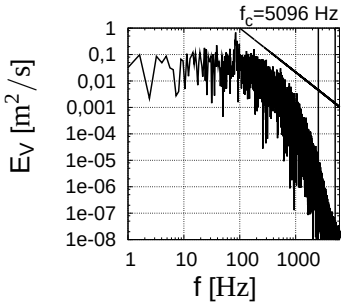
Bild A.16. Energiedichten E_U; Zyklon, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{\text{geo}}$ IV. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



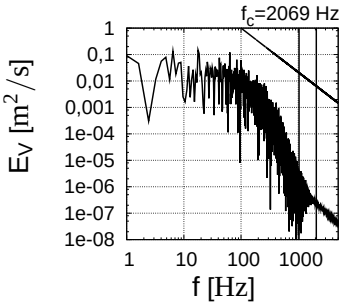
a. r=40 mm, x=100 mm



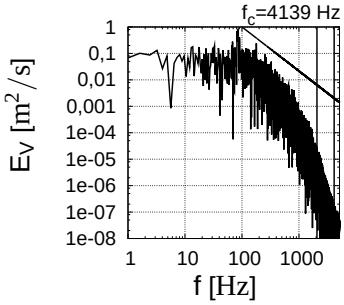
b. r=40 mm, x=200 mm



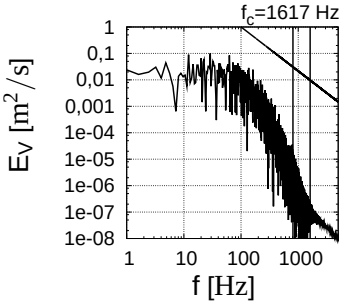
c. r=60 mm, x=100 mm



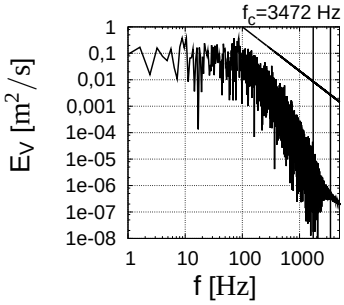
d. r=60 mm, x=200 mm



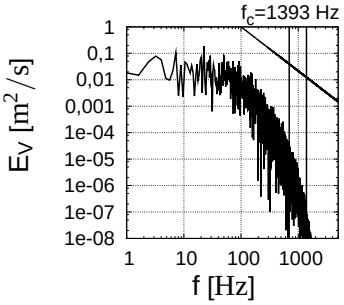
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

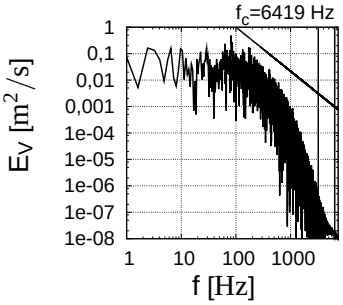


g. r=100 mm, x=100 mm

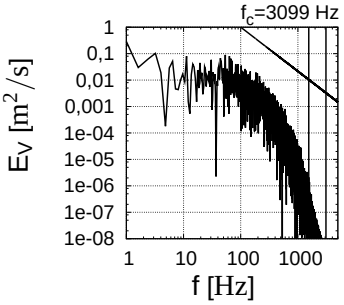


h. r=100 mm, x=200 mm

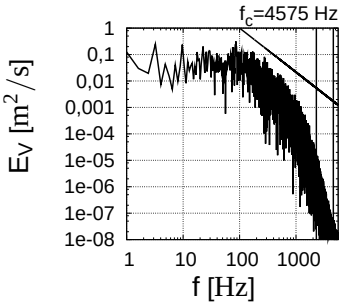
Bild A.17. Energiedichten E_V; Zyklon, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{geo}$ I. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



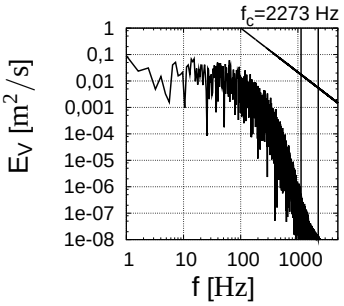
a. r=40 mm, x=100 mm



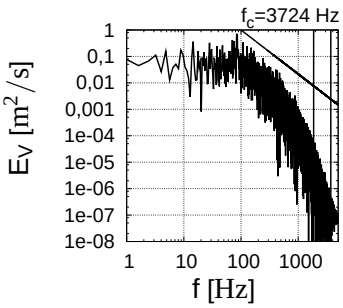
b. r=40 mm, x=200 mm



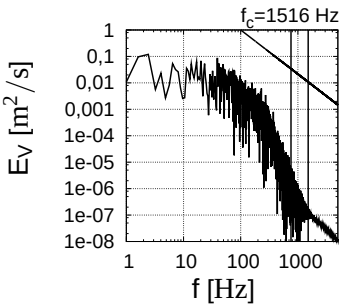
c. r=60 mm, x=100 mm



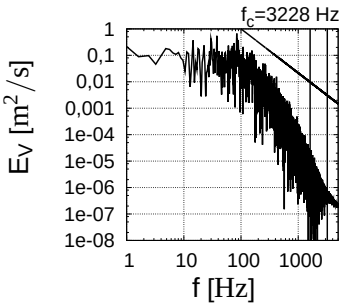
d. r=60 mm, x=200 mm



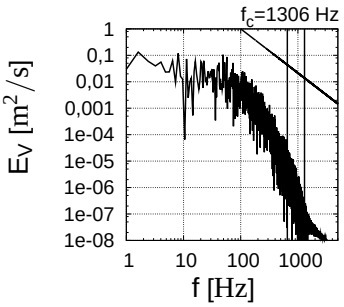
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

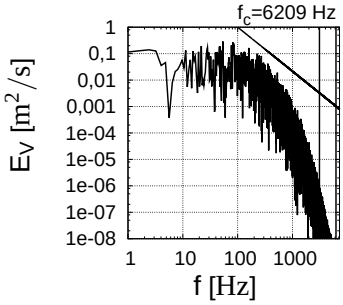


g. r=100 mm, x=100 mm

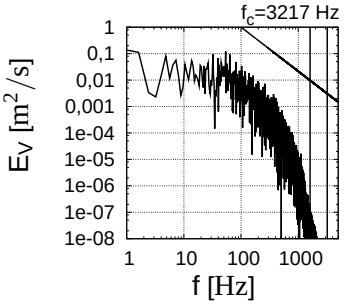


h. r=100 mm, x=200 mm

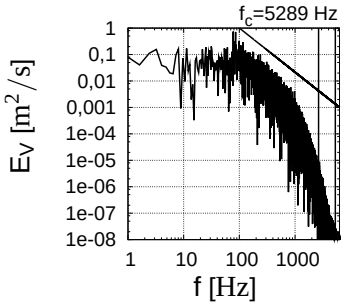
Bild A.18. Energiedichten E_V; Zyklon, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{\text{geo}}$ II. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



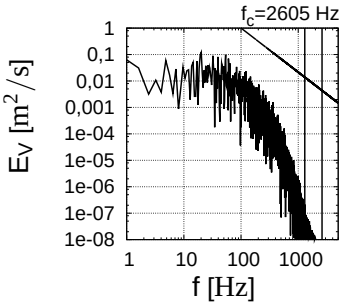
a. r=40 mm, x=100 mm



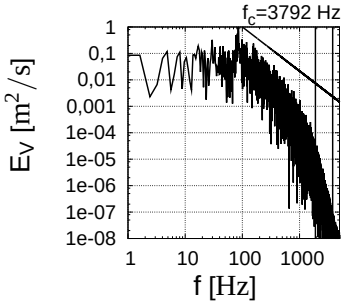
b. r=40 mm, x=200 mm



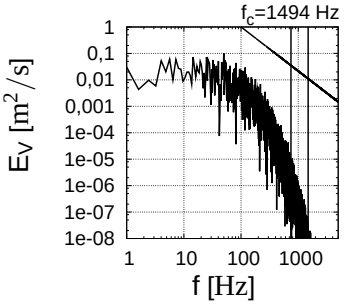
c. r=60 mm, x=100 mm



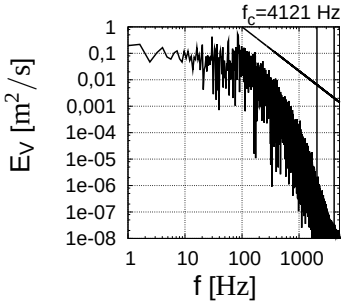
d. r=60 mm, x=200 mm



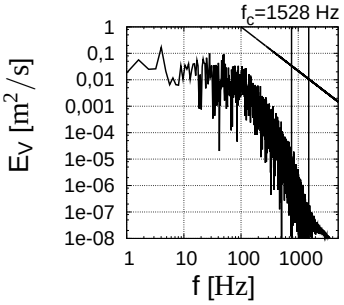
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

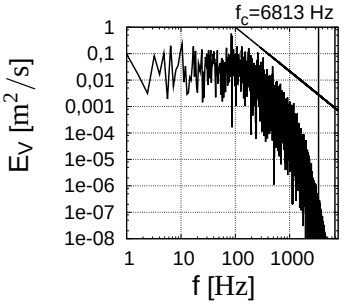


g. r=100 mm, x=100 mm

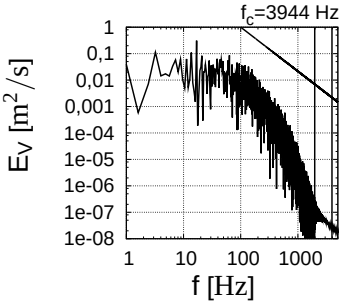


h. r=100 mm, x=200 mm

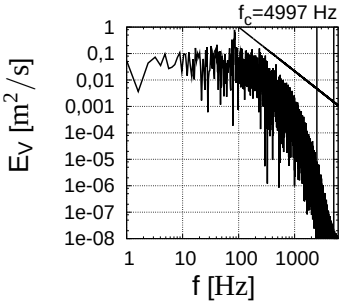
Bild A.19. Energiedichten E_V; Zyklon, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{geo}$ III. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



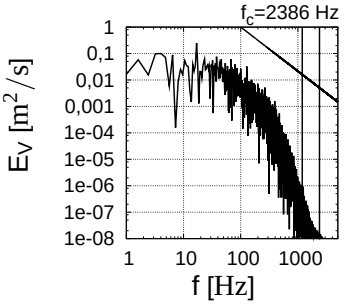
a. r=40 mm, x=100 mm



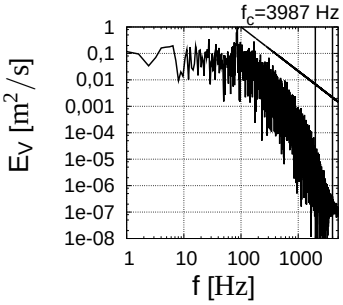
b. r=40 mm, x=200 mm



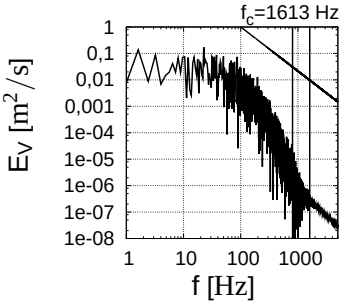
c. r=60 mm, x=100 mm



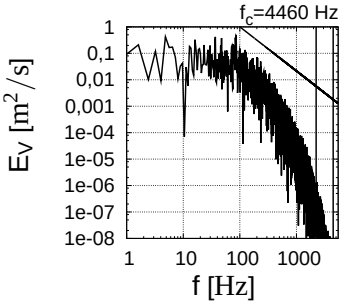
d. r=60 mm, x=200 mm



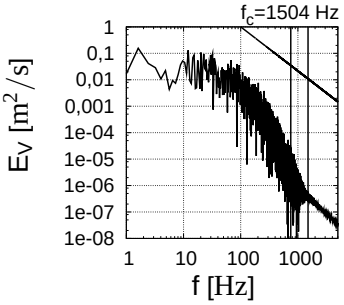
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

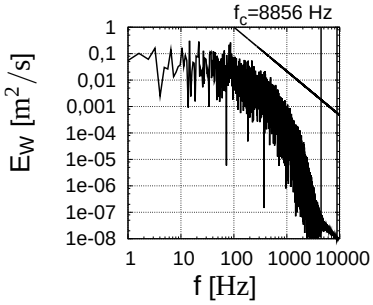


g. r=100 mm, x=100 mm

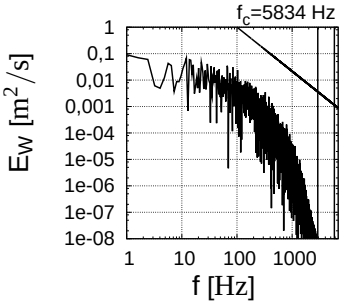


h. r=100 mm, x=200 mm

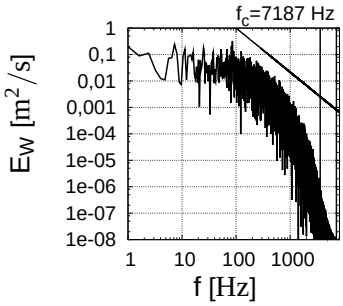
Bild A.20. Energiedichten E_V; Zyklon, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{geo}$ IV. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



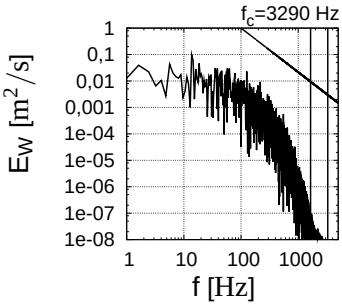
a. r=40 mm, x=100 mm



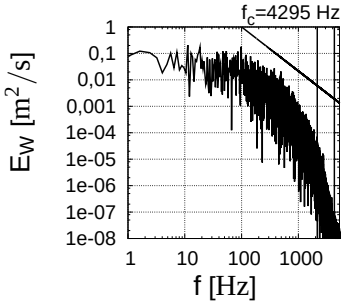
b. r=40 mm, x=200 mm



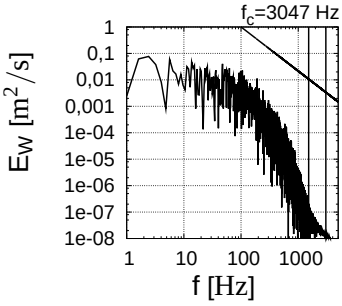
c. r=60 mm, x=100 mm



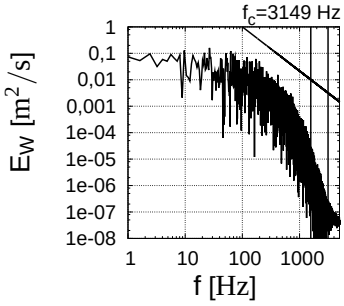
d. r=60 mm, x=200 mm



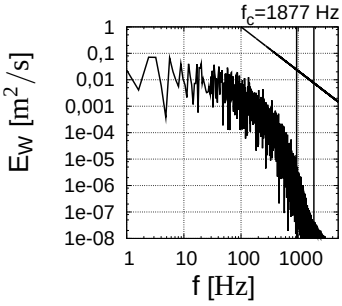
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

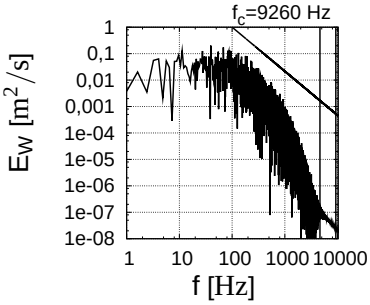


g. r=100 mm, x=100 mm

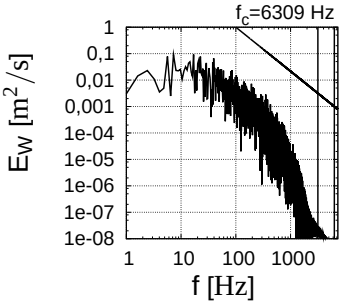


h. r=100 mm, x=200 mm

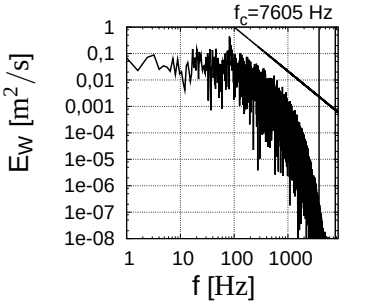
Bild A.21. Energiedichten E_W; Zyklon, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{\text{geo}}$ I. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



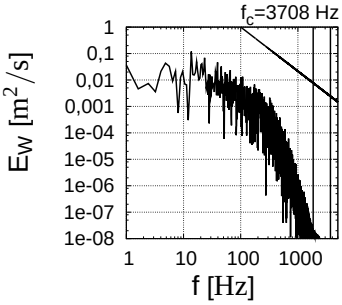
a. r=40 mm, x=100 mm



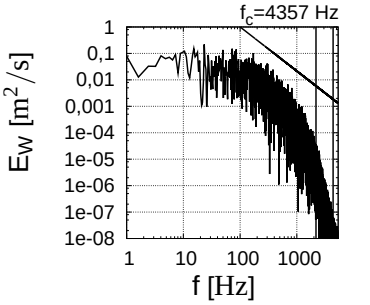
b. r=40 mm, x=200 mm



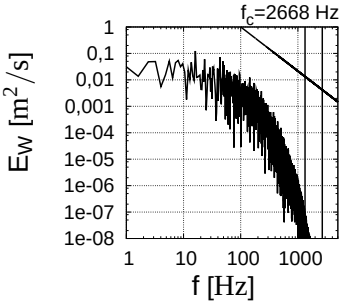
c. r=60 mm, x=100 mm



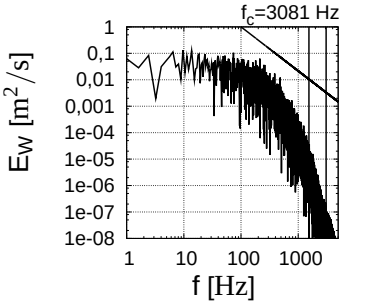
d. r=60 mm, x=200 mm



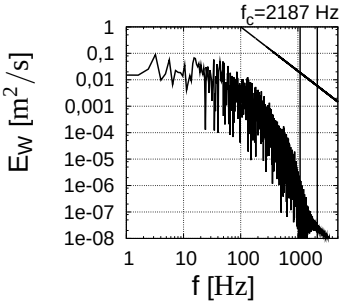
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

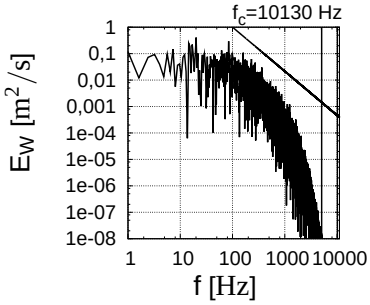


g. r=100 mm, x=100 mm

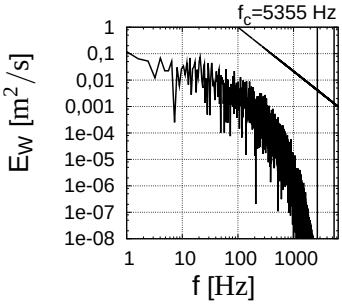


h. r=100 mm, x=200 mm

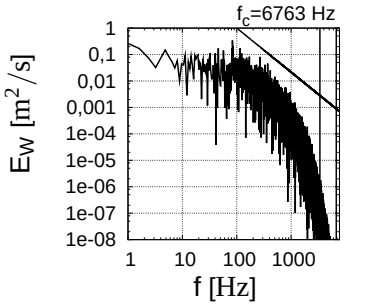
Bild A.22. Energiedichten E_W; Zyklon, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{\text{geo}}$ II. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



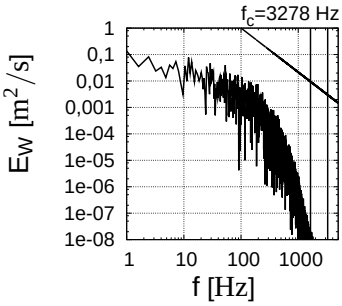
a. r=40 mm, x=100 mm



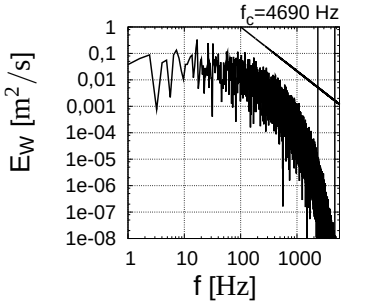
b. r=40 mm, x=200 mm



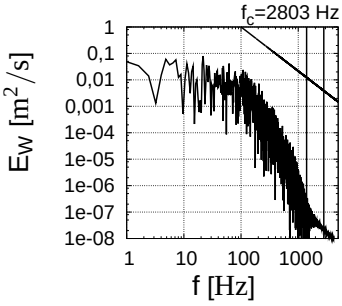
c. r=60 mm, x=100 mm



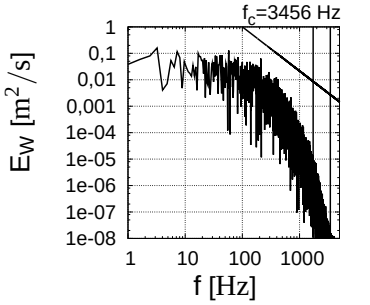
d. r=60 mm, x=200 mm



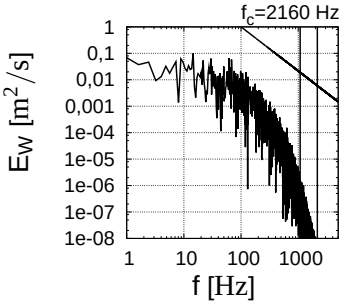
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm

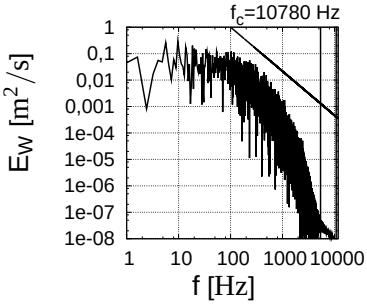


g. r=100 mm, x=100 mm

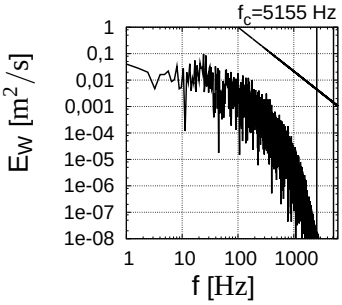


h. r=100 mm, x=200 mm

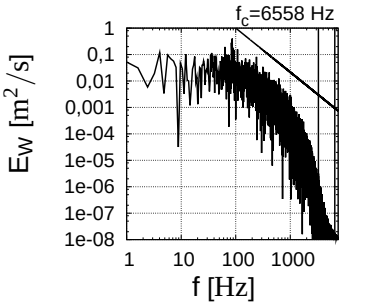
Bild A.23. Energiedichten E_W; Zyklon, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{geo}$ III. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.



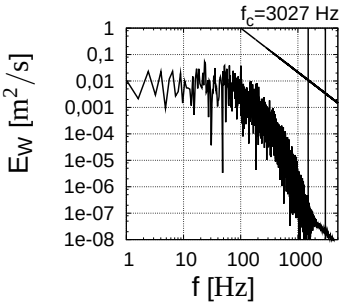
a. r=40 mm, x=100 mm



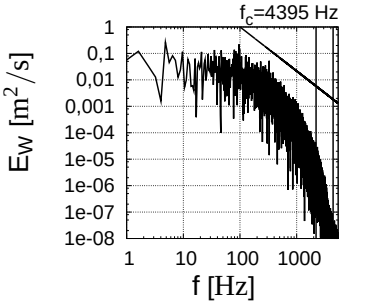
b. r=40 mm, x=200 mm



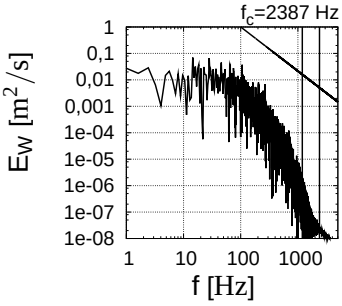
c. r=60 mm, x=100 mm



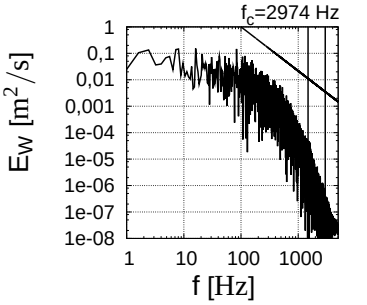
d. r=60 mm, x=200 mm



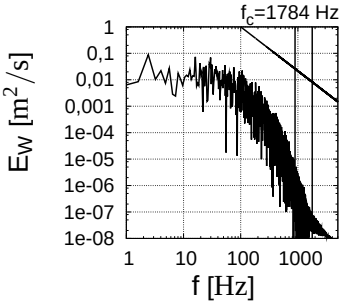
e. r=80 mm, x=100 mm



f. r=80 mm, x=200 mm



g. r=100 mm, x=100 mm



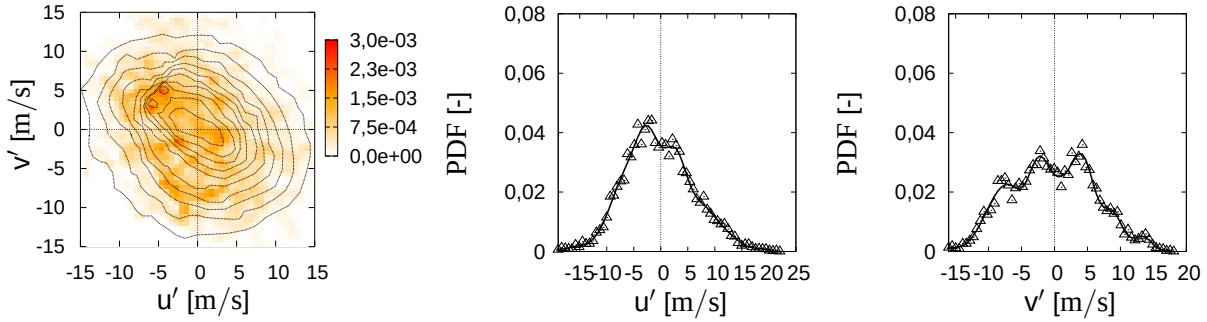
h. r=100 mm, x=200 mm

Bild A.24. Energiedichten E_W; Zyklon, x=100 mm (links), x=200 mm (rechts), Quadrant$_{geo}$ IV. Vertikale Linien kennzeichnen die lokale Cut-Off-Frequenz f_c bzw. $f_c/2$, schräge den $-5/3$-Abfall; die Cut-Off-Frequenz ist zusätzlich oberhalb der Graphik gegeben.

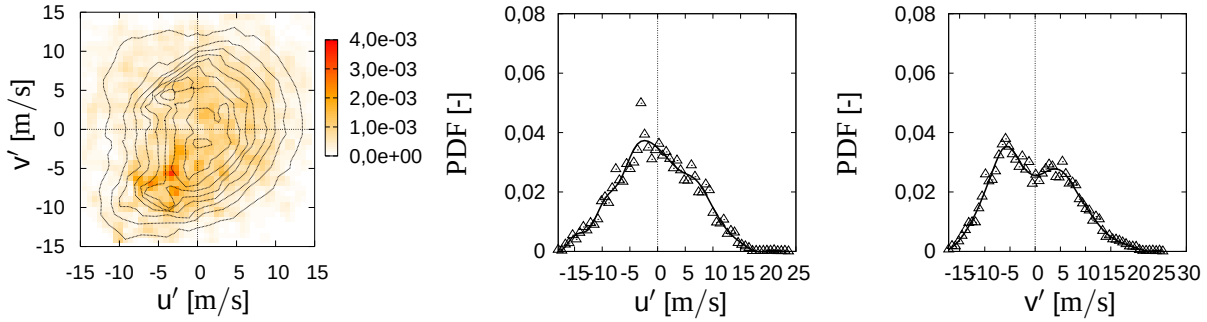
Anhang B

Verbundwahrscheinlichkeitsdichten

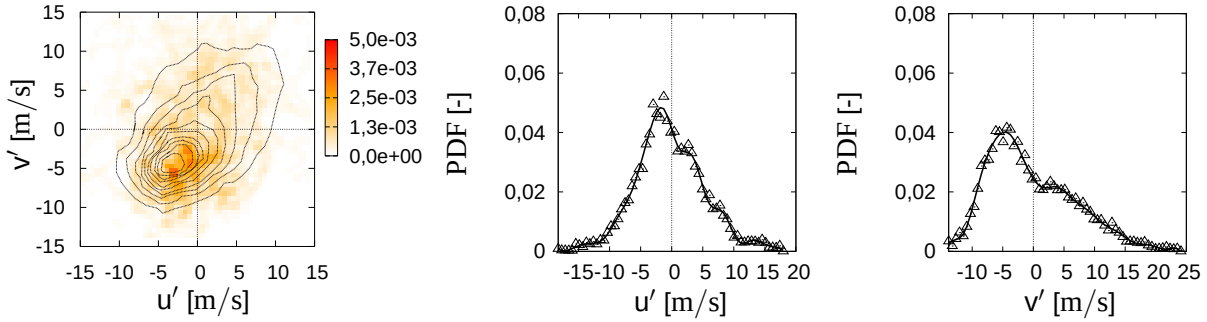
B.1 Freistrahl; Axiale Position 100 mm



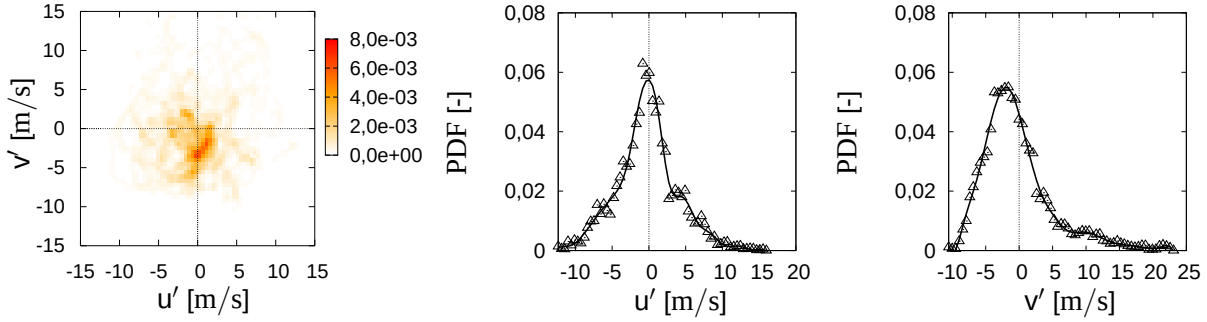
a. jPDF $u'v'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF v', r=40 mm



d. jPDF $u'v'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF v', r=60 mm

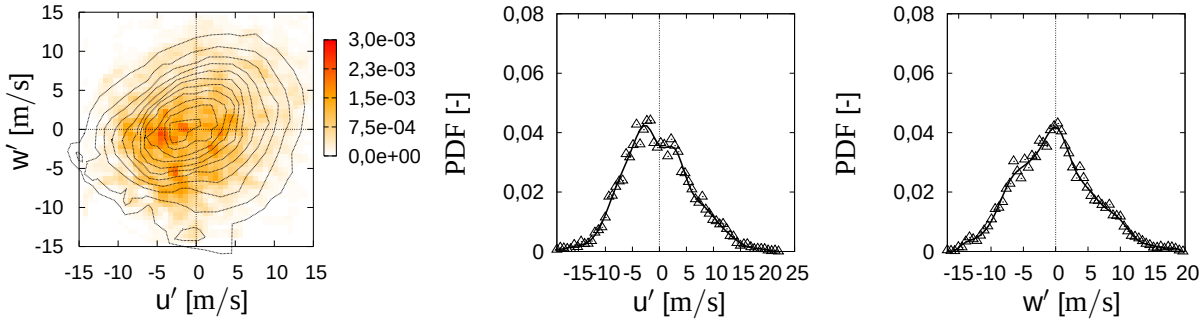


g. jPDF $u'v'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF v', r=80 mm

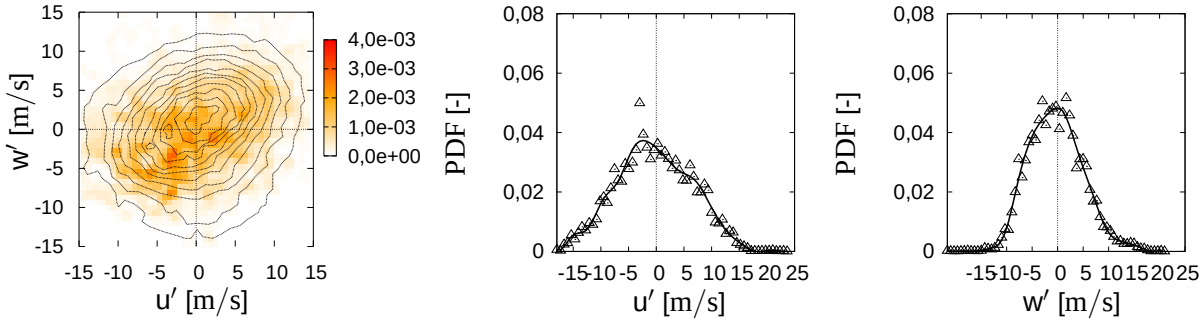


j. jPDF $u'v'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF v', r=100 mm

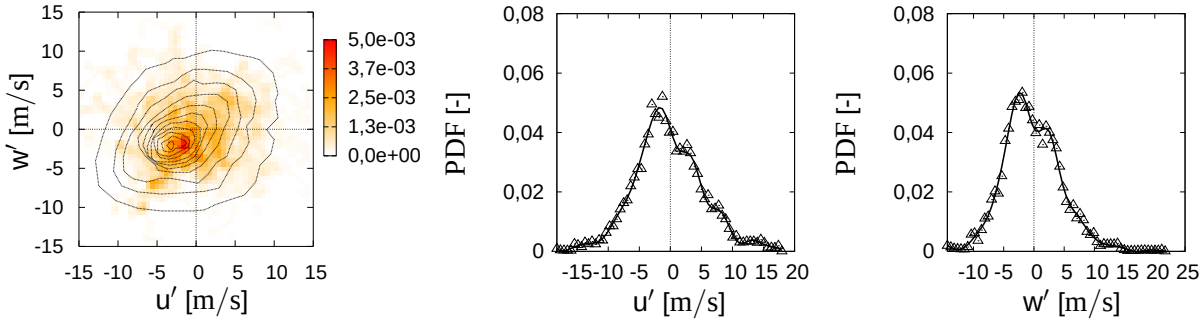
Bild B.1. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ I. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



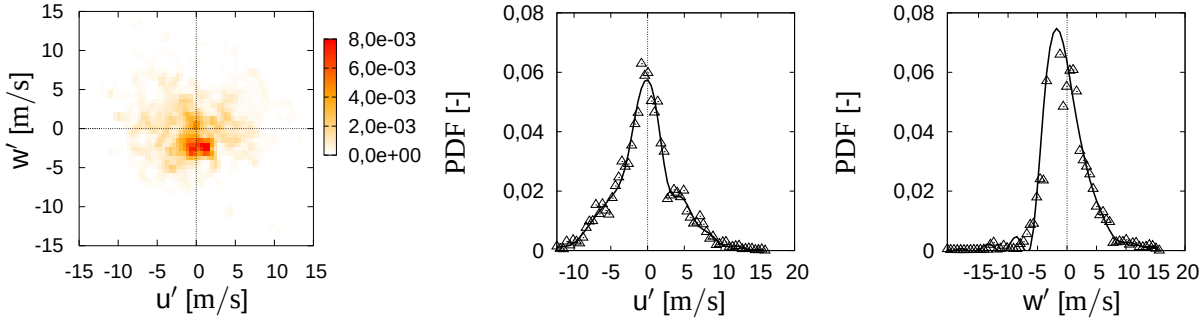
a. jPDF $u'w'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $u'w'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

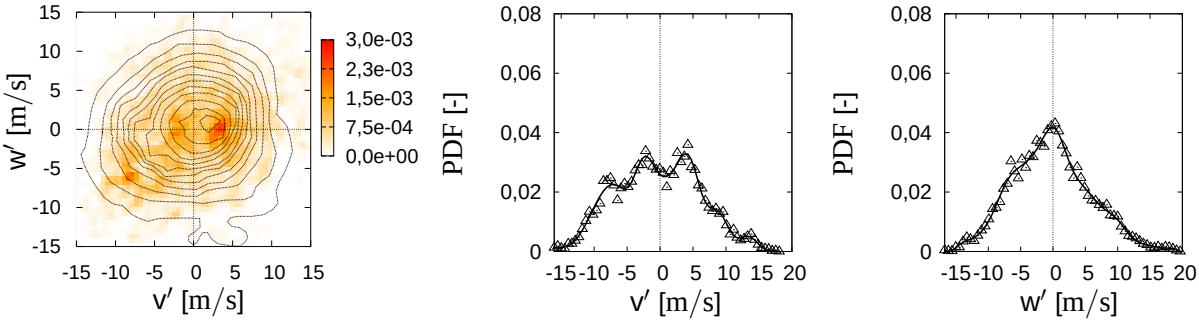


g. jPDF $u'w'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

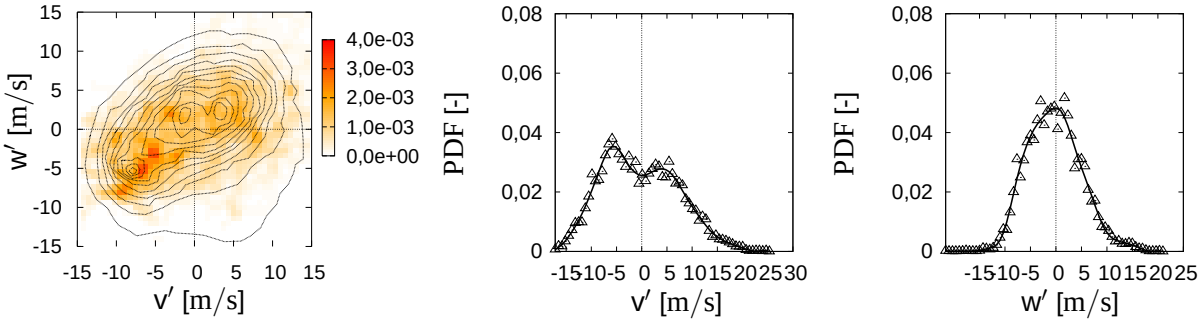


j. jPDF $u'w'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

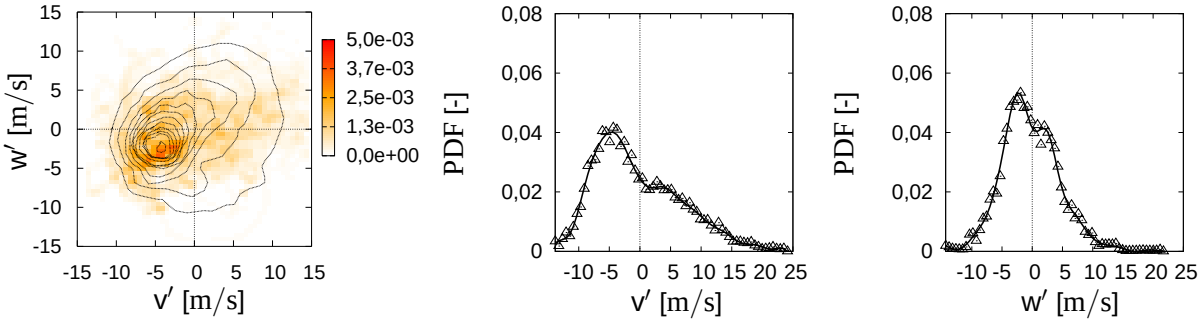
Bild B.2. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ I. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



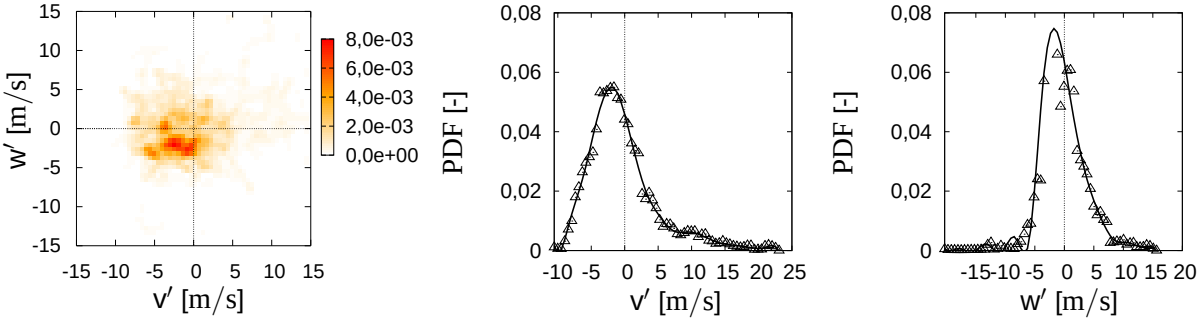
a. jPDF $v'w'$, r=40 mm b. PDF v', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $v'w'$, r=60 mm e. PDF v', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

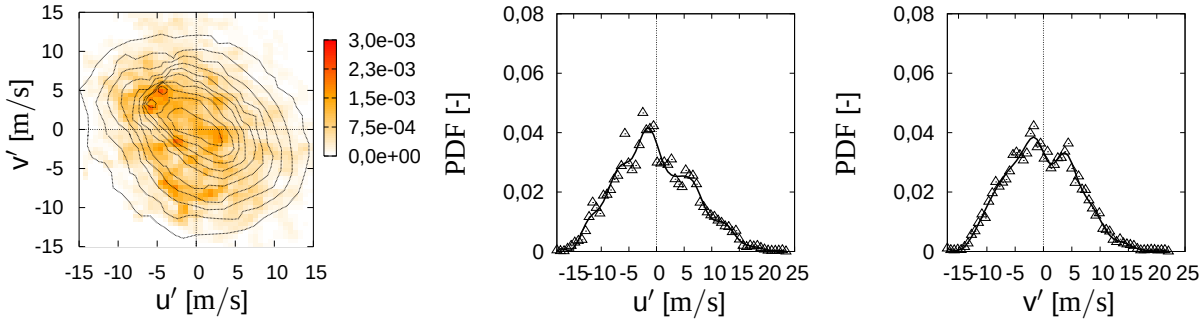


g. jPDF $v'w'$, r=80 mm h. PDF v', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

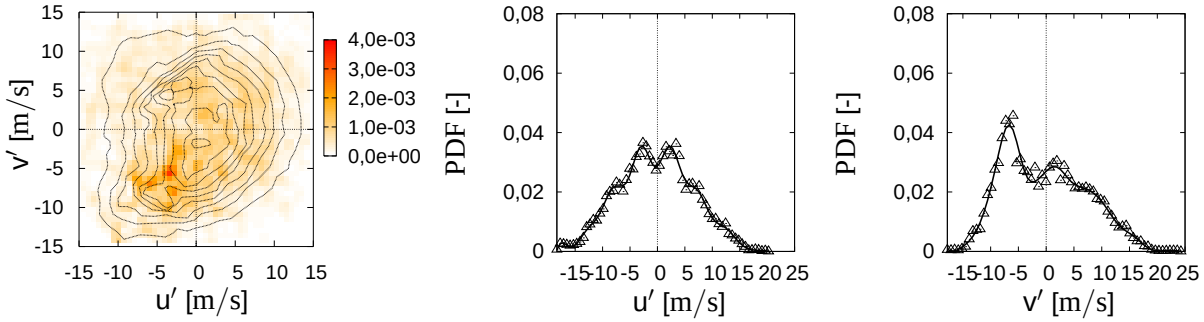


j. jPDF $v'w'$, r=100 mm k. PDF v', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

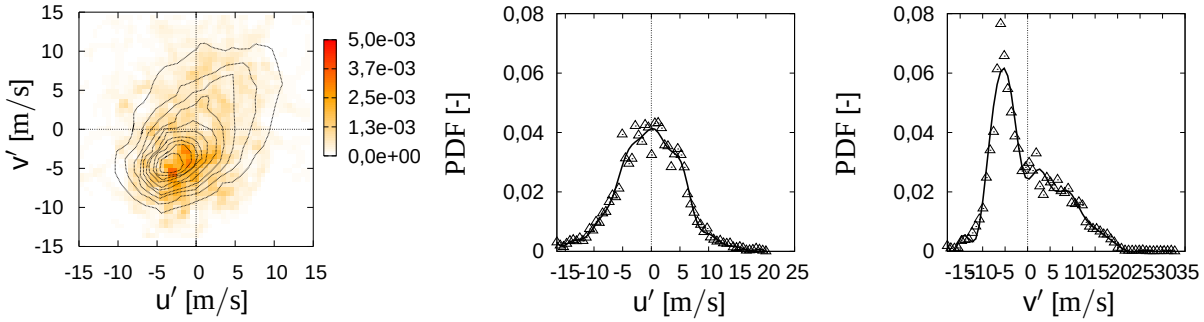
Bild B.3. Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ I. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



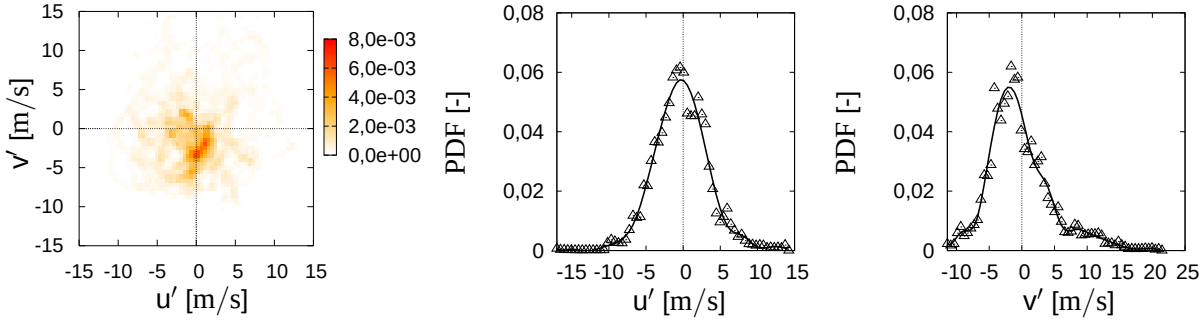
a. jPDF $u'v'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF v', r=40 mm



d. jPDF $u'v'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF v', r=60 mm

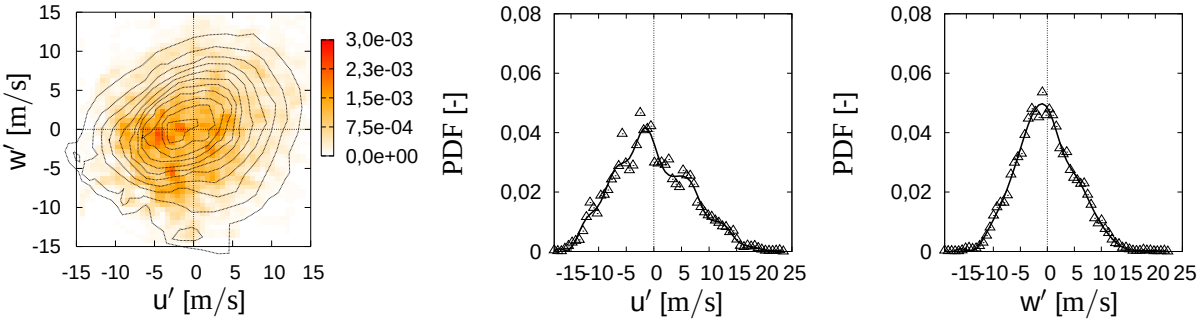


g. jPDF $u'v'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF v', r=80 mm

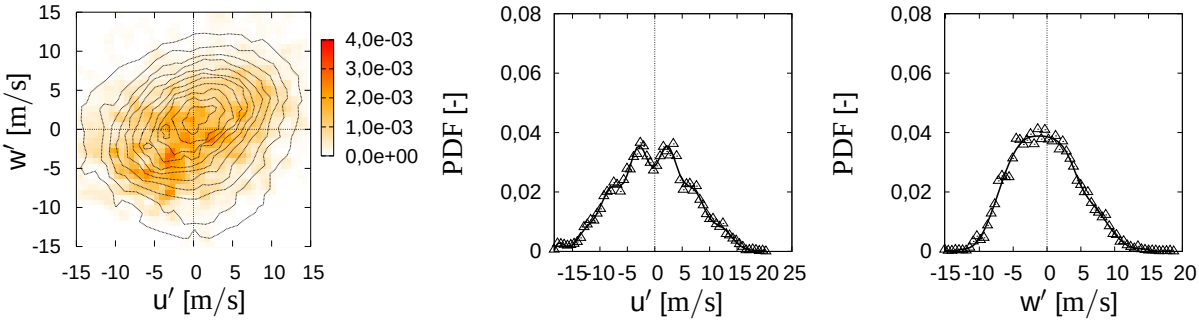


j. jPDF $u'v'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF v', r=100 mm

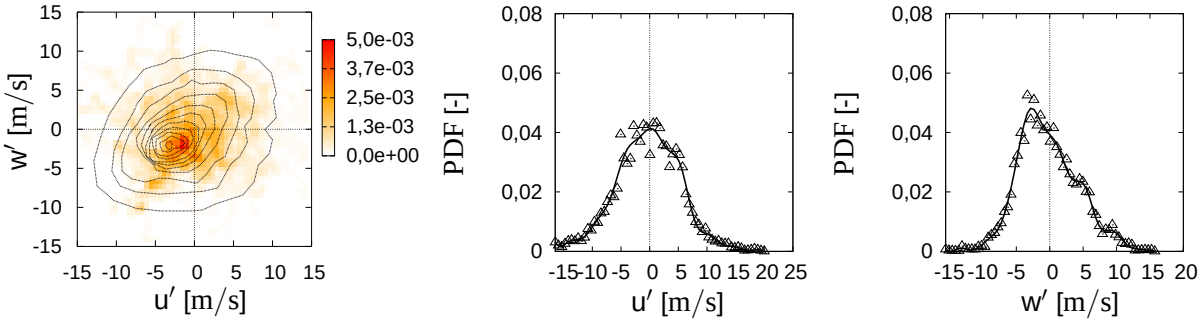
Bild B.4. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ II. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



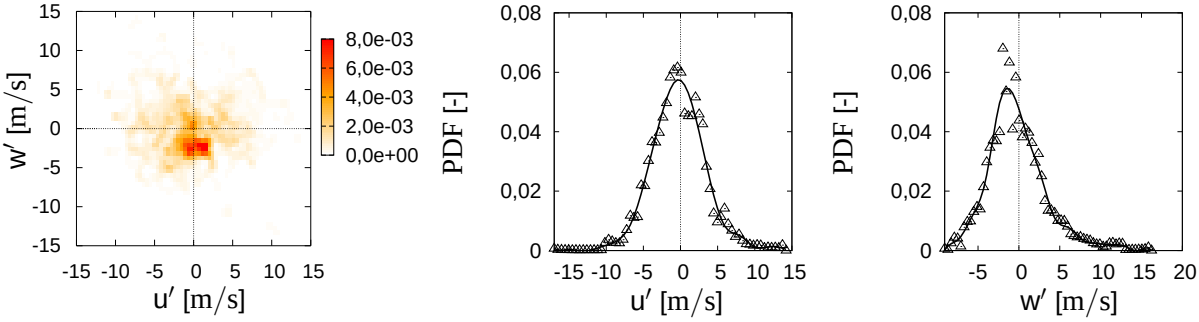
a. jPDF $u'w'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $u'w'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

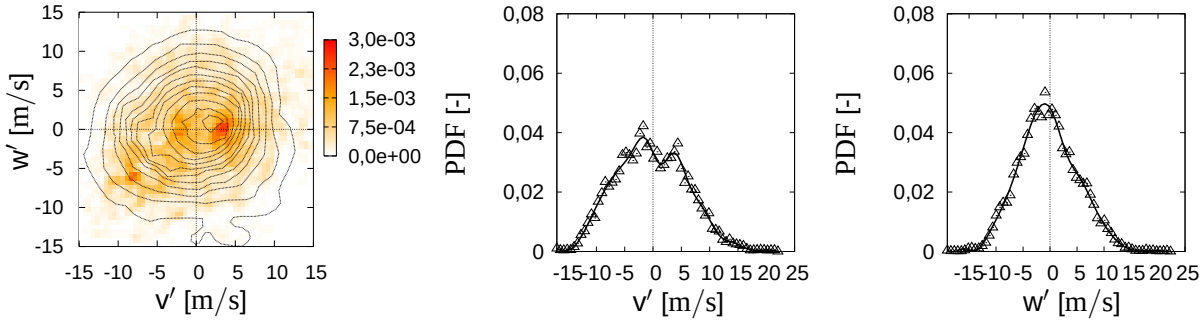


g. jPDF $u'w'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

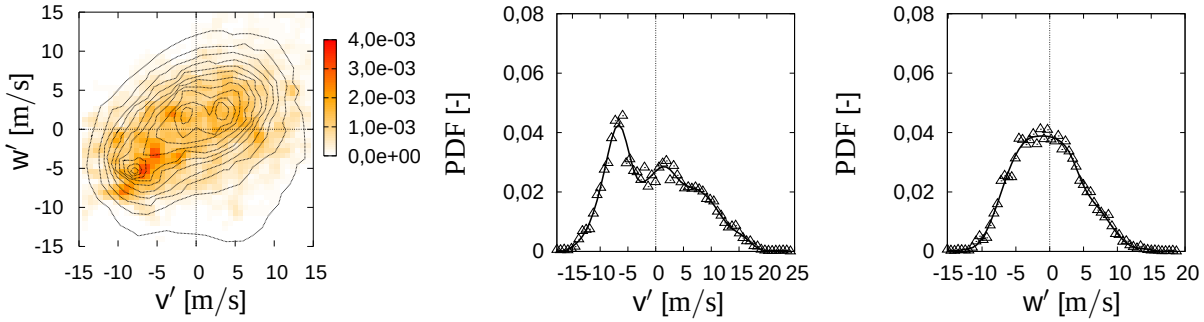


j. jPDF $u'w'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

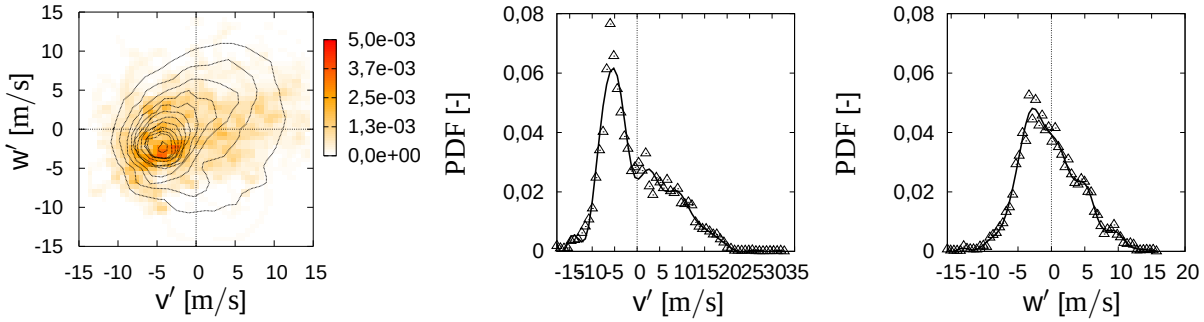
Bild B.5. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Freistrahl, x=100 mm, $\text{Quadrant}_{\text{geo}}$ II. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



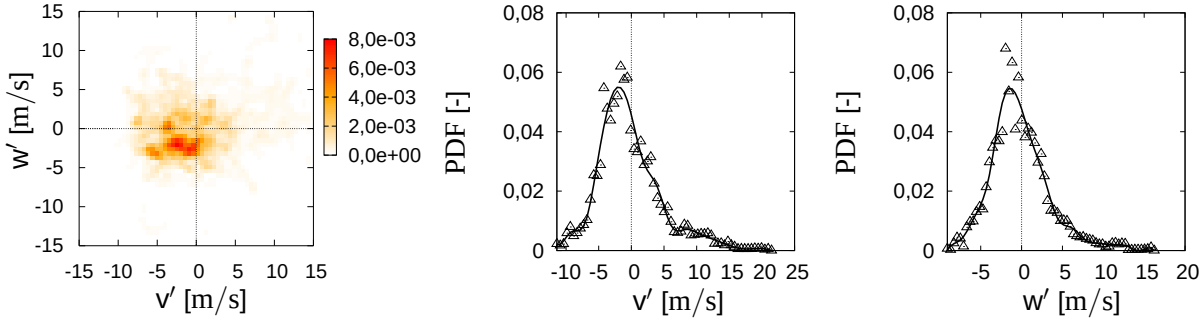
a. jPDF $v'w'$, r=40 mm b. PDF v', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $v'w'$, r=60 mm e. PDF v', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

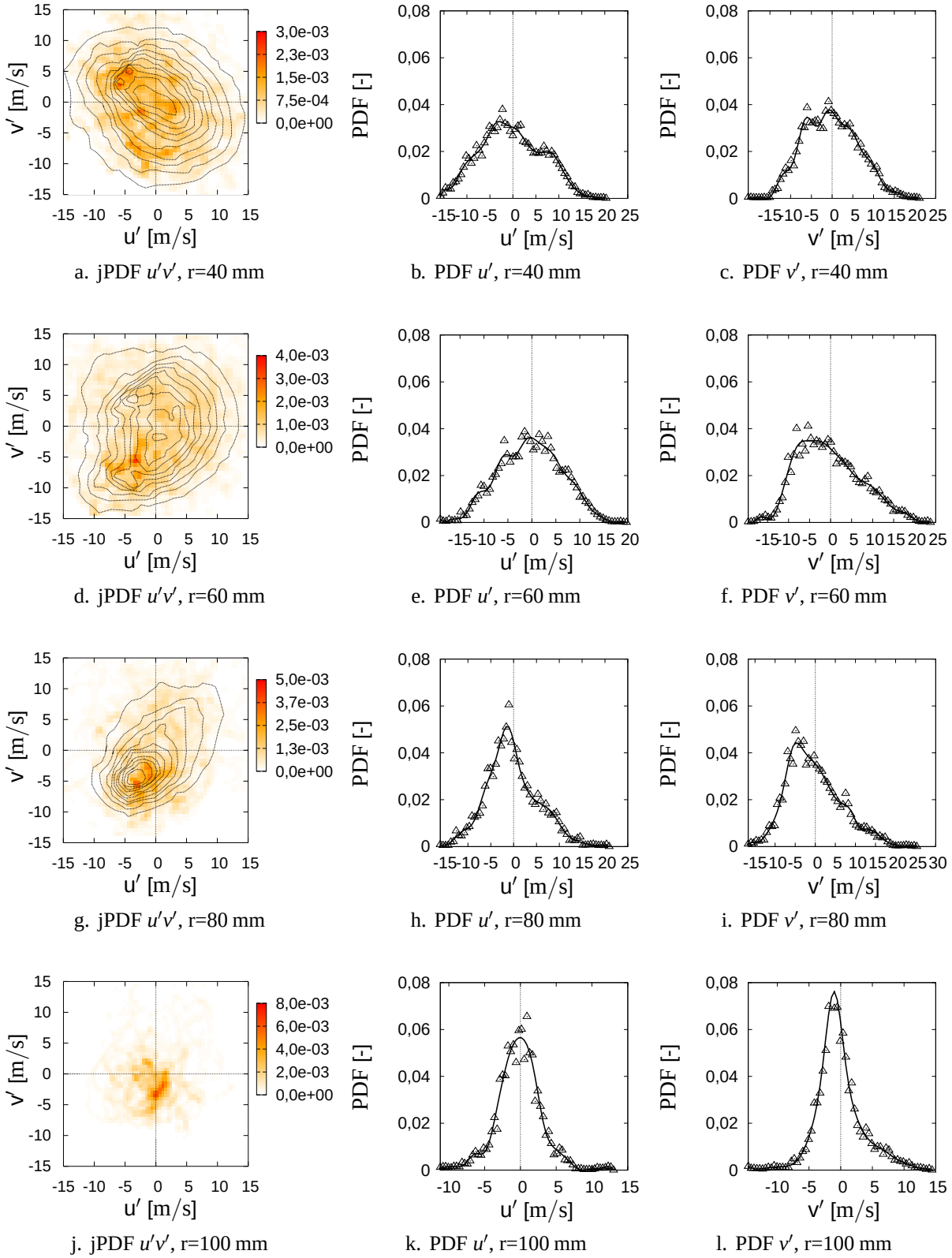


g. jPDF $v'w'$, r=80 mm h. PDF v', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm



j. jPDF $v'w'$, r=100 mm k. PDF v', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

Bild B.6. Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ II. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



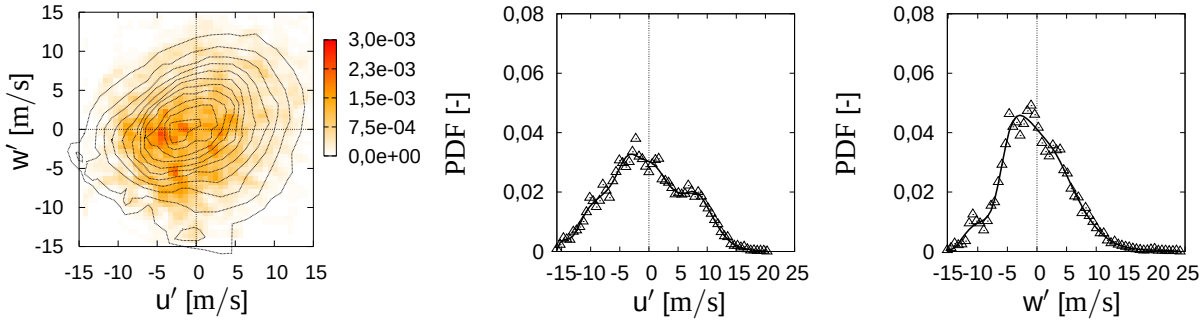
a. jPDF $u'v'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF v', r=40 mm

d. jPDF $u'v'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF v', r=60 mm

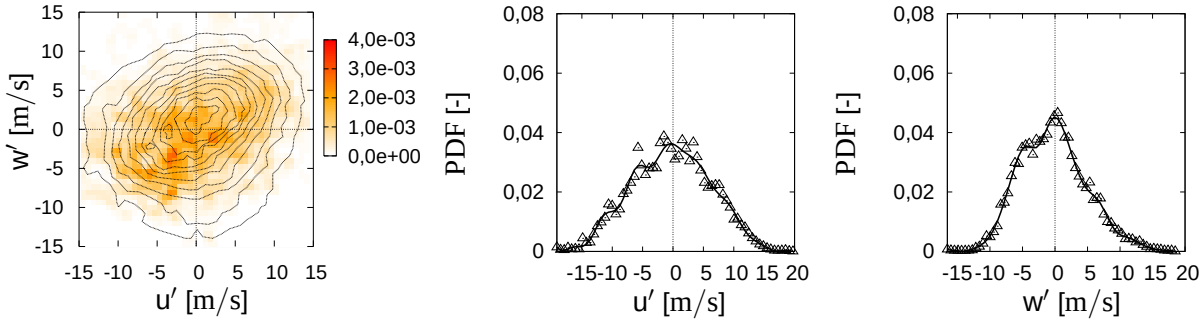
g. jPDF $u'v'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF v', r=80 mm

j. jPDF $u'v'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF v', r=100 mm

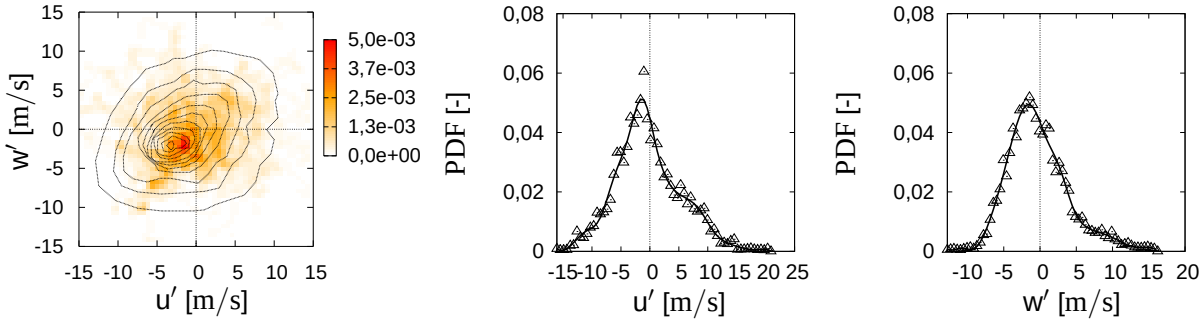
Bild B.7. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ III. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



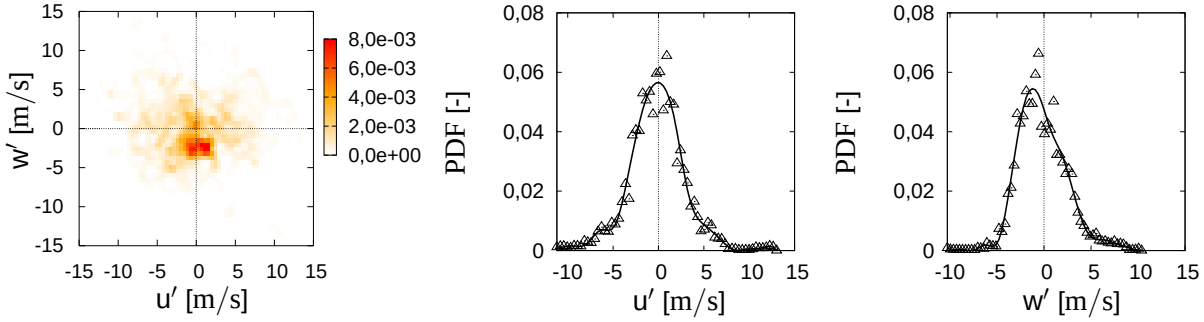
a. jPDF $u'w'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $u'w'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

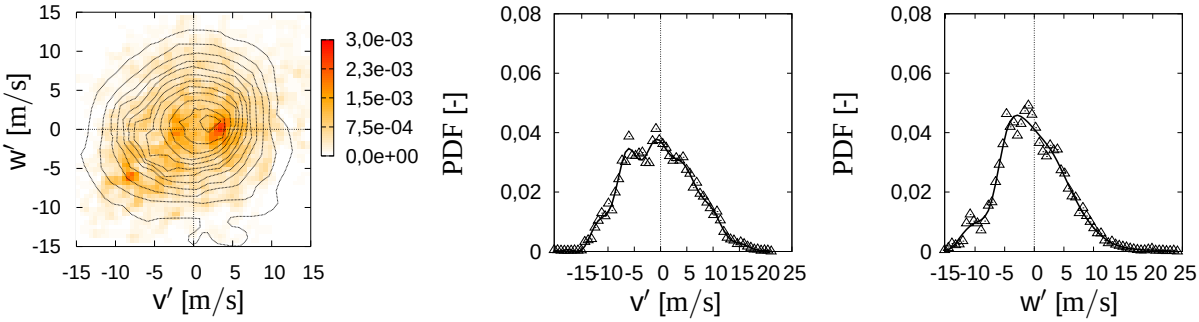


g. jPDF $u'w'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

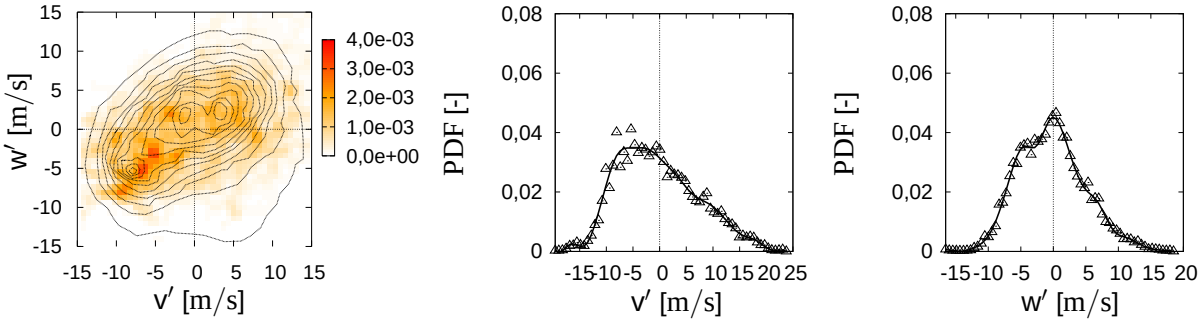


j. jPDF $u'w'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

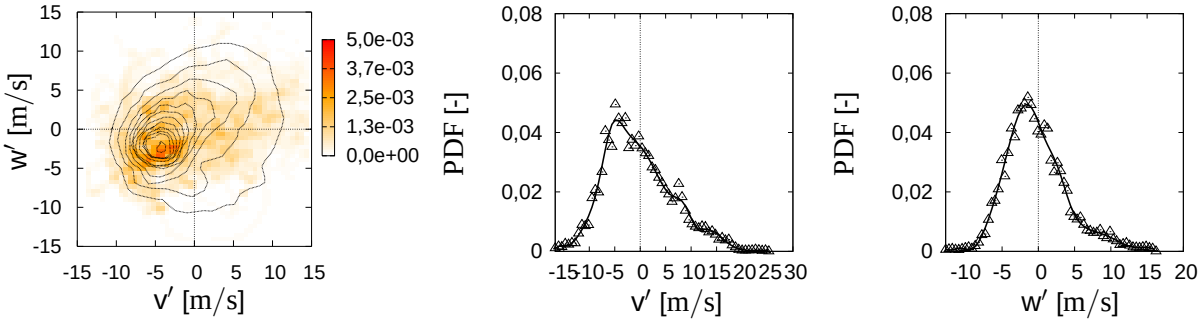
Bild B.8. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ III. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



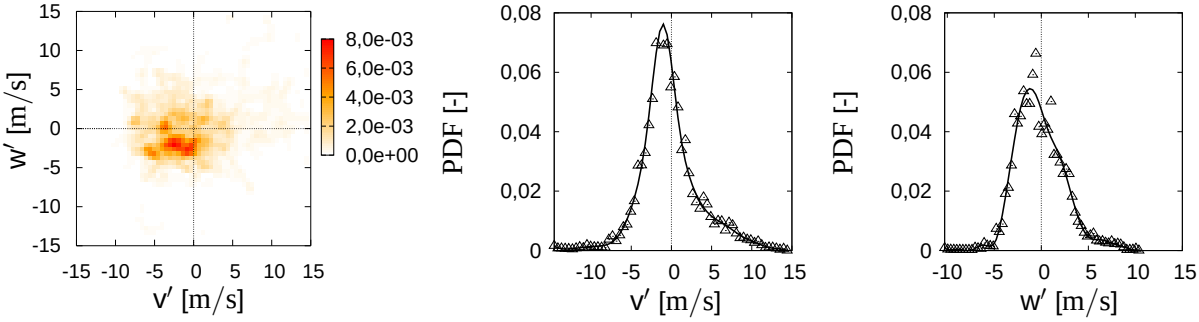
a. jPDF $v'w'$, r=40 mm b. PDF v', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $v'w'$, r=60 mm e. PDF v', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

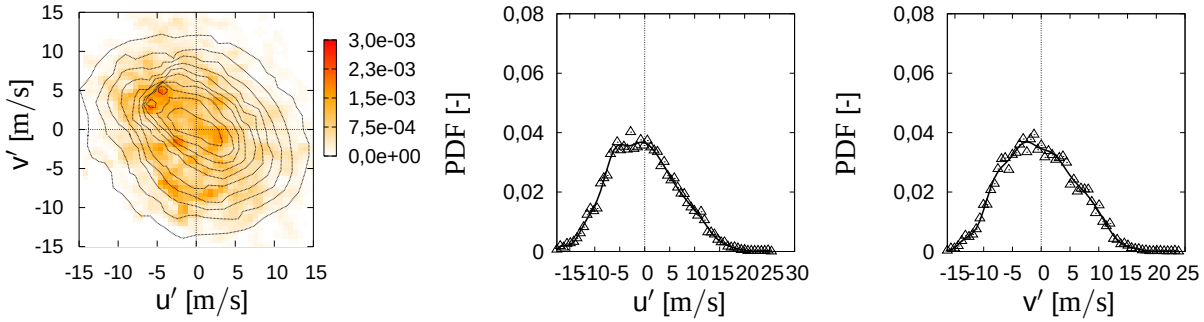


g. jPDF $v'w'$, r=80 mm h. PDF v', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

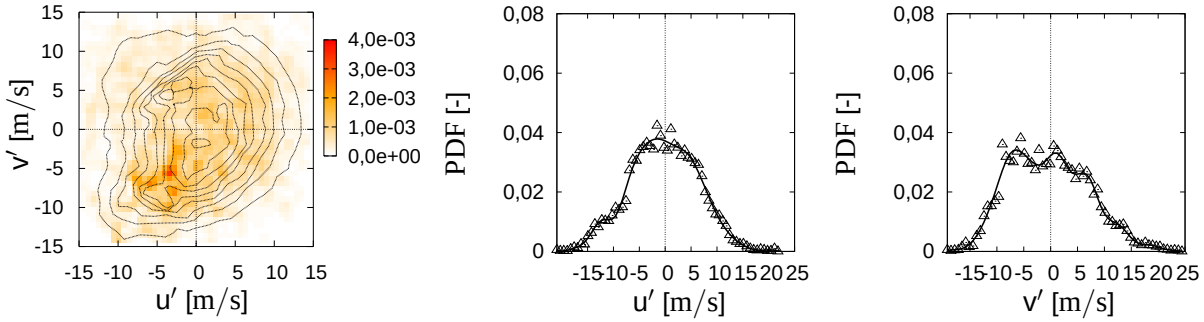


j. jPDF $v'w'$, r=100 mm k. PDF v', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

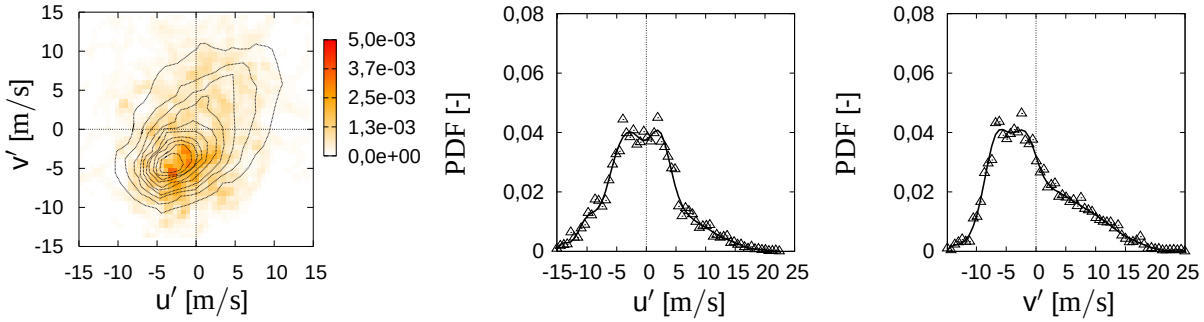
Bild B.9. Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadrant_{geo} III. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



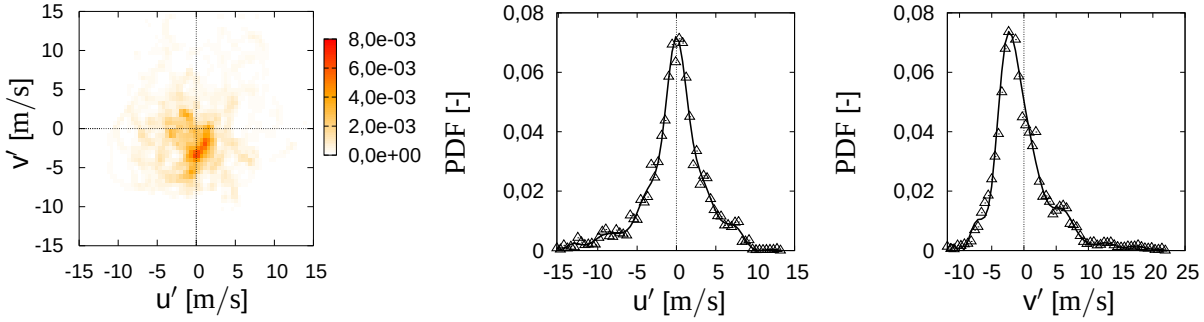
a. jPDF $u'v'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF v', r=40 mm



d. jPDF $u'v'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF v', r=60 mm

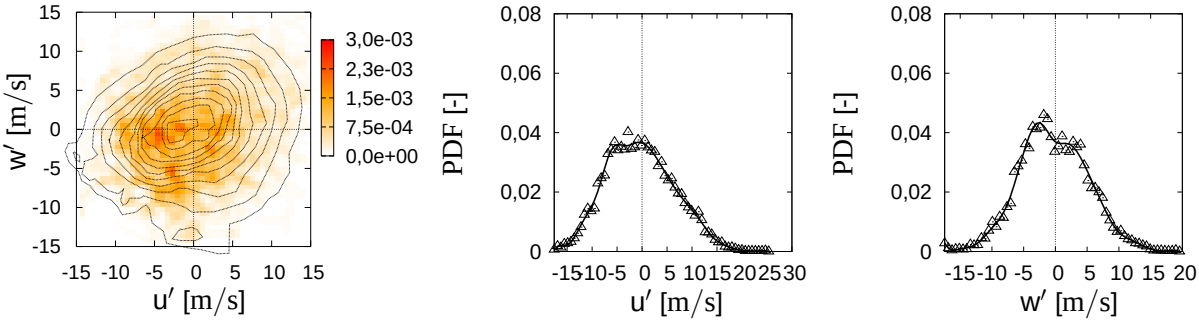


g. jPDF $u'v'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF v', r=80 mm

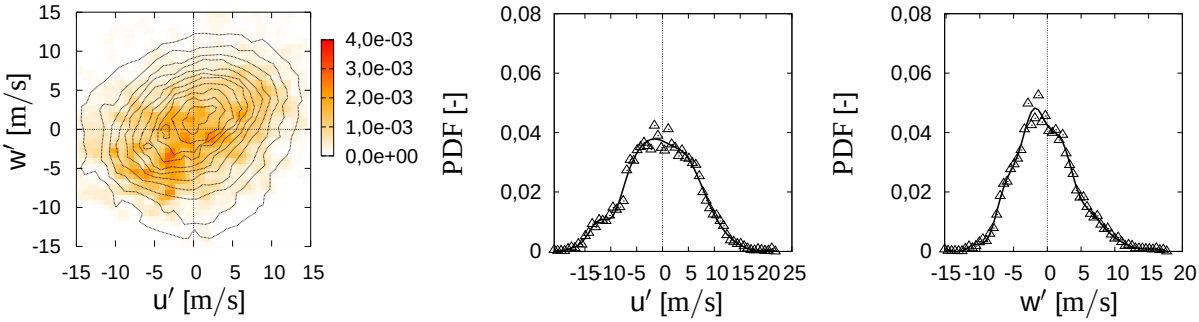


j. jPDF $u'v'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF v', r=100 mm

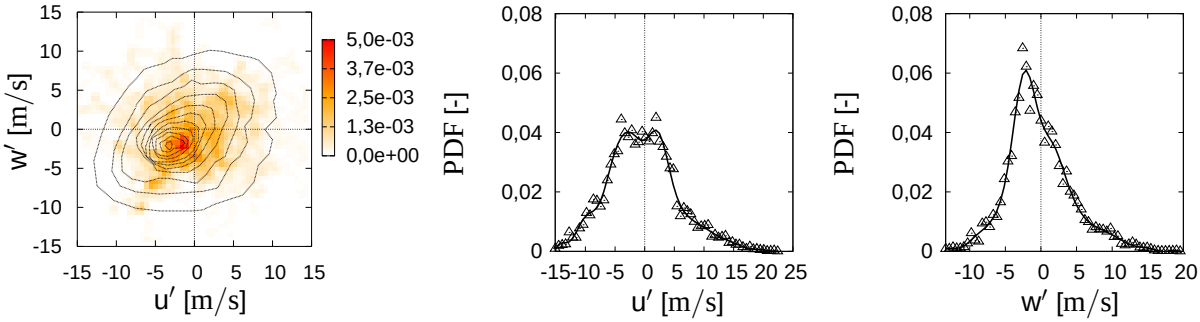
Bild B.10. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ IV. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



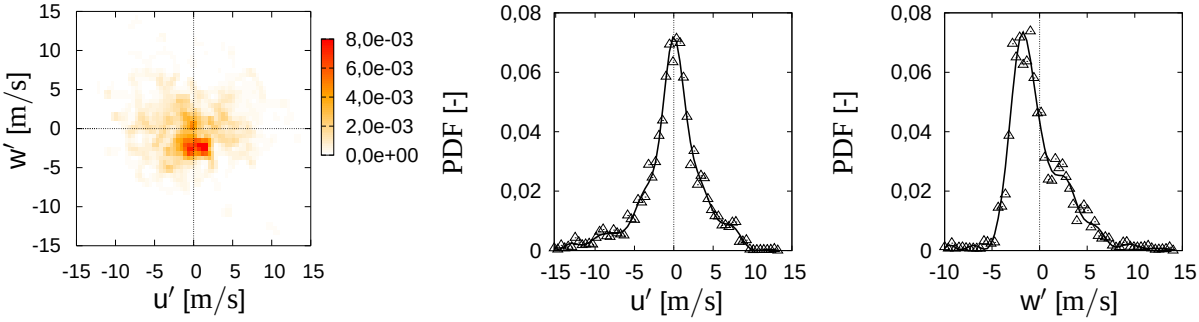
a. jPDF $u'w'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $u'w'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

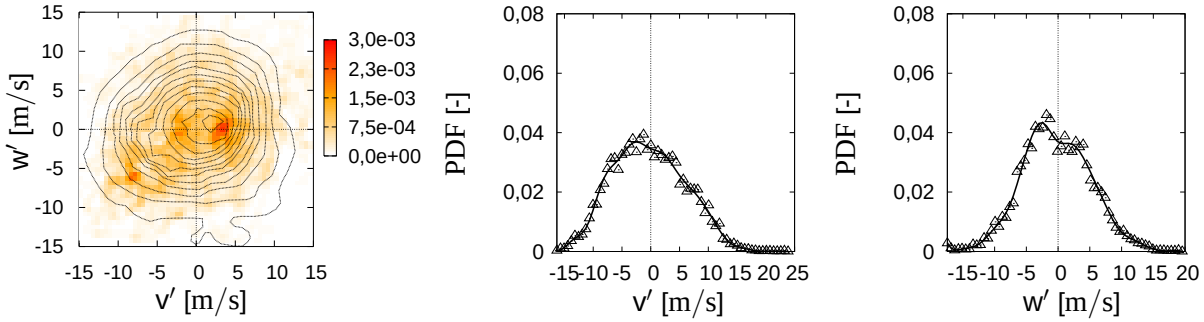


g. jPDF $u'w'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

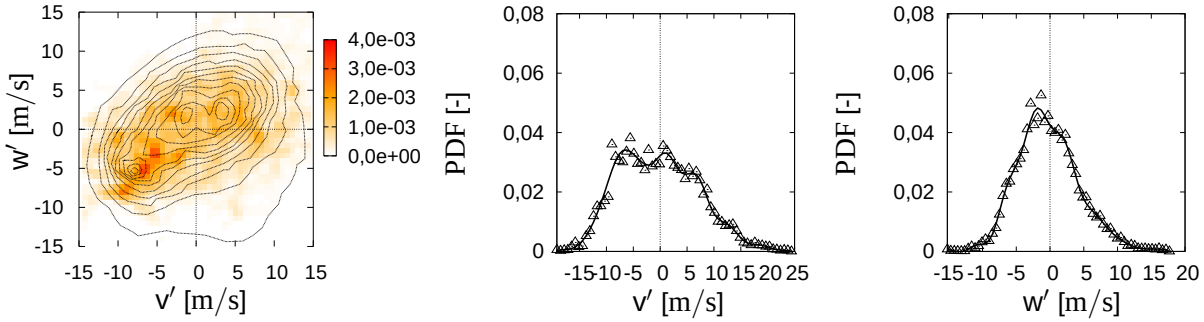


j. jPDF $u'w'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

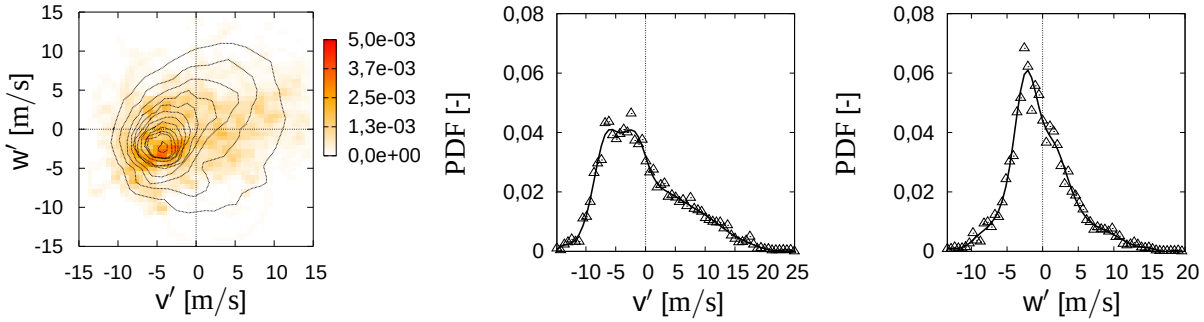
Bild B.11. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Freistrahl, x=100 mm, $\text{Quadrant}_{\text{geo}}$ IV. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



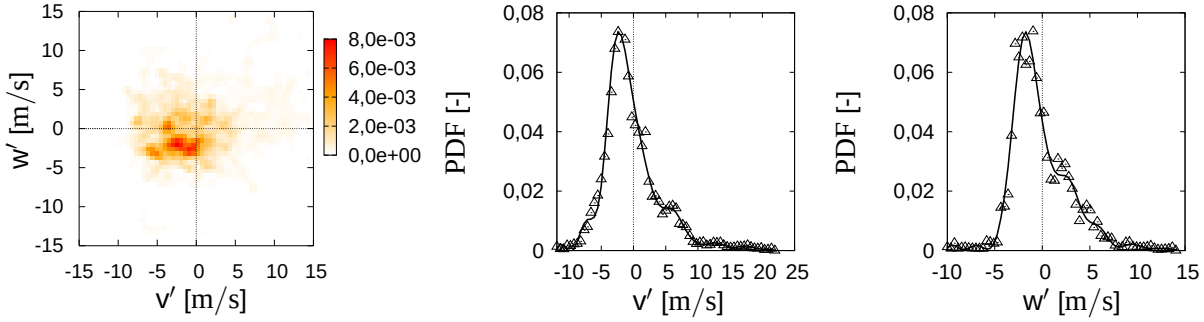
a. jPDF $v'w'$, r=40 mm b. PDF v', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $v'w'$, r=60 mm e. PDF v', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm



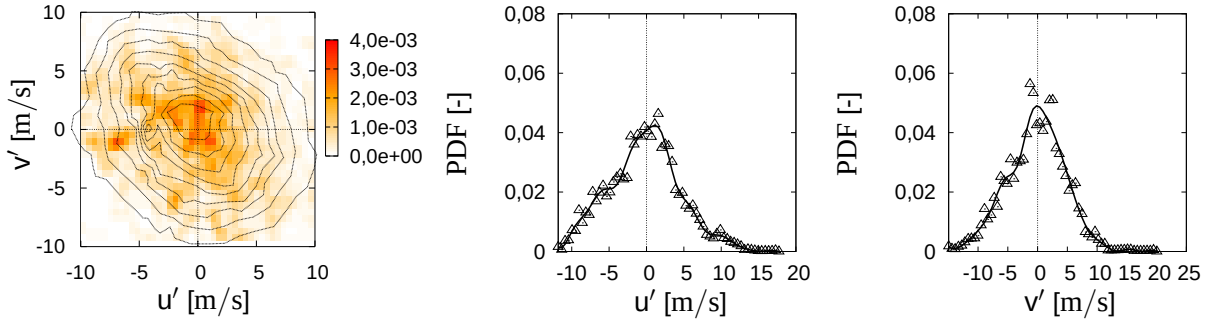
g. jPDF $v'w'$, r=80 mm h. PDF v', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm



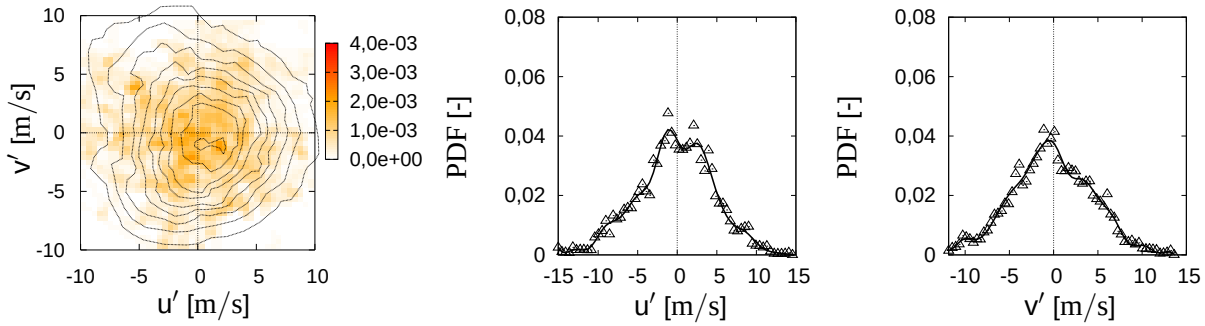
j. jPDF $v'w'$, r=100 mm k. PDF v', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

Bild B.12. Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Freistrahl, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ IV. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).

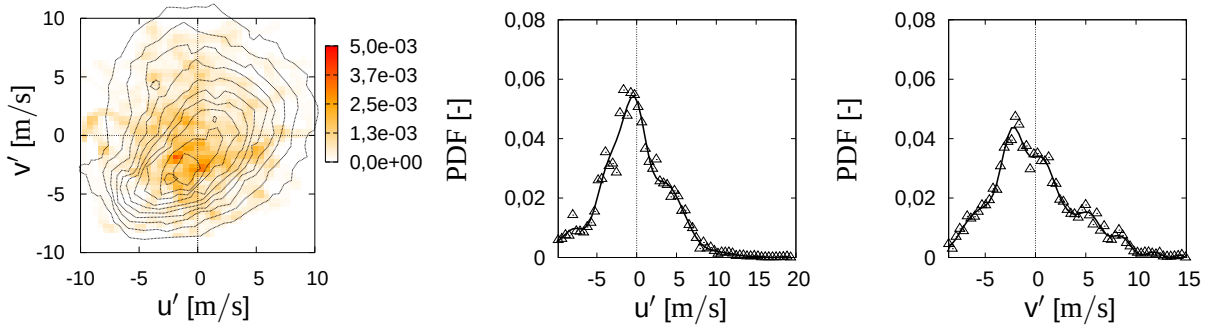
B.2 Freistrahl; Axiale Position 200 mm



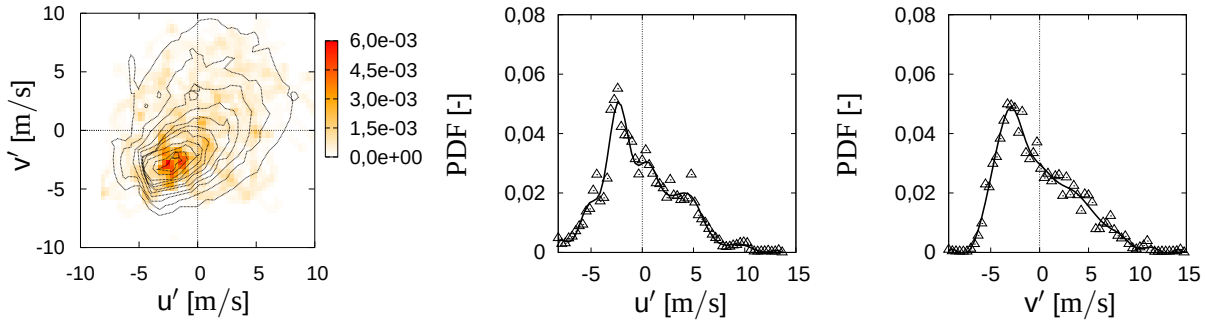
a. jPDF $u'v'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF v', r=40 mm



d. jPDF $u'v'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF v', r=60 mm

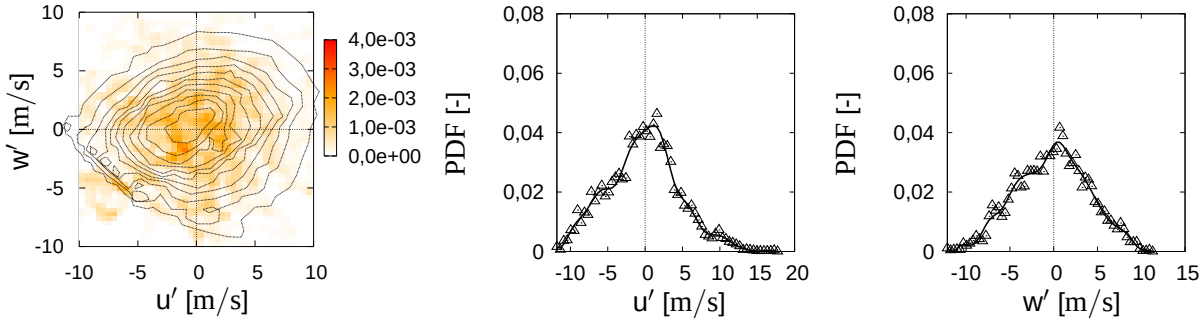


g. jPDF $u'v'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF v', r=80 mm

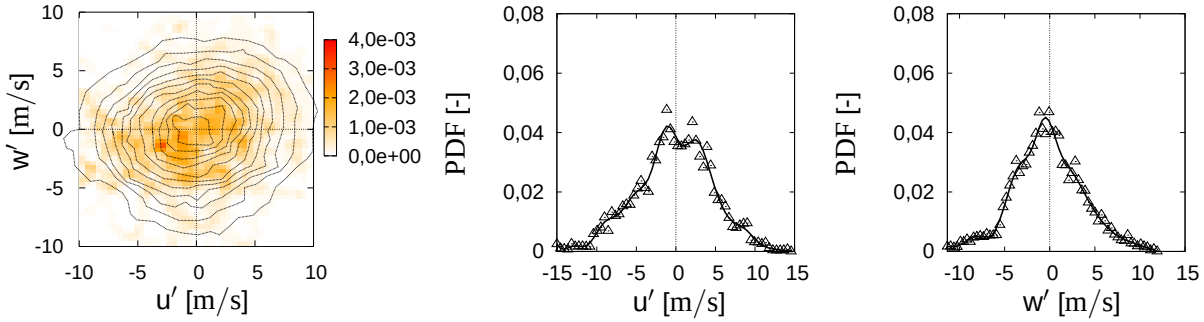


j. jPDF $u'v'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF v', r=100 mm

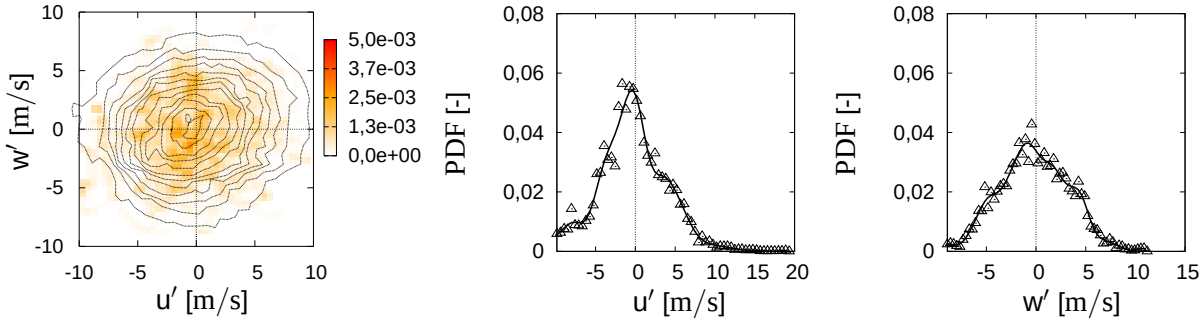
Bild B.13. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadrant$_{geo}$ I. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



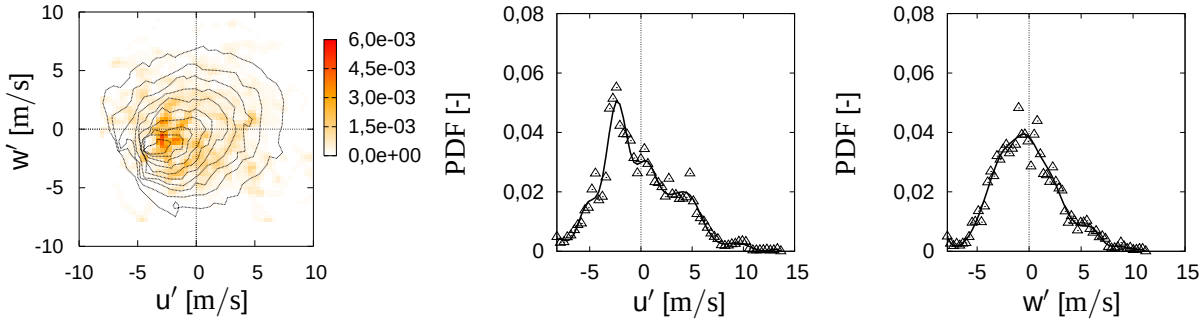
a. jPDF $u'w'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $u'w'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

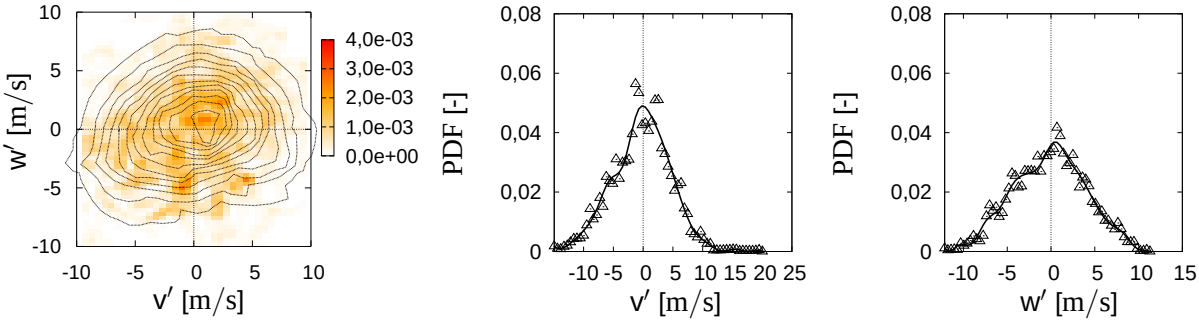


g. jPDF $u'w'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

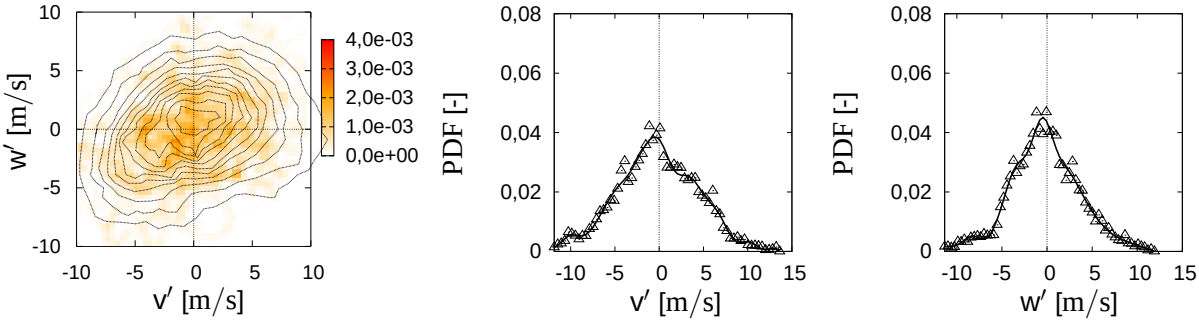


j. jPDF $u'w'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

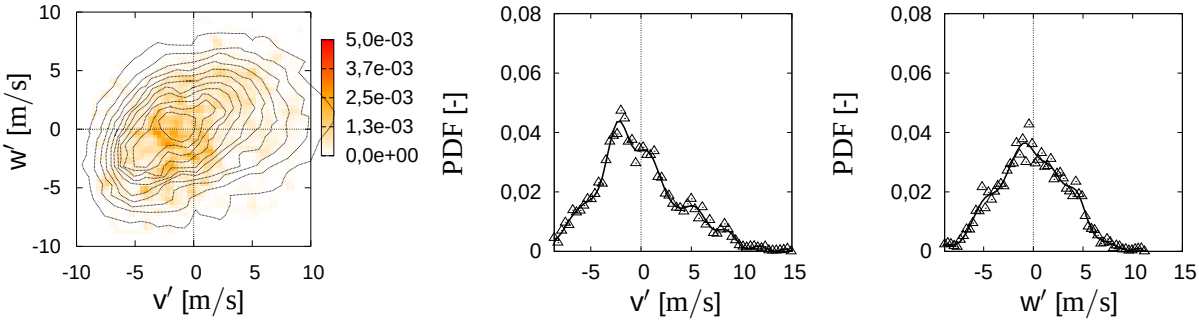
Bild B.14. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadrant$_{geo}$ I. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



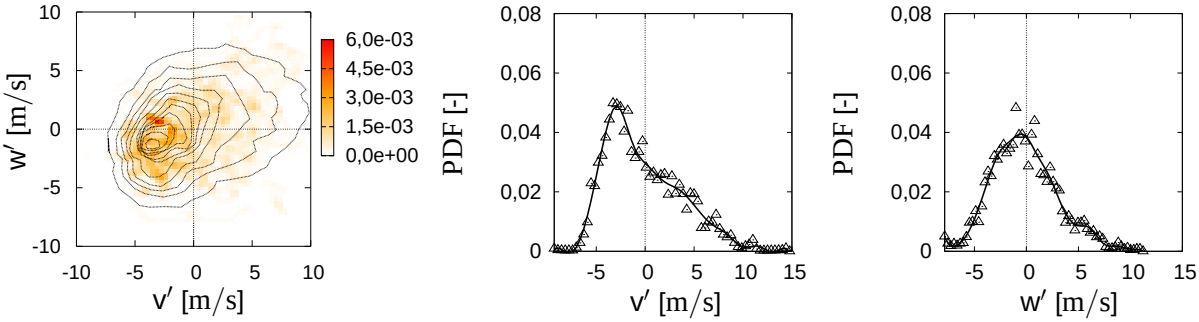
a. jPDF $v'w'$, r=40 mm b. PDF v', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $v'w'$, r=60 mm e. PDF v', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

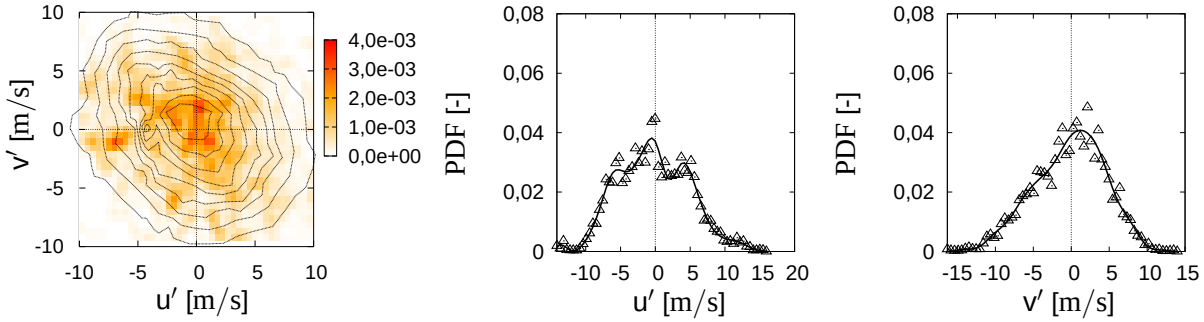


g. jPDF $v'w'$, r=80 mm h. PDF v', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

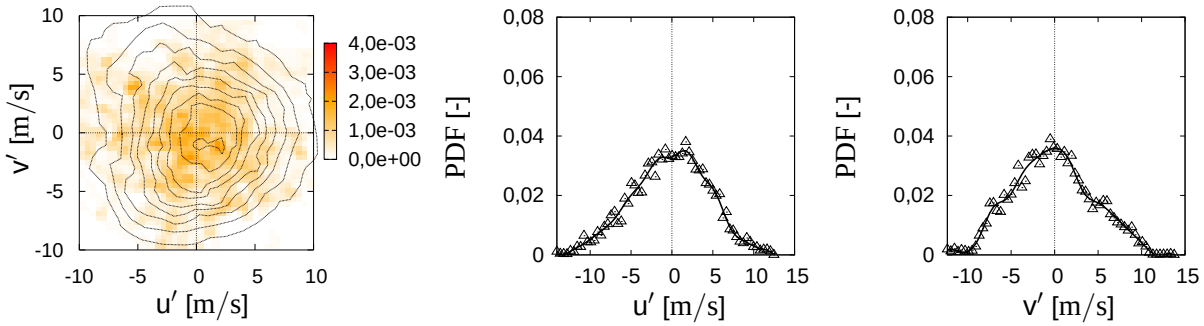


j. jPDF $v'w'$, r=100 mm k. PDF v', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

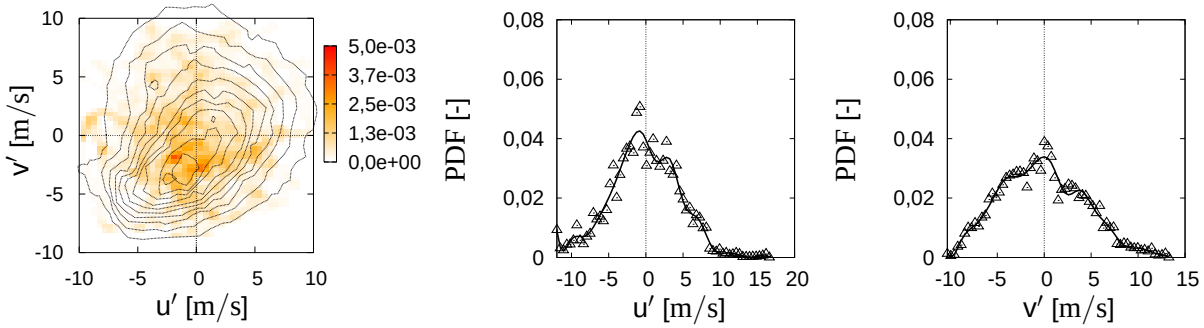
Bild B.15. Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadrant$_{geo}$ I. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



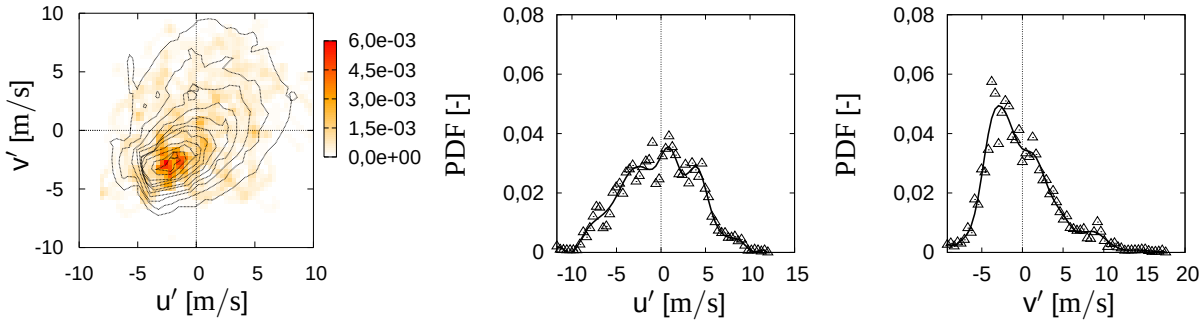
a. jPDF $u'v'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF v', r=40 mm



d. jPDF $u'v'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF v', r=60 mm

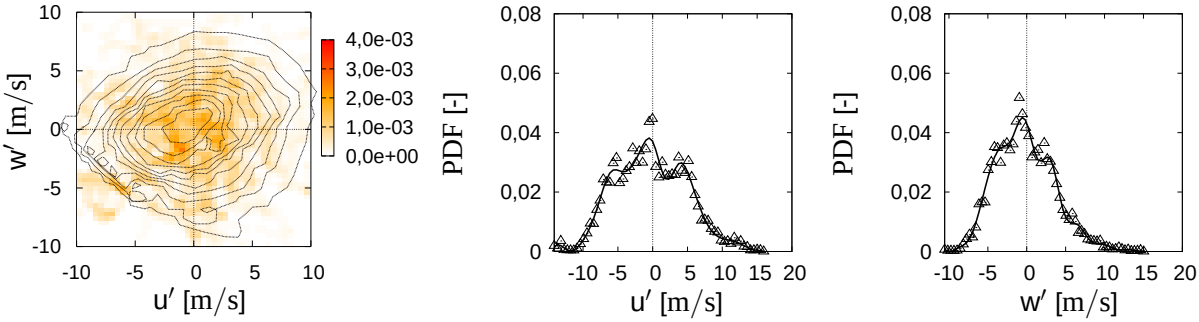


g. jPDF $u'v'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF v', r=80 mm

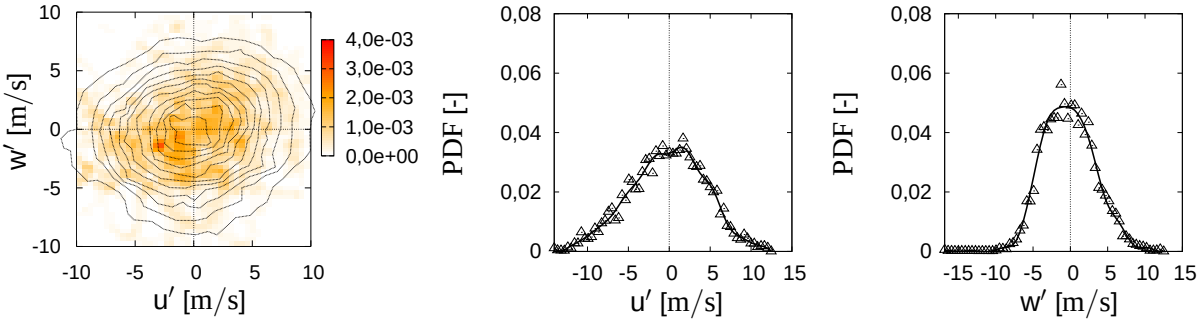


j. jPDF $u'v'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF v', r=100 mm

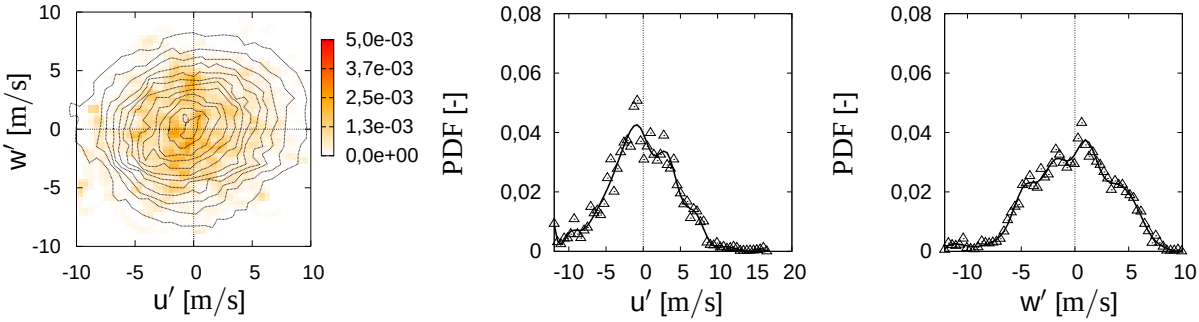
Bild B.16. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadrant$_{geo}$ II. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



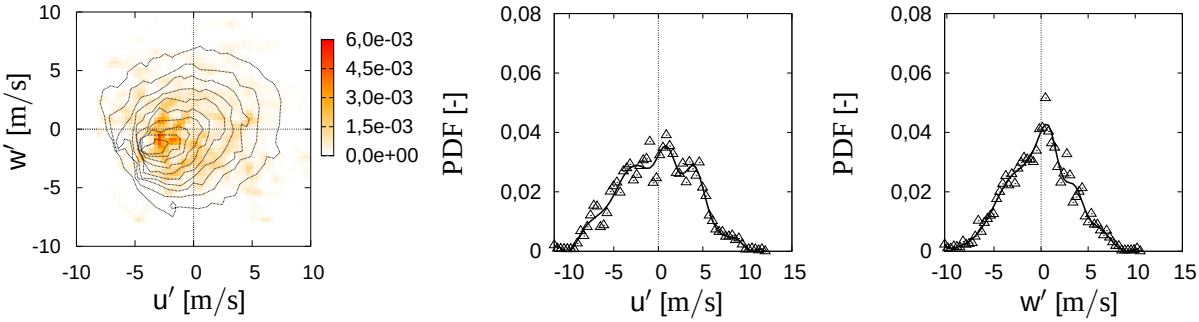
a. jPDF $u'w'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $u'w'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

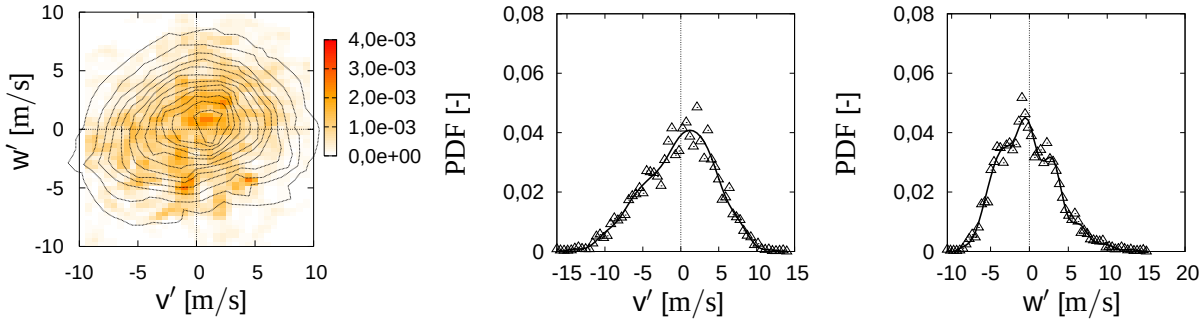


g. jPDF $u'w'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

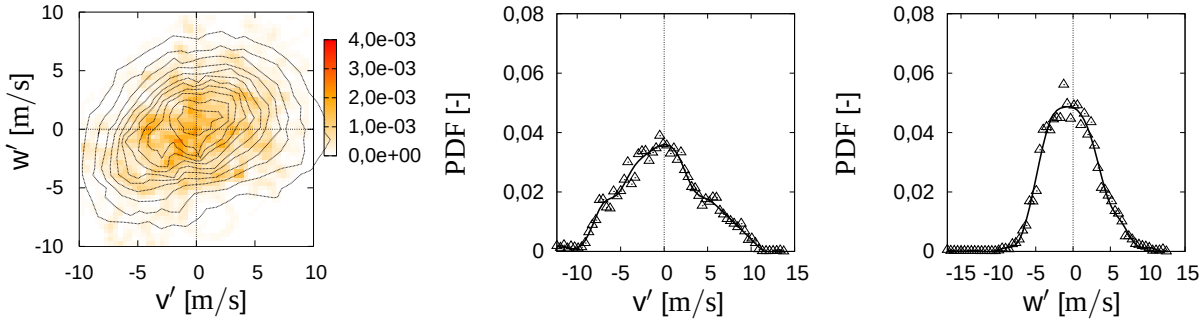


j. jPDF $u'w'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

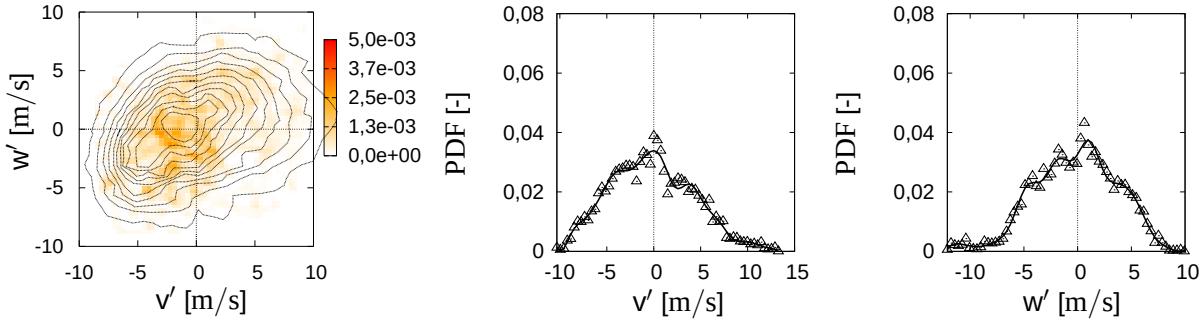
Bild B.17. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadrant$_{geo}$ II. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



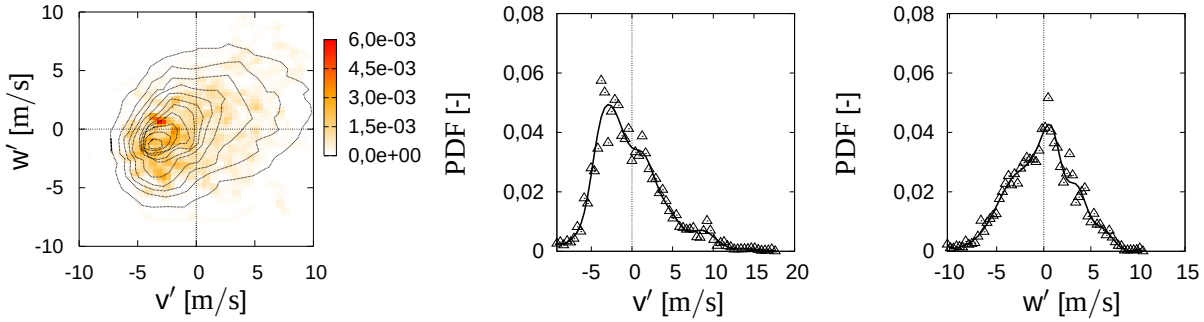
a. jPDF $v'w'$, r=40 mm b. PDF v', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $v'w'$, r=60 mm e. PDF v', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

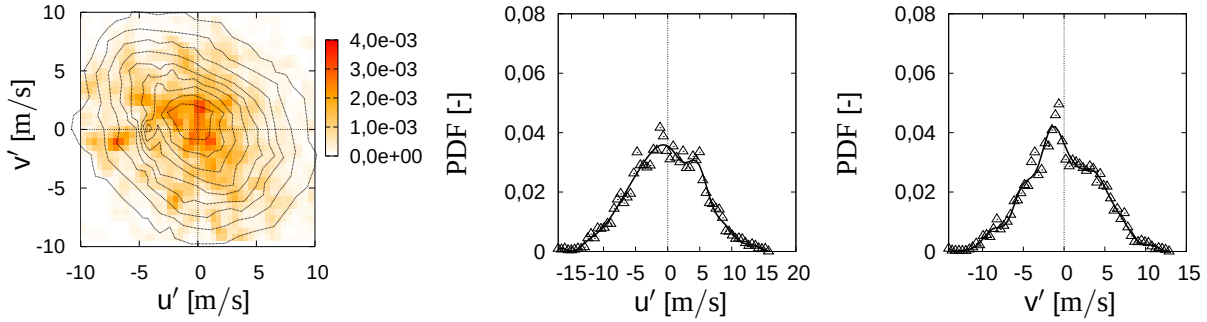


g. jPDF $v'w'$, r=80 mm h. PDF v', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

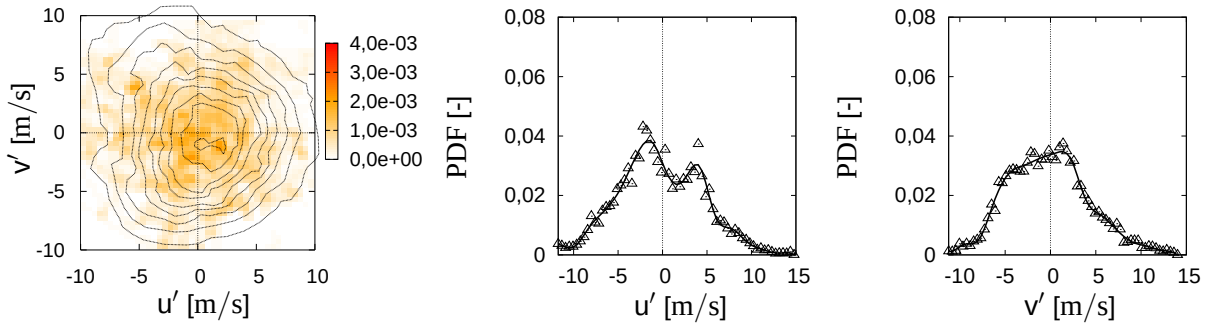


j. jPDF $v'w'$, r=100 mm k. PDF v', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

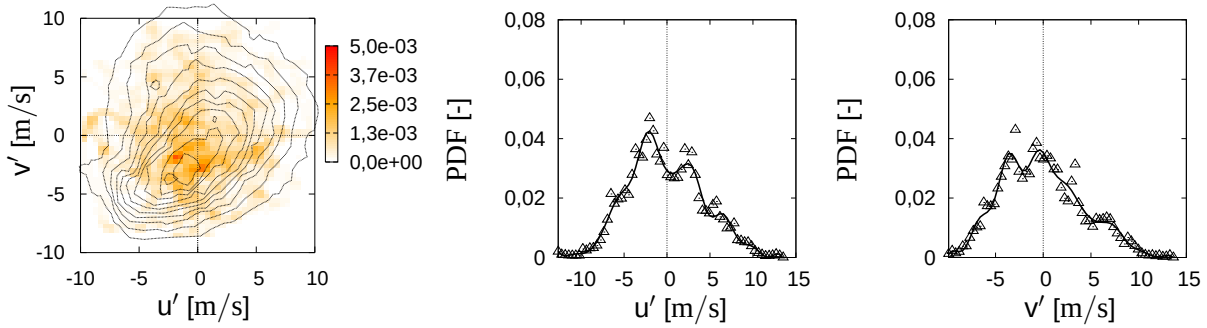
Bild B.18. Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadrant_{geo} II. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



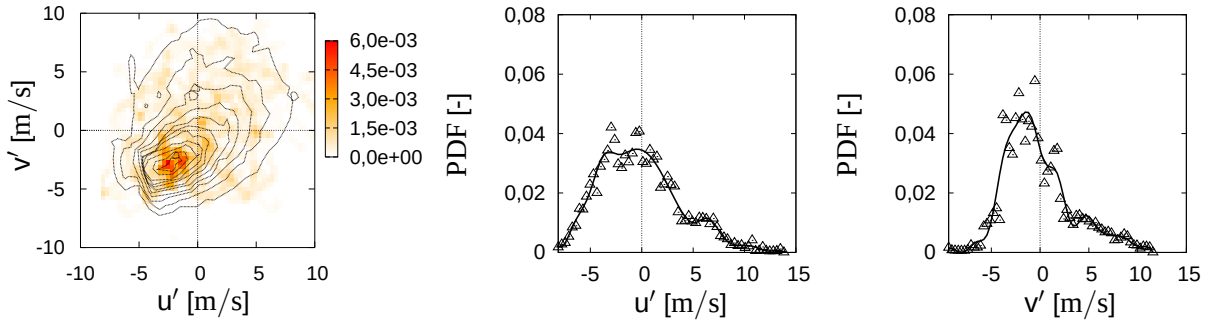
a. jPDF $u'v'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF v', r=40 mm



d. jPDF $u'v'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF v', r=60 mm

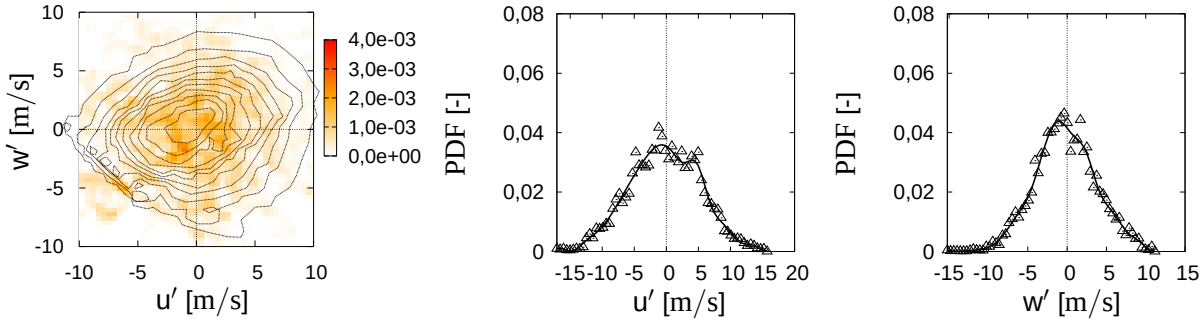


g. jPDF $u'v'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF v', r=80 mm

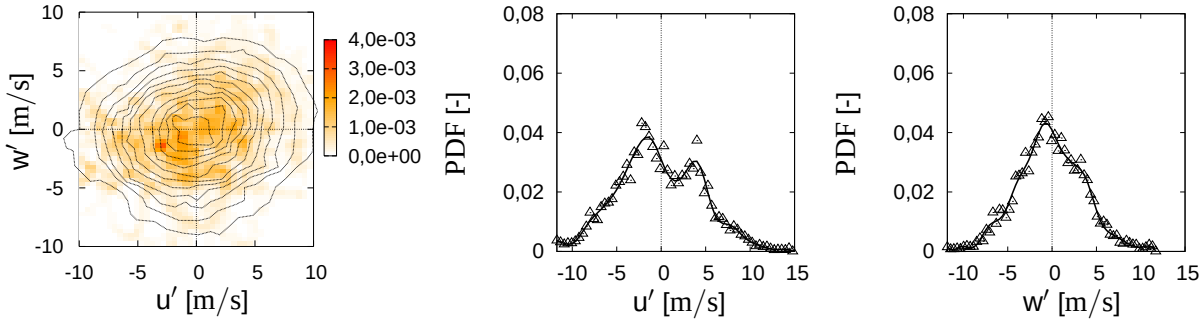


j. jPDF $u'v'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF v', r=100 mm

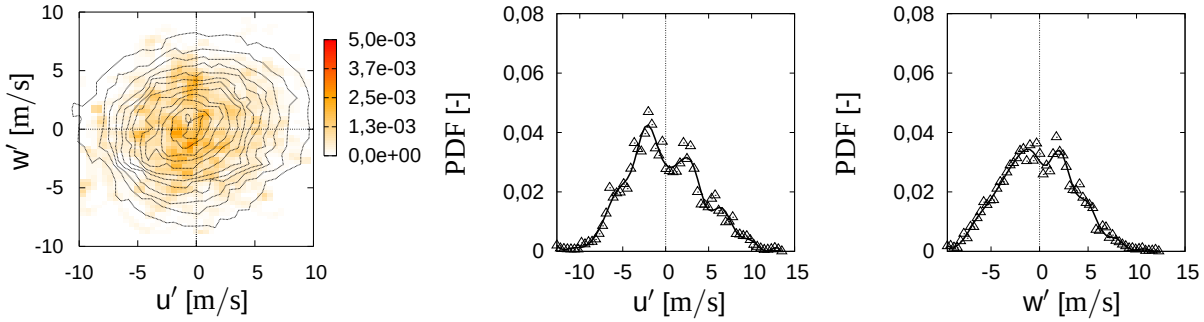
Bild B.19. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadrant$_{geo}$ III. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



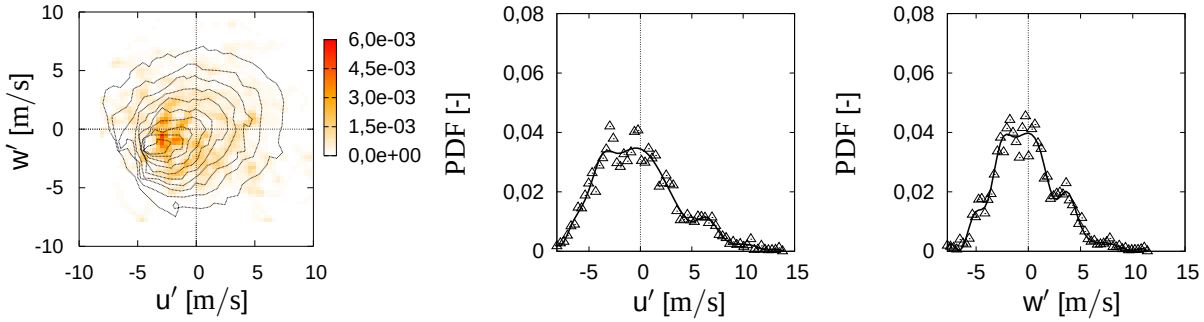
a. jPDF $u'w'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $u'w'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

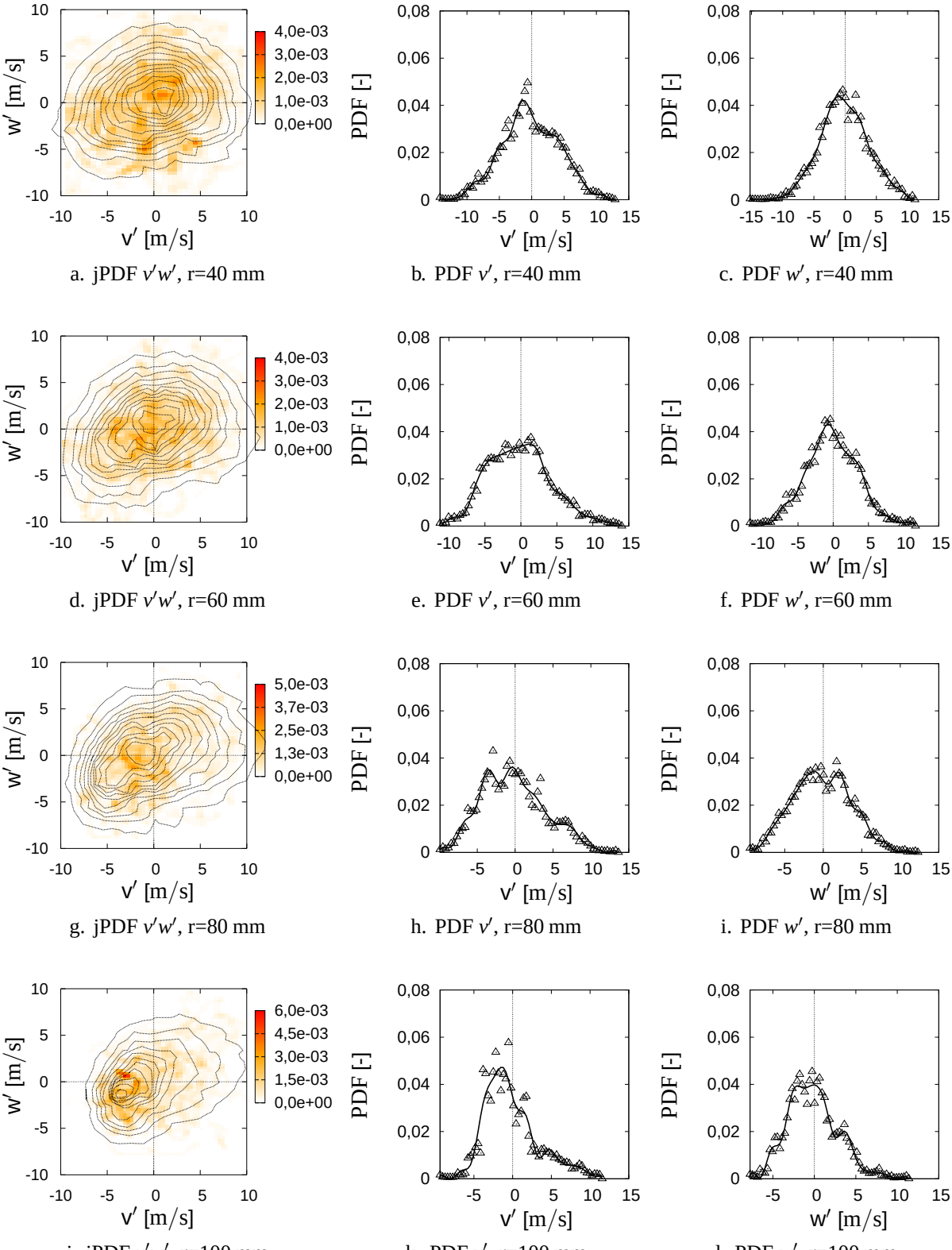


g. jPDF $u'w'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm



j. jPDF $u'w'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

Bild B.20. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadrant$_{geo}$ III. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



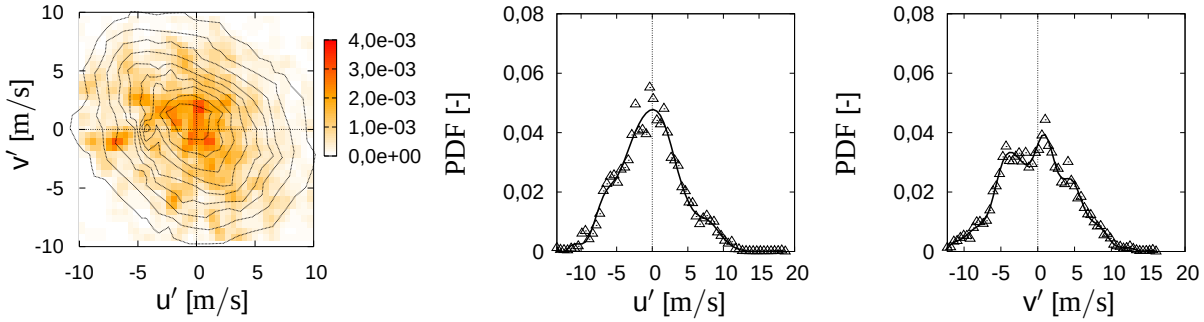
a. jPDF $v'w'$, r=40 mm b. PDF v', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm

d. jPDF $v'w'$, r=60 mm e. PDF v', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

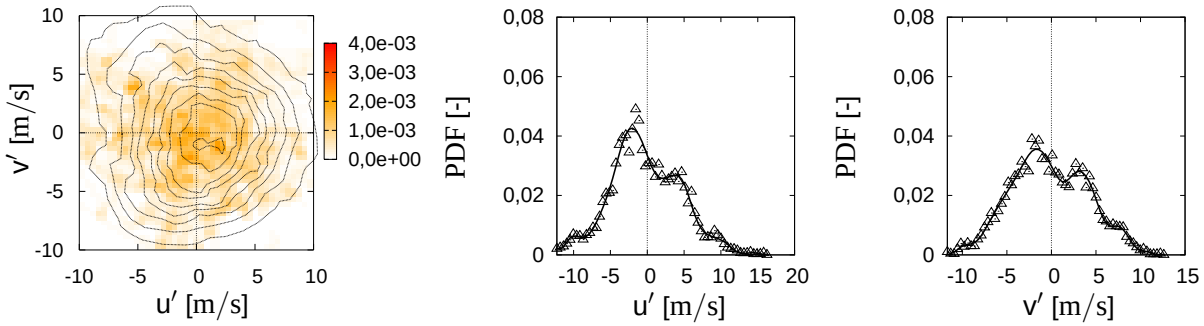
g. jPDF $v'w'$, r=80 mm h. PDF v', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

j. jPDF $v'w'$, r=100 mm k. PDF v', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

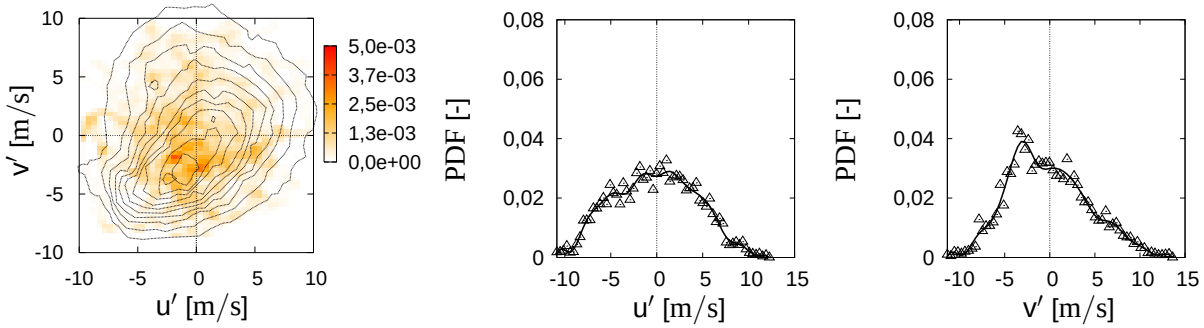
Bild B.21. Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Freistrahl, x=200 mm, $\text{Quadrant}_{\text{geo}}$ III. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



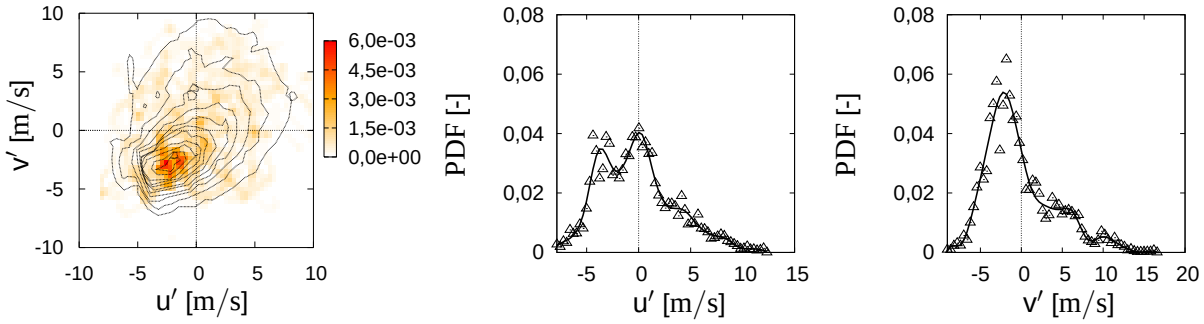
a. jPDF $u'v'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF v', r=40 mm



d. jPDF $u'v'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF v', r=60 mm

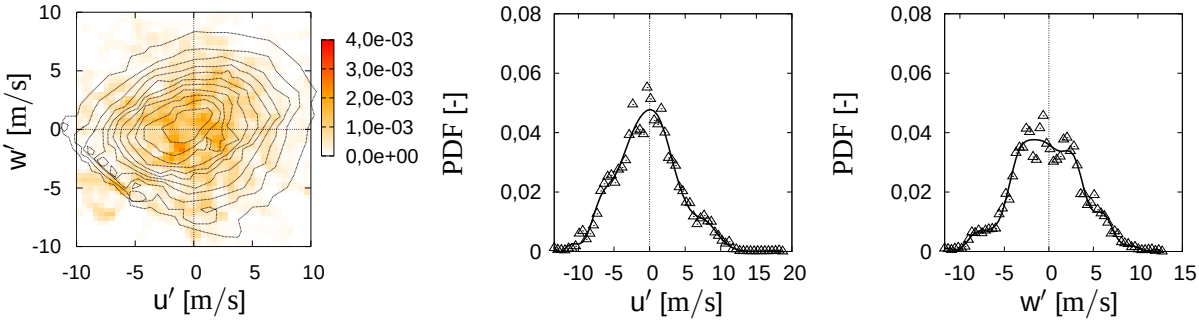


g. jPDF $u'v'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF v', r=80 mm

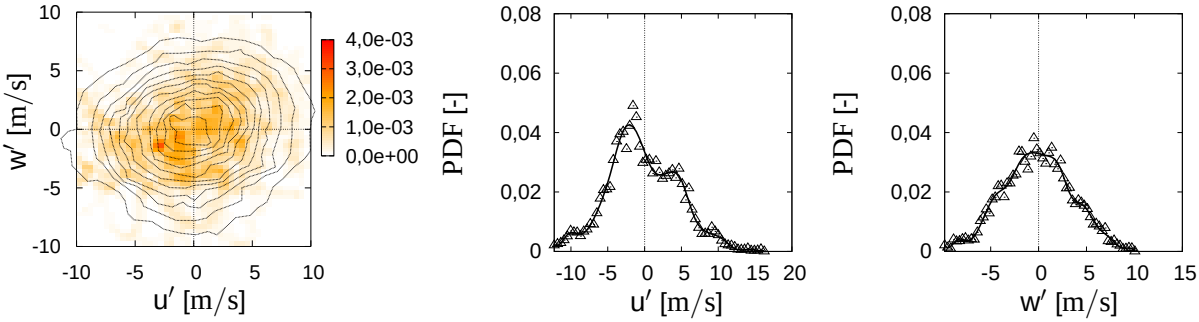


j. jPDF $u'v'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF v', r=100 mm

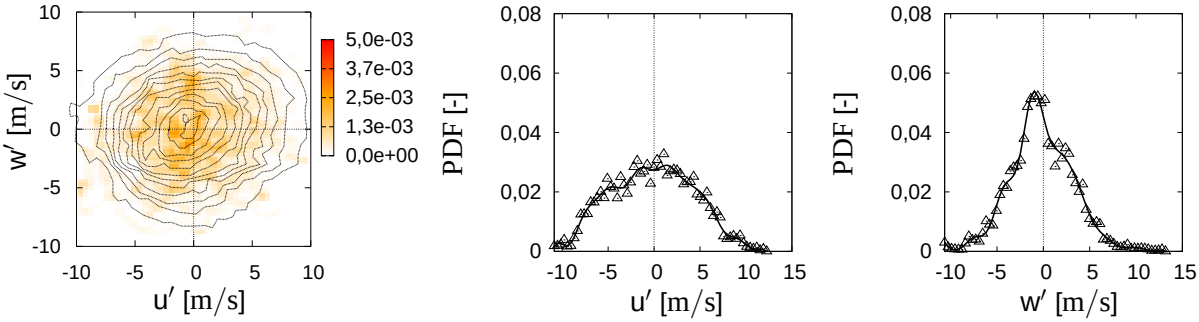
Bild B.22. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadrant$_{geo}$ IV. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



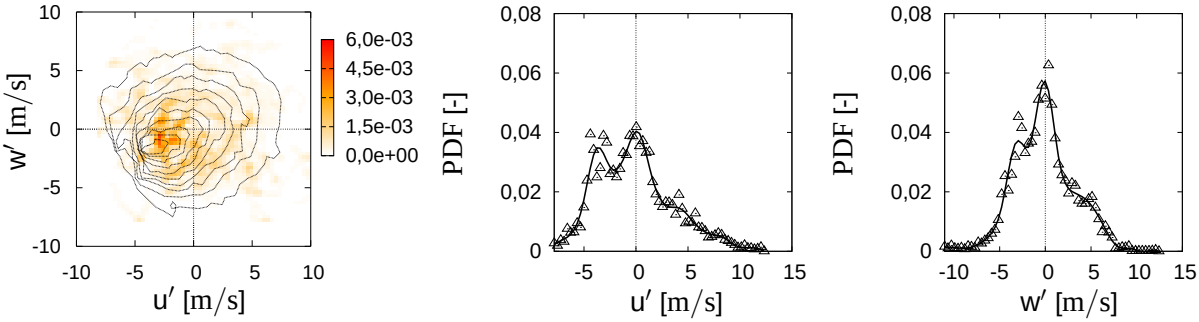
a. jPDF $u'w'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $u'w'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

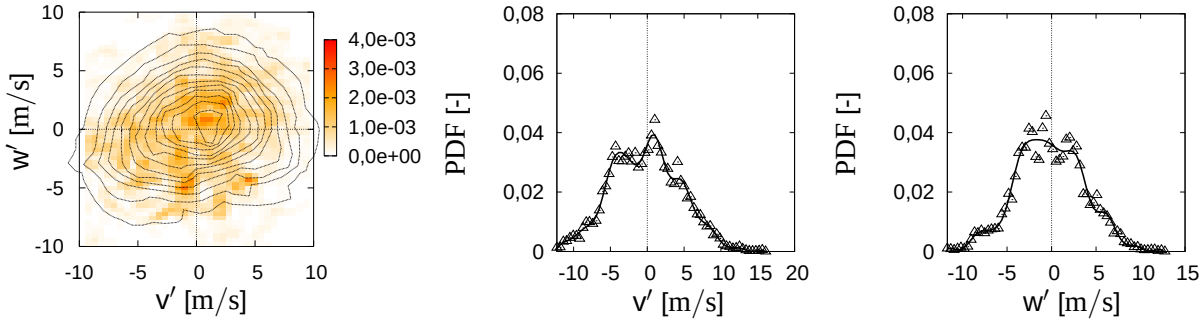


g. jPDF $u'w'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

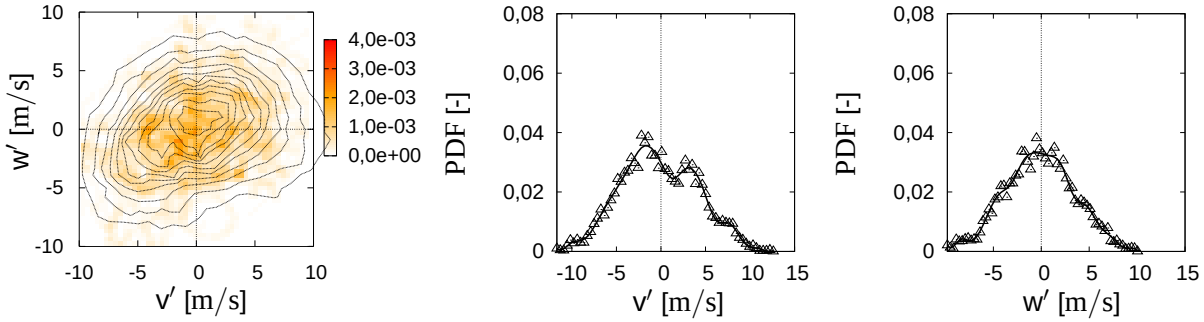


j. jPDF $u'w'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

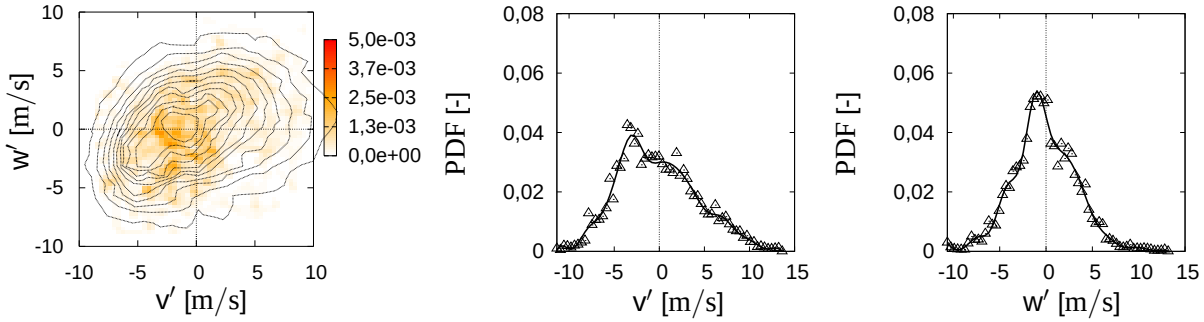
Bild B.23. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Freistrahl, x=200 mm, $\text{Quadrant}_{\text{geo}}$ IV. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).



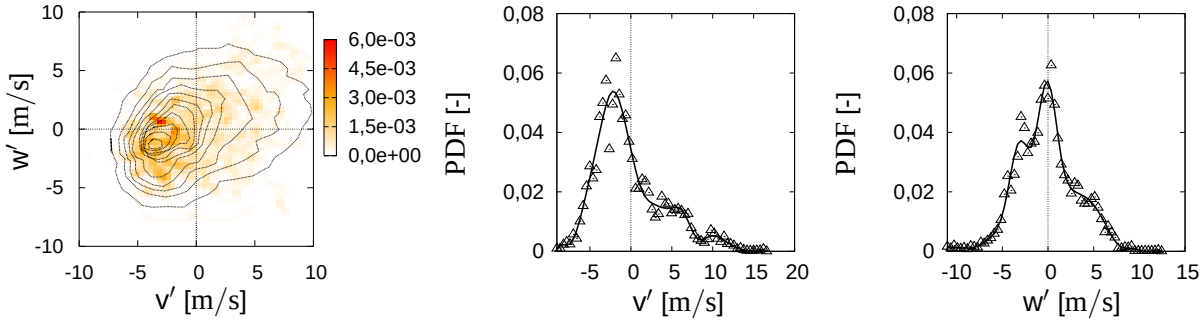
a. jPDF $v'w'$, r=40 mm b. PDF v', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $v'w'$, r=60 mm e. PDF v', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm



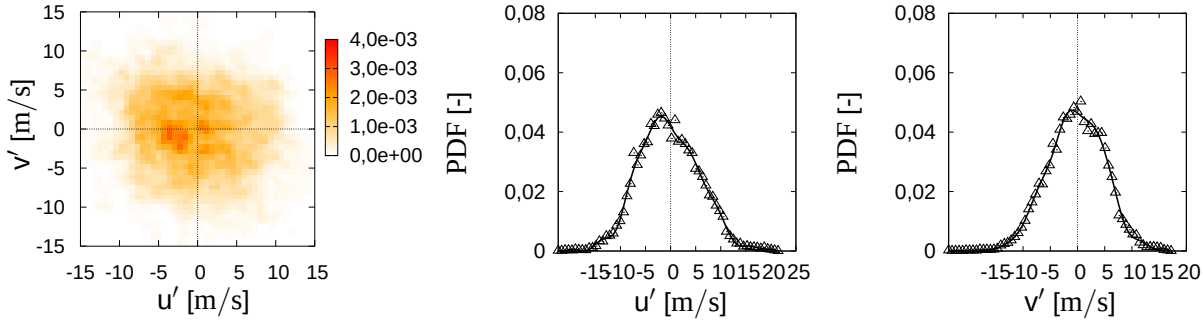
g. jPDF $v'w'$, r=80 mm h. PDF v', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm



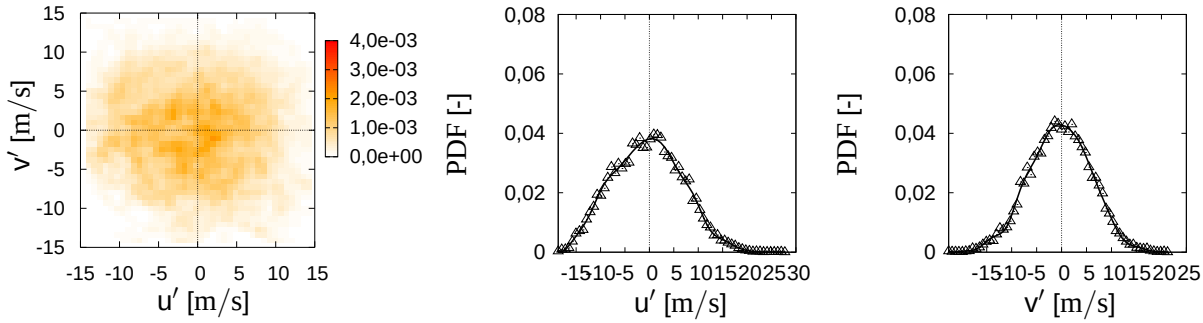
j. jPDF $v'w'$, r=100 mm k. PDF v', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

Bild B.24. Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Freistrahl, x=200 mm, Quadrant$_{geo}$ IV. Linien in den Konturgraphen zeigen die experimentellen Ergebnisse von Holzäpfel (1996).

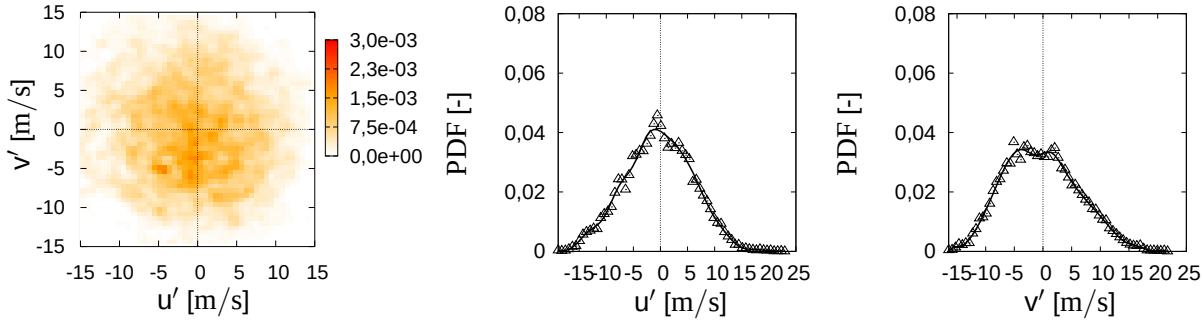
B.3 Zyklon; Axiale Position 100 mm



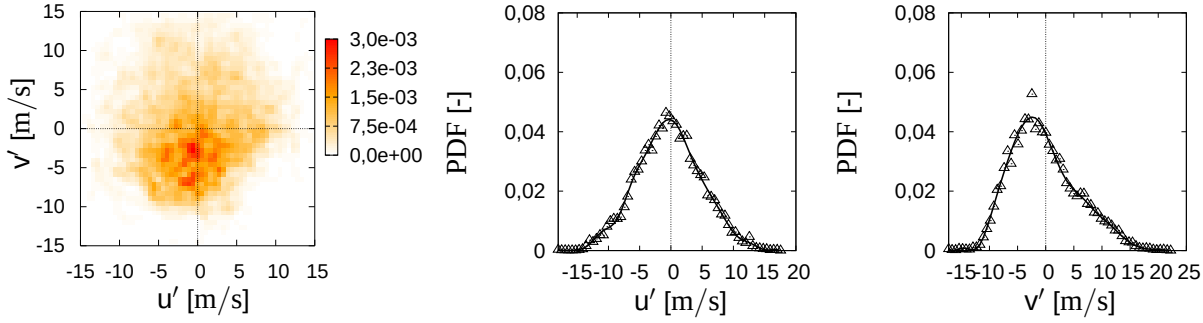
a. jPDF $u'v'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF v', r=40 mm



d. jPDF $u'v'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF v', r=60 mm

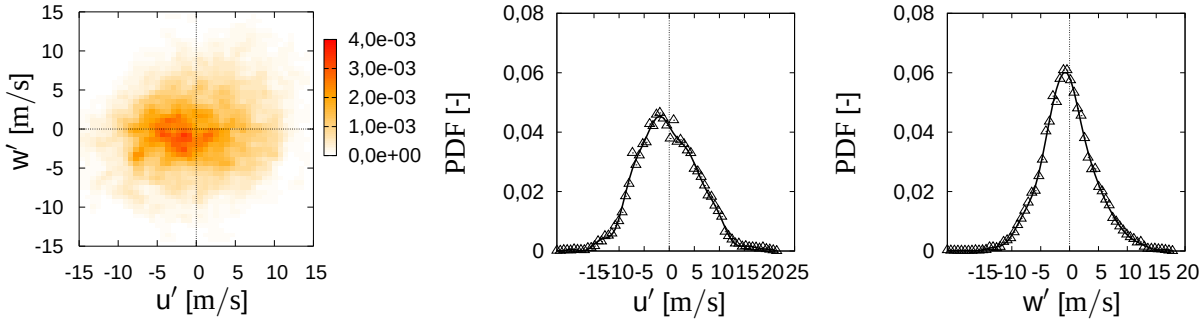


g. jPDF $u'v'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF v', r=80 mm

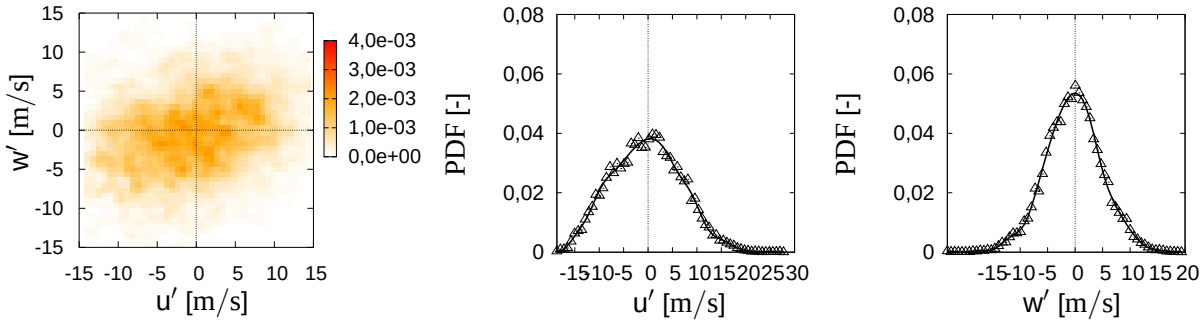


j. jPDF $u'v'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF v', r=100 mm

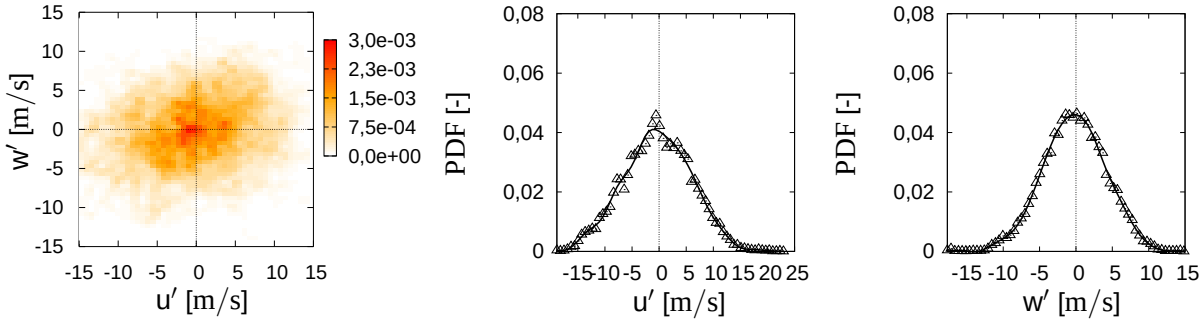
Bild B.25. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Zyklon, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ I.



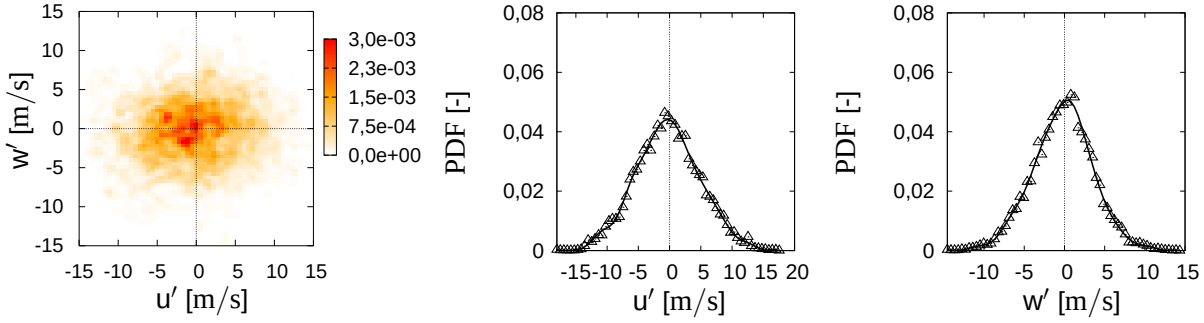
a. jPDF $u'w'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $u'w'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

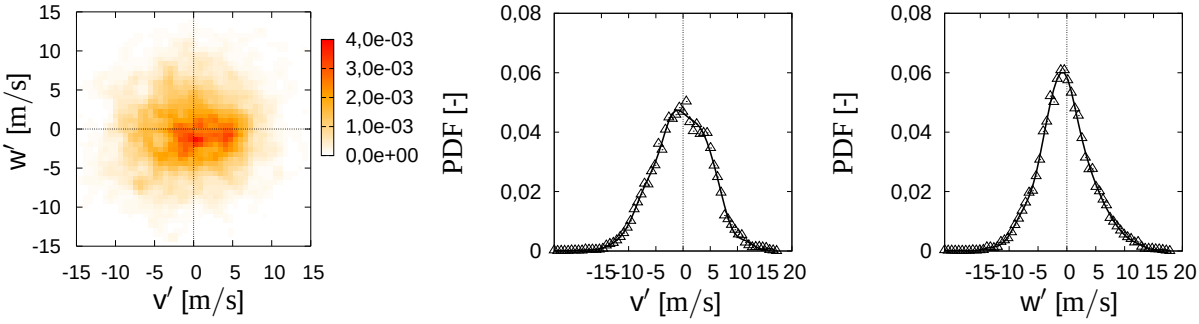


g. jPDF $u'w'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

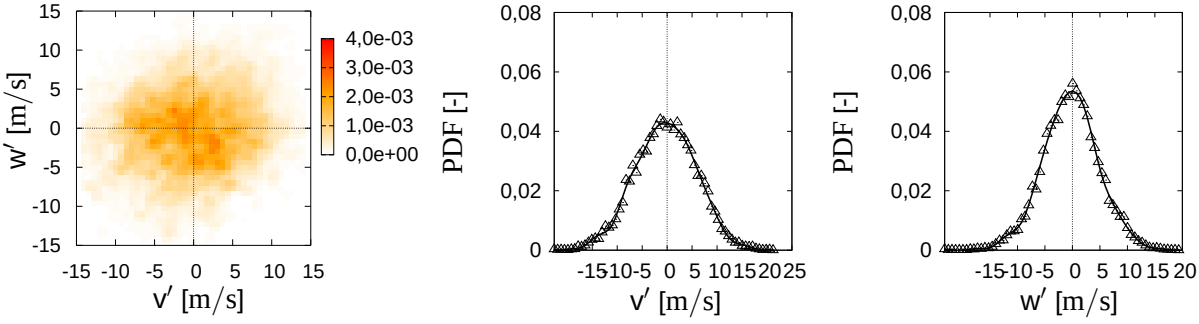


j. jPDF $u'w'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

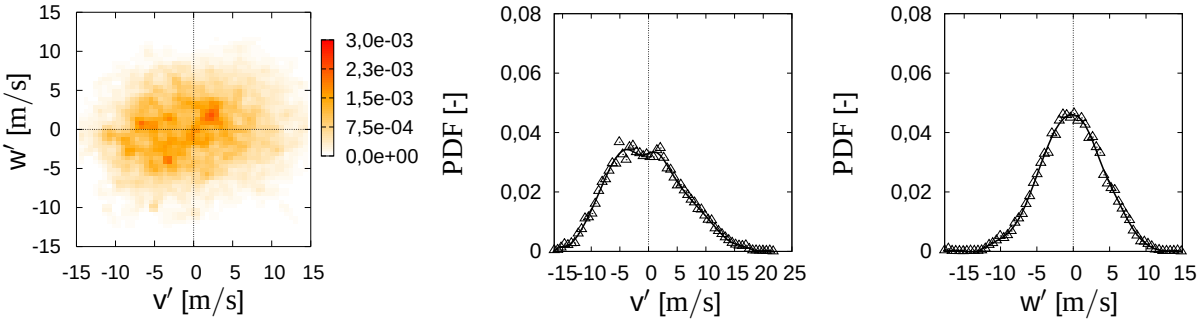
Bild B.26. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Zyklon, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ I.



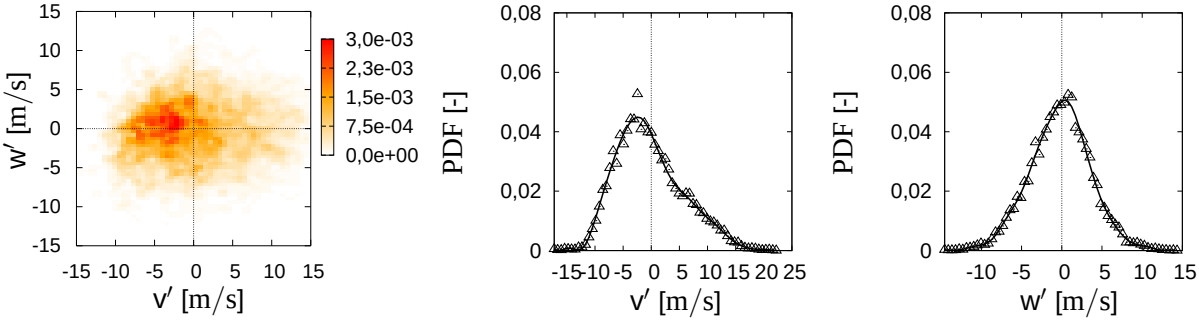
a. jPDF $v'w'$, r=40 mm b. PDF v', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $v'w'$, r=60 mm e. PDF v', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

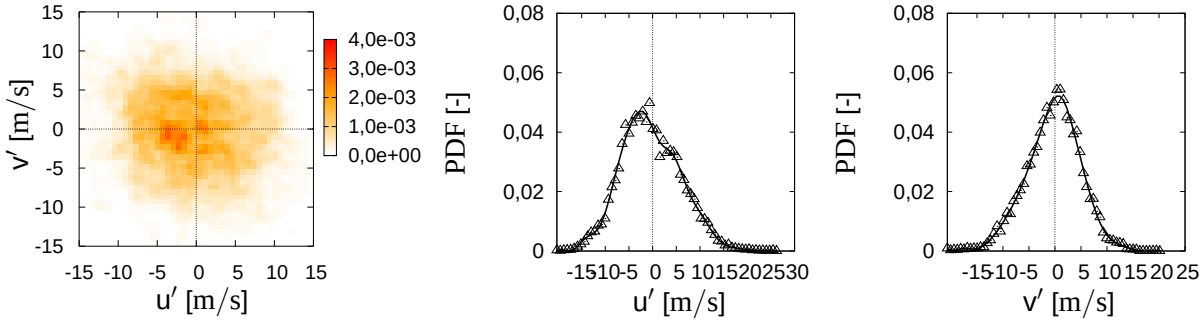


g. jPDF $v'w'$, r=80 mm h. PDF v', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

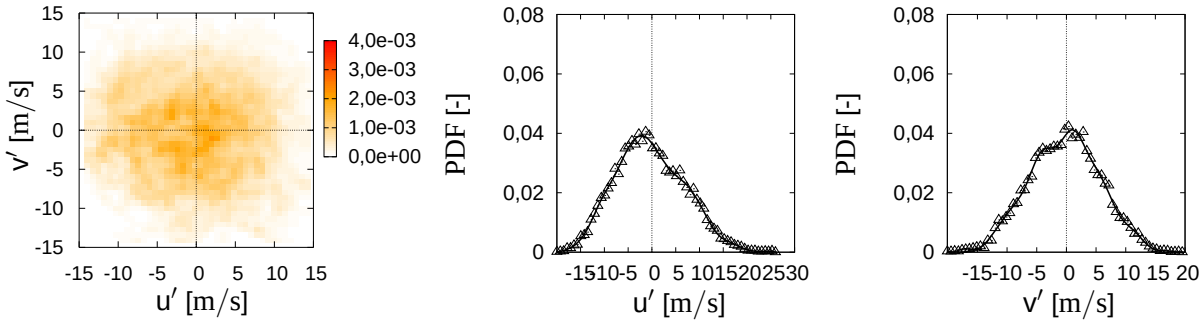


j. jPDF $v'w'$, r=100 mm k. PDF v', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

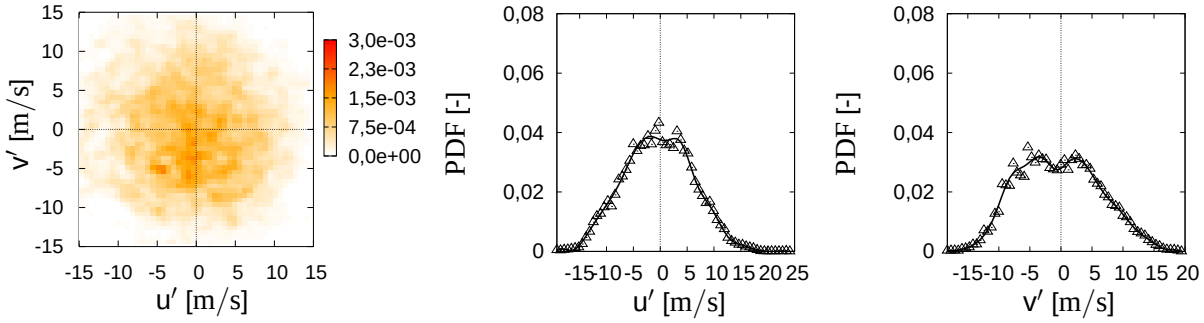
Bild B.27. Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Zyklon, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ I.



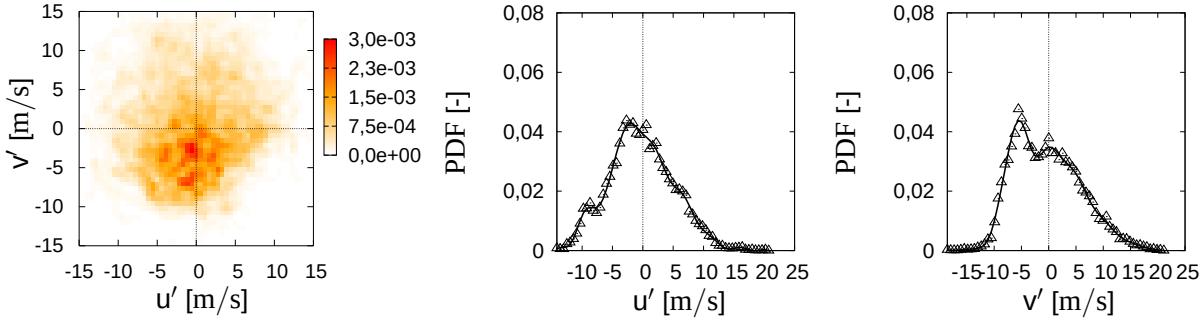
a. jPDF $u'v'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF v', r=40 mm



d. jPDF $u'v'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF v', r=60 mm

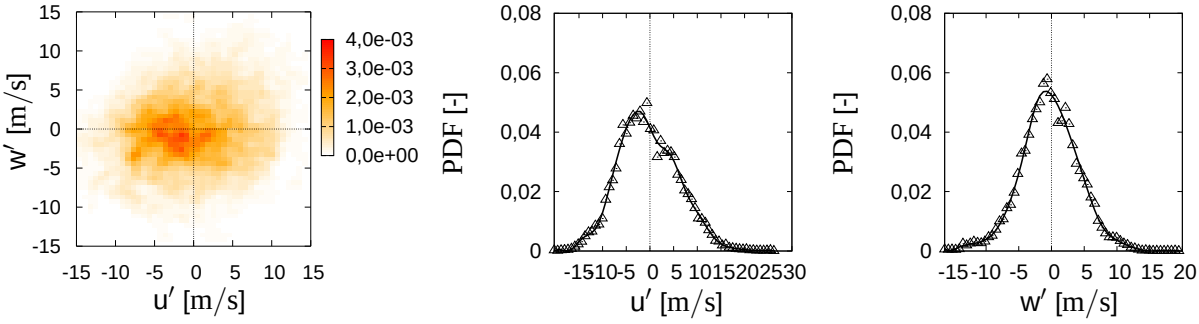


g. jPDF $u'v'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF v', r=80 mm

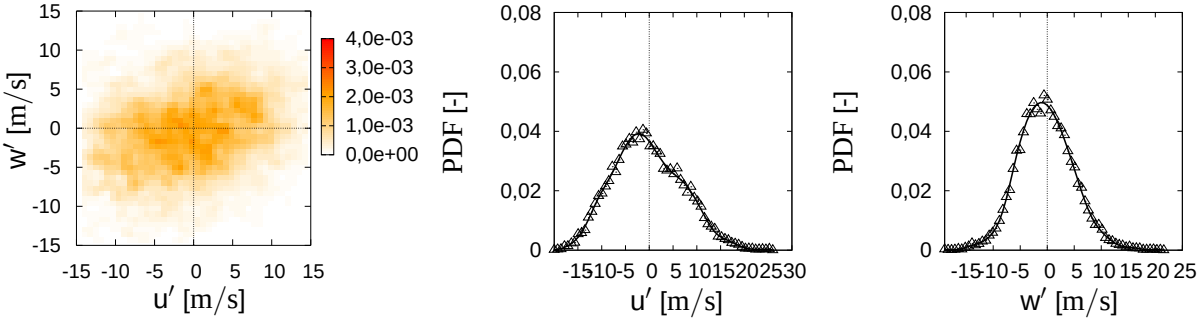


j. jPDF $u'v'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF v', r=100 mm

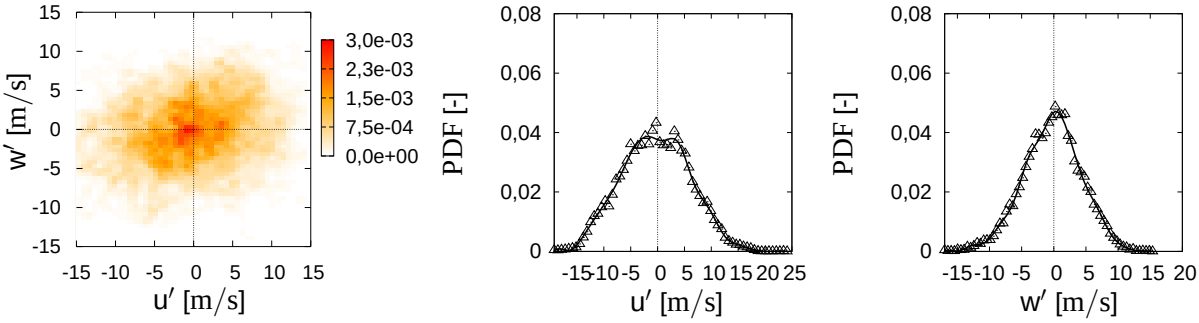
Bild B.28. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Zyklon, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ II.



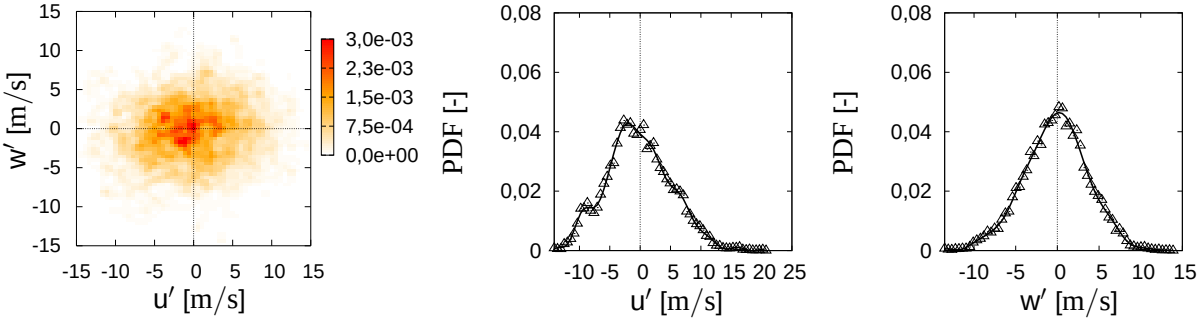
a. jPDF $u'w'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $u'w'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

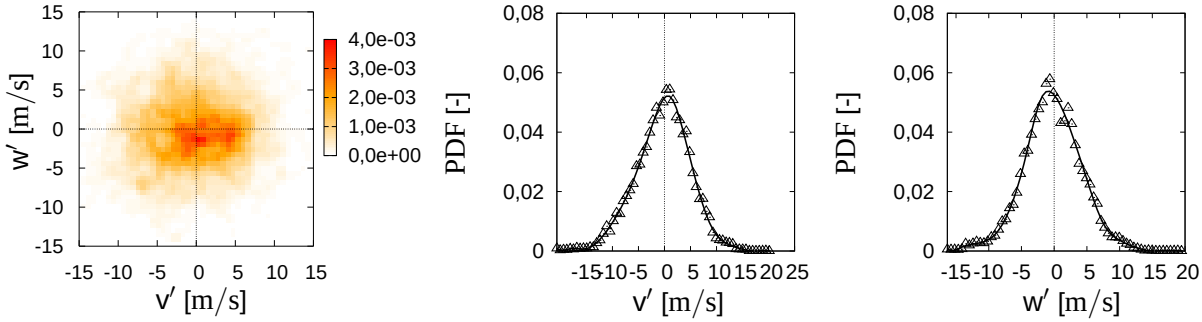


g. jPDF $u'w'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

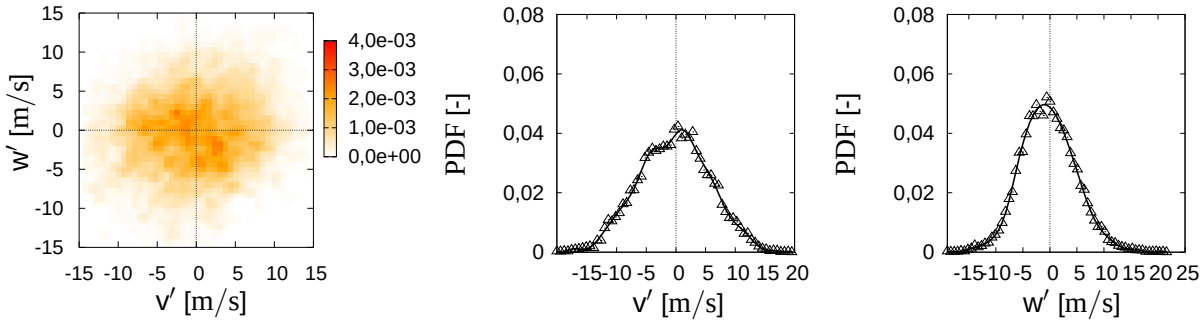


j. jPDF $u'w'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

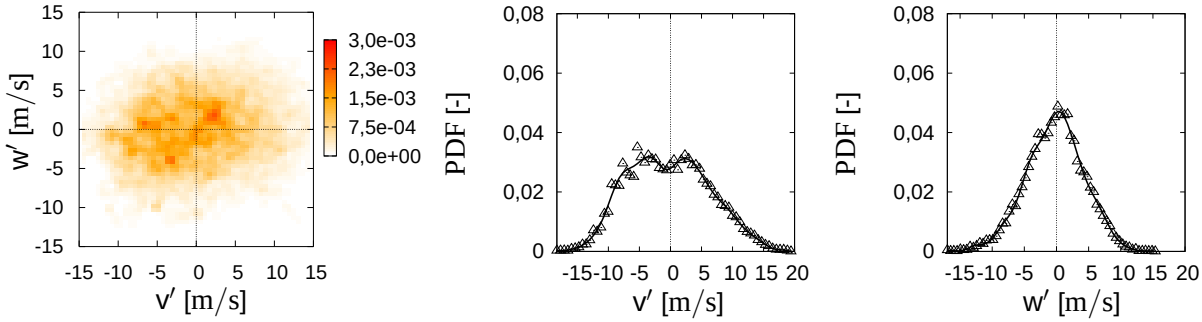
Bild B.29. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Zyklon, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ II.



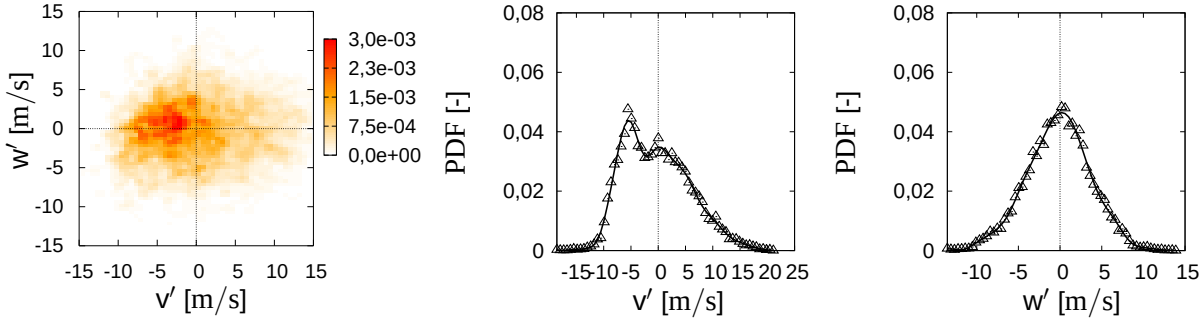
a. jPDF $v'w'$, r=40 mm b. PDF v', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $v'w'$, r=60 mm e. PDF v', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

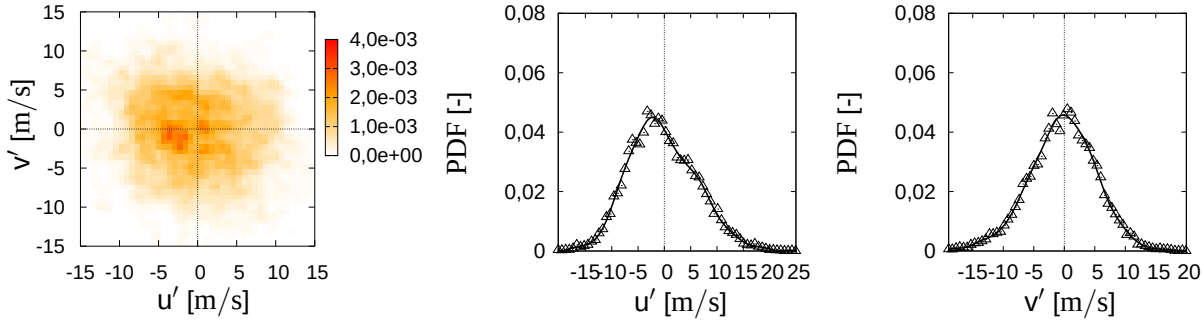


g. jPDF $v'w'$, r=80 mm h. PDF v', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

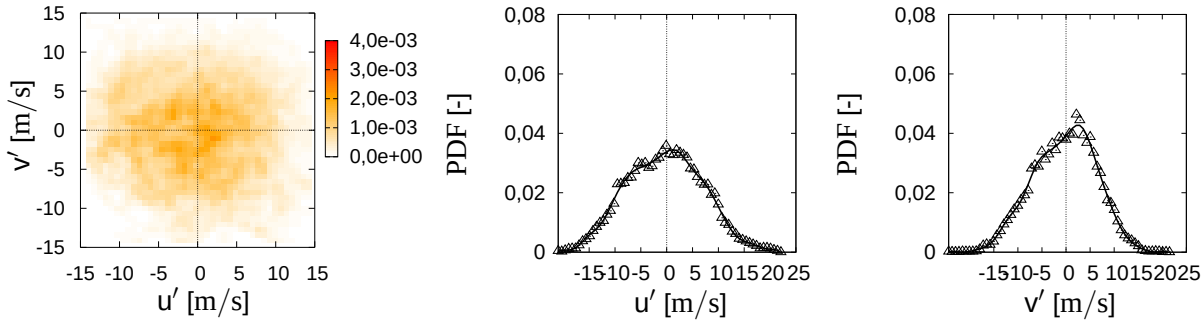


j. jPDF $v'w'$, r=100 mm k. PDF v', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

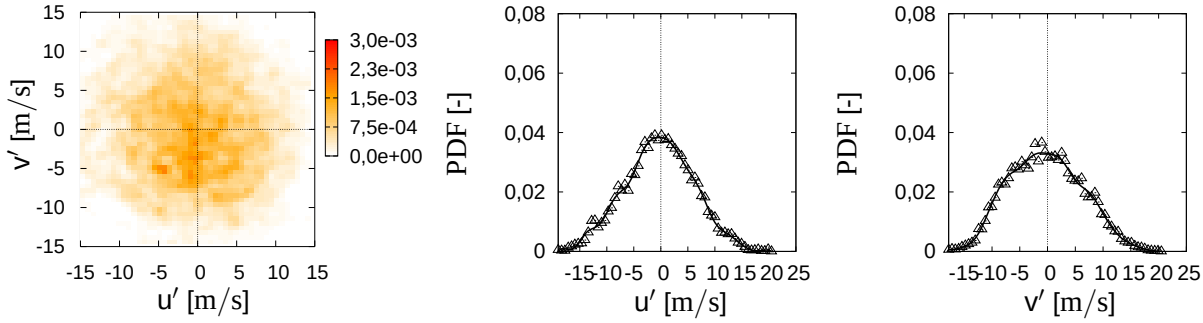
Bild B.30. Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Zyklon, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ II.



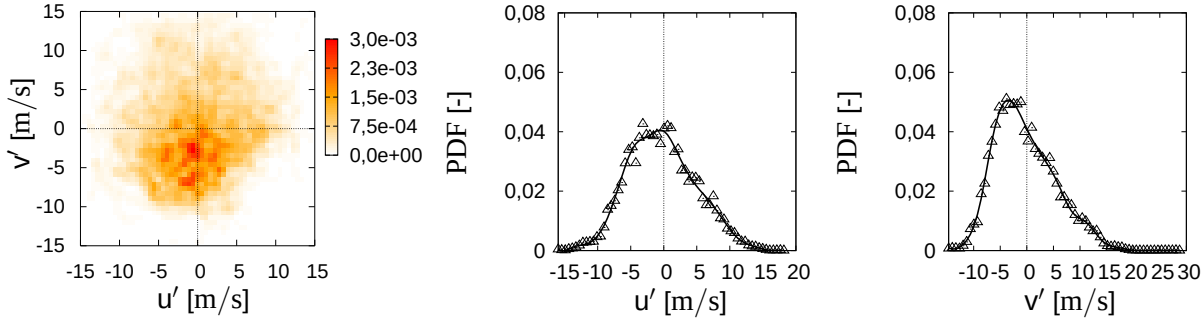
a. jPDF $u'v'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF v', r=40 mm



d. jPDF $u'v'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF v', r=60 mm

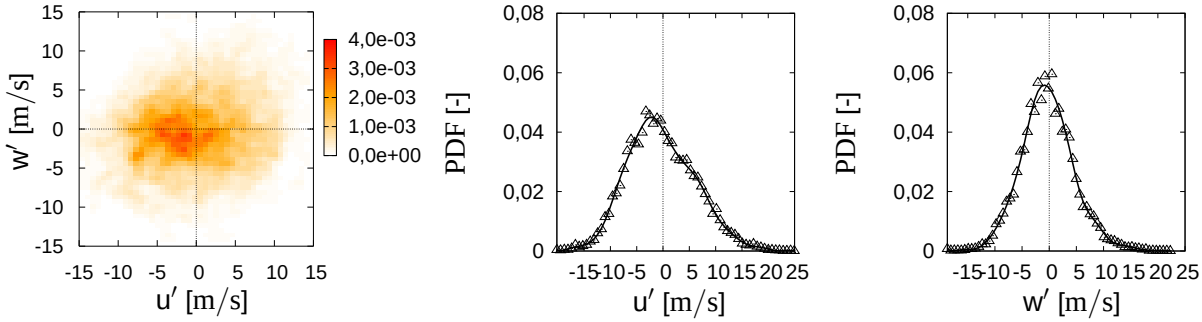


g. jPDF $u'v'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF v', r=80 mm

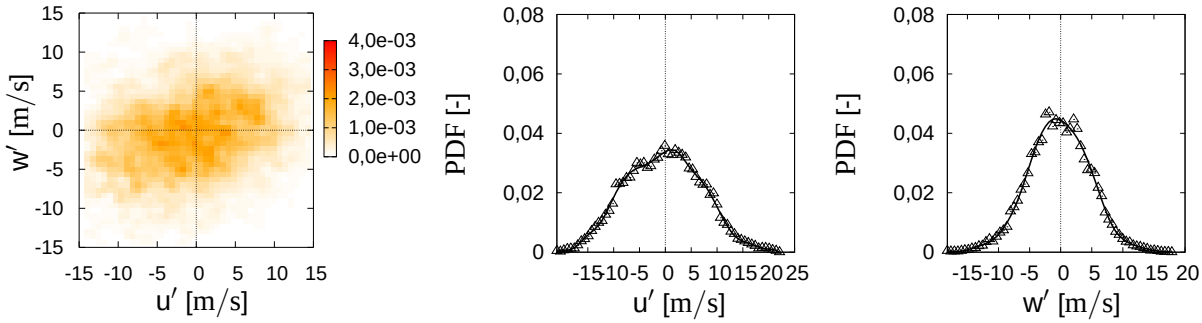


j. jPDF $u'v'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF v', r=100 mm

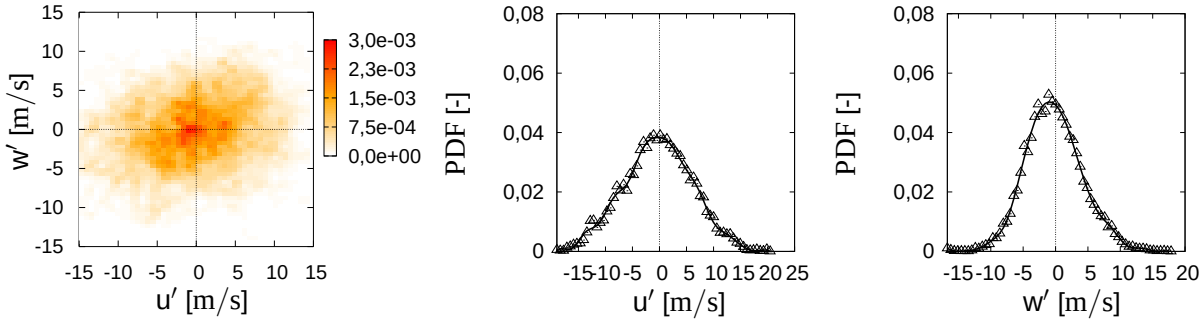
Bild B.31. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Zyklon, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ III.



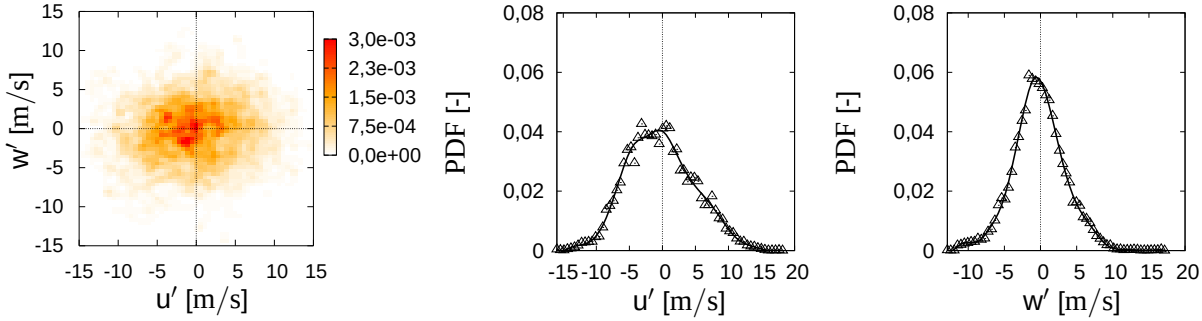
a. jPDF $u'w'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $u'w'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

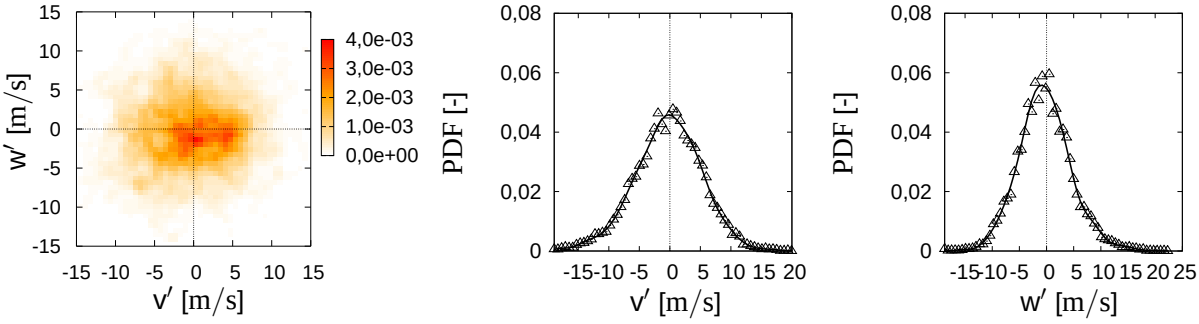


g. jPDF $u'w'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

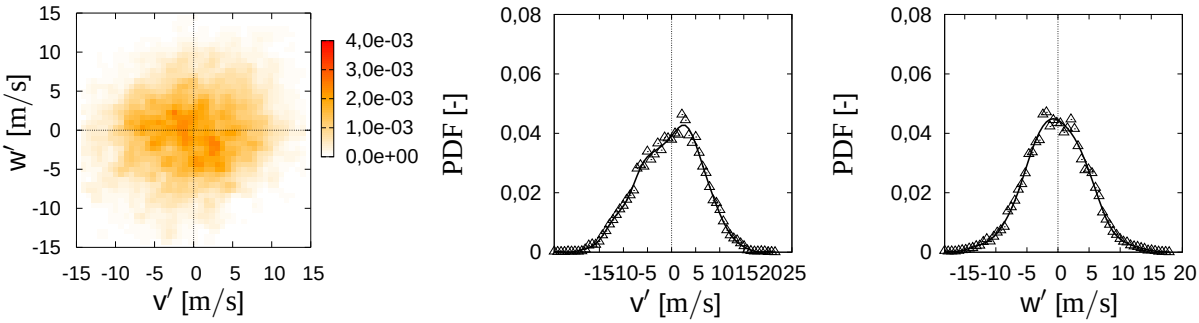


j. jPDF $u'w'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

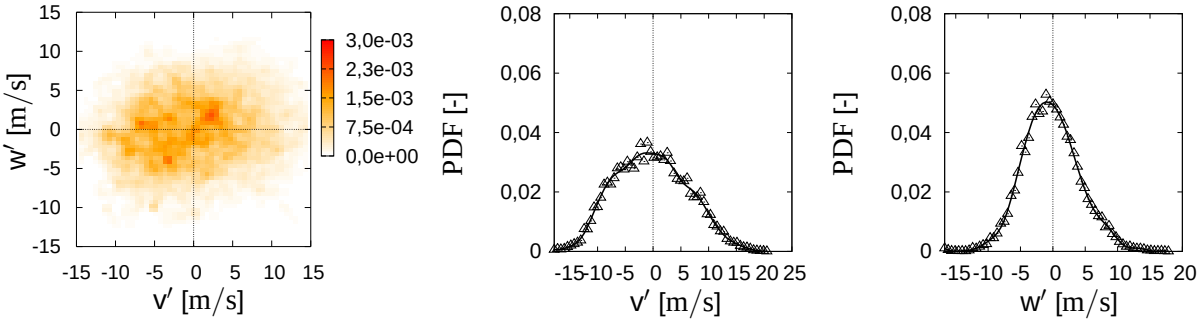
Bild B.32. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Zyklon, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ III.



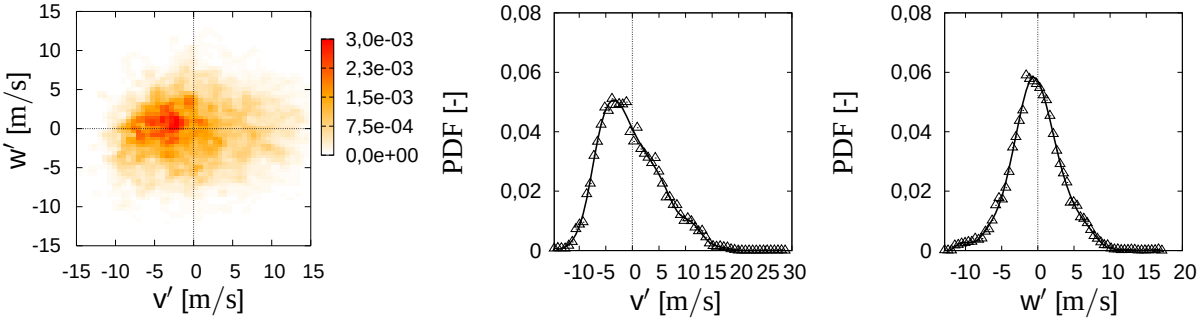
a. jPDF $v'w'$, r=40 mm b. PDF v', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $v'w'$, r=60 mm e. PDF v', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

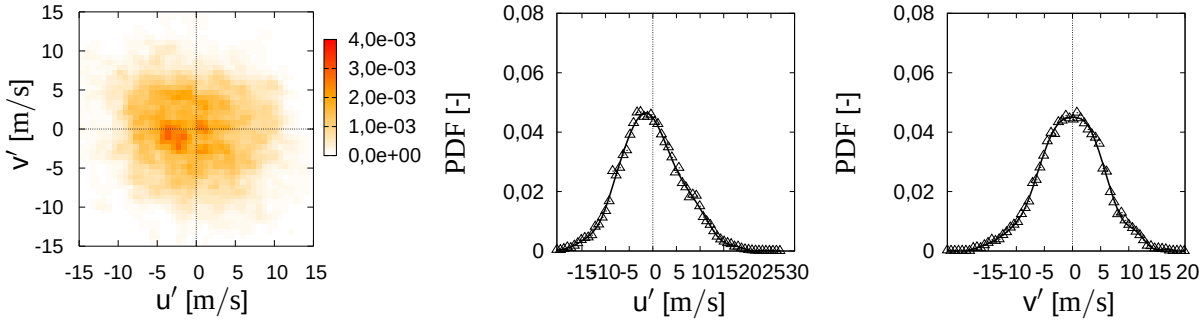


g. jPDF $v'w'$, r=80 mm h. PDF v', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

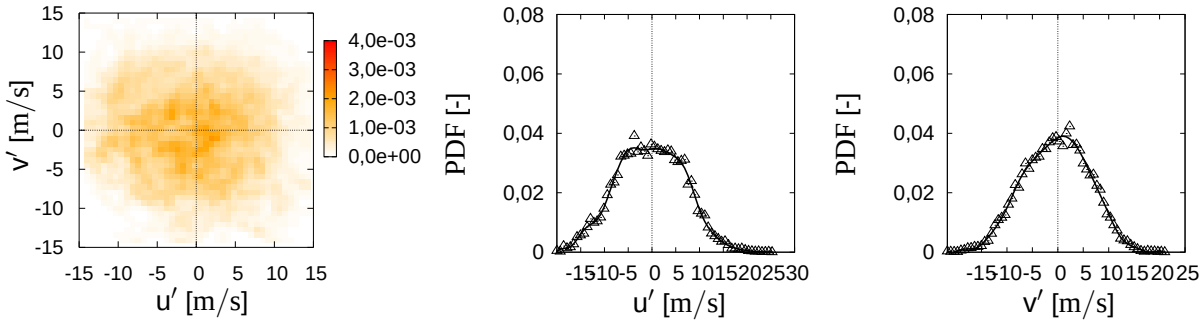


j. jPDF $v'w'$, r=100 mm k. PDF v', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

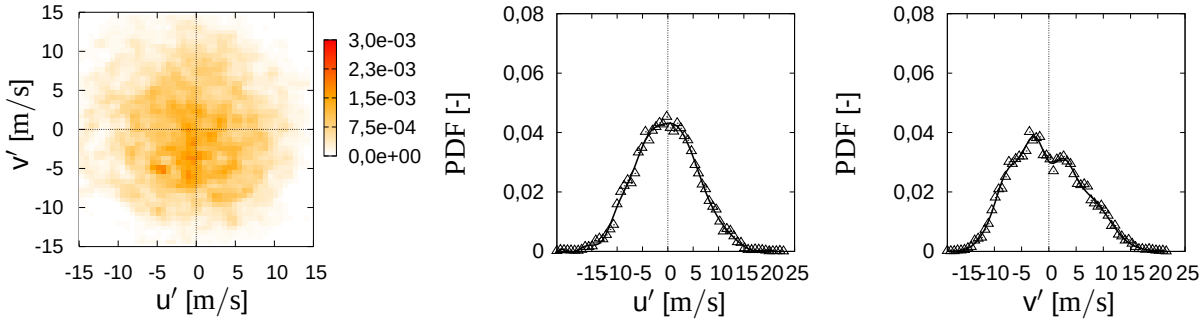
Bild B.33. Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Zyklon, x=100 mm, $\text{Quadrant}_{\text{geo}}$ III.



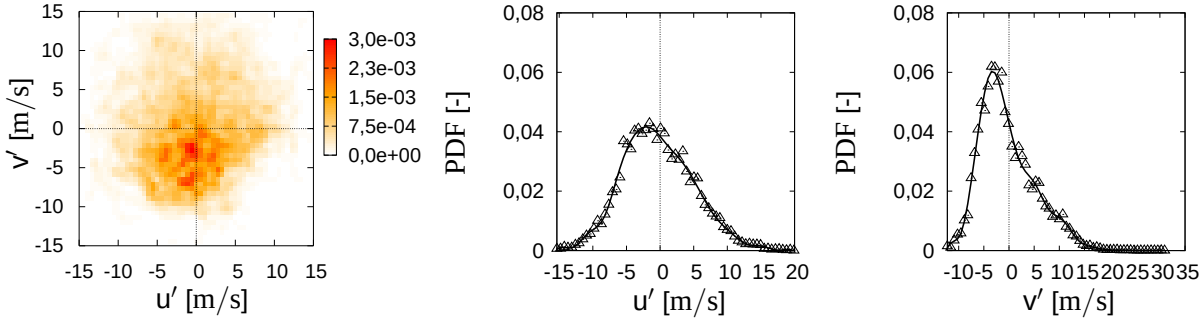
a. jPDF $u'v'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF v', r=40 mm



d. jPDF $u'v'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF v', r=60 mm

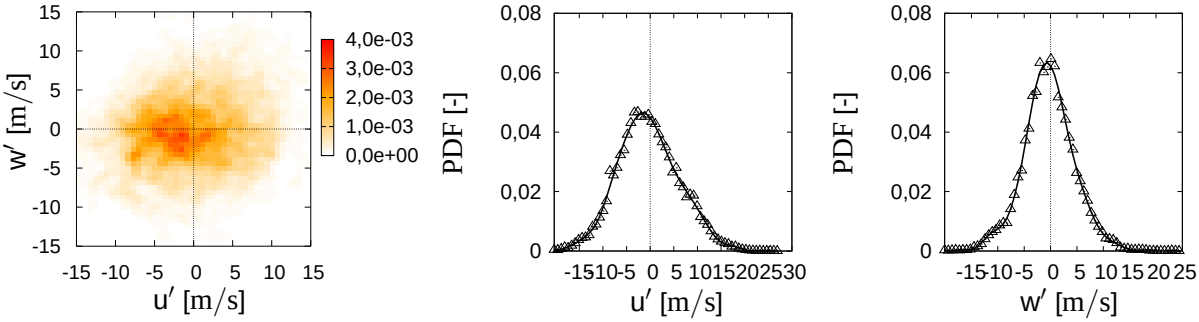


g. jPDF $u'v'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF v', r=80 mm

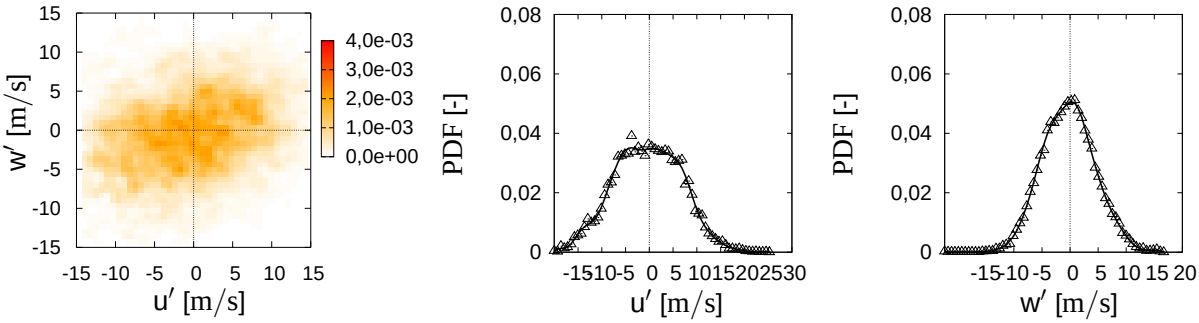


j. jPDF $u'v'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF v', r=100 mm

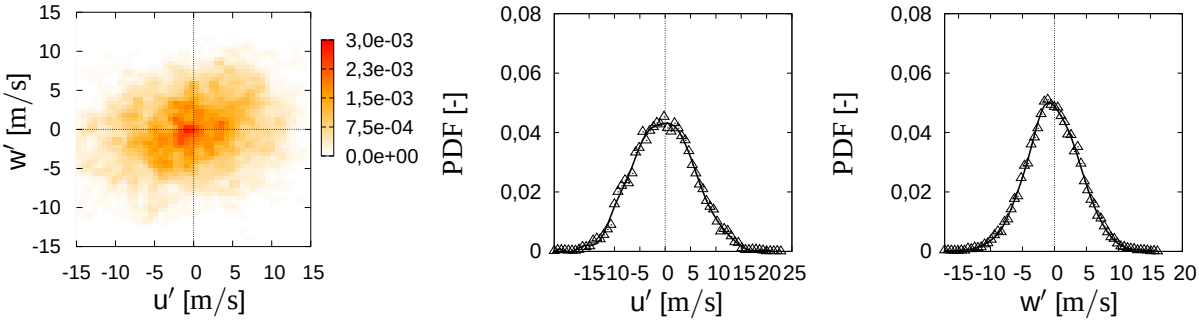
Bild B.34. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Zyklon, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ IV.



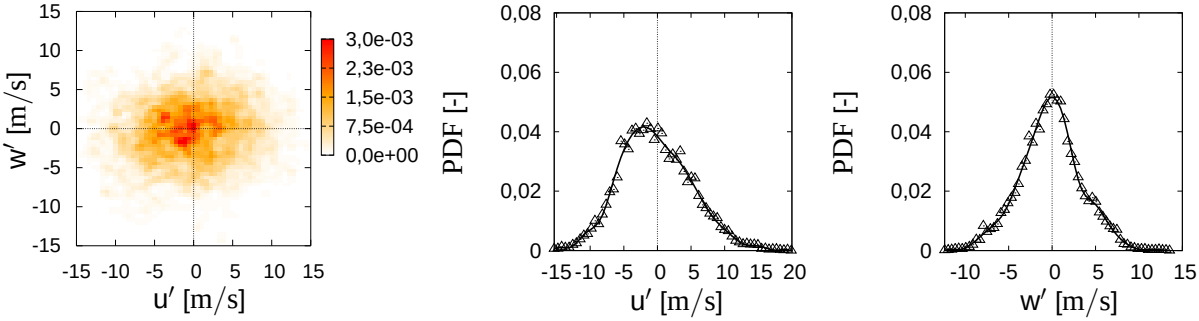
a. jPDF $u'w'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $u'w'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

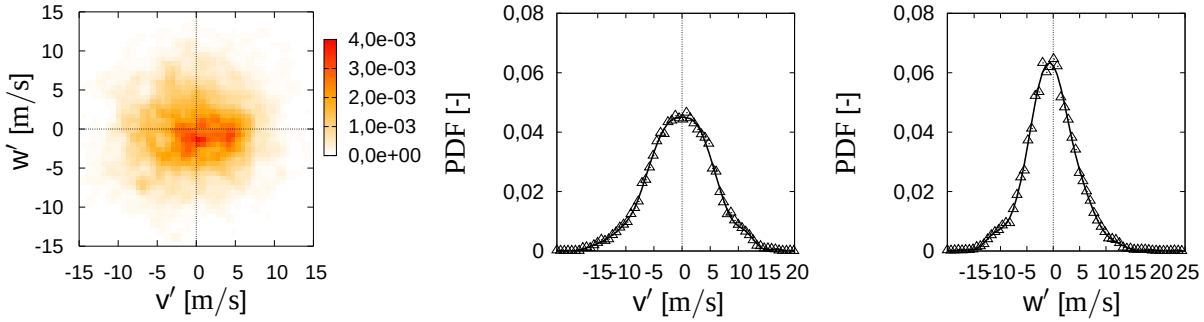


g. jPDF $u'w'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

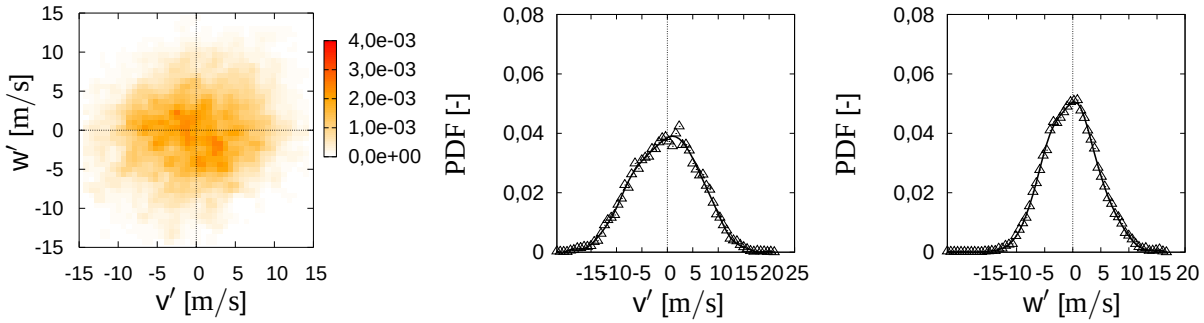


j. jPDF $u'w'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

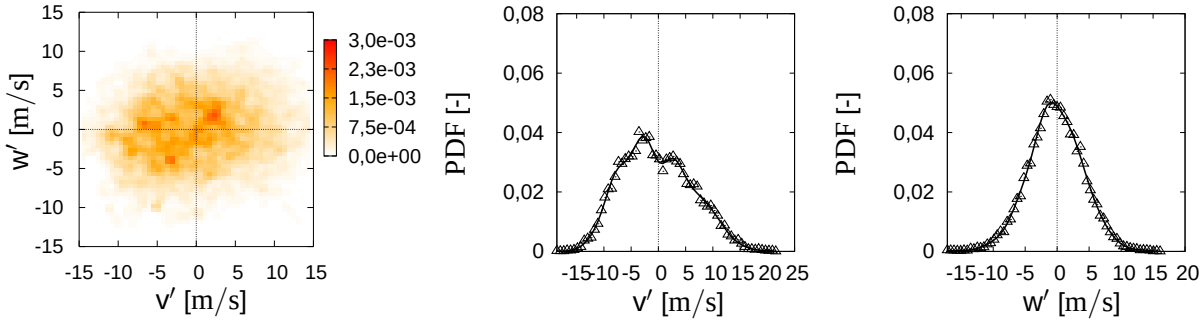
Bild B.35. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Zyklon, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ IV.



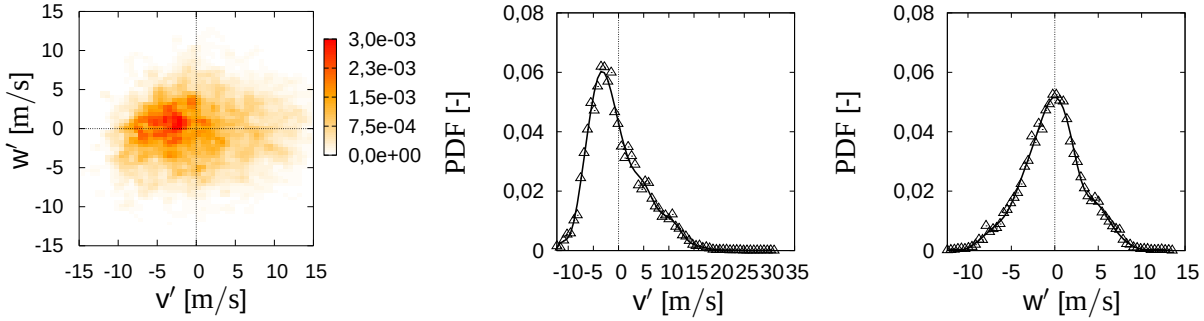
a. jPDF $v'w'$, r=40 mm b. PDF v', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $v'w'$, r=60 mm e. PDF v', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm



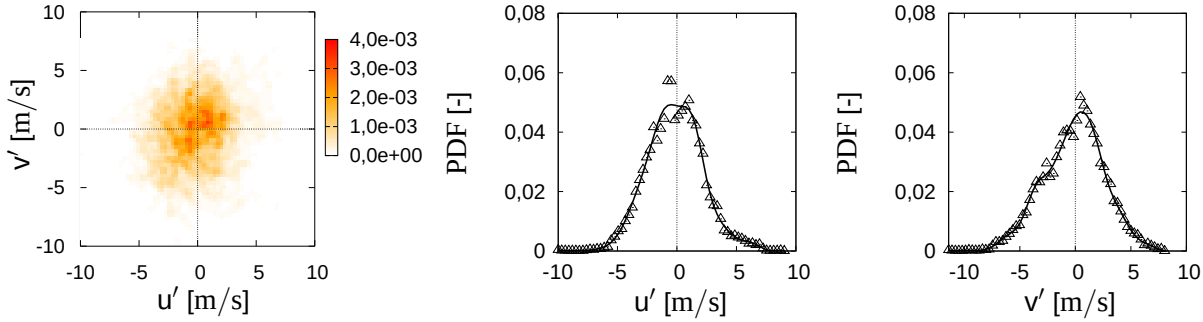
g. jPDF $v'w'$, r=80 mm h. PDF v', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm



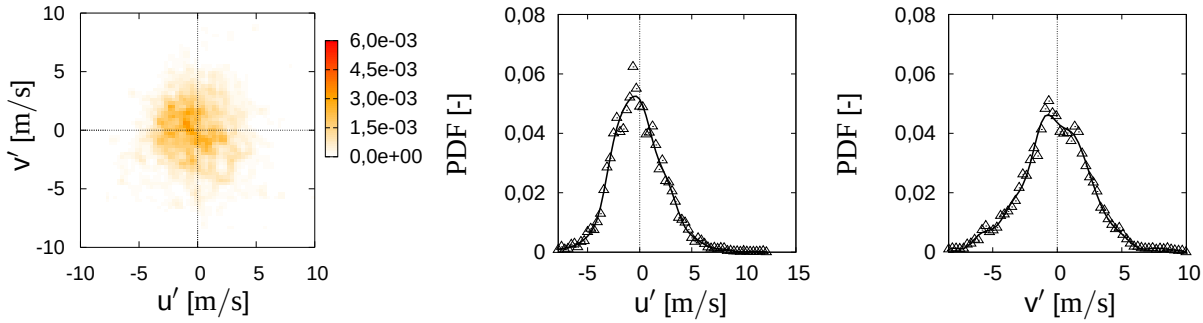
j. jPDF $v'w'$, r=100 mm k. PDF v', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

Bild B.36. Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Zyklon, x=100 mm, Quadrant$_{geo}$ IV.

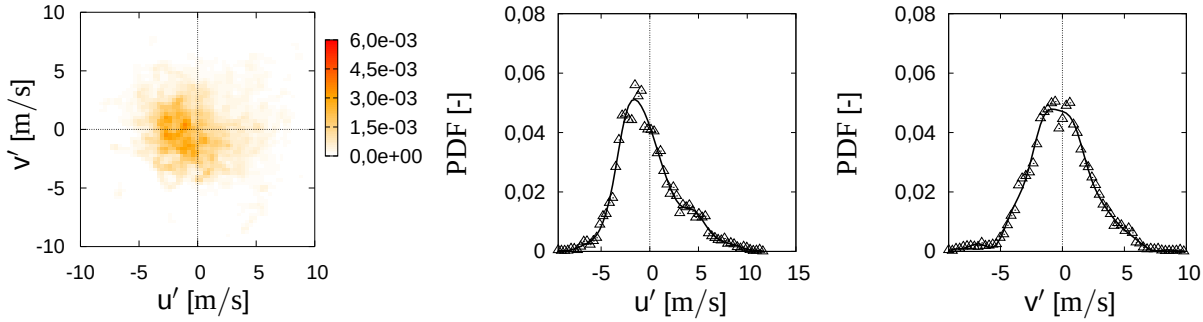
B.4 Zyklon; Axiale Position 200 mm



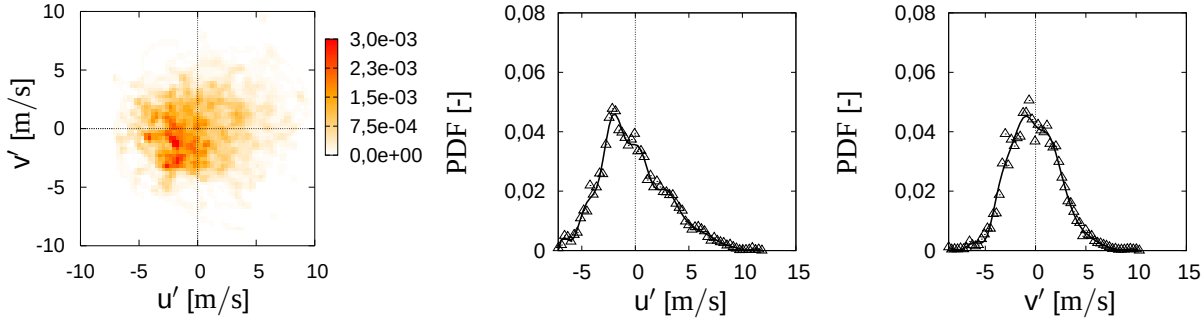
a. jPDF $u'v'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF v', r=40 mm



d. jPDF $u'v'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF v', r=60 mm

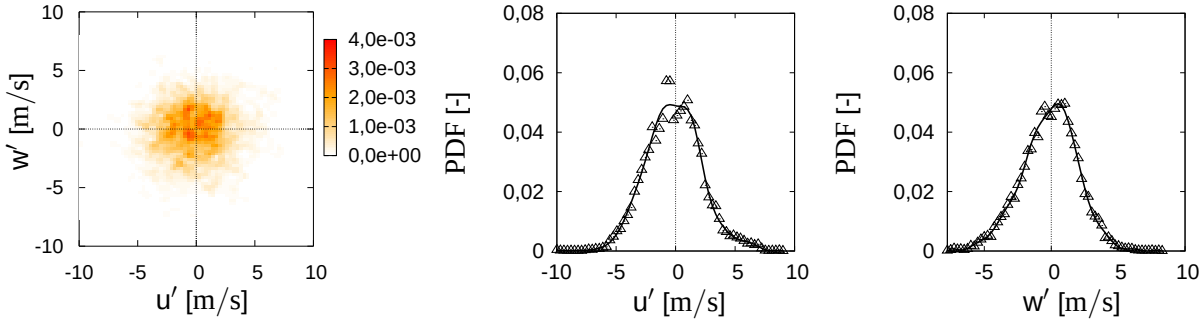


g. jPDF $u'v'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF v', r=80 mm

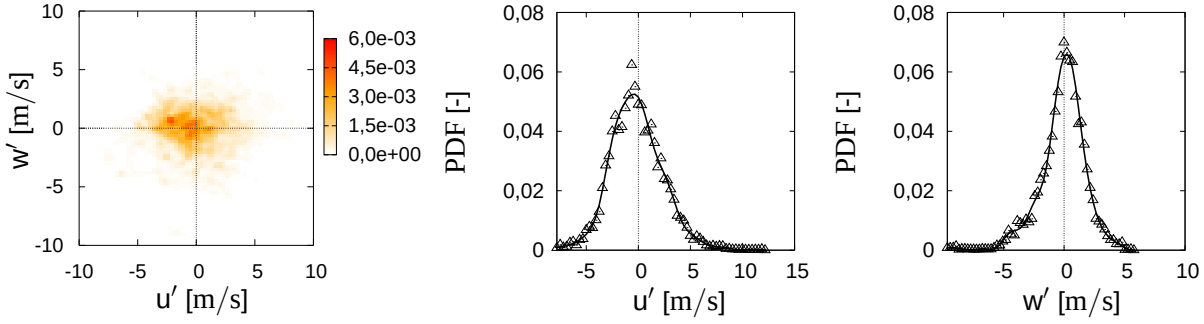


j. jPDF $u'v'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF v', r=100 mm

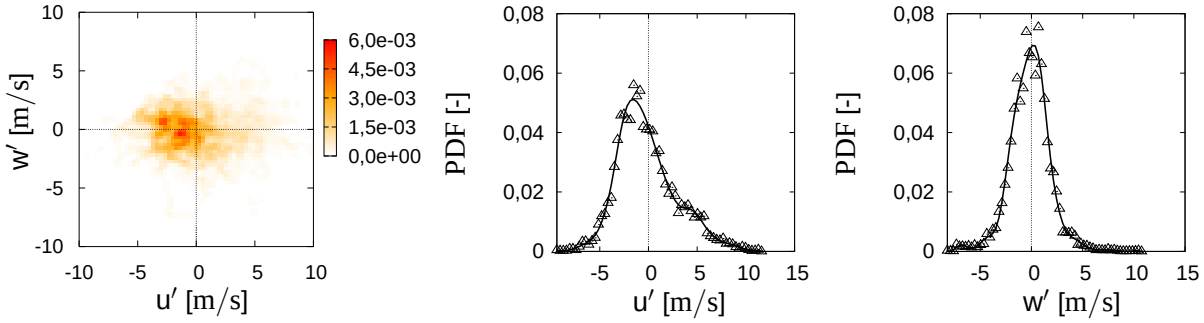
Bild B.37. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Zyklon, x=200 mm, Quadrant$_{geo}$ I.



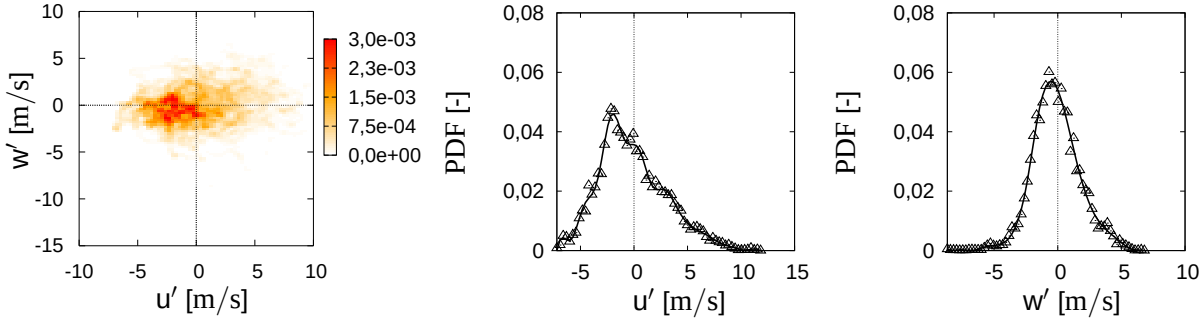
a. jPDF $u'w'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $u'w'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

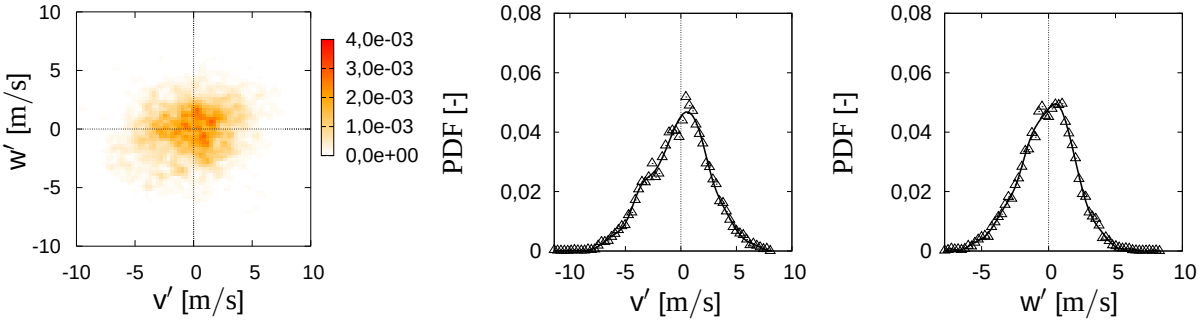


g. jPDF $u'w'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

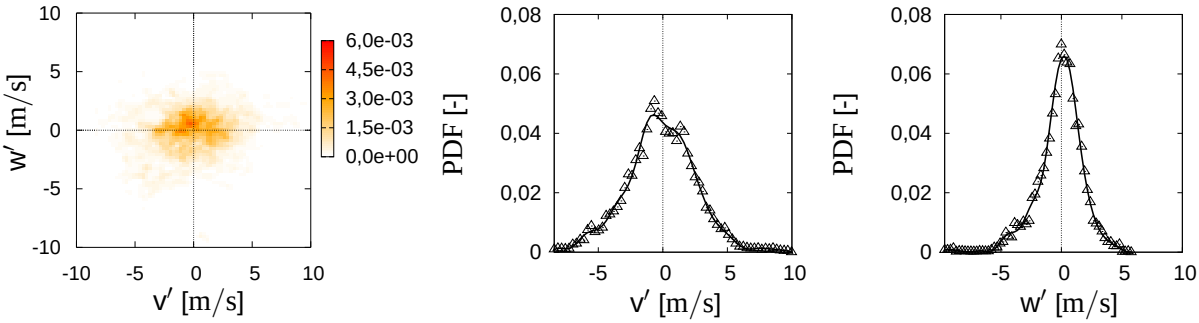


j. jPDF $u'w'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

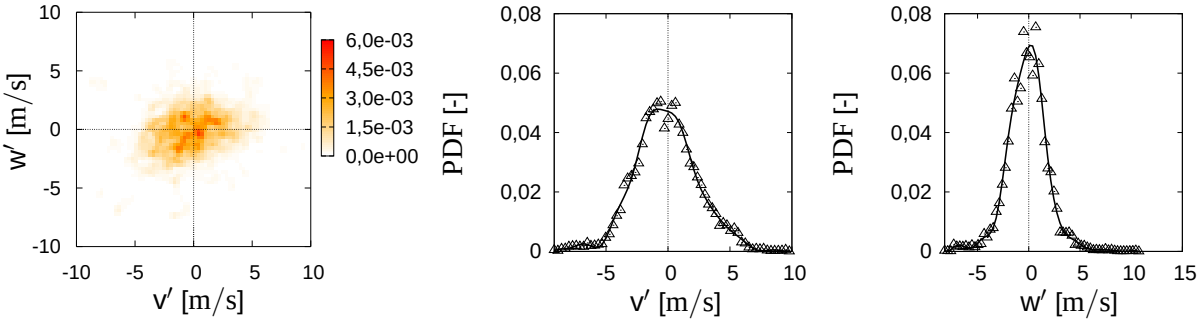
Bild B.38. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Zyklon, x=200 mm, Quadrant$_{geo}$ I.



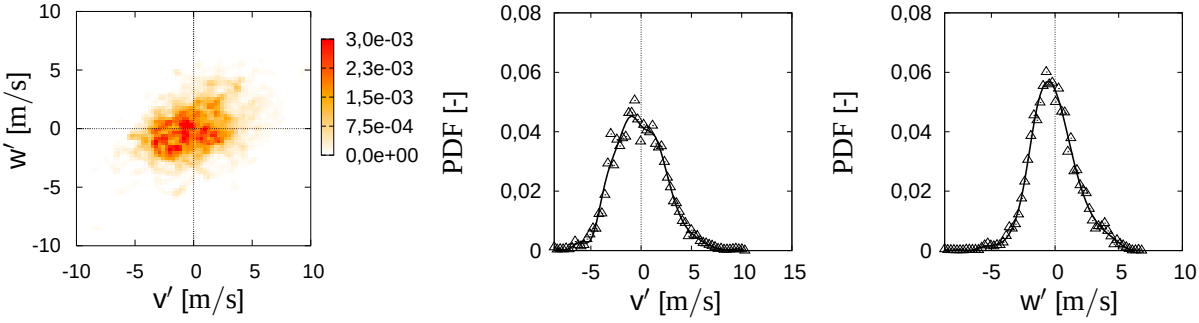
a. jPDF $v'w'$, r=40 mm b. PDF v', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $v'w'$, r=60 mm e. PDF v', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

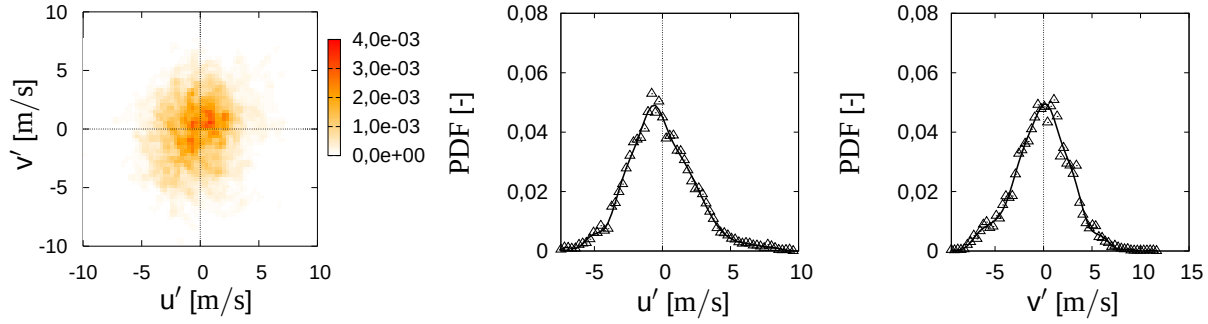


g. jPDF $v'w'$, r=80 mm h. PDF v', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

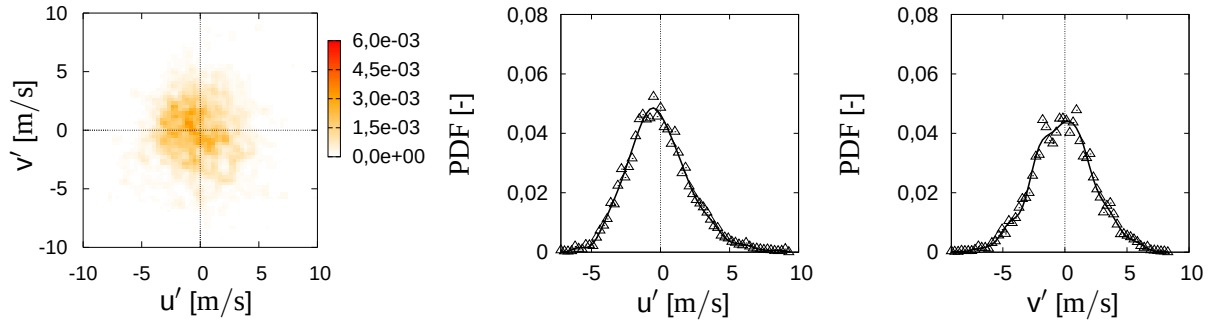


j. jPDF $v'w'$, r=100 mm k. PDF v', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

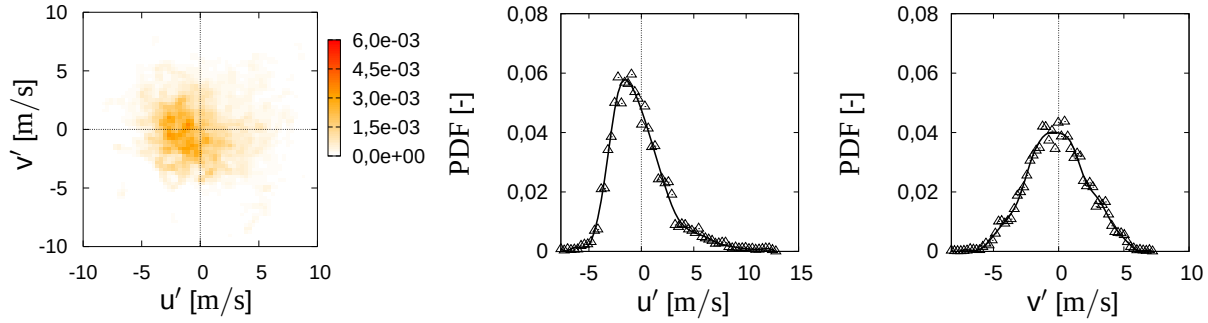
Bild B.39. Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Zyklon, x=200 mm, Quadrant$_{geo}$ I.



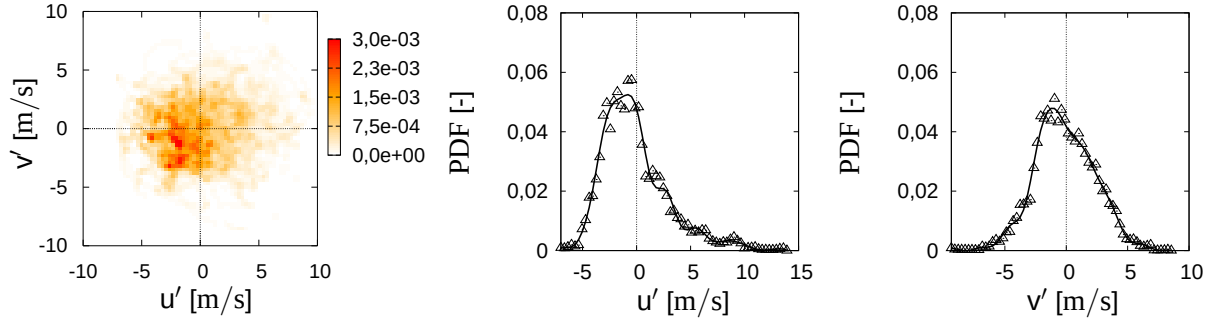
a. jPDF $u'v'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF v', r=40 mm



d. jPDF $u'v'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF v', r=60 mm

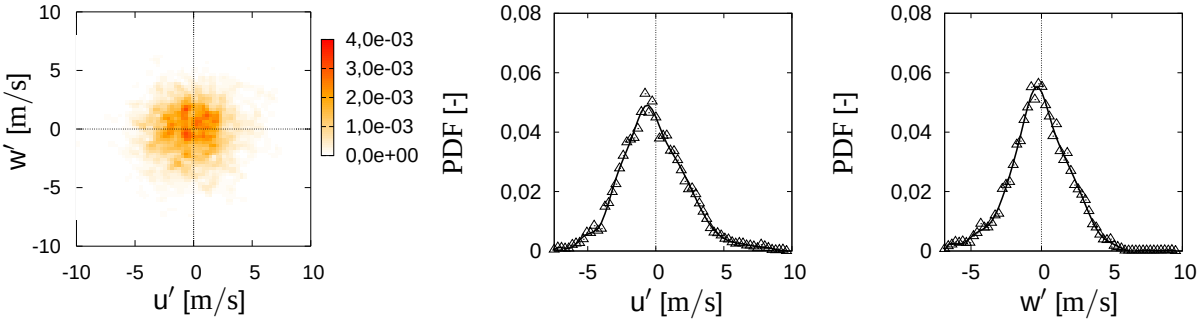


g. jPDF $u'v'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF v', r=80 mm

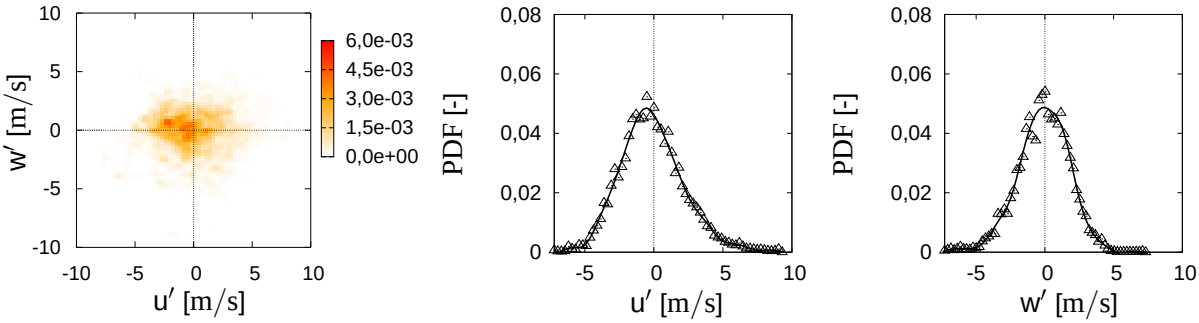


j. jPDF $u'v'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF v', r=100 mm

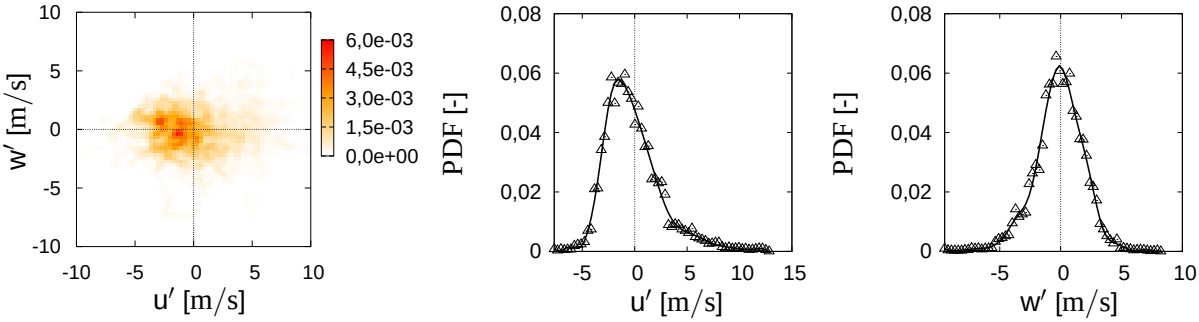
Bild B.40. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Zyklon, x=200 mm, Quadrant$_{geo}$ II.



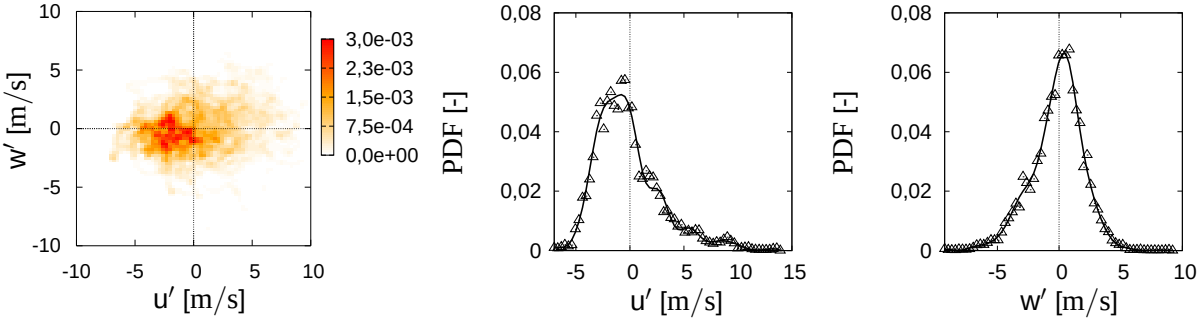
a. jPDF $u'w'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $u'w'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

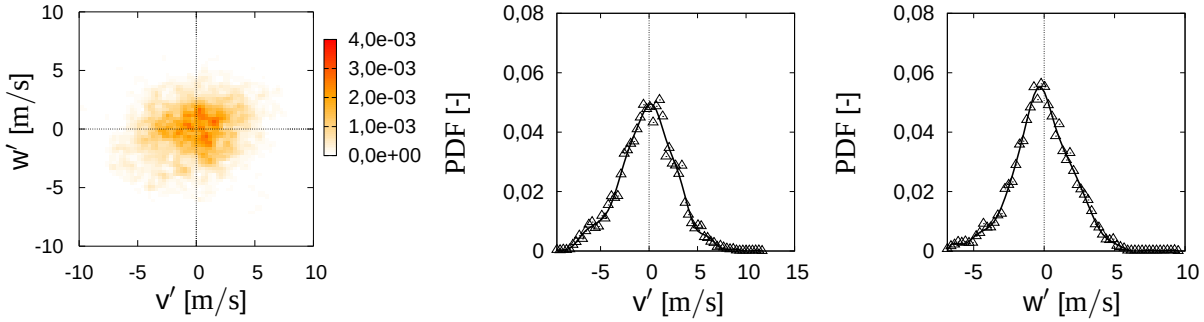


g. jPDF $u'w'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

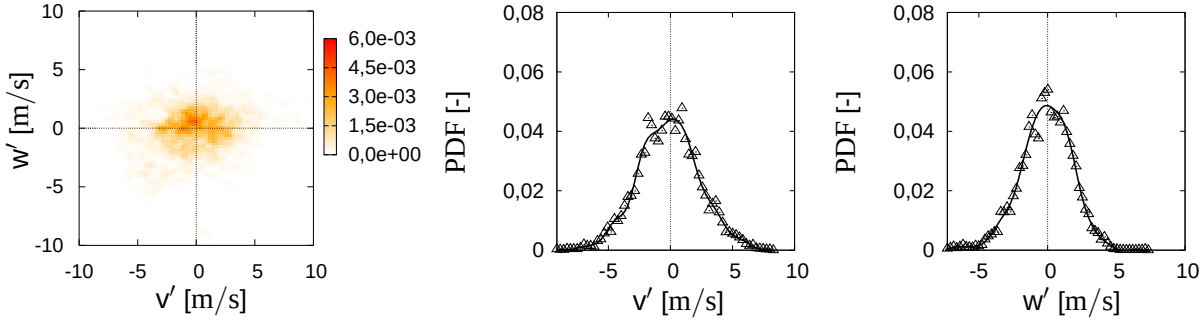


j. jPDF $u'w'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

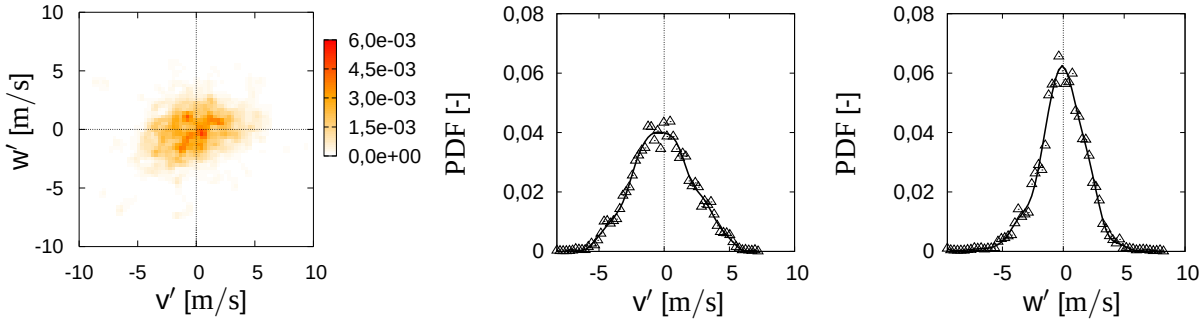
Bild B.41. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Zyklon, x=200 mm, Quadrant$_{geo}$ II.



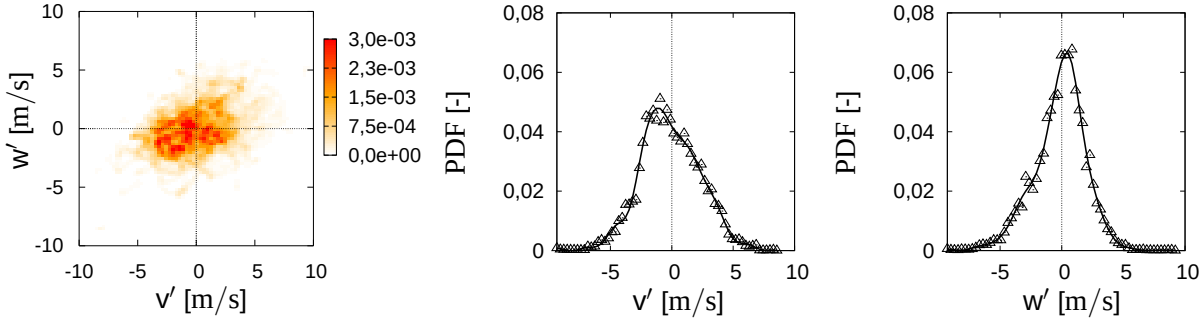
a. jPDF $v'w'$, r=40 mm b. PDF v', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $v'w'$, r=60 mm e. PDF v', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

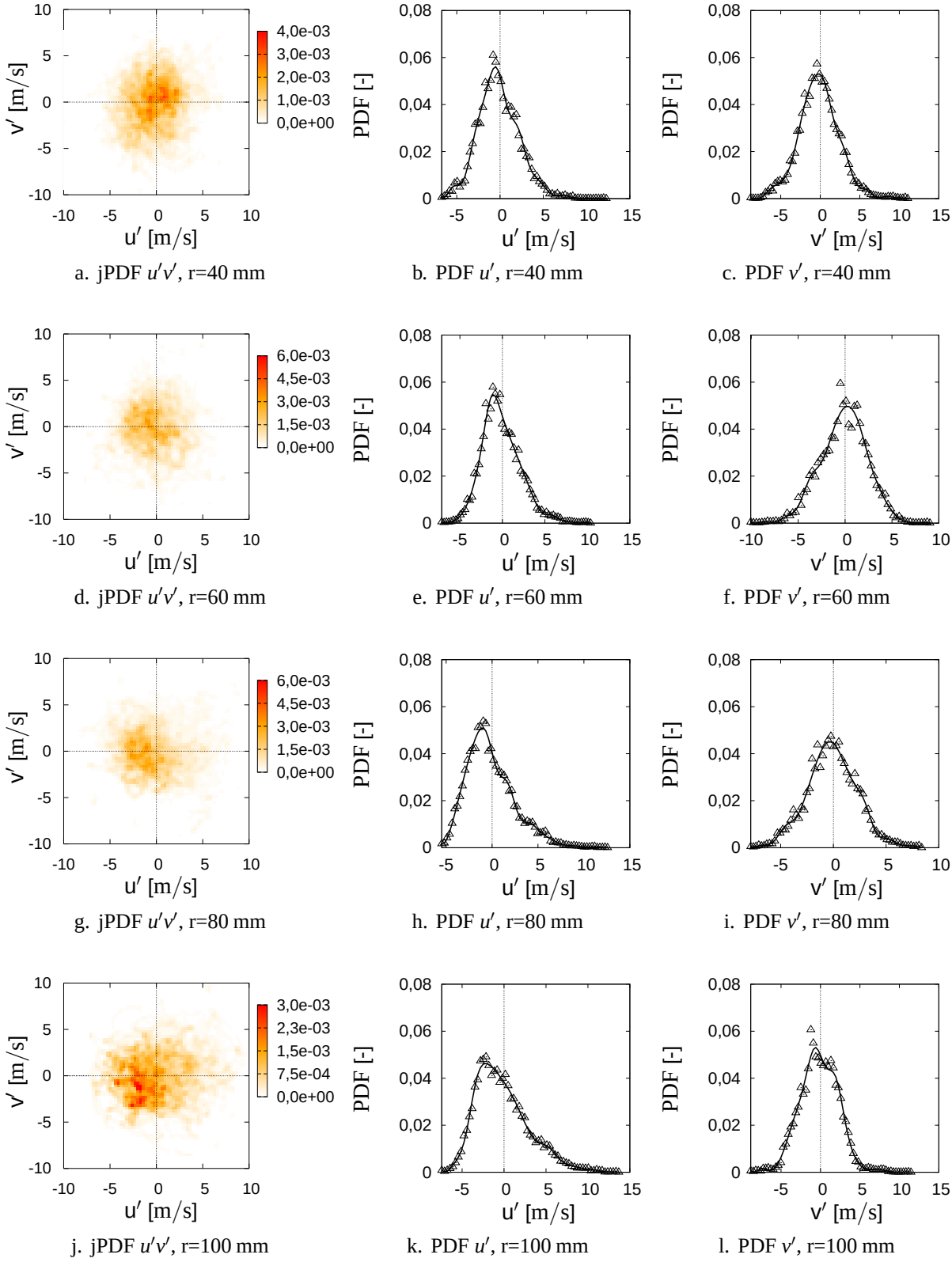


g. jPDF $v'w'$, r=80 mm h. PDF v', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm



j. jPDF $v'w'$, r=100 mm k. PDF v', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

Bild B.42. Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Zyklon, x=200 mm, $\text{Quadrant}_{\text{geo}}$ II.



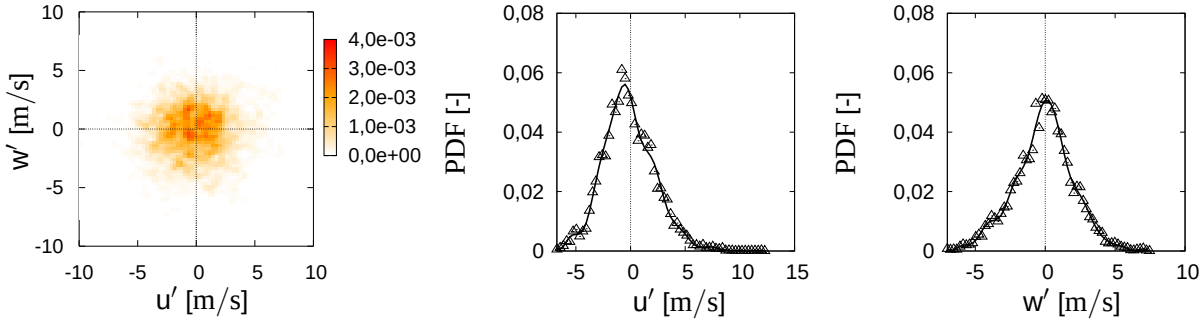
a. jPDF $u'v'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF v', r=40 mm

d. jPDF $u'v'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF v', r=60 mm

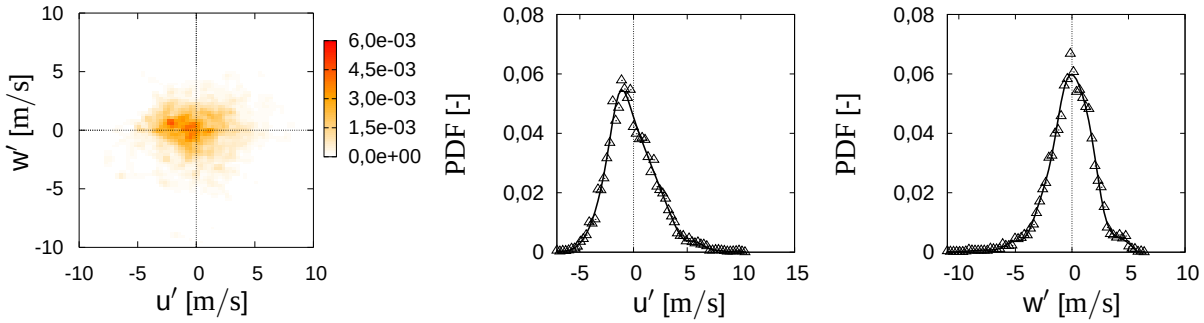
g. jPDF $u'v'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF v', r=80 mm

j. jPDF $u'v'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF v', r=100 mm

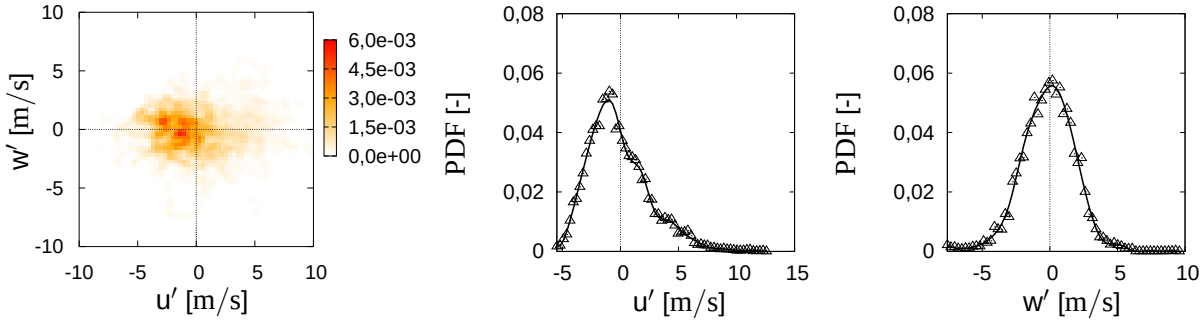
Bild B.43. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Zyklon, x=200 mm, $\text{Quadrant}_{\text{geo}}$ III.



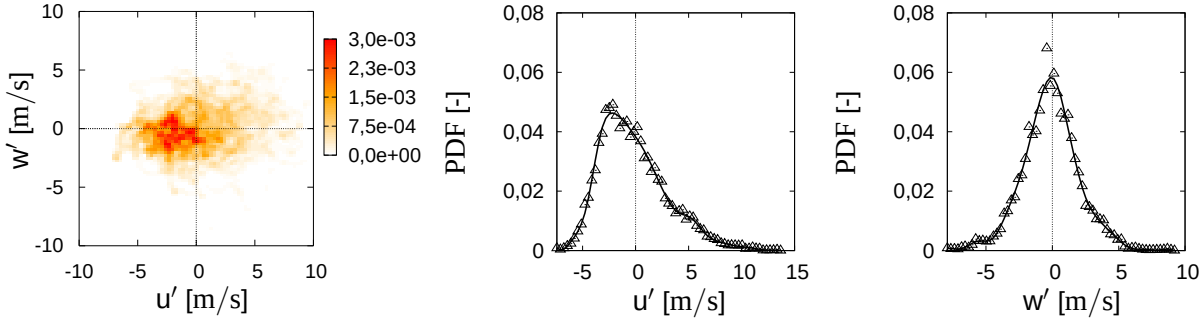
a. jPDF $u'w'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $u'w'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

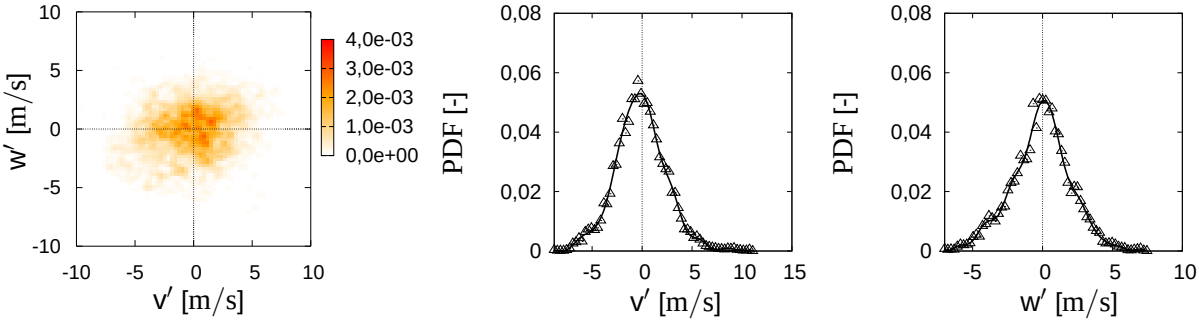


g. jPDF $u'w'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

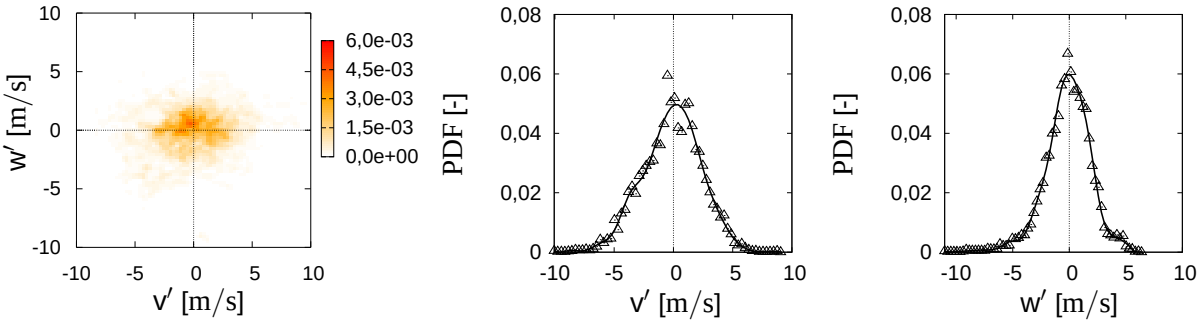


j. jPDF $u'w'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

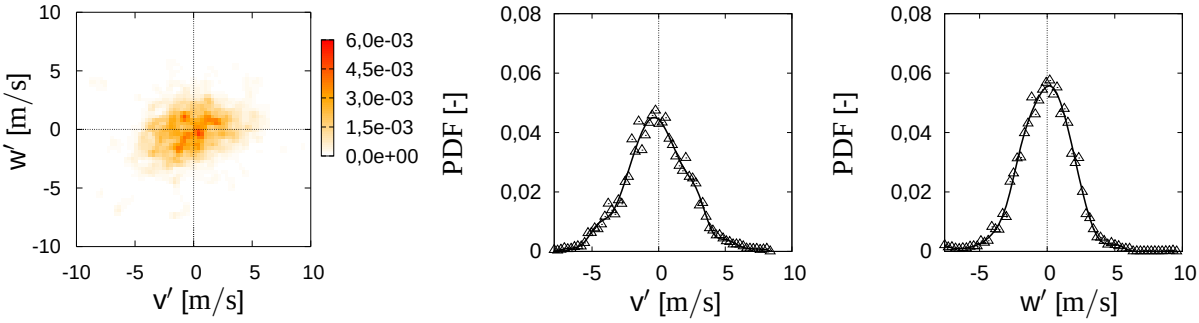
Bild B.44. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Zyklon, x=200 mm, Quadrant$_{geo}$ III.



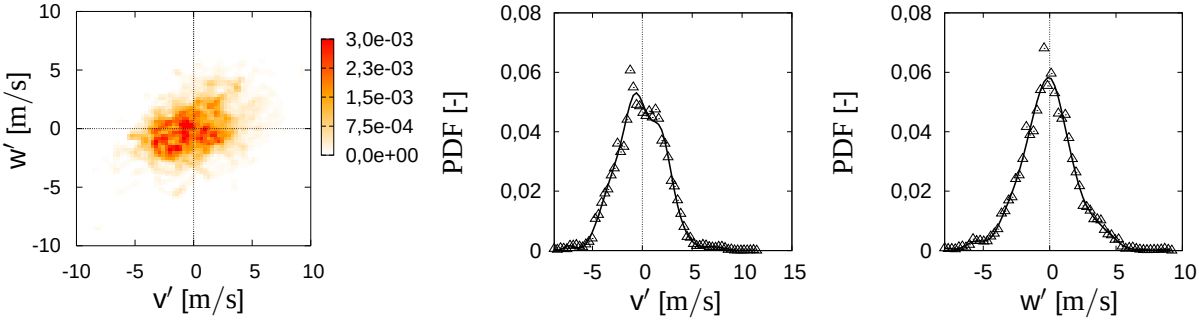
a. jPDF $v'w'$, r=40 mm b. PDF v', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $v'w'$, r=60 mm e. PDF v', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

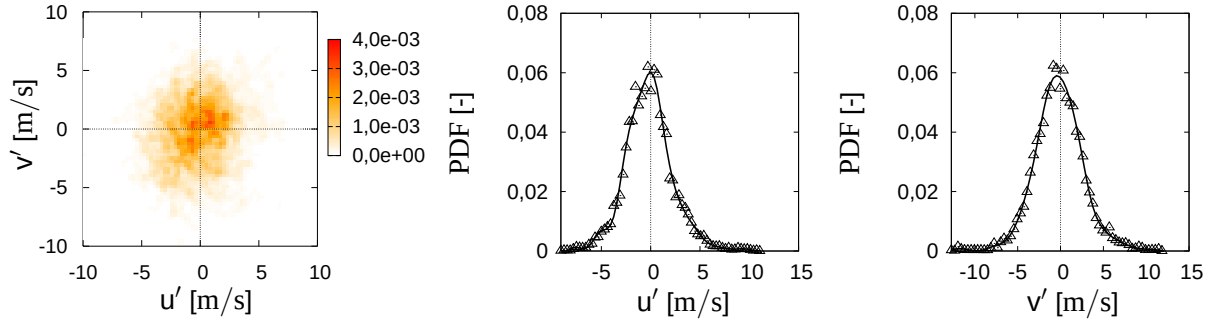


g. jPDF $v'w'$, r=80 mm h. PDF v', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

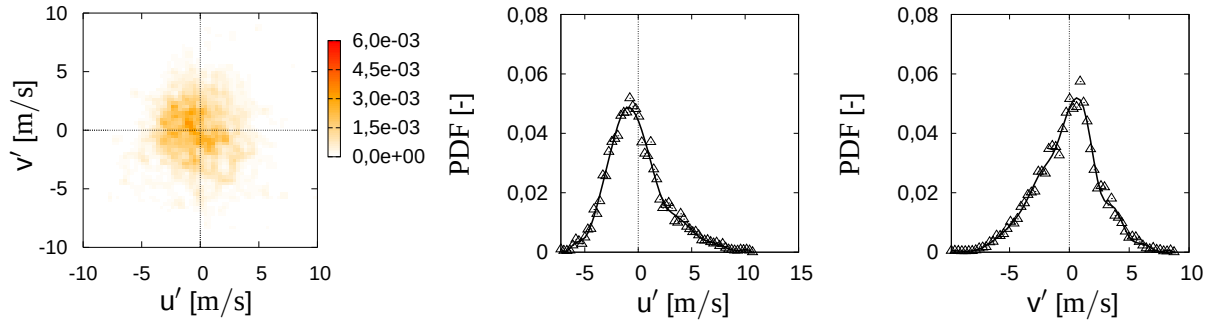


j. jPDF $v'w'$, r=100 mm k. PDF v', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

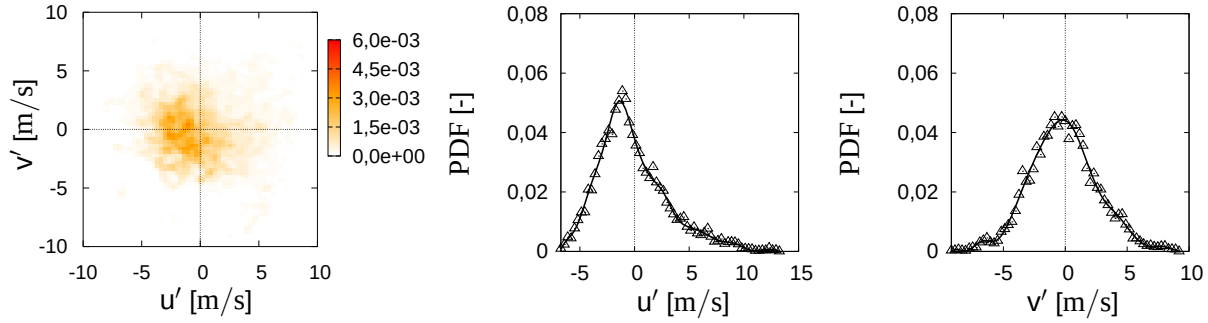
Bild B.45. Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Zyklon, x=200 mm, $\text{Quadrant}_{\text{geo}}$ III.



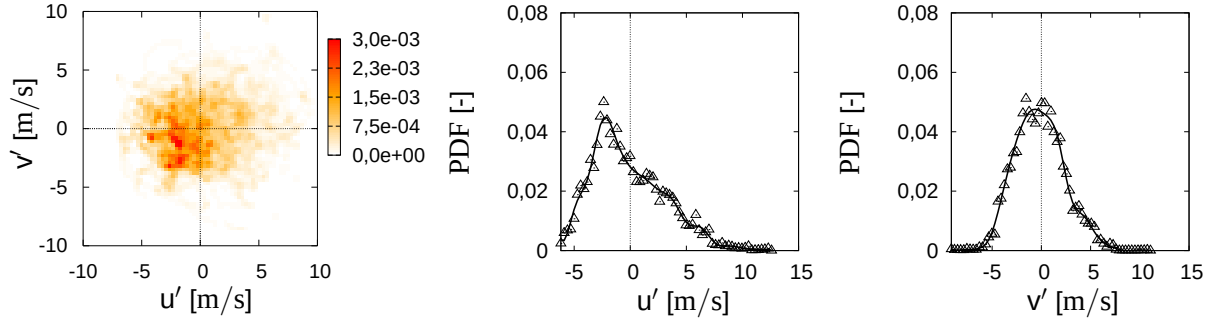
a. jPDF $u'v'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF v', r=40 mm



d. jPDF $u'v'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF v', r=60 mm

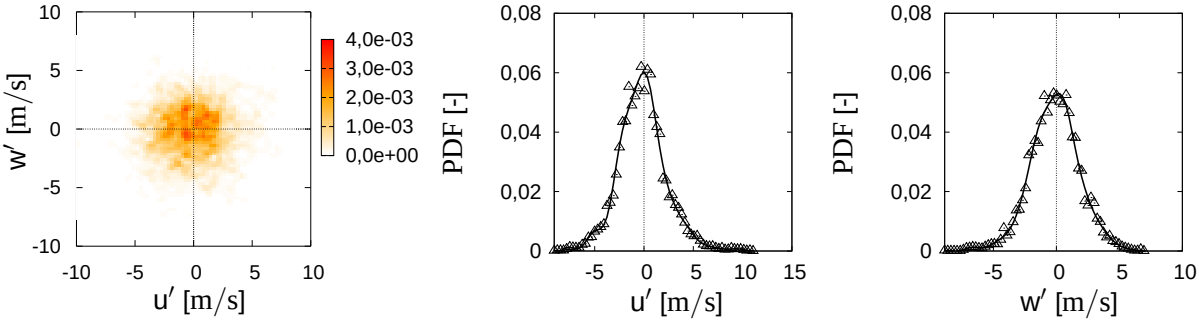


g. jPDF $u'v'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF v', r=80 mm

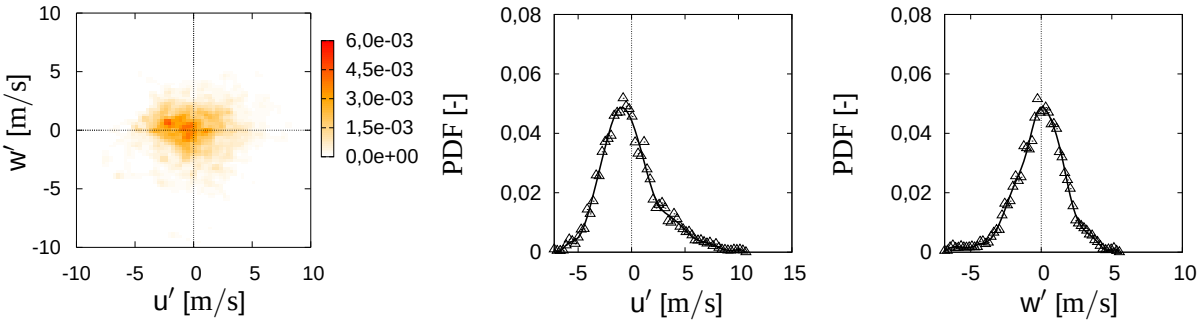


j. jPDF $u'v'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF v', r=100 mm

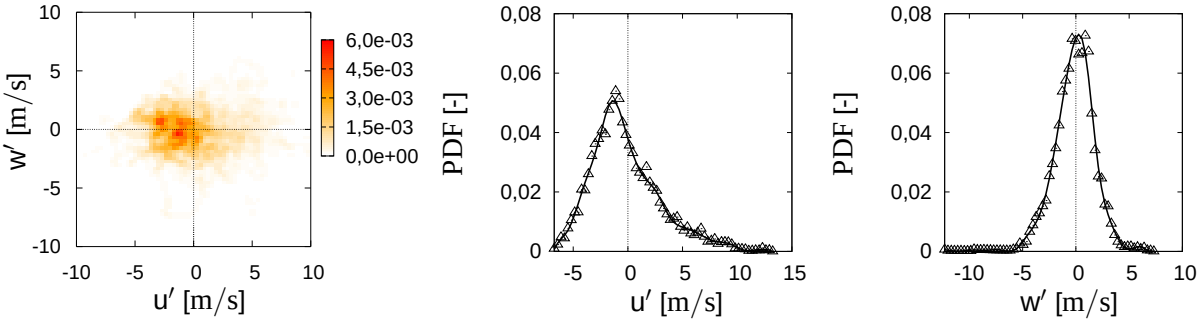
Bild B.46. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'v'$; Zyklon, x=200 mm, Quadrant$_{geo}$ IV.



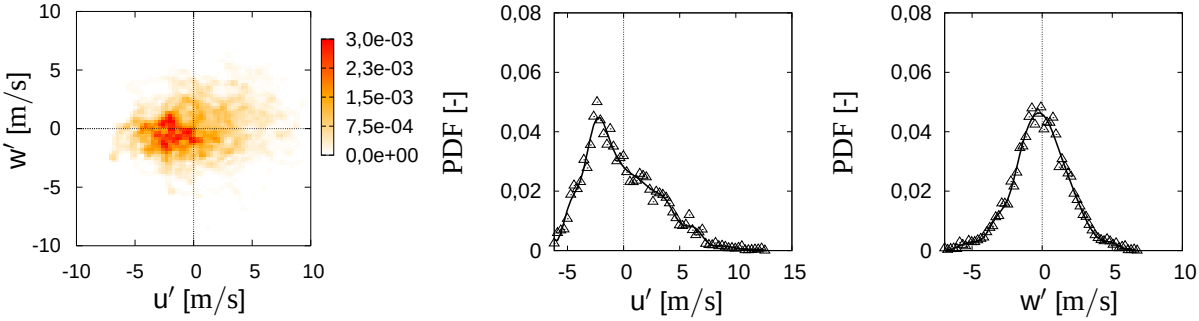
a. jPDF $u'w'$, r=40 mm b. PDF u', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $u'w'$, r=60 mm e. PDF u', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm

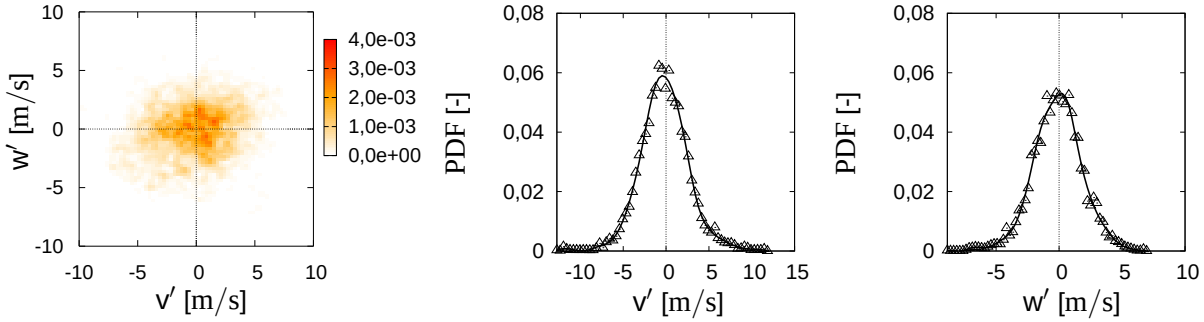


g. jPDF $u'w'$, r=80 mm h. PDF u', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm

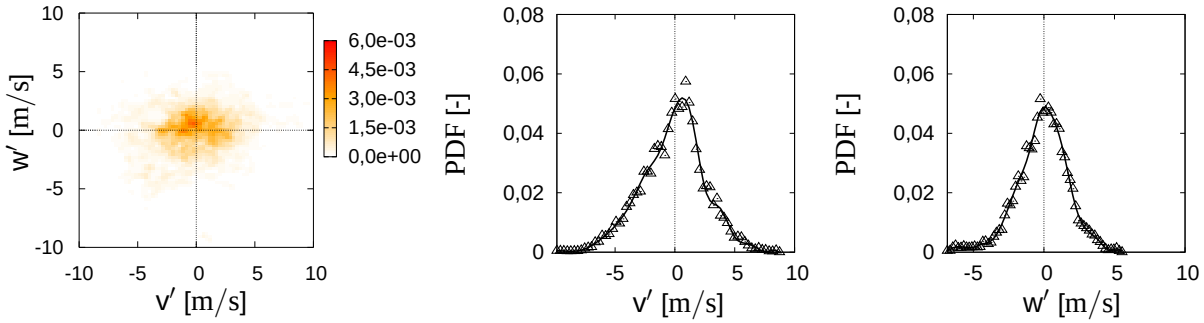


j. jPDF $u'w'$, r=100 mm k. PDF u', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

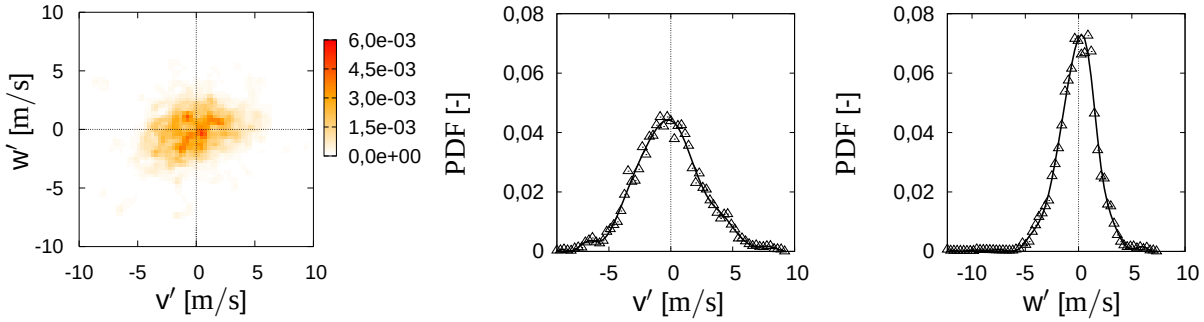
Bild B.47. Wahrscheinlichkeitsdichten $u'w'$; Zyklon, x=200 mm, Quadrant$_{geo}$ IV.



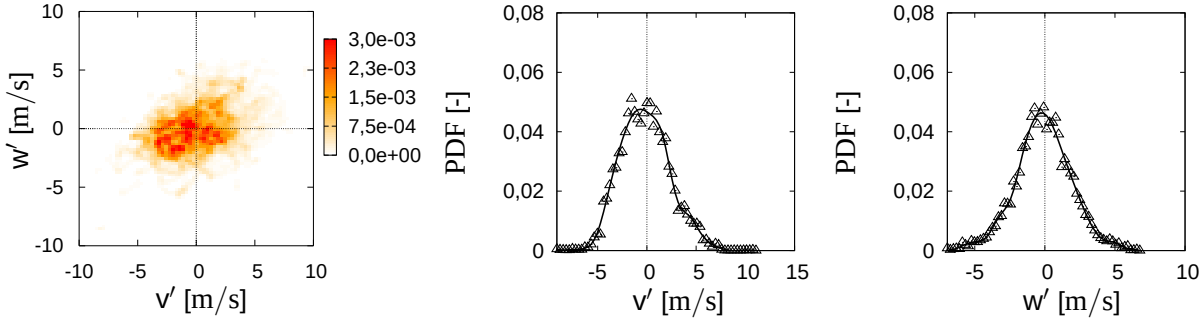
a. jPDF $v'w'$, r=40 mm b. PDF v', r=40 mm c. PDF w', r=40 mm



d. jPDF $v'w'$, r=60 mm e. PDF v', r=60 mm f. PDF w', r=60 mm



g. jPDF $v'w'$, r=80 mm h. PDF v', r=80 mm i. PDF w', r=80 mm



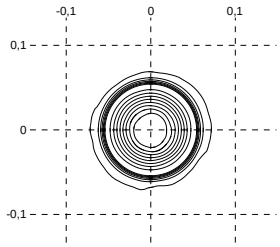
j. jPDF $v'w'$, r=100 mm k. PDF v', r=100 mm l. PDF w', r=100 mm

Bild B.48. Wahrscheinlichkeitsdichten $v'w'$; Zyklon, x=200 mm, $\text{Quadrant}_{\text{geo}}$ IV.

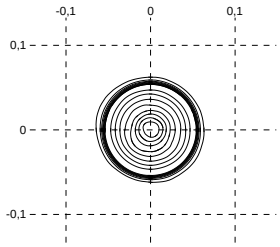
Anhang C

Zur statistischen Stationarität

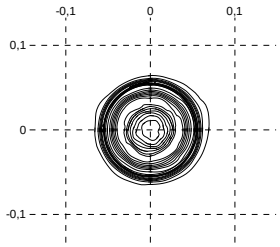
C.1 Freistrahl



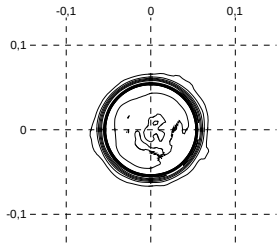
a. $\overline{U}$; x=20 mm;
Min.: -5,3; Max.: 24,2



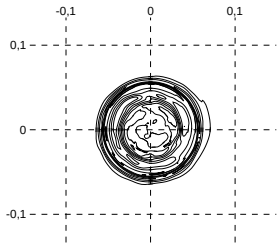
b. $\overline{W}$; x=20 mm;
Min.: -0,3; Max.: 22,1



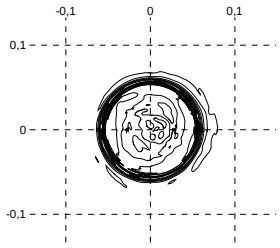
c. $\overline{u'u'}$; x=20 mm;
Min.: 0,0; Max.: 80,0



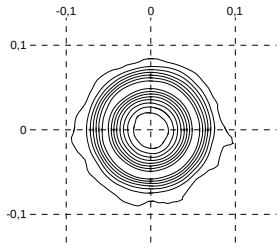
d. $\overline{v'w'}$; x=20 mm;
Min.: -14,1; Max.: 33,7



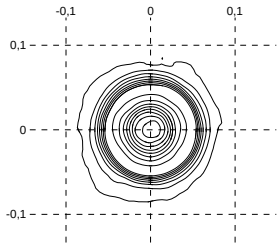
e. $\overline{u'u'u'}$; x=20 mm;
Min.: -448,0; Max.: 408,3



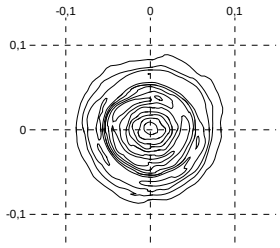
f. $\overline{u'v'w'}$; x=20 mm;
Min.: -72,4; Max.: 230,6



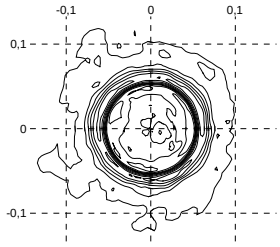
g. $\overline{U}$; x=40 mm;
Min.: -5,8; Max.: 20,6



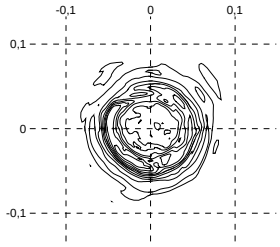
h. $\overline{W}$; x=40 mm;
Min.: -0,3; Max.: 17,8



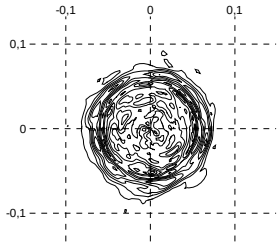
i. $\overline{u'u'}$; x=40 mm;
Min.: 0,0; Max.: 92,1



j. $\overline{v'w'}$; x=40 mm;
Min.: -14,3; Max.: 29,8

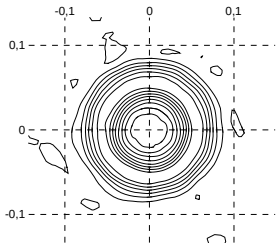


k. $\overline{u'u'u'}$; x=40 mm;
Min.: -765,0; Max.: 300,2

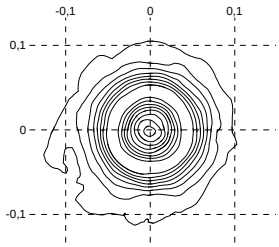


l. $\overline{u'v'w'}$; x=40 mm;
Min.: -49,1; Max.: 111,9

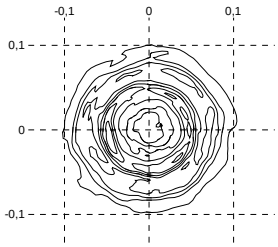
Bild C.1. Verteilung ausgewählter Ensemble-Mittelwerte über den Querschnitt x=20 mm und x=40 mm; Freistrahl. Dargestellt sind jeweils acht Isolinien, gleichverteilt zwischen den Minima und Maxima der gezeigten Größe.



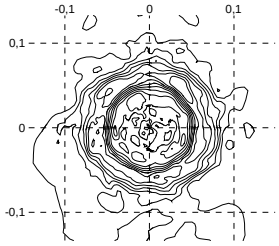
a. $\overline{U}$; x=60 mm;
Min.: -6,5; Max.: 18,0



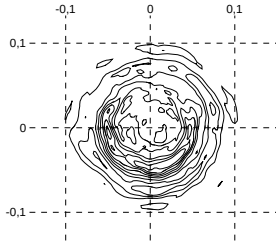
b. $\overline{W}$; x=60 mm;
Min.: -0,4; Max.: 16,2



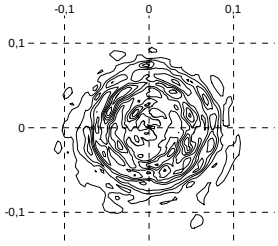
c. $\overline{u'u'}$; x=60 mm;
Min.: 0,0; Max.: 92,1



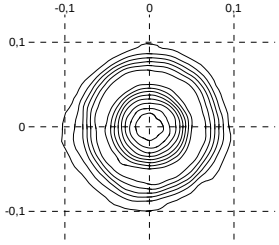
d. $\overline{v'w'}$; x=60 mm;
Min.: -6,4; Max.: 24,4



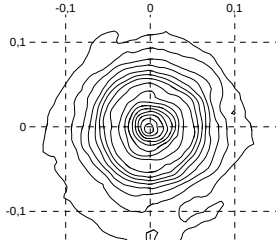
e. $\overline{u'u'u'}$; x=60 mm;
Min.: -662,8; Max.: 420,1



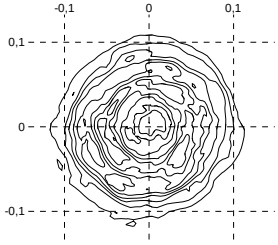
f. $\overline{u'v'w'}$; x=60 mm;
Min.: -77,1; Max.: 103,4



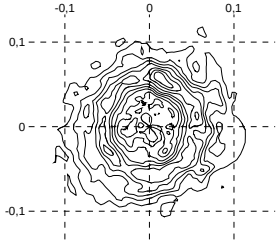
g. $\overline{U}$; x=80 mm;
Min.: -7,0; Max.: 16,1



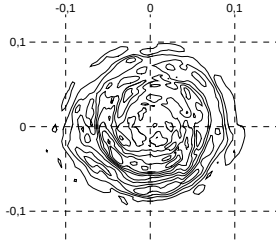
h. $\overline{W}$; x=80 mm;
Min.: -0,5; Max.: 14,7



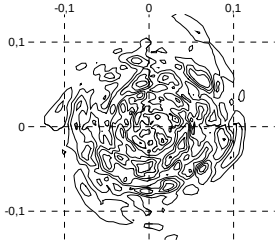
i. $\overline{u'u'}$; x=80 mm;
Min.: 0,0; Max.: 68,3



j. $\overline{v'w'}$; x=80 mm;
Min.: -4,6; Max.: 27,5

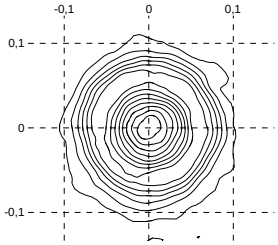


k. $\overline{u'u'u'}$; x=80 mm;
Min.: -343,7; Max.: 321,3

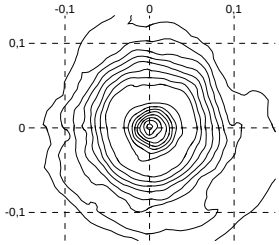


l. $\overline{u'v'w'}$; x=80 mm;
Min.: -70,0; Max.: 70,5

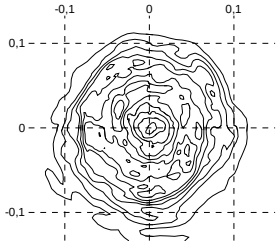
Bild C.2. Verteilung ausgewählter Ensemble-Mittelwerte über den Querschnitt x=60 mm und x=80 mm; Freistrahl. Dargestellt sind jeweils acht Isolinien, gleichverteilt zwischen den Minima und Maxima der gezeigten Größe.



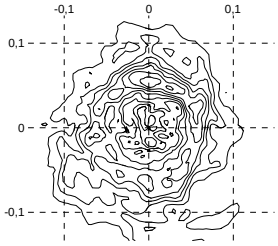
a. $\overline{U}$; x=100 mm;
Min.: -6,3; Max.: 14,8



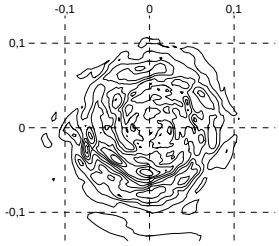
b. $\overline{W}$; x=100 mm;
Min.: -0,6; Max.: 12,4



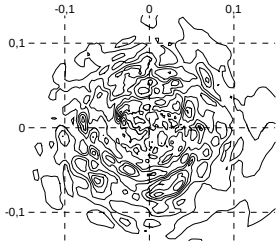
c. $\overline{u'u'}$; x=100 mm;
Min.: 0,0; Max.: 59,2



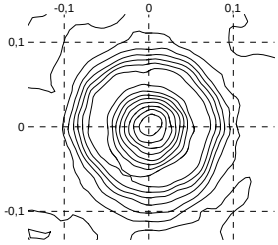
d. $\overline{v'w'}$; x=100 mm;
Min.: -4,1; Max.: 24,6



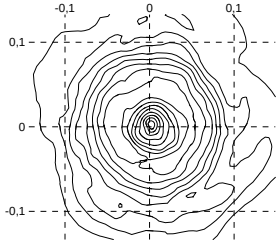
e. $\overline{u'u'u'}$; x=100 mm;
Min.: -273,3; Max.: 285,3



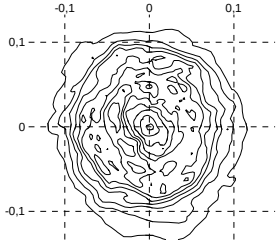
f. $\overline{u'v'w'}$; x=100 mm;
Min.: -60,8; Max.: 76,5



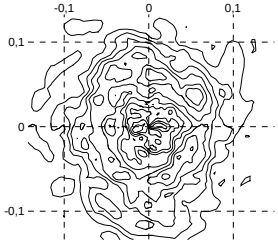
g. $\overline{U}$; x=120 mm;
Min.: -4,4; Max.: 13,1



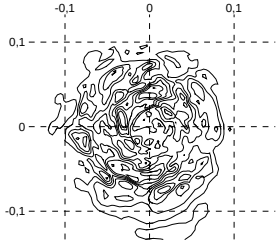
h. $\overline{W}$; x=120 mm;
Min.: -0,7; Max.: 11,4



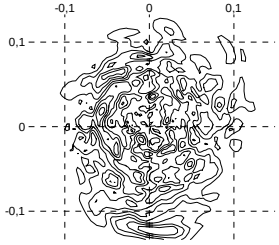
i. $\overline{u'u'}$; x=120 mm;
Min.: 0,0; Max.: 52,1



j. $\overline{v'w'}$; x=120 mm;
Min.: -5,7; Max.: 18,9

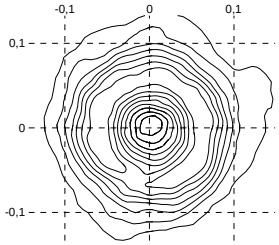


k. $\overline{u'u'u'}$; x=120 mm;
Min.: -153,9; Max.: 246,0

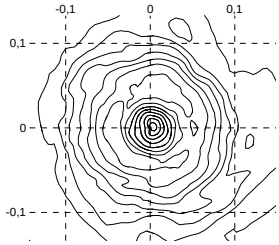


l. $\overline{u'v'w'}$; x=120 mm;
Min.: -59,3; Max.: 54,9

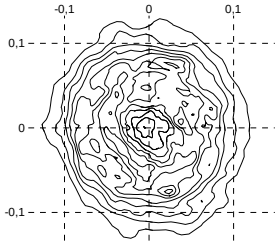
Bild C.3. Verteilung ausgewählter Ensemble-Mittelwerte über den Querschnitt x=100 mm und x=120 mm; Freistrahl. Dargestellt sind jeweils acht Isolinien, gleichverteilt zwischen den Minima und Maxima der gezeigten Größe.



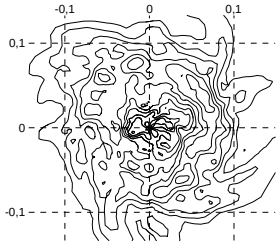
a. $\overline{U}$; x=140 mm;
Min.: -3,1; Max.: 12,0



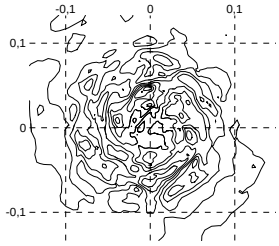
b. $\overline{W}$; x=140 mm;
Min.: -1,2; Max.: 10,4



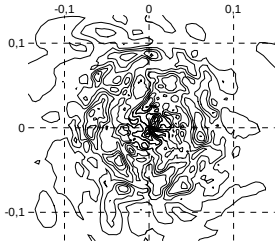
c. $\overline{u'u'}$; x=140 mm;
Min.: 0,0; Max.: 45,7



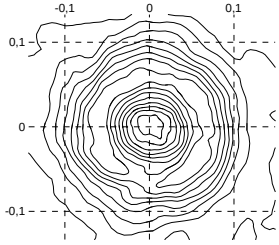
d. $\overline{v'w'}$; x=140 mm;
Min.: -5,3; Max.: 15,3



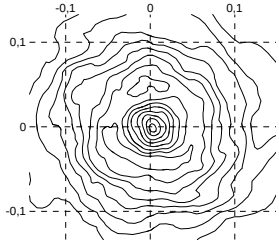
e. $\overline{u'u'u'}$; x=140 mm;
Min.: -150,0; Max.: 297,0



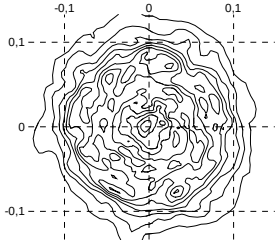
f. $\overline{u'v'w'}$; x=140 mm;
Min.: -39,2; Max.: 48,1



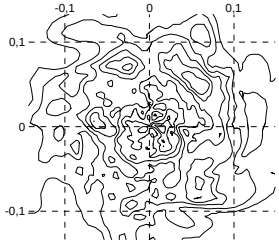
g. $\overline{U}$; x=160 mm;
Min.: -1,5; Max.: 11,1



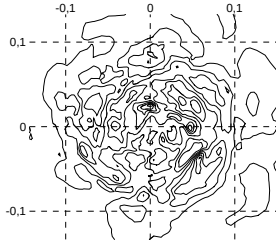
h. $\overline{W}$; x=160 mm;
Min.: -0,5; Max.: 9,7



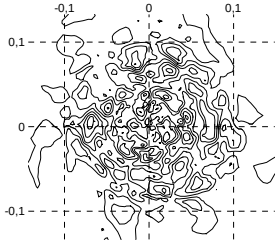
i. $\overline{u'u'}$; x=160 mm;
Min.: 0,0; Max.: 37,7



j. $\overline{v'w'}$; x=160 mm;
Min.: -6,0; Max.: 14,7

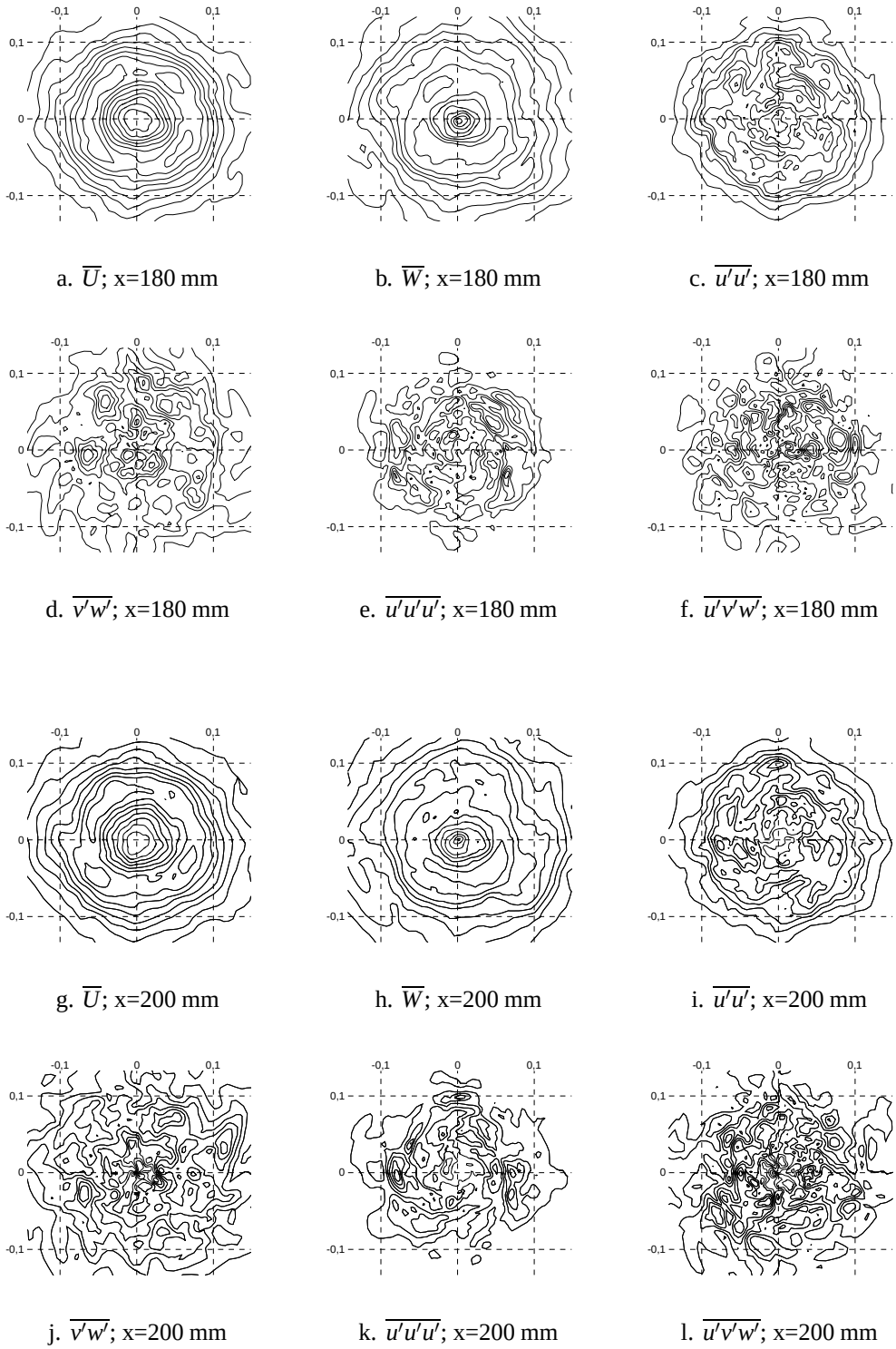


k. $\overline{u'u'u'}$; x=160 mm;
Min.: -133,3; Max.: 269,7



l. $\overline{u'v'w'}$; x=160 mm;
Min.: -36,4; Max.: 41,8

Bild C.4. Verteilung ausgewählter Ensemble-Mittelwerte über den Querschnitt x=140 mm und x=160 mm; Freistrahl. Dargestellt sind jeweils acht Isolinien, gleichverteilt zwischen den Minima und Maxima der gezeigten Größe.



a. $\overline{U}$; x=180 mm b. $\overline{W}$; x=180 mm c. $\overline{u'u'}$; x=180 mm

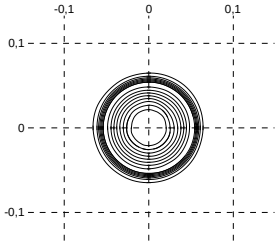
d. $\overline{v'w'}$; x=180 mm e. $\overline{u'u'u'}$; x=180 mm f. $\overline{u'v'w'}$; x=180 mm

g. $\overline{U}$; x=200 mm h. $\overline{W}$; x=200 mm i. $\overline{u'u'}$; x=200 mm

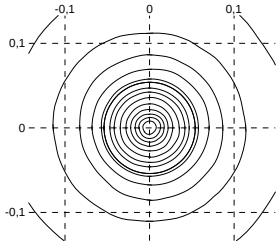
j. $\overline{v'w'}$; x=200 mm k. $\overline{u'u'u'}$; x=200 mm l. $\overline{u'v'w'}$; x=200 mm

Bild C.5. Verteilung ausgewählter Ensemble-Mittelwerte über den Querschnitt x=180 mm und x=200 mm; Freistrahl. Dargestellt sind jeweils acht Isolinien, gleichverteilt zwischen den Minima und Maxima der gezeigten Größe.

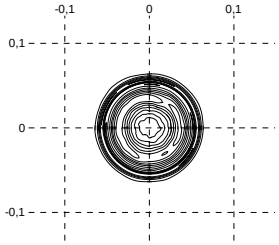
C.2 Zyklon



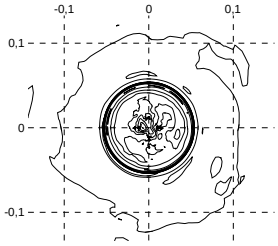
a. $\overline{U}$; x=20 mm;
Min.: -4,3 Max.: 23,9



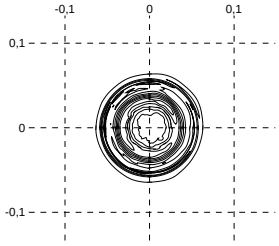
b. $\overline{W}$; x=20 mm;
Min.: -0,7; Max.: 21,4



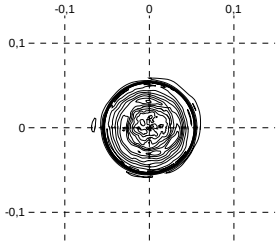
c. $\overline{u'u'}$; x=20 mm;
Min.: 0,0; Max.: 93,2



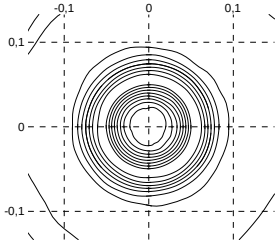
d. $\overline{v'w'}$; x=20 mm;
Min.: -16,3; Max.: 10,0



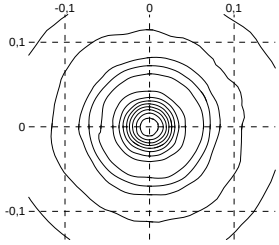
e. $\overline{u'u'u'}$; x=20 mm;
Min.: -312,0; Max.: 463,4



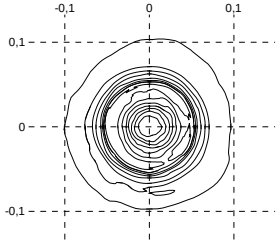
f. $\overline{u'v'w'}$; x=20 mm;
Min.: -97,2; Max.: 55,8



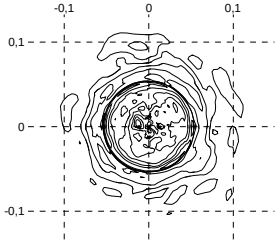
g. $\overline{U}$; x=40 mm;
Min.: -4,7; Max.: 17,1



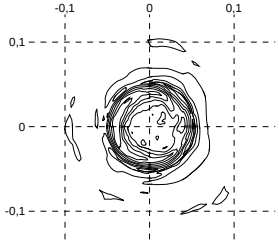
h. $\overline{W}$; x=40 mm;
Min.: -1,2; Max.: 16,7



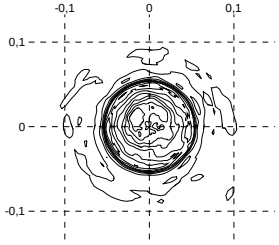
i. $\overline{u'u'}$; x=40 mm;
Min.: 0,0; Max.: 118,3



j. $\overline{v'w'}$; x=40 mm;
Min.: -16,2; Max.: 7,3

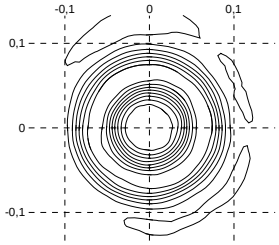


k. $\overline{u'u'u'}$; x=40 mm;
Min.: -458,9; Max.: 483,9

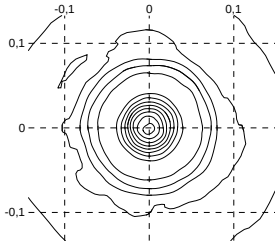


l. $\overline{u'v'w'}$; x=40 mm;
Min.: -128,4; Max.: 58,6

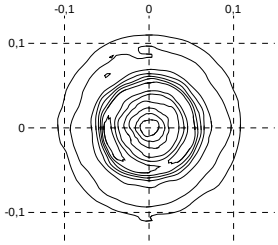
Bild C.6. Verteilung ausgewählter Ensemble-Mittelwerte über den Querschnitt x=20 mm und x=40 mm; Zyklon. Dargestellt sind jeweils acht Isolinien, gleichverteilt zwischen den Minima und Maxima der gezeigten Größe.



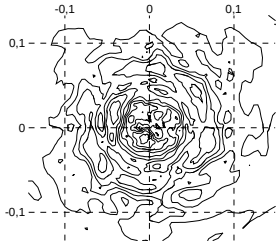
a. $\overline{U}$; x=60 mm;
Min.: -5,1; Max.: 13,2



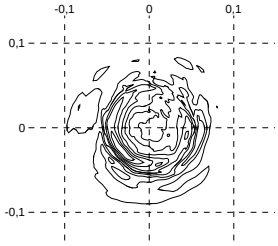
b. $\overline{W}$; x=60 mm;
Min.: -0,3; Max.: 16,2



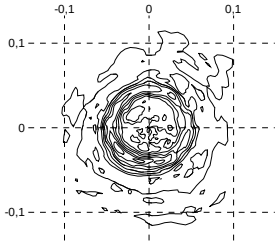
c. $\overline{u'u'}$; x=60 mm;
Min.: 0,0; Max.: 119,7



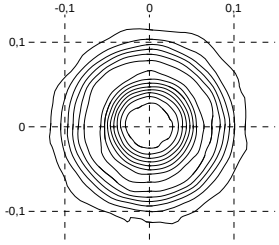
d. $\overline{v'w'}$; x=60 mm;
Min.: -8,2; Max.: 7,6



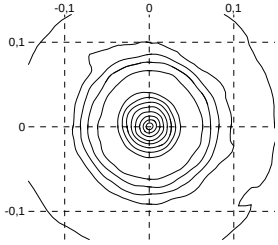
e. $\overline{u'u'u'}$; x=60 mm;
Min.: -306,9; Max.: 530,0



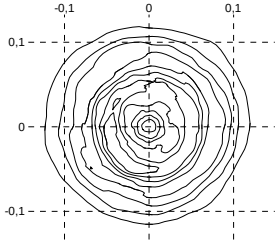
f. $\overline{u'v'w'}$; x=60 mm;
Min.: -94,3; Max.: 39,7



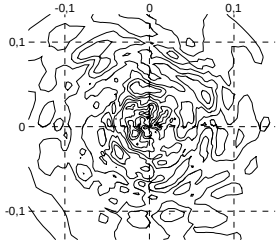
g. $\overline{U}$; x=80 mm;
Min.: -5,2; Max.: 10,9



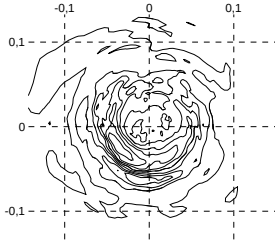
h. $\overline{W}$; x=80 mm;
Min.: -1,6; Max.: 16,1



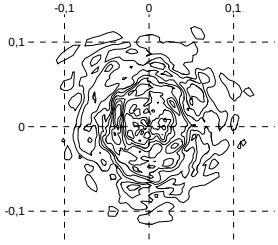
i. $\overline{u'u'}$; x=80 mm;
Min.: 0,0; Max.: 89,6



j. $\overline{v'w'}$; x=80 mm;
Min.: -6,1; Max.: 7,5

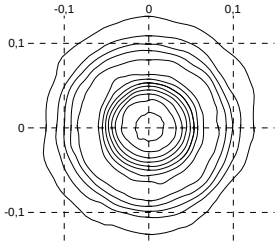


k. $\overline{u'u'u'}$; x=80 mm;
Min.: -221,1; Max.: 295,6

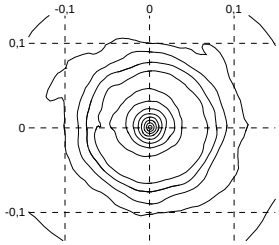


l. $\overline{u'v'w'}$; x=80 mm;
Min.: -53,7; Max.: 55,7

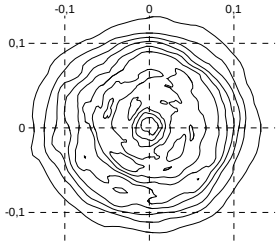
Bild C.7. Verteilung ausgewählter Ensemble-Mittelwerte über den Querschnitt x=60 mm und x=80 mm; Zyklon. Dargestellt sind jeweils acht Isolinien, gleichverteilt zwischen den Minima und Maxima der gezeigten Größe.



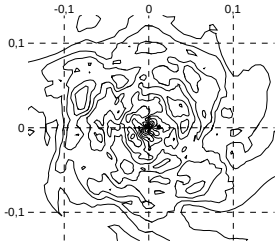
a. $\overline{U}$; x=100 mm;
Min.: -5,4; Max.: 9,1



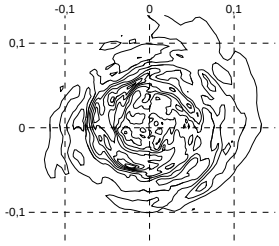
b. $\overline{W}$; x=100 mm;
Min.: -2,9; Max.: 14,4



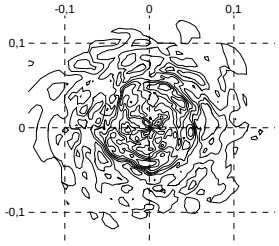
c. $\overline{u'u'}$; x=100 mm;
Min.: 0,0; Max.: 58,8



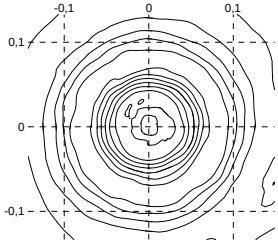
d. $\overline{v'w'}$; x=100 mm;
Min.: -3,6; Max.: 8,3



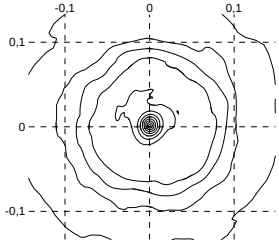
e. $\overline{u'u'u'}$; x=100 mm;
Min.: -159,3; Max.: 267,7



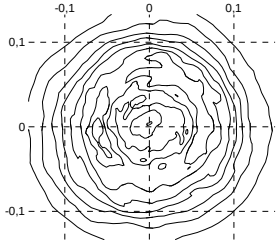
f. $\overline{u'v'w'}$; x=100 mm;
Min.: -44,6; Max.: 40,2



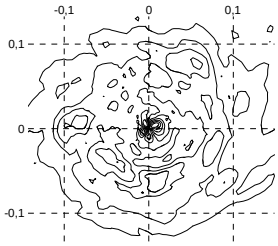
g. $\overline{U}$; x=120 mm;
Min.: -4,8; Max.: 7,3



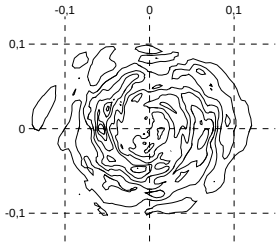
h. $\overline{W}$; x=120 mm;
Min.: -4,0; Max.: 12,3



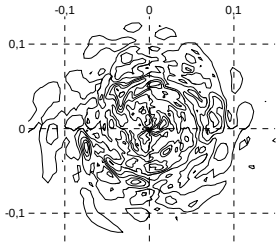
i. $\overline{u'u'}$; x=120 mm;
Min.: 0,0; Max.: 48,5



j. $\overline{v'w'}$; x=120 mm;
Min.: -6,3; Max.: 9,9

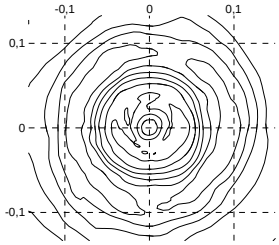


k. $\overline{u'u'u'}$; x=120 mm;
Min.: -98,9; Max.: 208,8

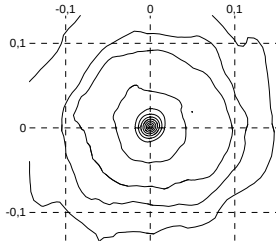


l. $\overline{u'v'w'}$; x=120 mm;
Min.: -29,2; Max.: 38,8

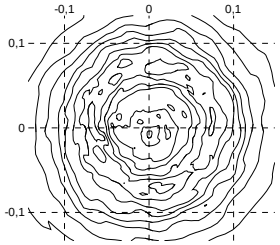
Bild C.8. Verteilung ausgewählter Ensemble-Mittelwerte über den Querschnitt x=100 mm und x=120 mm; Zyklon. Dargestellt sind jeweils acht Isolinien, gleichverteilt zwischen den Minima und Maxima der gezeigten Größe.



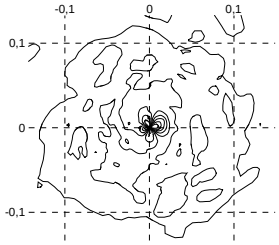
a. $\overline{U}$; x=140 mm;
Min.: -4,7; Max.: 6,4



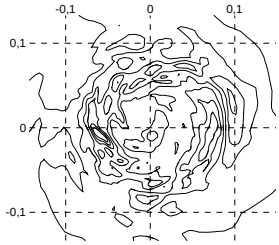
b. $\overline{W}$; x=140 mm;
Min.: -3,9; Max.: 11,9



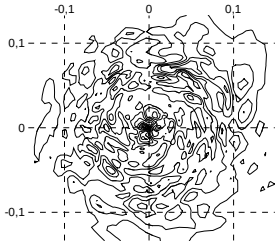
c. $\overline{u'u'}$; x=140 mm;
Min.: 0,0; Max.: 37,7



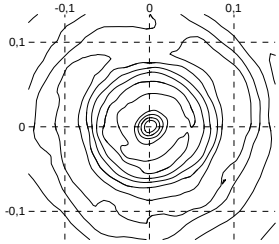
d. $\overline{v'w'}$; x=140 mm;
Min.: -6,9; Max.: 8,4



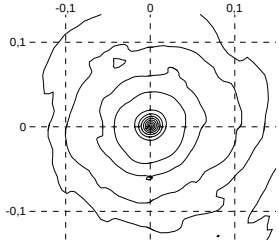
e. $\overline{u'u'u'}$; x=140 mm;
Min.: -36,0; Max.: 174,6



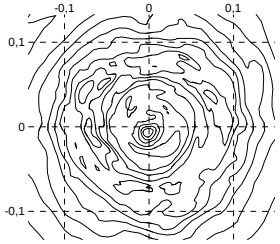
f. $\overline{u'v'w'}$; x=140 mm;
Min.: -26,3; Max.: 28,2



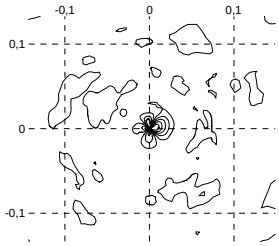
g. $\overline{U}$; x=160 mm;
Min.: -4,4; Max.: 4,6



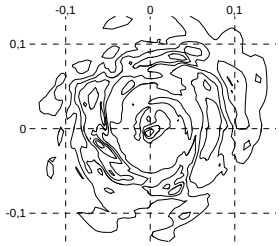
h. $\overline{W}$; x=160 mm;
Min.: -3,9; Max.: 12,3



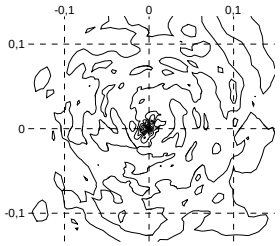
i. $\overline{u'u'}$; x=160 mm;
Min.: 0,0; Max.: 29,5



j. $\overline{v'w'}$; x=160 mm;
Min.: -8,1; Max.: 7,7

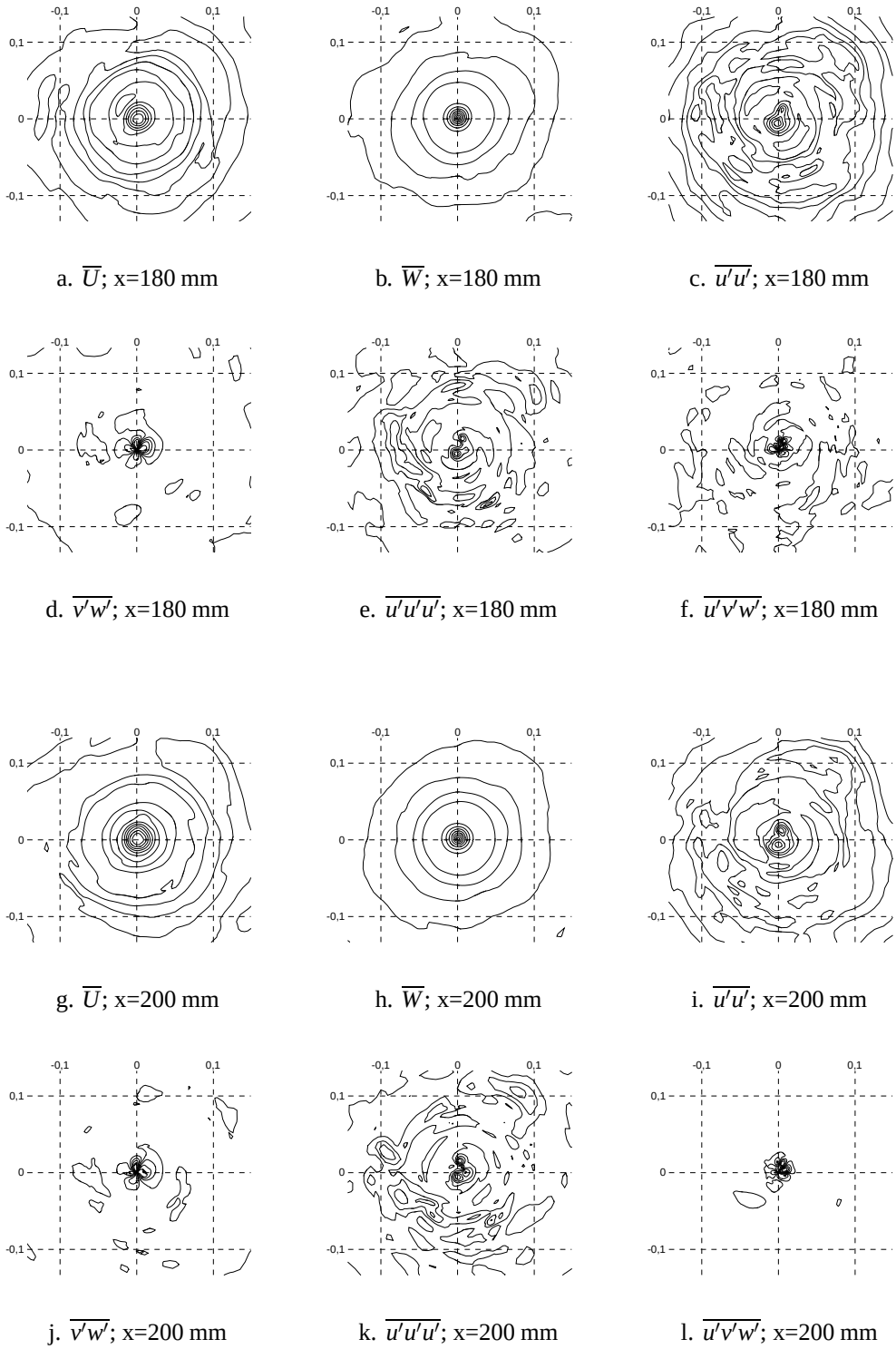


k. $\overline{u'u'u'}$; x=160 mm;
Min.: -40,6; Max.: 139,6



l. $\overline{u'v'w'}$; x=160 mm;
Min.: -21,3; Max.: 28,5

Bild C.9. Verteilung ausgewählter Ensemble-Mittelwerte über den Querschnitt x=140 mm und x=160 mm; Zyklon. Dargestellt sind jeweils acht Isolinien, gleichverteilt zwischen den Minima und Maxima der gezeigten Größe.



a. $\overline{U}$; x=180 mm

b. $\overline{W}$; x=180 mm

c. $\overline{u'u'}$; x=180 mm

d. $\overline{v'w'}$; x=180 mm

e. $\overline{u'u'u'}$; x=180 mm

f. $\overline{u'v'w'}$; x=180 mm

g. $\overline{U}$; x=200 mm

h. $\overline{W}$; x=200 mm

i. $\overline{u'u'}$; x=200 mm

j. $\overline{v'w'}$; x=200 mm

k. $\overline{u'u'u'}$; x=200 mm

l. $\overline{u'v'w'}$; x=200 mm

Bild C.10. Verteilung ausgewählter Ensemble-Mittelwerte über den Querschnitt x=180 mm und x=200 mm; Zyklon. Dargestellt sind jeweils acht Isolinien, gleichverteilt zwischen den Minima und Maxima der gezeigten Größe.

Anhang D

Zum Lumley'schen Dreieck

Auf Basis der mathematischen Herleitung von Lumley (1978) können die aus der Simulation gewonnen Mittelwerte der Reynolds'schen Spannungen auf ihre physikalische Sinnhaftigkeit hin analysiert werden. Den dort gegebenen Ausführungen folgend, beschränkten sich die möglichen Zustände des turbulenten Spannungstensors stets auf eine eingeschlossene Fläche eines Dreiecks (*Lumley-Dreieck*) inklusive dessen Ränder (siehe Bild D.1). Die Ränder sind dabei Funktionen der Invarianten des Anisotropietensors b_{ij}[a]. Definiert man

$$b_{ij} = \frac{\overline{u_i' u_j'}}{2k} - \frac{\delta_{ij}}{3}, \qquad \text{(D.1)}$$

mit dem Kronecker Delta δ_{ij} und k der turbulenten kinetischen Energie, sowie die Invarianten[b]

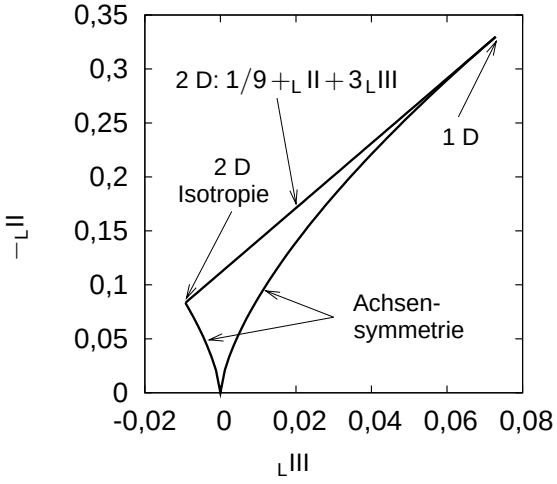


Bild D.1. Mögliche Zustände der Turbulenz dargestellt als Funktion der Invarianten des Anisotropietensors b_{ij}.

$$_{\mathrm{L}}I = b_{ii}, \quad _{\mathrm{L}}II = \left(b_{ii}b_{jj} - b_{ii}^2\right)/2, \quad _{\mathrm{L}}III = \left(b_{ii}b_{jj}b_{kk} - 3\,b_{ii}b_{jj}^2 + 2\,b_{ii}^3\right)/3!, \qquad \text{(D.2)}$$

wobei zu beachten ist, daß b_{ii}^2 der Spur von $b_{ij}^2 = b_{ik}b_{kj}$ und b_{ii}^3 der Spur von $b_{ij}^3 = b_{ik}b_{kl}b_{lj}$ entspricht, so erhält man wegen der Spurfreiheit von b_{ij} (Gleichung (D.1)) für die zweite und dritte Invariante den Zusammenhang (vgl. Buche, 2001):

$$_{\mathrm{L}}II = -1/2\,b_{ij}b_{ji}, \quad _{\mathrm{L}}III = 1/3\,b_{ij}b_{jk}b_{ki}. \qquad \text{(D.3)}$$

Durch eine Transformation in ein Hauptachsensystem lassen sich die im folgenden betrachteten Zusammenhänge vereinfacht darstellen, da so alle Nebendiagonalelemente gleich Null werden, die Allgemeingültigkeit aber erhalten bleibt (es gilt die Transformationsinvarianz).

a Jeder Tensor läßt sich als Summe seines isotropen und anisotropen Anteils charakterisieren. Die Anisotropie kann somit als die Abweichung vom isotropen Zustand interpretiert werden. Im Falle der Turbulenz handelt es sich, bildlich gesprochen, um die Abweichung des Spannungs*ellipsoids* von der Kugel (isotroper Zustand).

b Die von Lumley verwendeten Definitionen unterscheiden sich durch einen Vorfaktor von denen im Text verwendeten (nach Speziale et al., 1991) und werden deshalb mit einem vorgestellten Index „L" gekennzeichnet.

Es ergeben sich vier mögliche Extremzustände der Turbulenz, nämlich

- Isotropie

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \ddots & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad {}_{\mathrm{L}}II = {}_{\mathrm{L}}III = 0 \tag{D.4}$$

  Dies entspricht dem Ursprung des Lumley'schen Dreiecks.

- eindimensionale Turbulenz

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ \ddots & -1/3 & 0 \\ \ddots & \ddots & -1/3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad {}_{\mathrm{L}}II = -1/3, {}_{\mathrm{L}}III = 2/27 \tag{D.5}$$

  Es existiert nur *eine* turbulente Normalspannung. Dieser Zustand ist durch die beiden Maxima der Invarianten gekennzeichnet.

- zweidimensionale Turbulenz

$$b_{ij} = \begin{pmatrix} a+b & 0 & 0 \\ \ddots & -a+1/3 & 0 \\ \ddots & \ddots & -b-1/3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \quad 1/9 + {}_{\mathrm{L}}II + 3\,{}_{\mathrm{L}}III = 0 \tag{D.6}$$

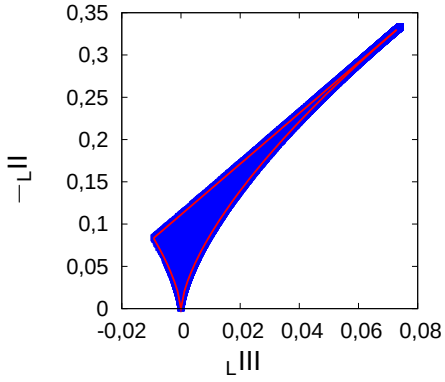
  Es existieren *zwei* turbulente Normalspannungen im Hauptachsensystem. Dies entspricht der Geraden im Lumley-Dreieck.

- achsensymmetrische Turbulenz

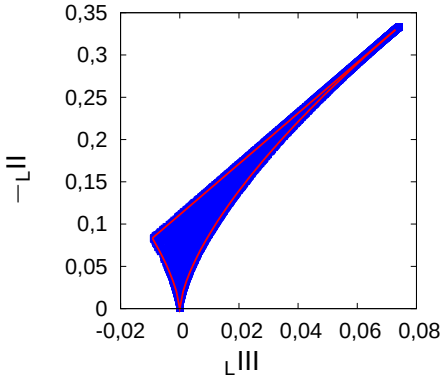
$$b_{ij} = \begin{pmatrix} b & 0 & 0 \\ \ddots & -b/2 & 0 \\ \ddots & \ddots & -b/2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} {}_{\mathrm{L}}III = -2\,(-{}_{\mathrm{L}}II/3)^{3/2} & \text{für} \quad {}_{\mathrm{L}}III < 0 \\ {}_{\mathrm{L}}III = +2\,(-{}_{\mathrm{L}}II/3)^{3/2} & \text{für} \quad {}_{\mathrm{L}}III > 0 \end{cases} \tag{D.7}$$

  Hier ist die Anisotropie räumlich und bzgl. einer Hauptachse *symmetrisch* verteilt.

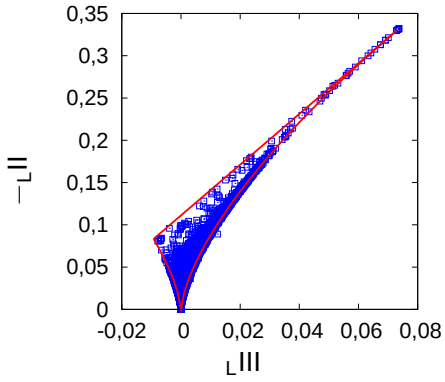
Bild D.2 und D.3 zeigen die Zustände der Turbulenz für die freie Drallströmung und den eingeschossenen Fall. Hierbei sind die Ergebnisse auf der linken Seite dem gesamten Rechengebiet entnommen und auf der rechten Seite auf einen Bereich kleiner $2D$ bezogen auf den mittleren Brenneraustrittsquerschnitt beschränkt. Desweiteren sind die Ergebnisse auf hochturbulente Bereiche mit $\mathrm{Re}_t > 2000$ bzw. > 2500 eingeschränkt dargestellt. Man erkennt, daß sich unabhängig vom Grad der Reduktion der Stichprobenentnahme stets alle Zustände innerhalb des Lumley'schen Dreiecks befinden und so uneingeschränkt der Forderung nach Realisierbarkeit nachkommen. Erwartungsgemäß nimmt die „Füllung" des Dreiecks mit steigender Selektion der Stichproben ab (vgl. jeweils das Bild links oben und rechts unten).



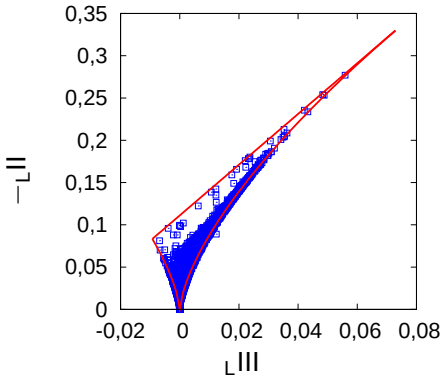
a. Freistrahl, gesamtes Rechengebiet



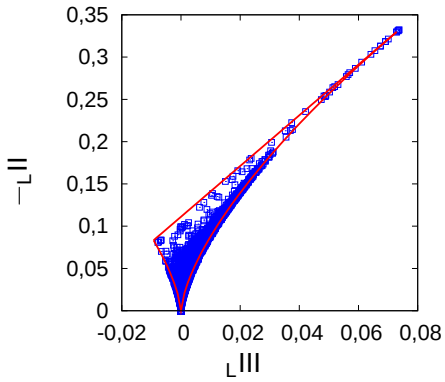
b. Freistrahl, 0 mm < x < 200 mm



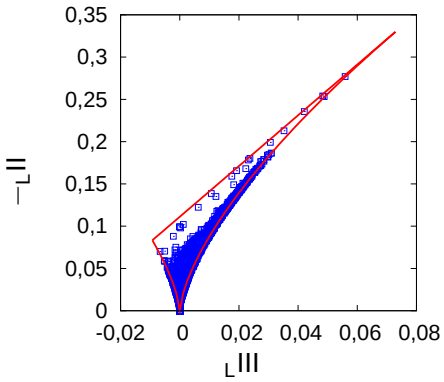
c. Freistrahl, gesamtes Rechengebiet, $Re_t > 2000$



d. Freistrahl, 0 mm < x < 200 mm, $Re_t > 2000$

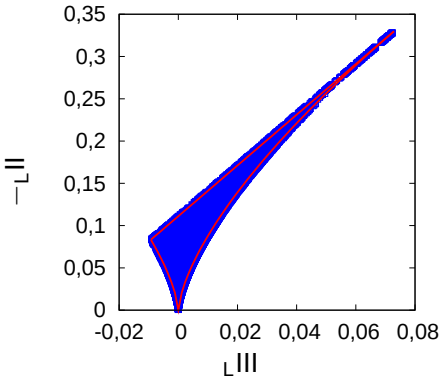


e. Freistrahl, gesamtes Rechengebiet, $Re_t > 2500$

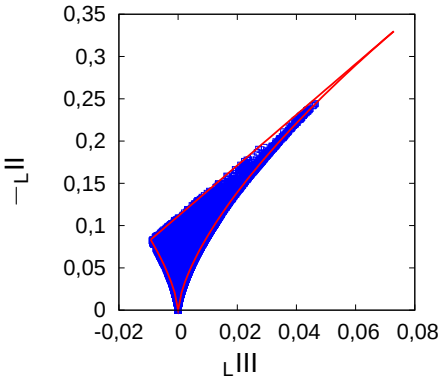


f. Freistrahl, 0 mm < x < 200 mm, $Re_t > 2500$

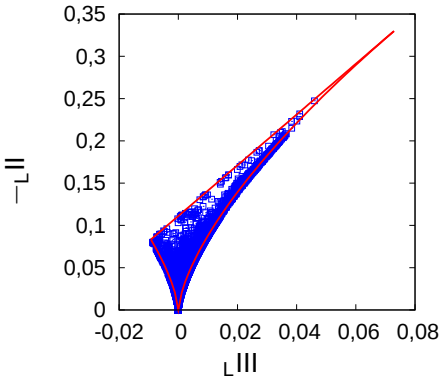
Bild D.2. Zustände des Anisotropietensors b_{ij} innerhalb des Lumley-Dreiecks; Freistrahl. Datenpunkte aus dem gesamten geometrischen Rechengebiet (links) und aus einen Bereich 0 mm < x < 200 mm (rechts).



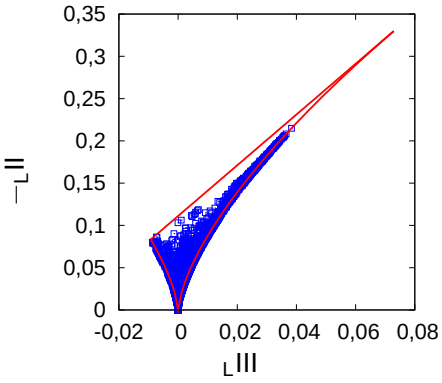
a. Zyklon, gesamtes Rechengebiet



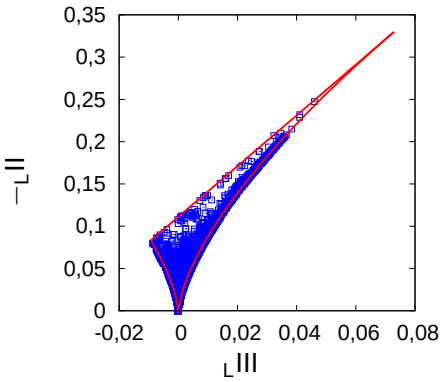
b. Zyklon, 0 mm < x < 200 mm



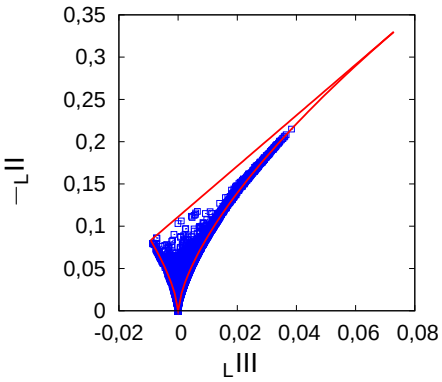
c. Zyklon, gesamtes Rechengebiet, $Re_t > 2000$



d. Zyklon, 0 mm < x < 200 mm, $Re_t > 2000$



e. Zyklon, gesamtes Rechengebiet, $Re_t > 2500$



f. Zyklon, 0 mm < x < 200 mm, $Re_t > 2500$

Bild D.3. Zustände des Anisotropietensors b_{ij} innerhalb des Lumley-Dreiecks; Zyklon. Datenpunkte aus dem gesamten geometrischen Rechengebiet (links) und aus einen Bereich 0 mm < x < 200 mm (rechts).

Anhang E

Vergleich der Simulationsergebnisse mit den Messungen von Holzäpfel

E.1 Freistrahl

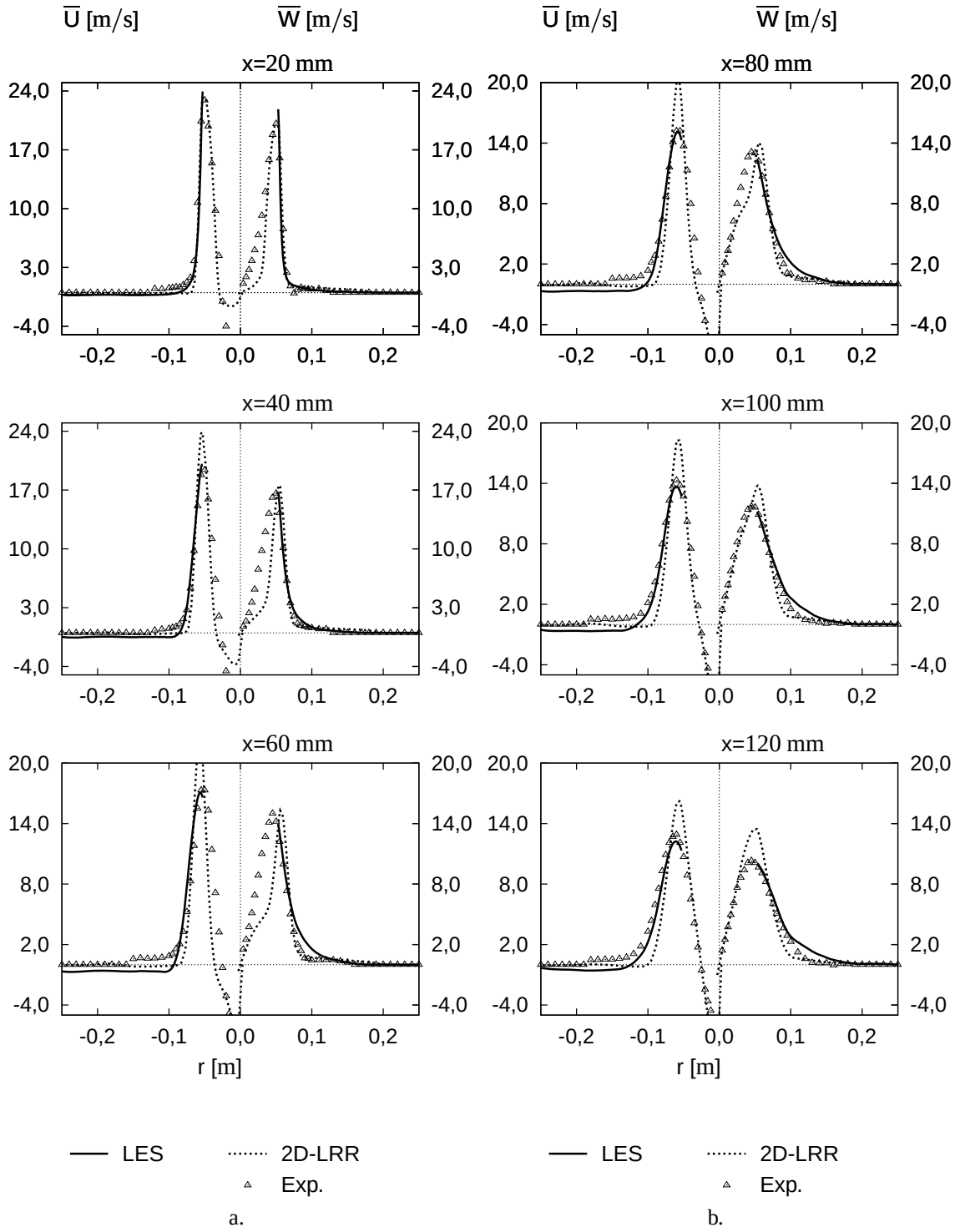


Bild E.1. Vergleich mit Experiment von Holzäpfel und zweidimensionaler RANS; Freistrahl. Radiale Geschwindigkeitsverteilung $\overline{U}$ und $\overline{W}$ an axialen Positionen x=20 bis 120 mm.

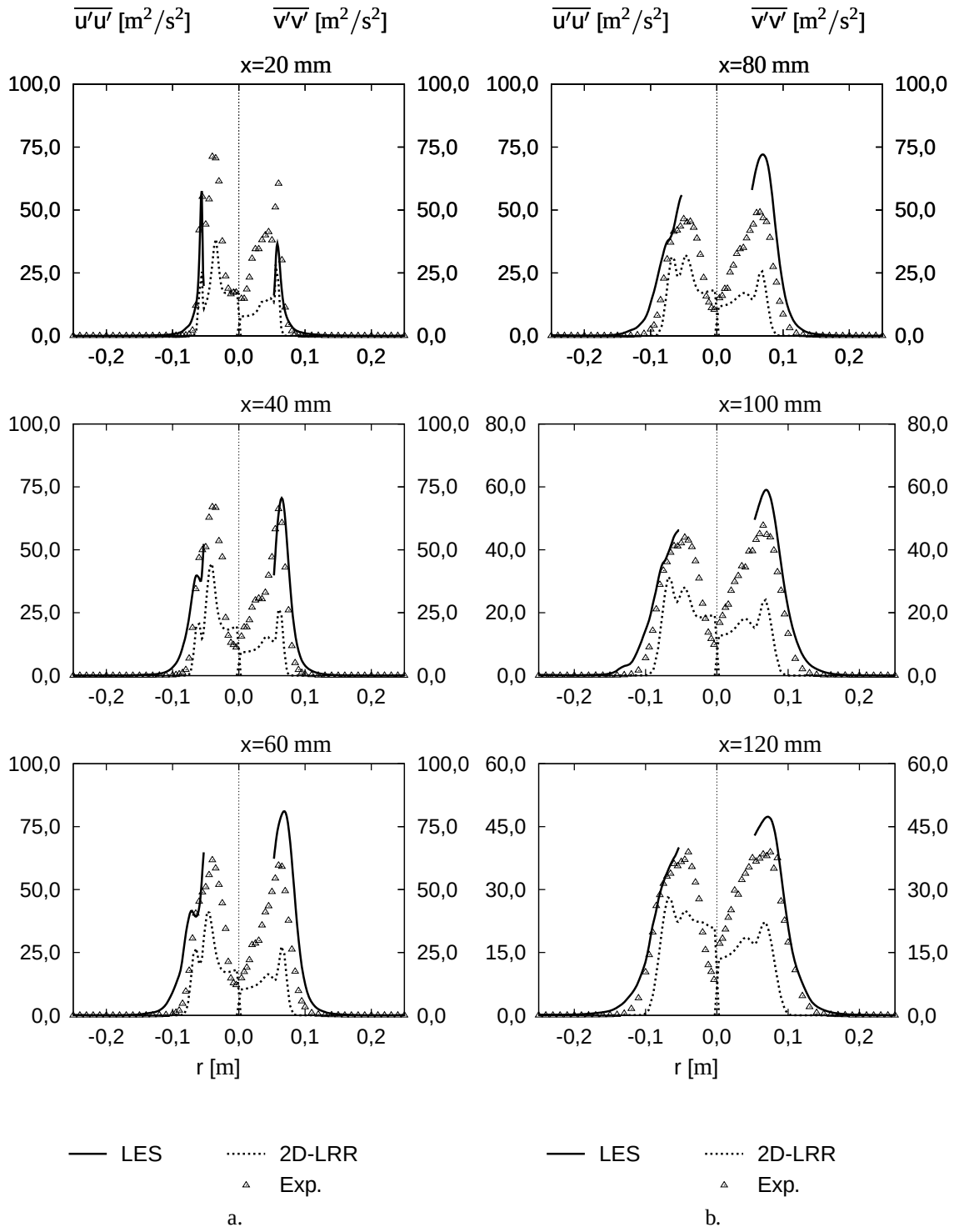


Bild E.2. Vergleich mit Experiment von Holzäpfel und zweidimensionaler RANS; Freistrahl. Radiale Spannungsverteilung $\overline{u'u'}$ und $\overline{v'v'}$ an axialen Positionen x=20 bis 120 mm.

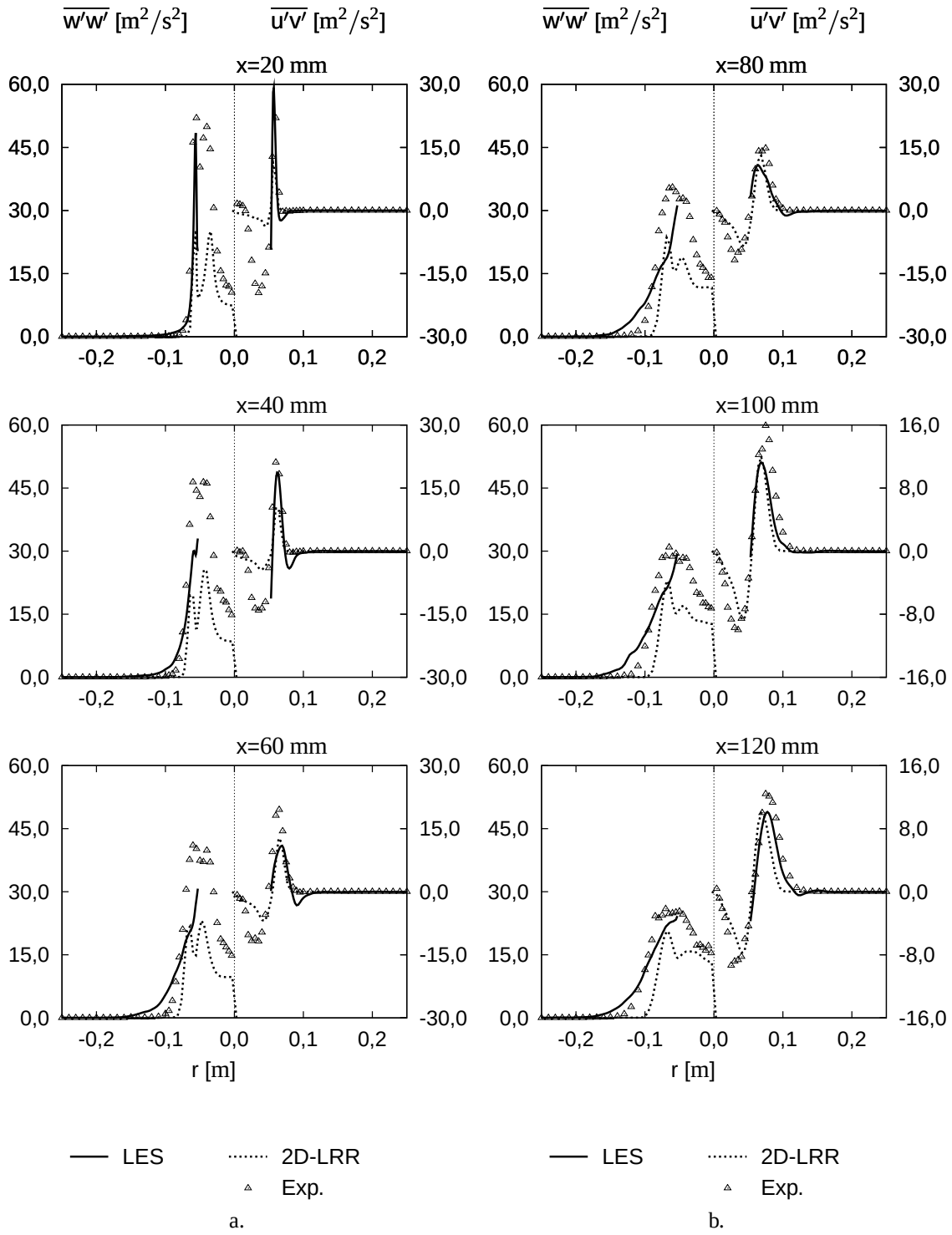


Bild E.3. Vergleich mit Experiment von Holzäpfel und zweidimensionaler RANS; Freistrahl. Radiale Spannungsverteilung $\overline{w'w'}$ und $\overline{u'v'}$ an axialen Positionen x=20 bis 120 mm.

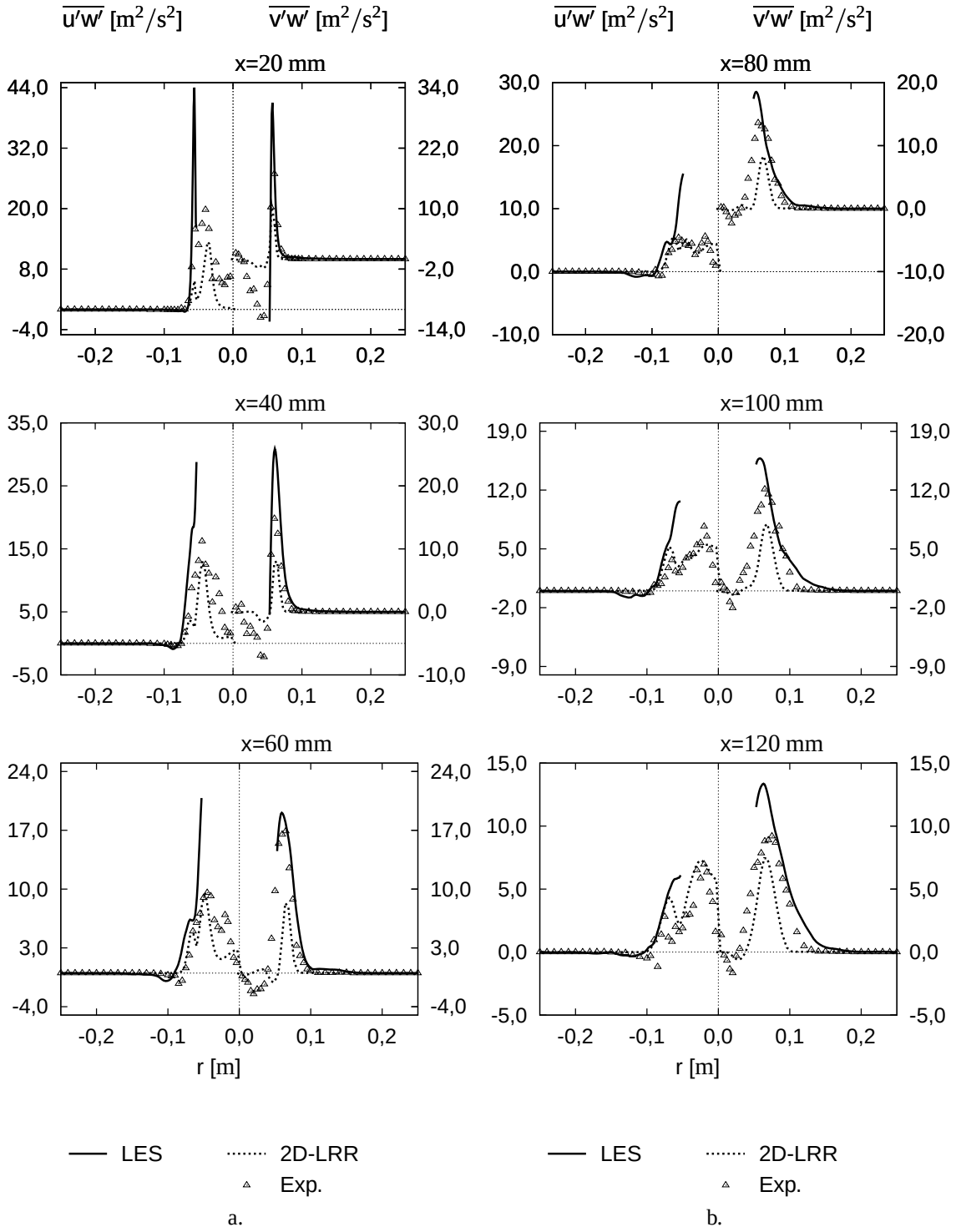


Bild E.4. Vergleich mit Experiment von Holzäpfel und zweidimensionaler RANS; Freistrahl. Radiale Spannungsverteilung $\overline{u'w'}$ und $\overline{v'w'}$ an axialen Positionen x=20 bis 120 mm.

E.2 Zyklon

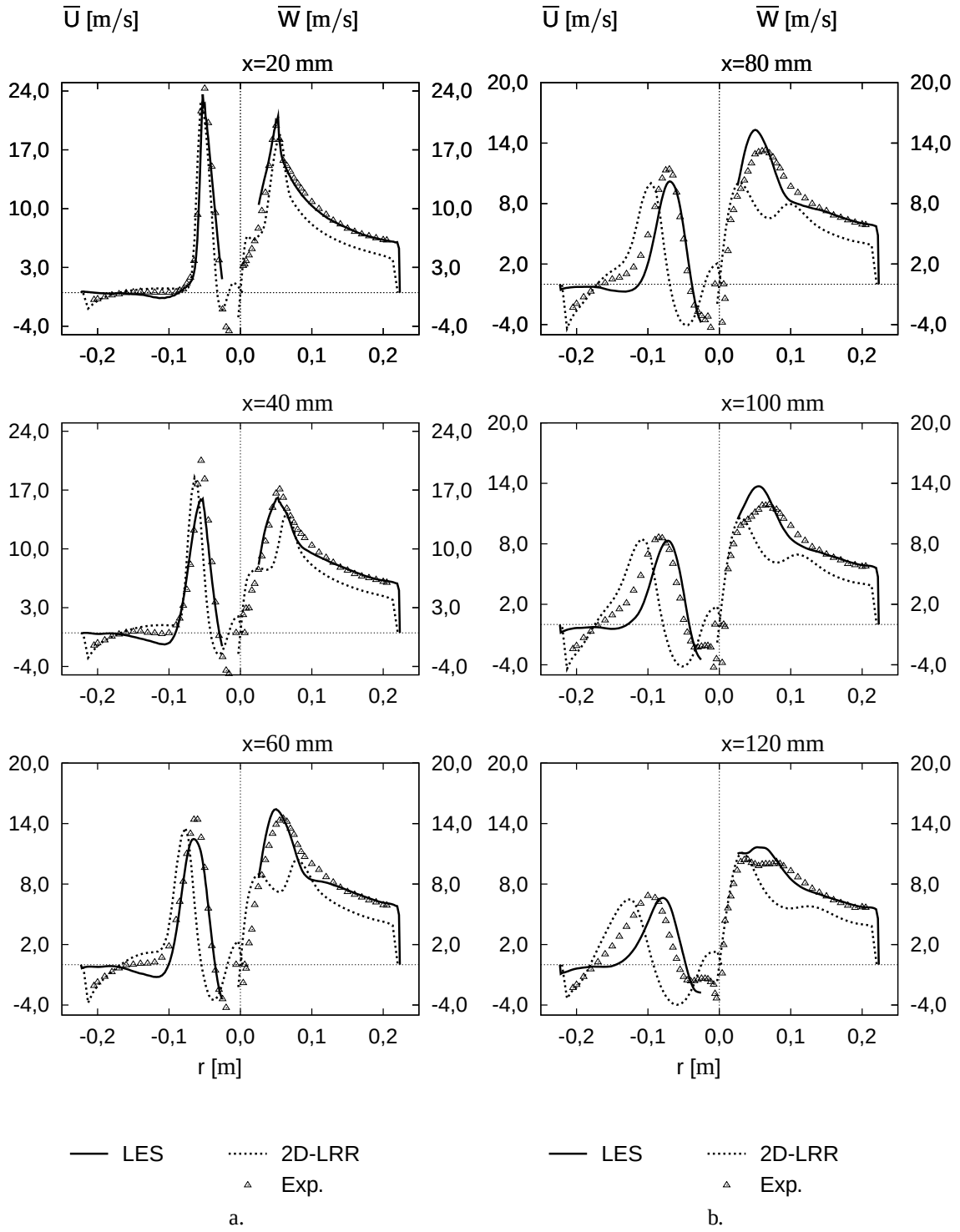


Bild E.5. Vergleich mit Experiment von Holzäpfel und zweidimensionaler RANS; Zyklon. Radiale Geschwindigkeitsverteilung $\overline{U}$ und $\overline{W}$ an axialen Positionen x=20 bis 120 mm.

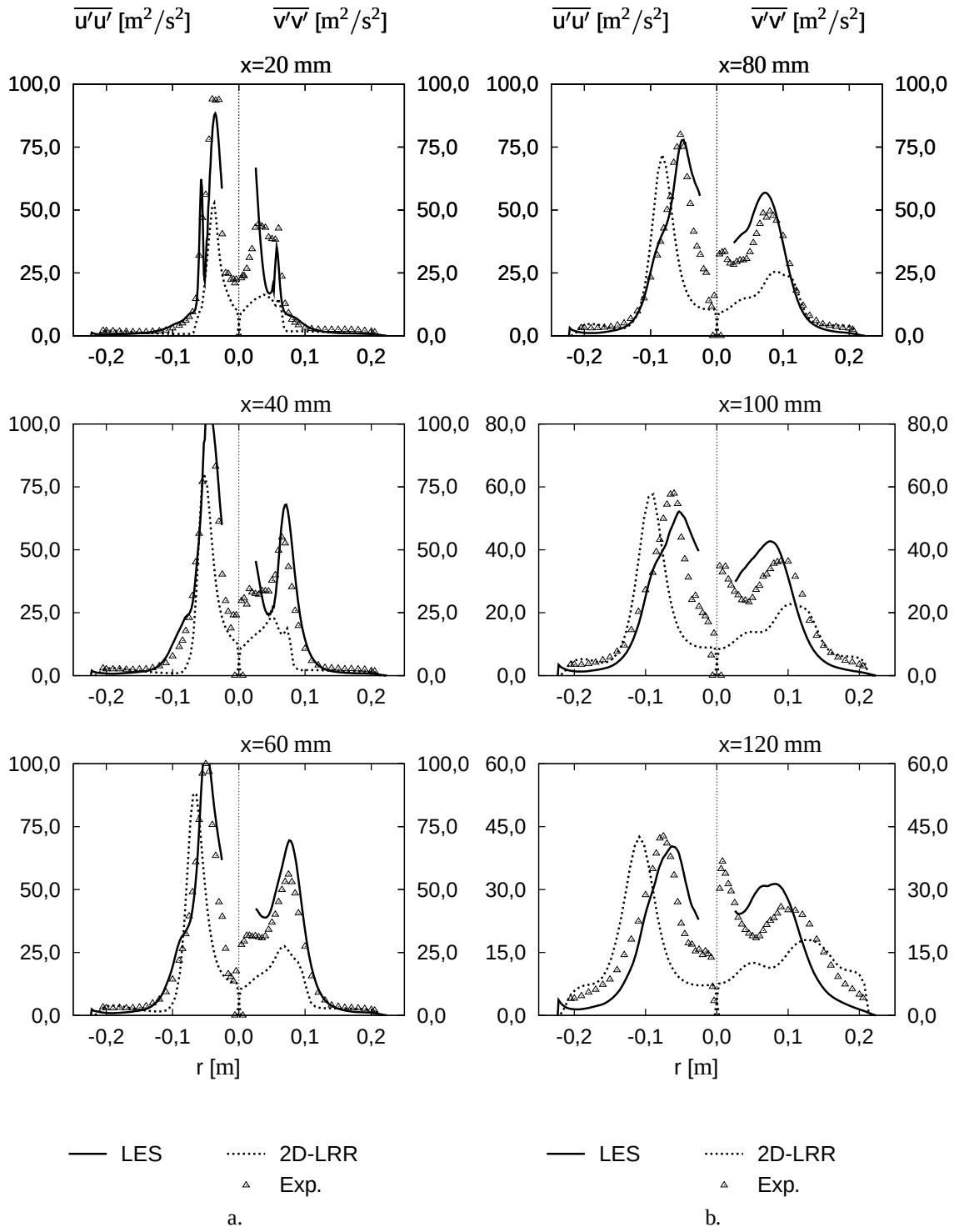


Bild E.6. Vergleich mit Experiment von Holzäpfel und zweidimensionaler RANS; Zyklon. Radiale Spannungsverteilung $\overline{u'u'}$ und $\overline{v'v'}$ an axialen Positionen x=20 bis 120 mm.

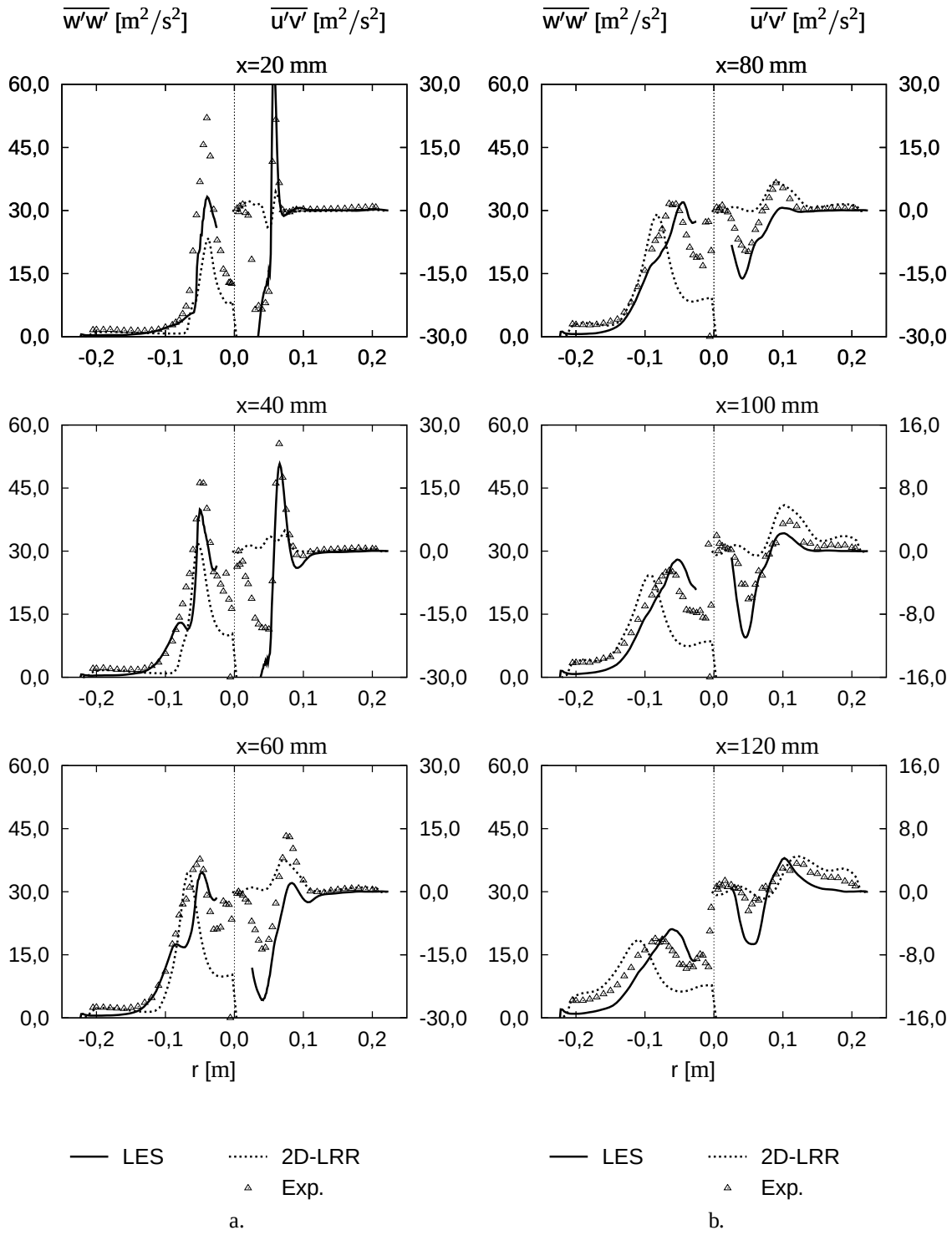


Bild E.7. Vergleich mit Experiment von Holzäpfel und zweidimensionaler RANS; Zyklon. Radiale Spannungsverteilung $\overline{w'w'}$ und $\overline{u'v'}$ an axialen Positionen x=20 bis 120 mm.

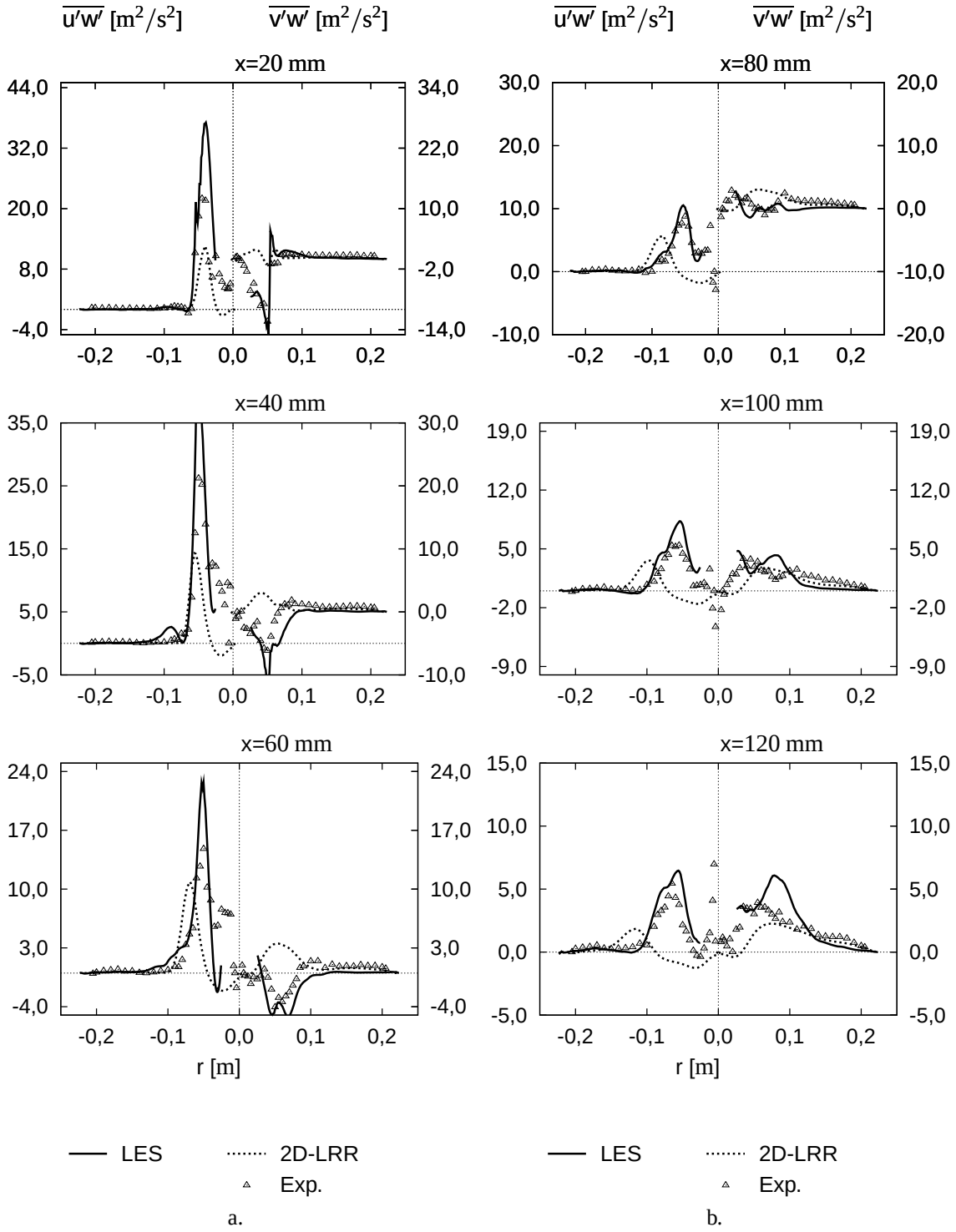


Bild E.8. Vergleich mit Experiment von Holzäpfel und zweidimensionaler RANS; Zyklon. Radiale Spannungsverteilung $\overline{u'w'}$ und $\overline{v'w'}$ an axialen Positionen x=20 bis 120 mm.

Anhang F

Vergleich der Tripelkorrelationen mit Modellansatz

F.1 Freistrahl

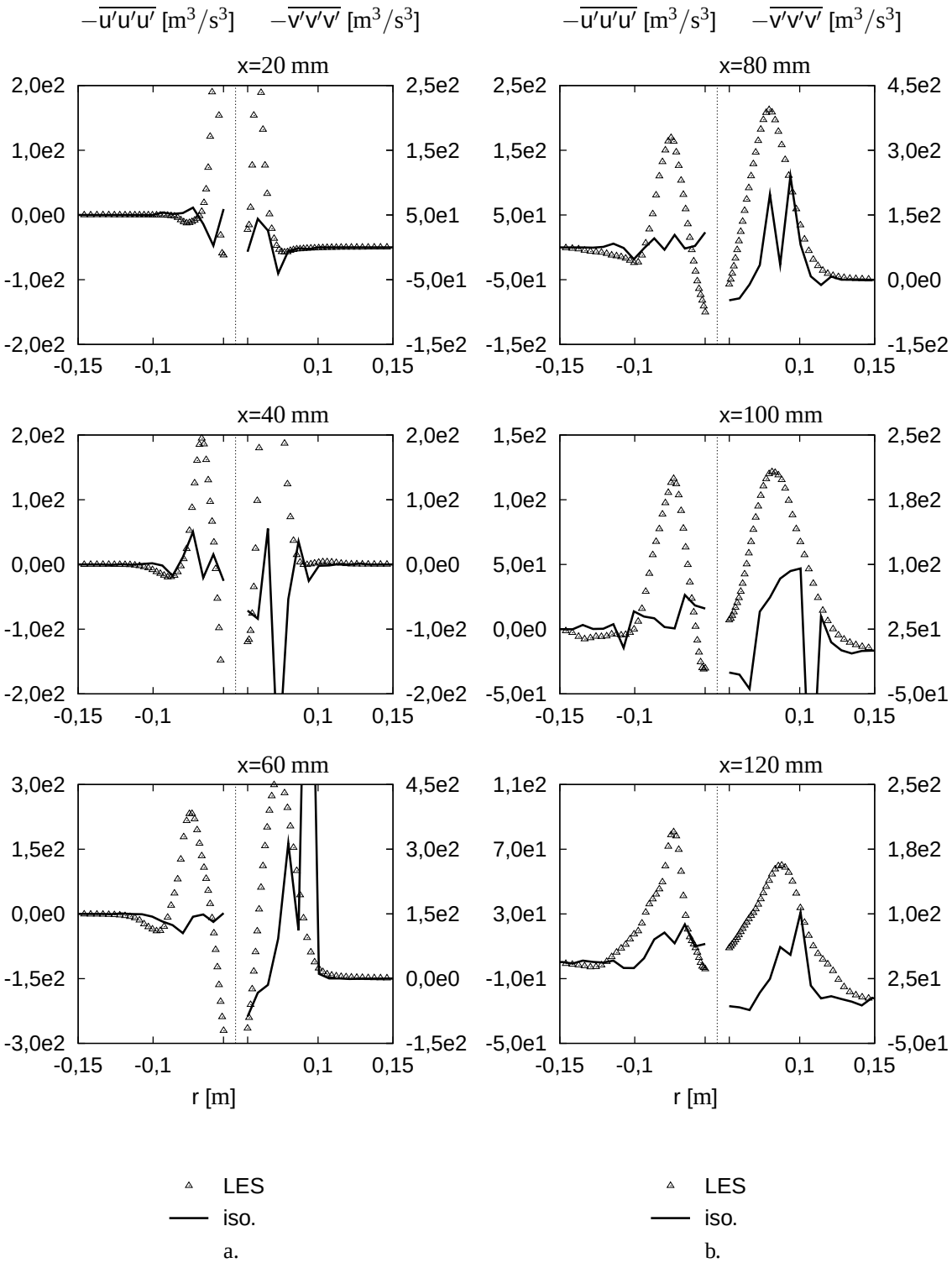


Bild F.1. Vergleich des isotropen Modelansatzes mit LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen $-\overline{u'u'u'}$ und $-\overline{v'v'v'}$ an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. Die Ergebnisse des isotropen Modells sind kubisch interpoliert.

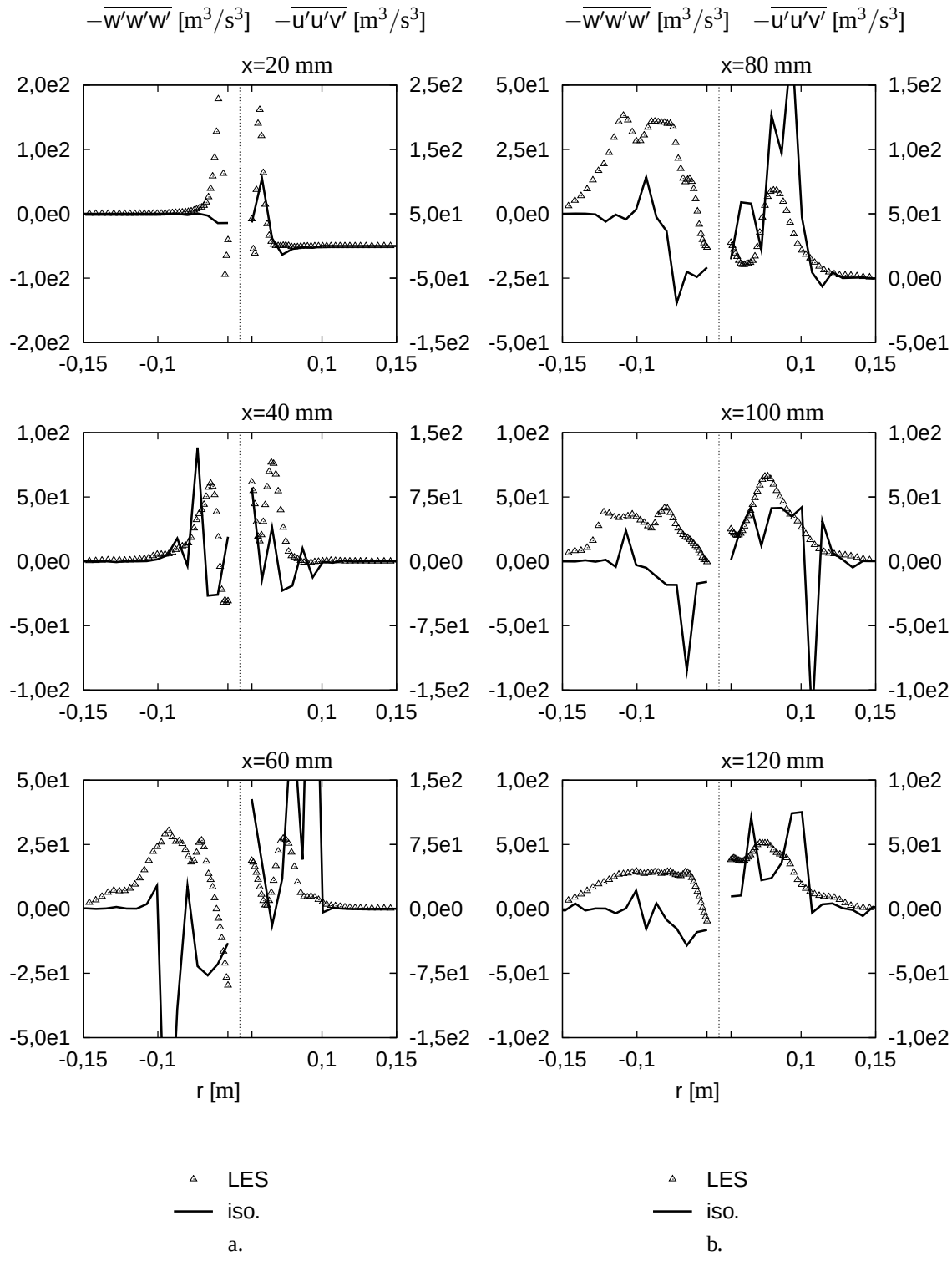


Bild F.2. Vergleich des isotropen Modelansatzes mit LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen $-\overline{w'w'w'}$ und $-\overline{u'u'v'}$ an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. Die Ergebnisse des isotropen Modells sind kubisch interpoliert.

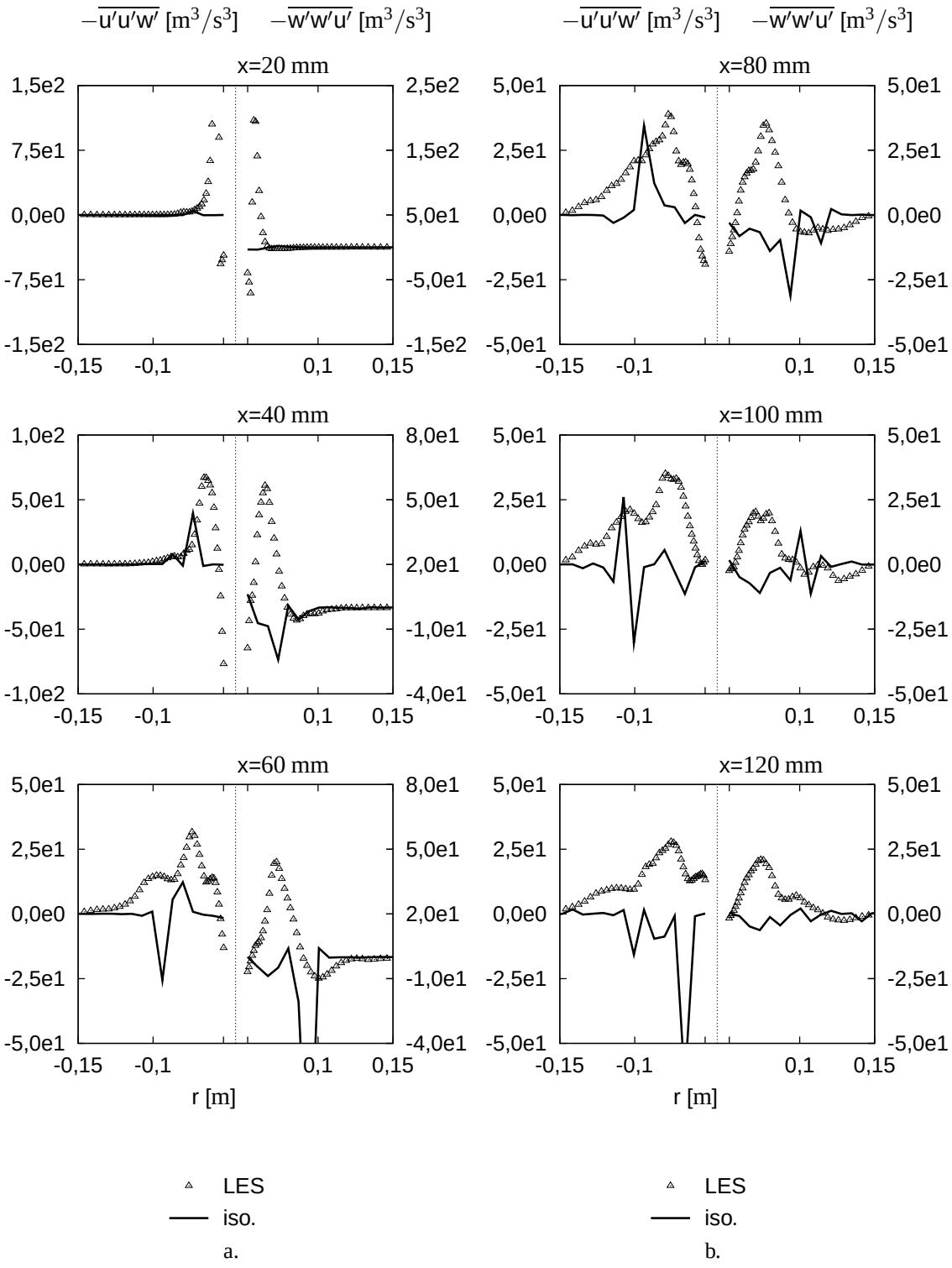


Bild F.3. Vergleich des isotropen Modelansatzes mit LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen $-\overline{u'u'w'}$ und $-\overline{w'w'u'}$ an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. Die Ergebnisse des isotropen Modells sind kubisch interpoliert.

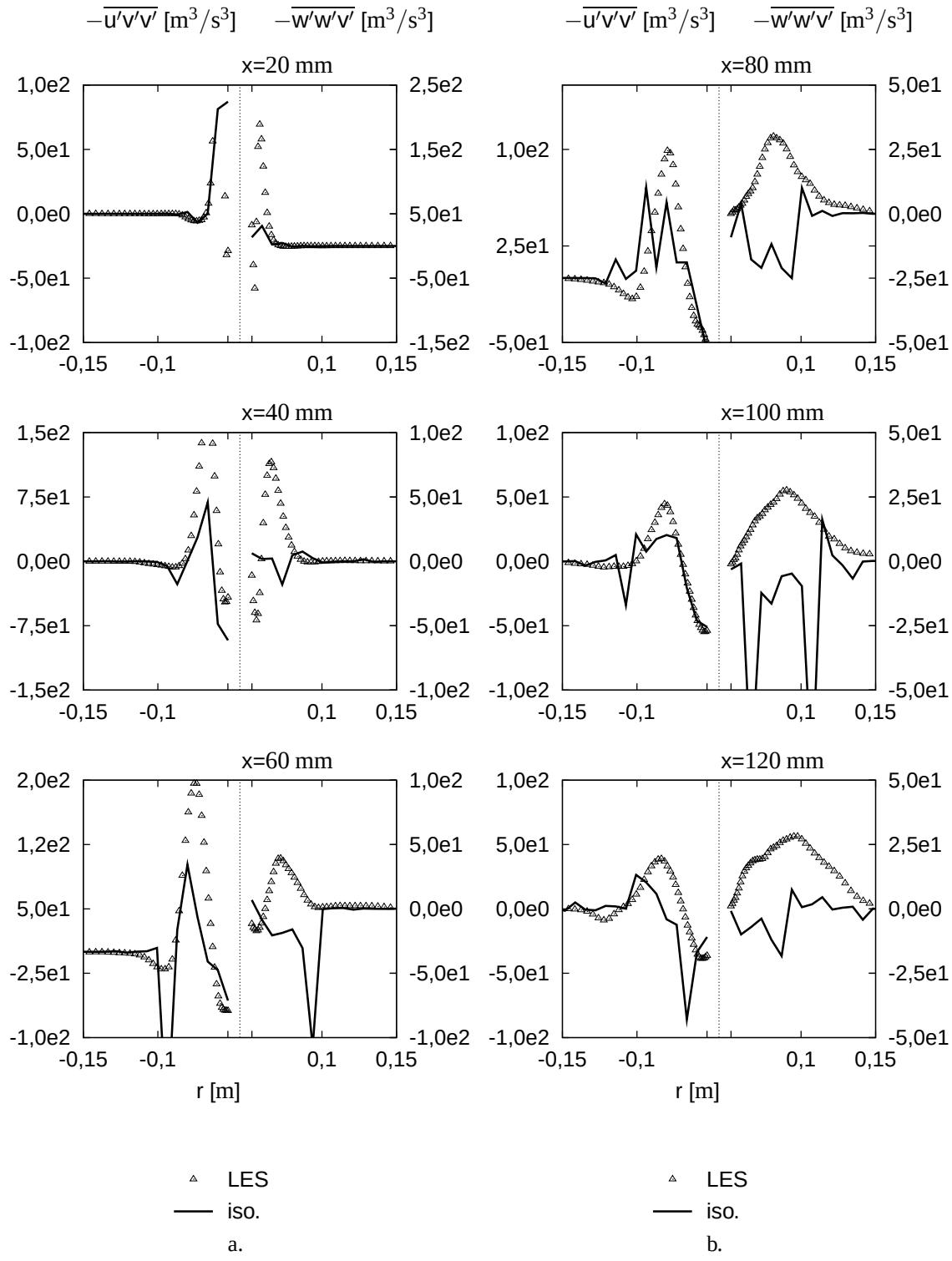


Bild F.4. Vergleich des isotropen Modelansatzes mit LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen $-\overline{u'v'v'}$ und $-\overline{w'w'v'}$ an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. Die Ergebnisse des isotropen Modells sind kubisch interpoliert.

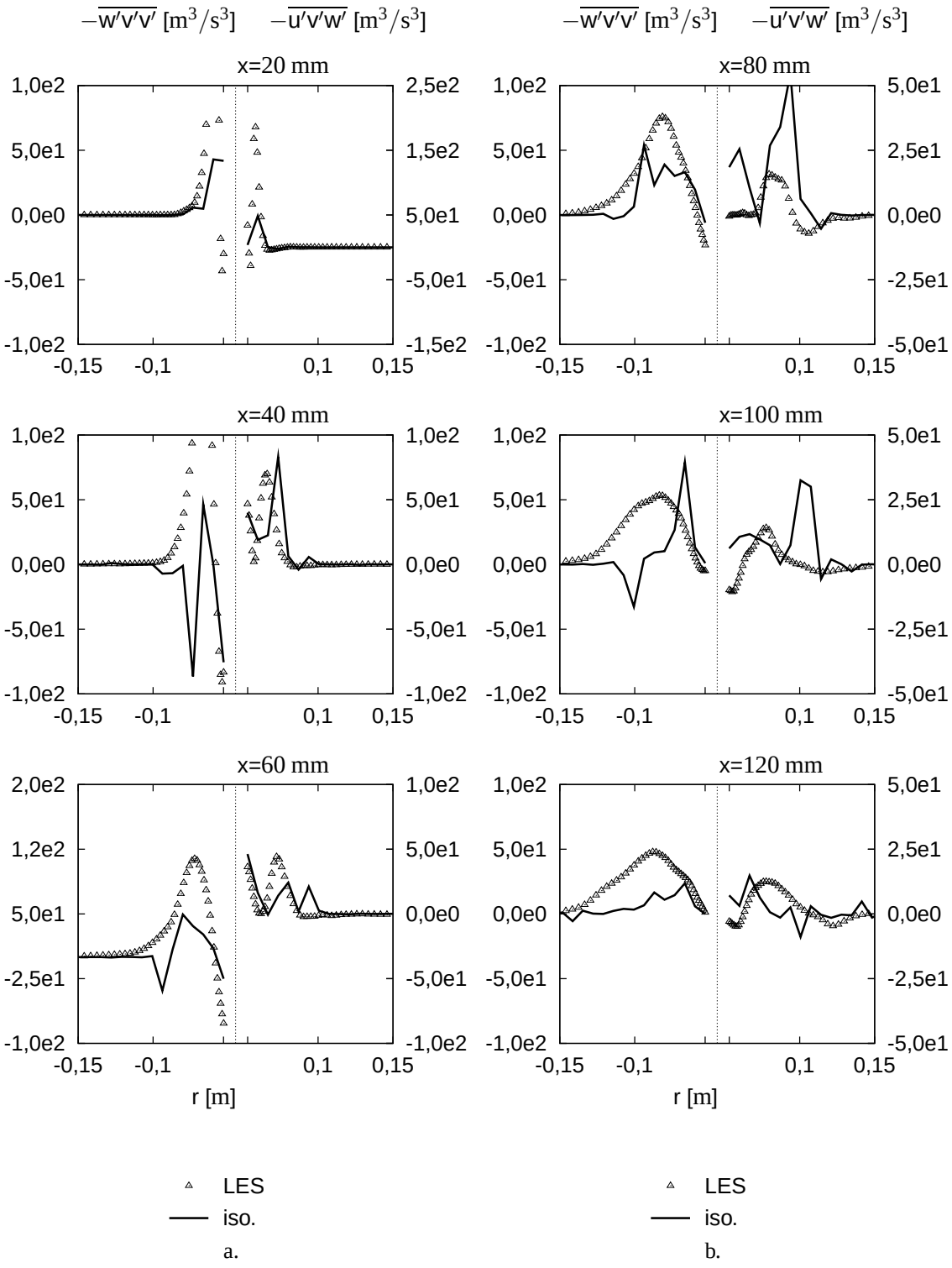


Bild F.5. Vergleich des isotropen Modelansatzes mit LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen $-\overline{w'v'v'}$ und $-\overline{u'v'w'}$ an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. Die Ergebnisse des isotropen Modells sind kubisch interpoliert.

F.2 Zyklon

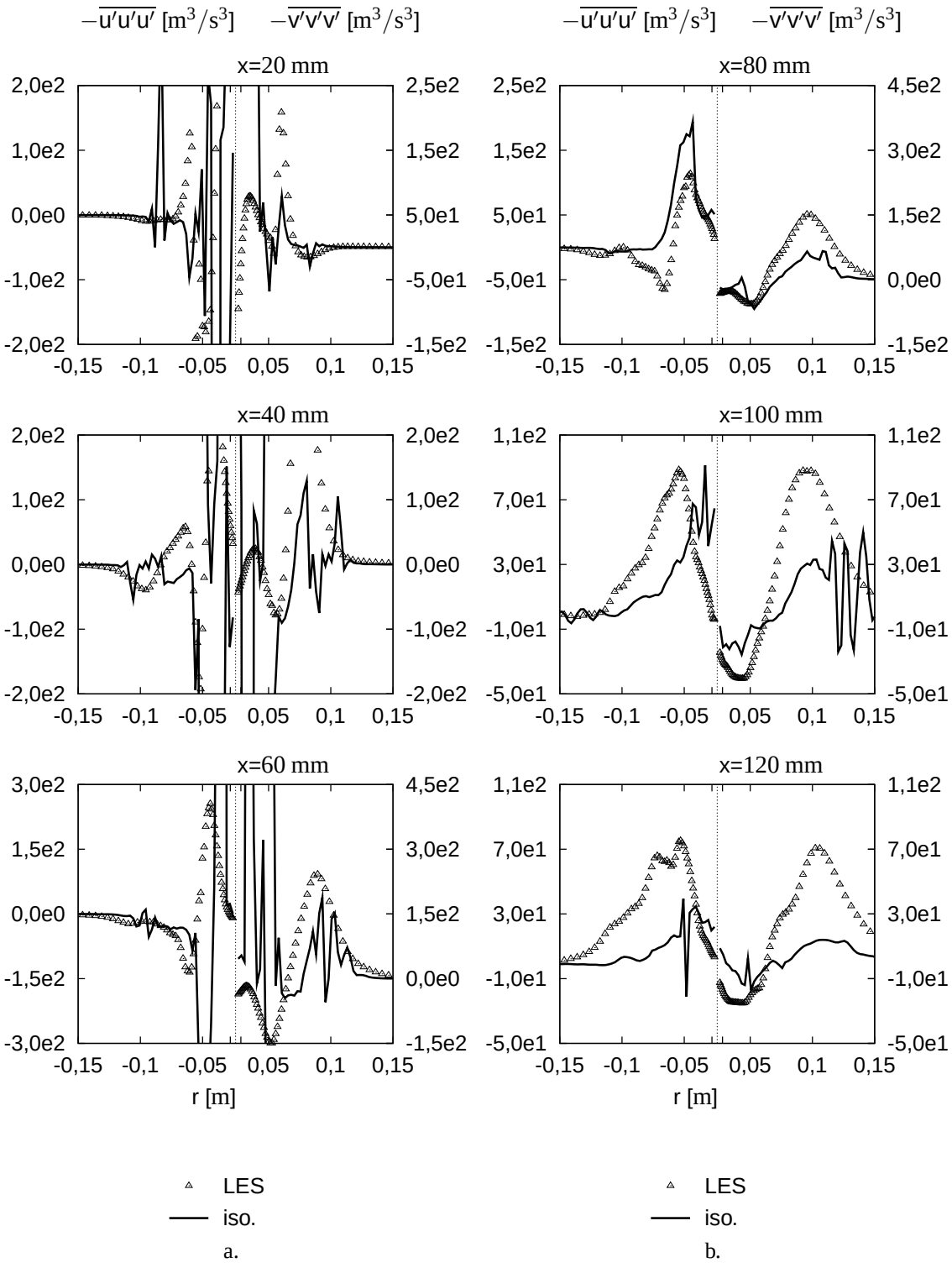


Bild F.6. Vergleich des isotropen Modelansatzes mit LES-Daten; Zyklon. Radiale Verteilung der Größen $-\overline{u'u'u'}$ und $-\overline{v'v'v'}$ an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. Die Ergebnisse des isotropen Modells sind kubisch interpoliert.

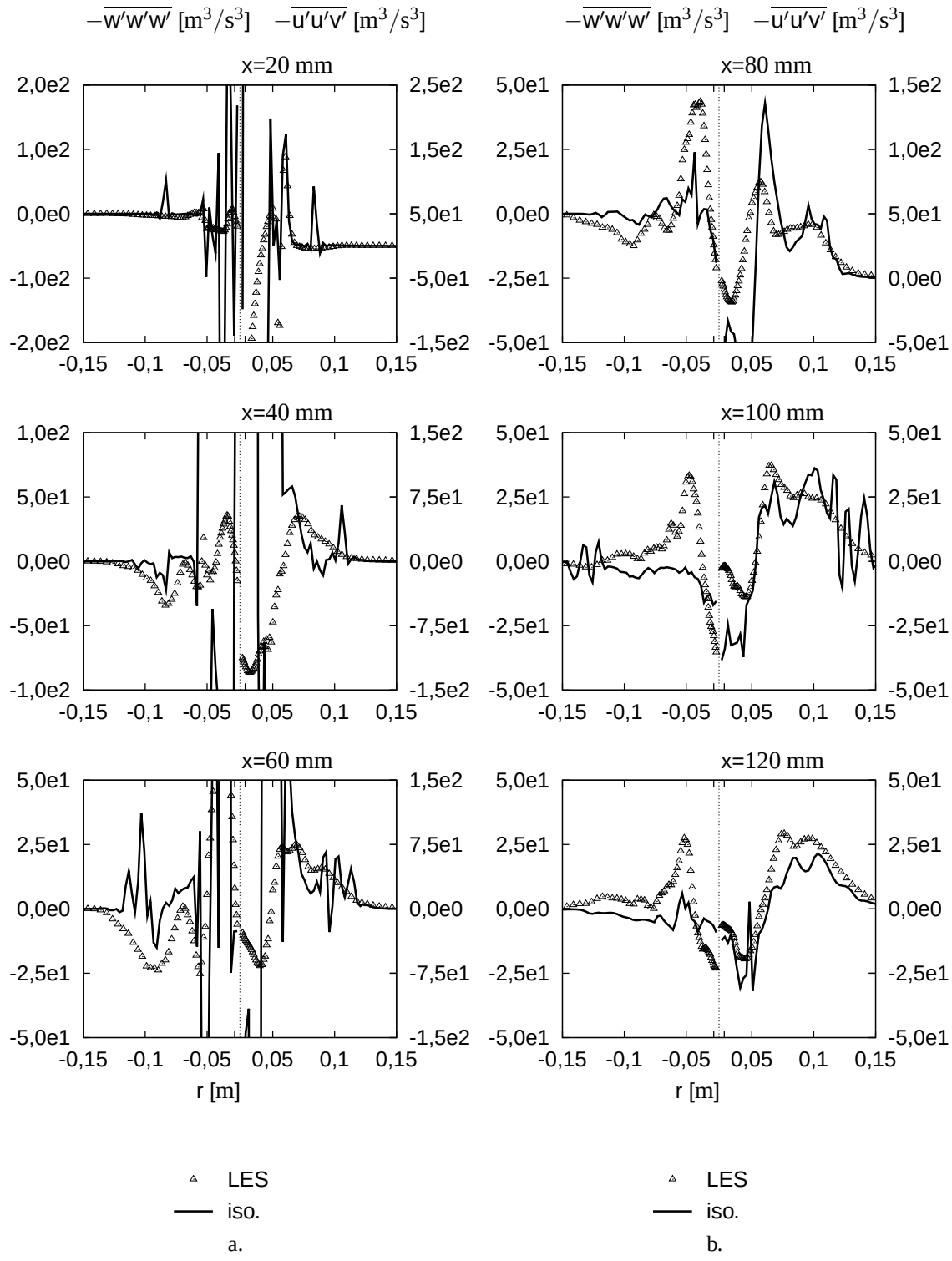


Bild F.7. Vergleich des isotropen Modelansatzes mit LES-Daten; Zyklon. Radiale Verteilung der Größen $-\overline{w'w'w'}$ und $-\overline{u'u'v'}$ an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. Die Ergebnisse des isotropen Modells sind kubisch interpoliert.

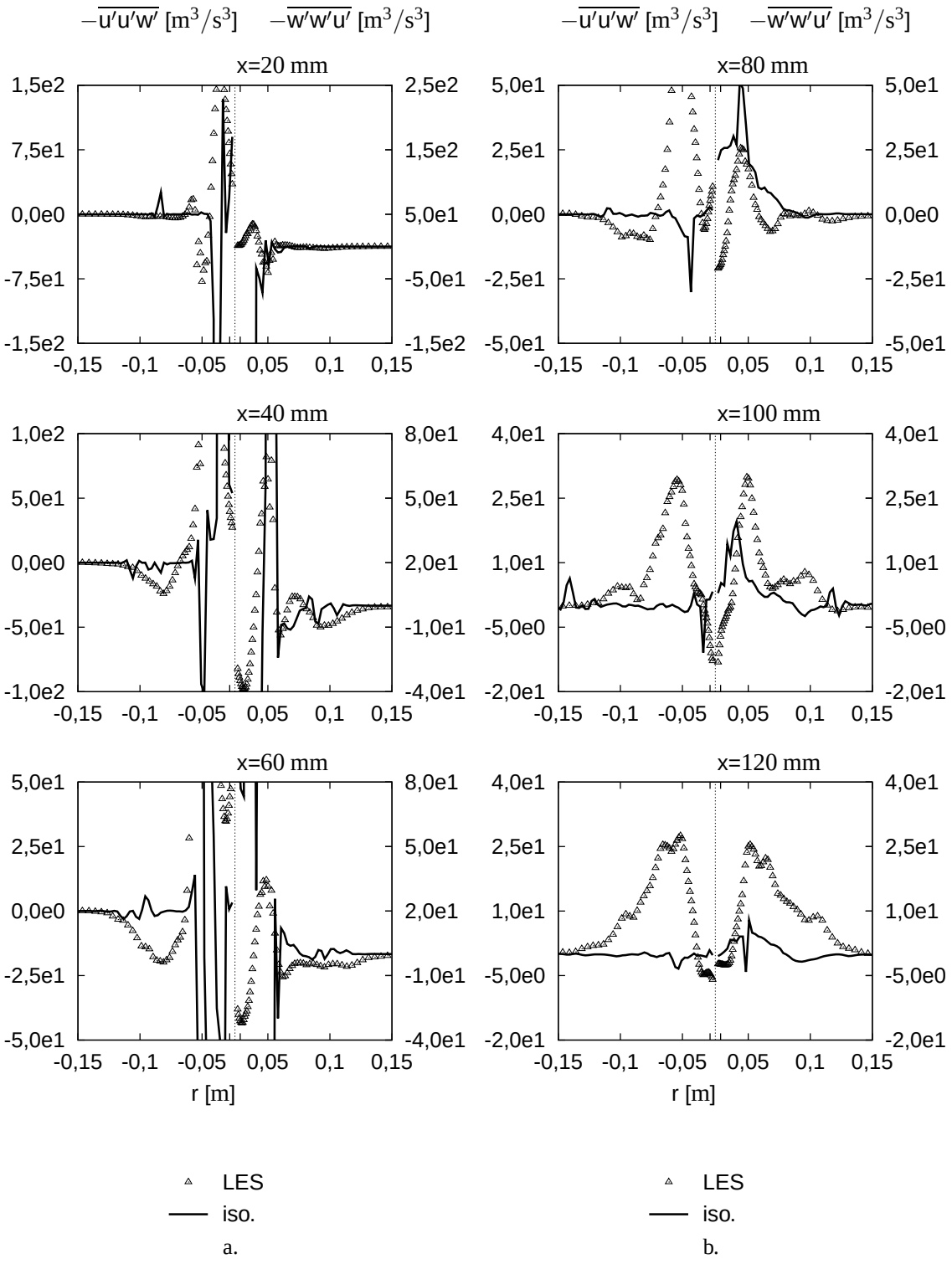


Bild F.8. Vergleich des isotropen Modelansatzes mit LES-Daten; Zyklon. Radiale Verteilung der Größen $-\overline{u'u'w'}$ und $-\overline{w'w'u'}$ an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. Die Ergebnisse des isotropen Modells sind kubisch interpoliert.

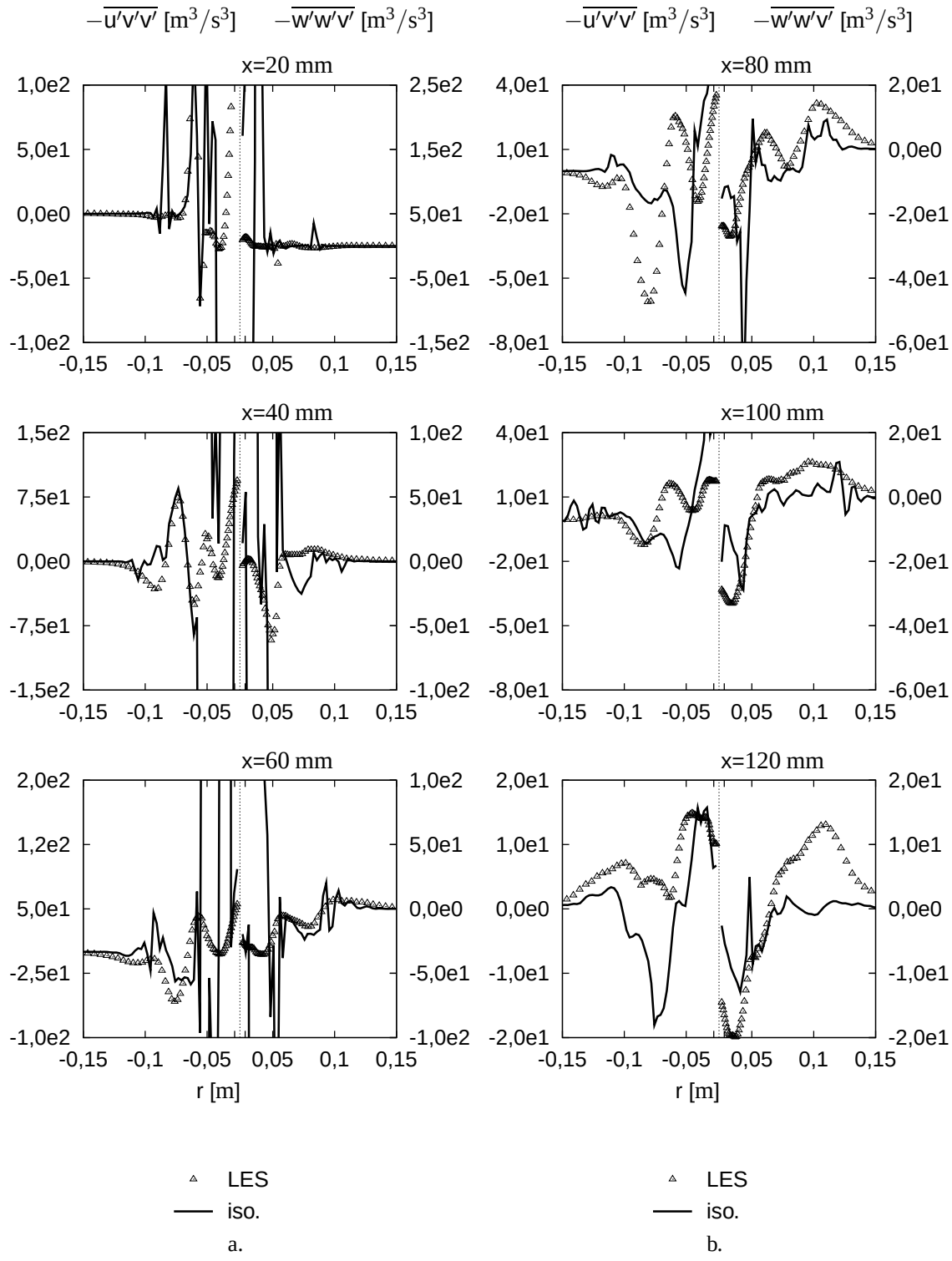


Bild F.9. Vergleich des isotropen Modelansatzes mit LES-Daten; Zyklon. Radiale Verteilung der Größen $-\overline{u'v'v'}$ und $-\overline{w'w'v'}$ an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. Die Ergebnisse des isotropen Modells sind kubisch interpoliert.

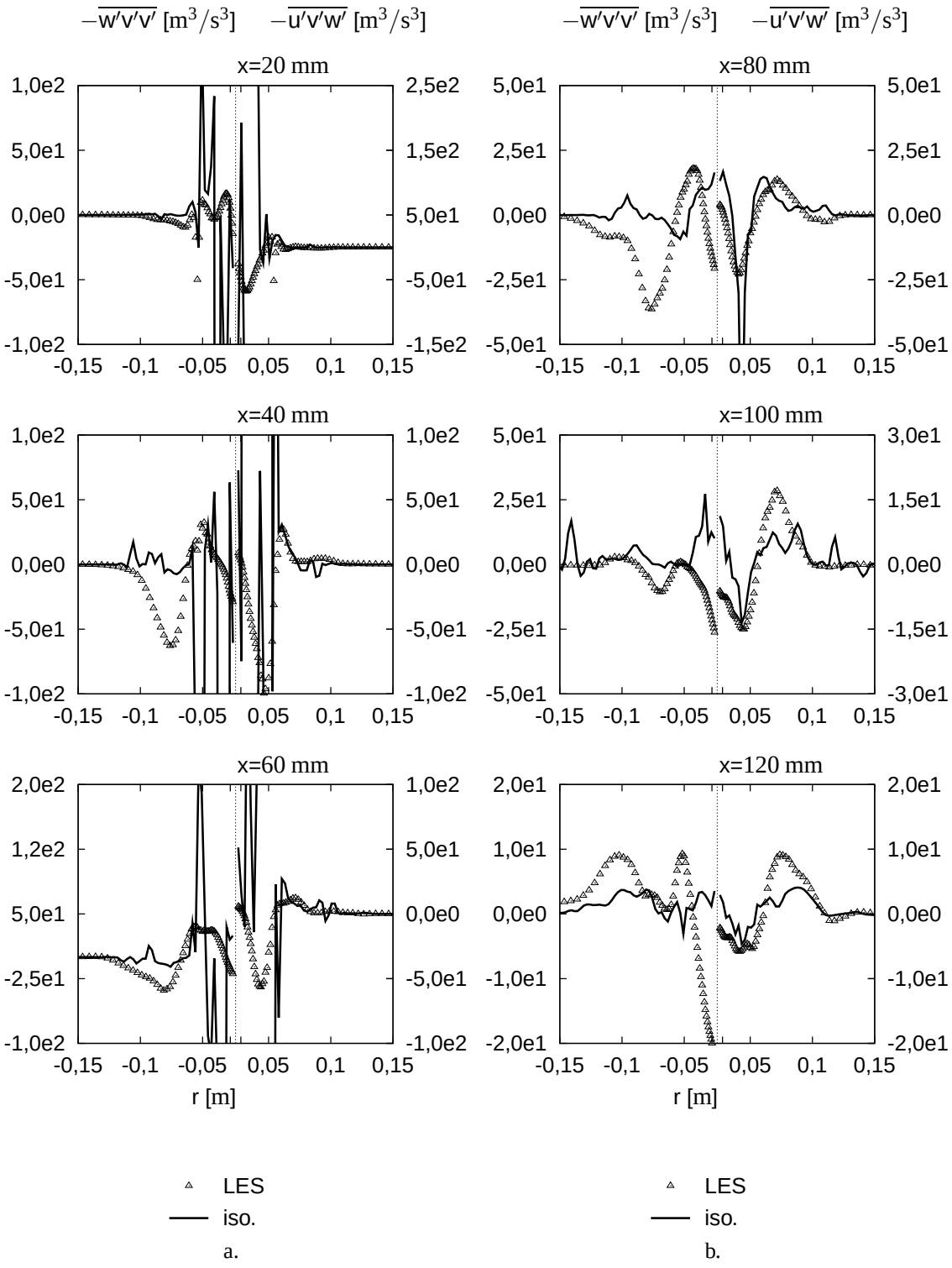


Bild F.10. Vergleich des isotropen Modelansatzes mit LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen $-\overline{w'v'v'}$ und $-\overline{u'v'w'}$ an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. Die Ergebnisse des isotropen Modells sind kubisch interpoliert.

Anhang G

Diffusion infolge der Druckschwankung im Vergleich mit dem Druck-Scher-Tensor

G.1 Freistrahl

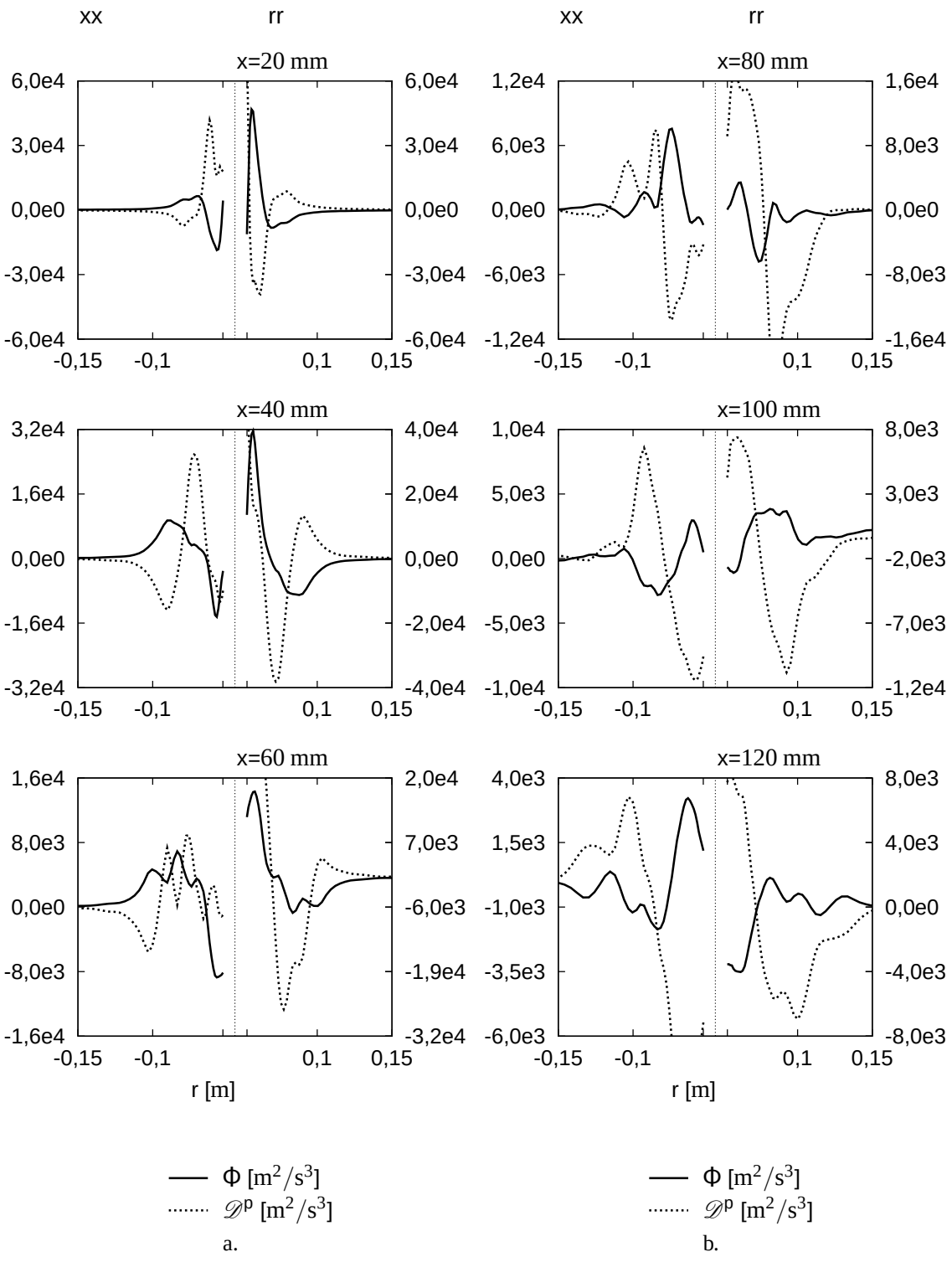


Bild G.1. Vergleich der Größenordnung der LES-Ergebnisse von Φ und $\mathscr{D}^p$; Freistrahl. Radiale Verteilung der Komponenten *uu* und *vv* an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

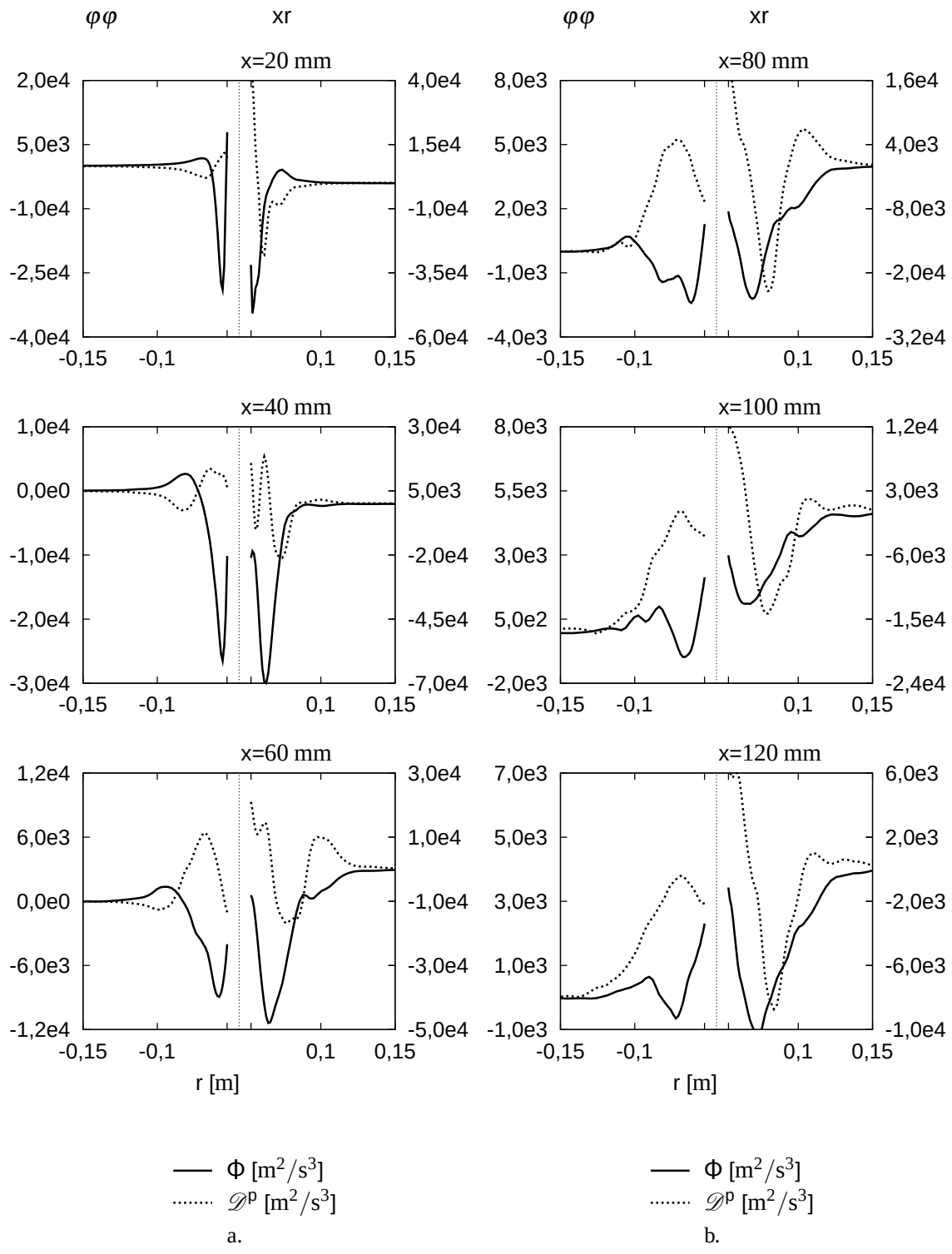


Bild G.2. Vergleich der Größenordnung der LES-Ergebnisse von Φ und $\mathscr{D}^p$; Freistrahl. Radiale Verteilung der Komponenten *ww* und *uv* an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

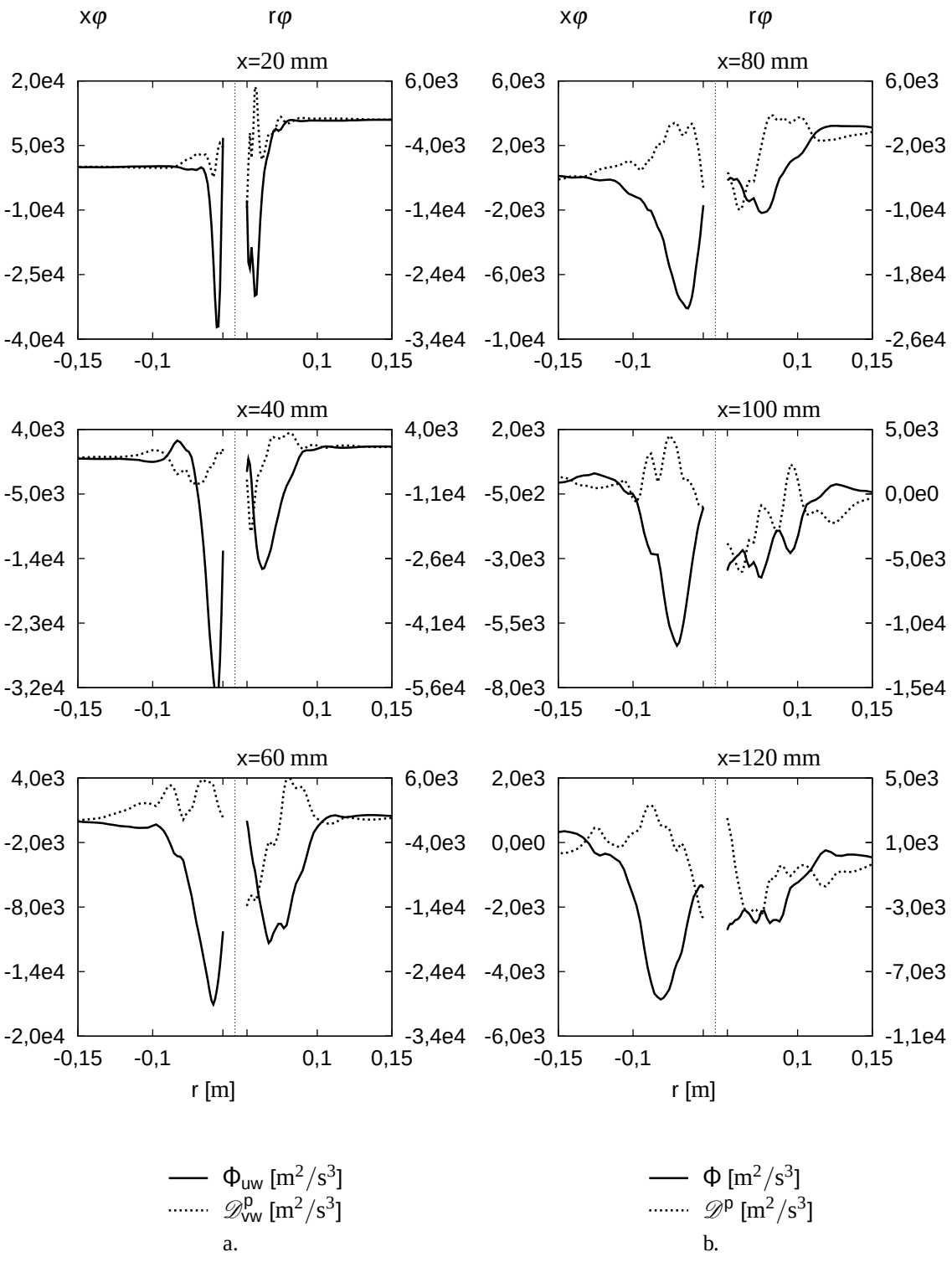


Bild G.3. Vergleich der Größenordnung der LES-Ergebnisse von Φ und $\mathscr{D}^p$; Freistrahl. Radiale Verteilung der Komponenten *uw* und *vw* an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

G.2 Zyklon

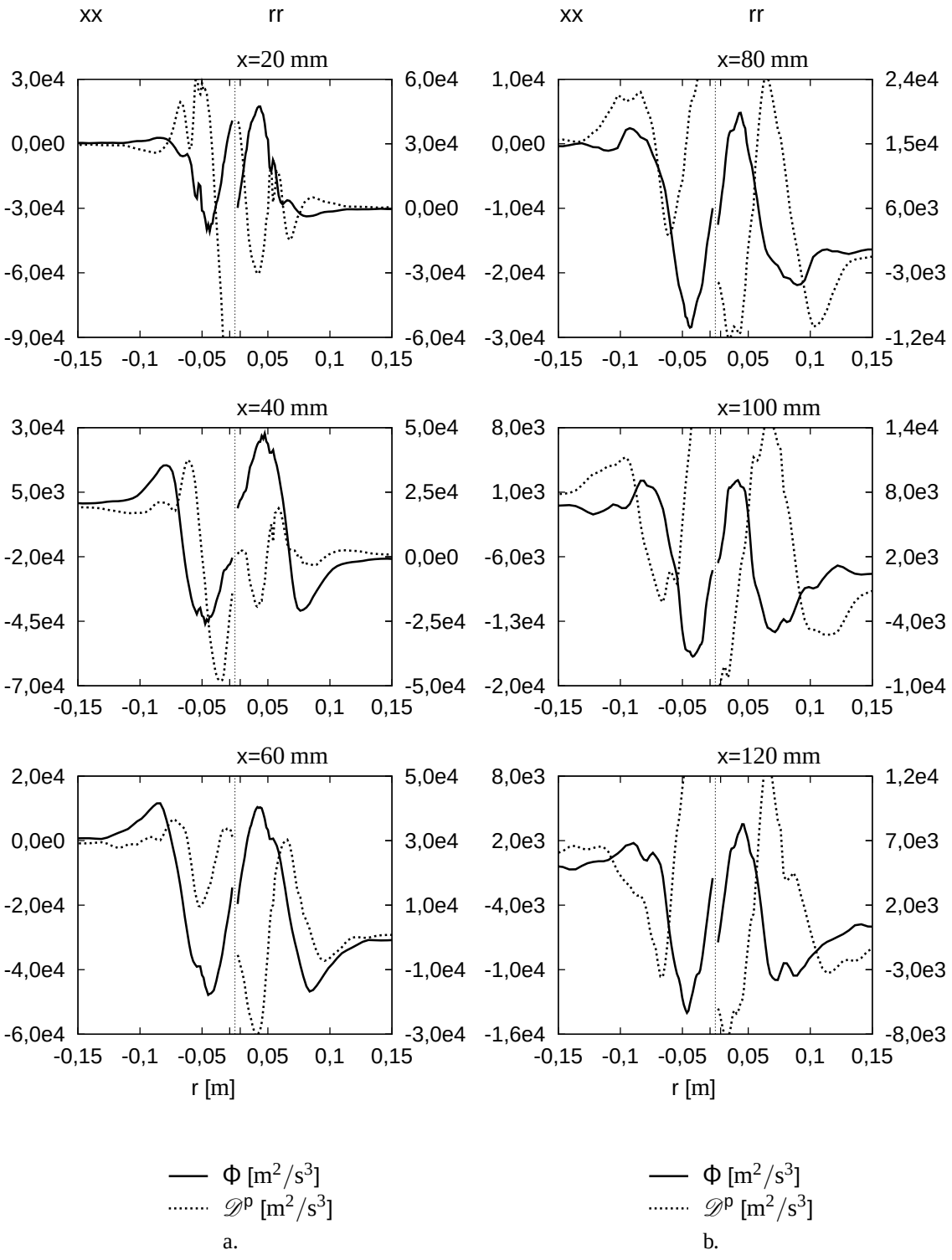


Bild G.4. Vergleich der Größenordnung der LES-Ergebnisse von Φ und $\mathscr{D}^p$; Zyklon. Radiale Verteilung der Komponenten *uu* und *vv* an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

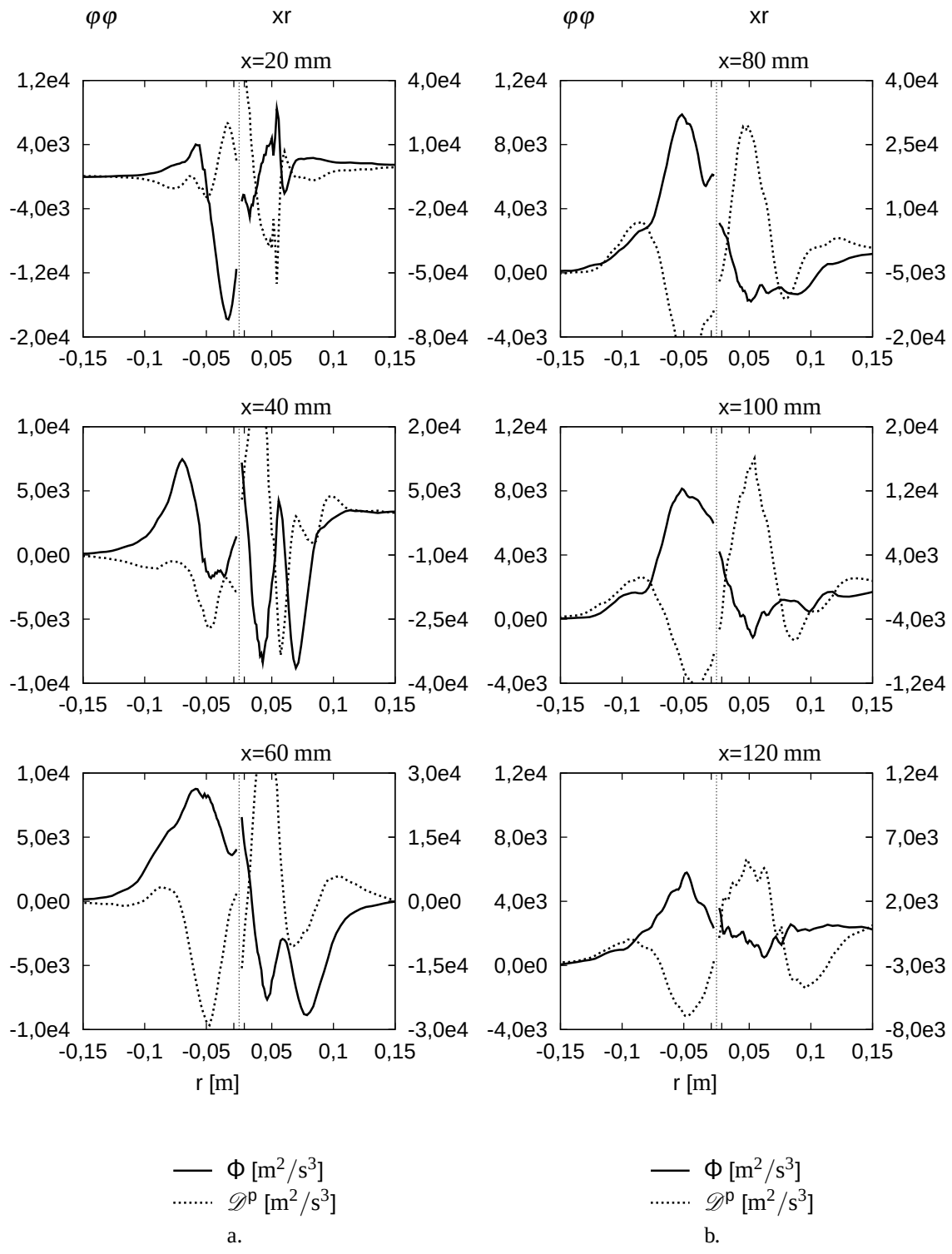


Bild G.5. Vergleich der Größenordnung der LES-Ergebnisse von Φ und $\mathscr{D}^p$; Zyklon. Radiale Verteilung der Komponenten *ww* und *uv* an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

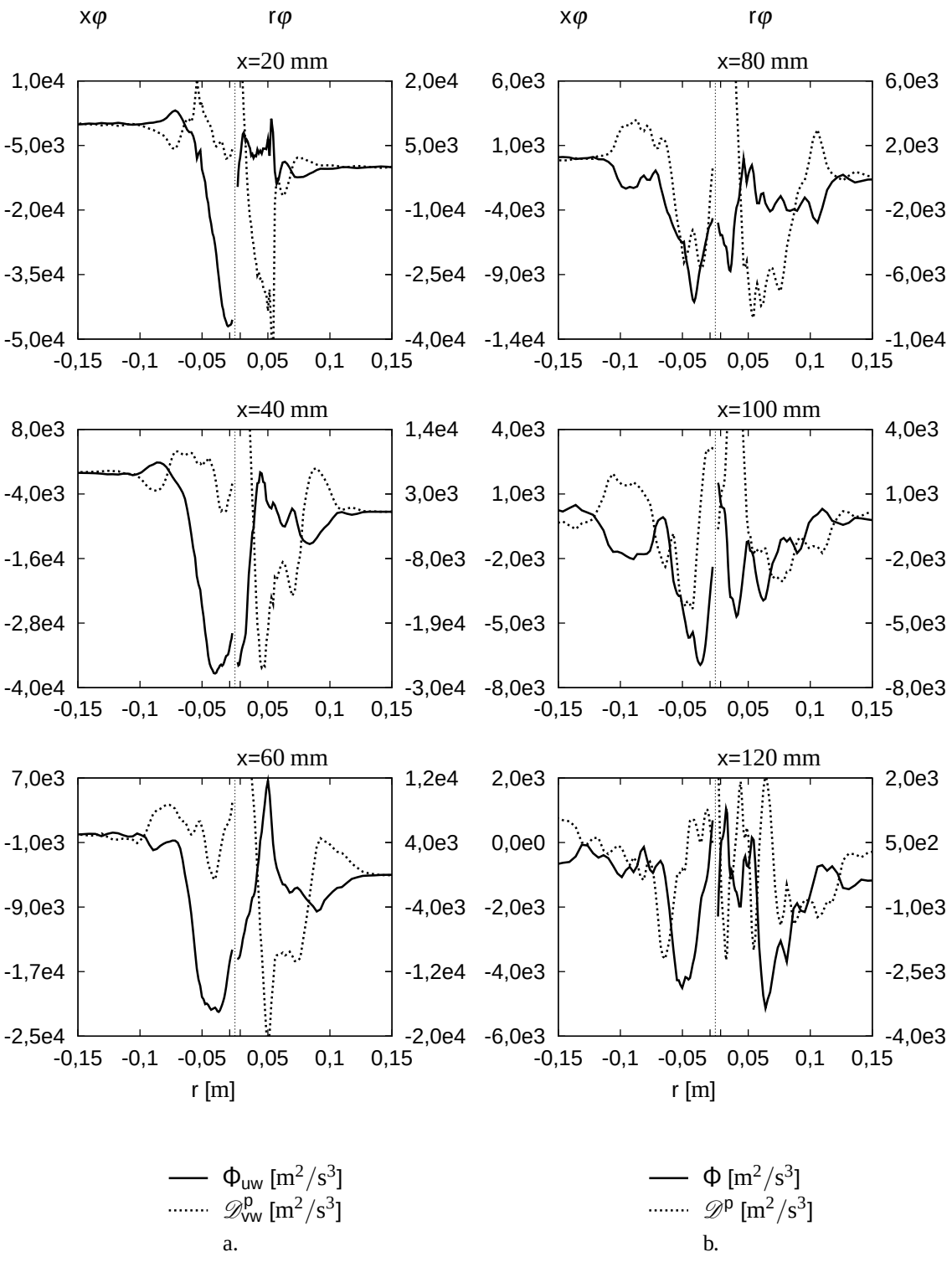


Bild G.6. Vergleich der Größenordnung der LES-Ergebnisse von Φ und $\mathscr{D}^p$; Zyklon. Radiale Verteilung der Komponenten *uw* und *vw* an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

Anhang H

Vergleich des Druck-Scher-Tensors aus der Simulation mit den Modellen von Launder et al. und Speziale et al.

H.1 Freistrahl

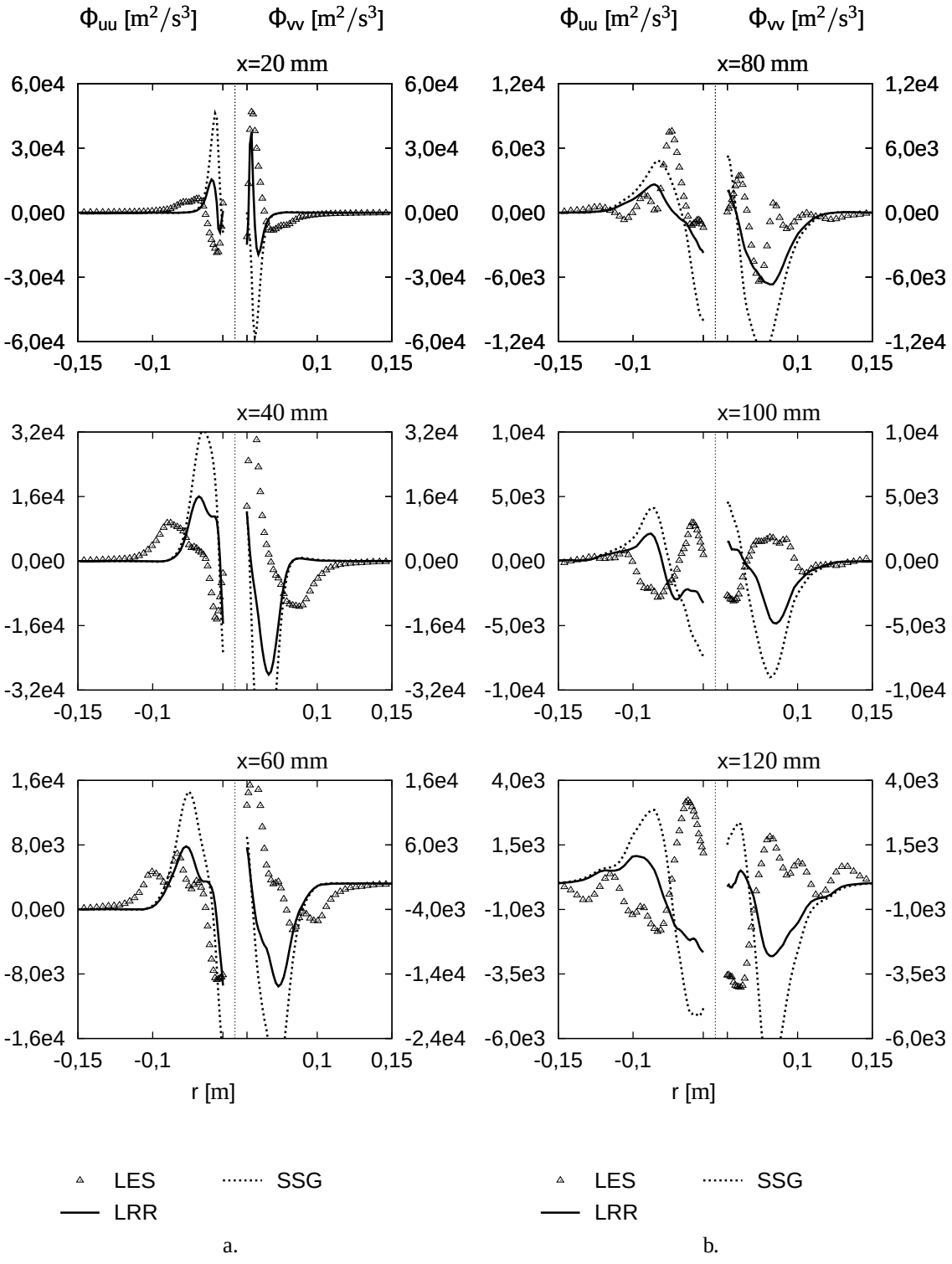


Bild H.1. Vergleich der Modellansätze von Launder et al. und Speziale et al. mit LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen Φ_{uu} und Φ_{vv} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

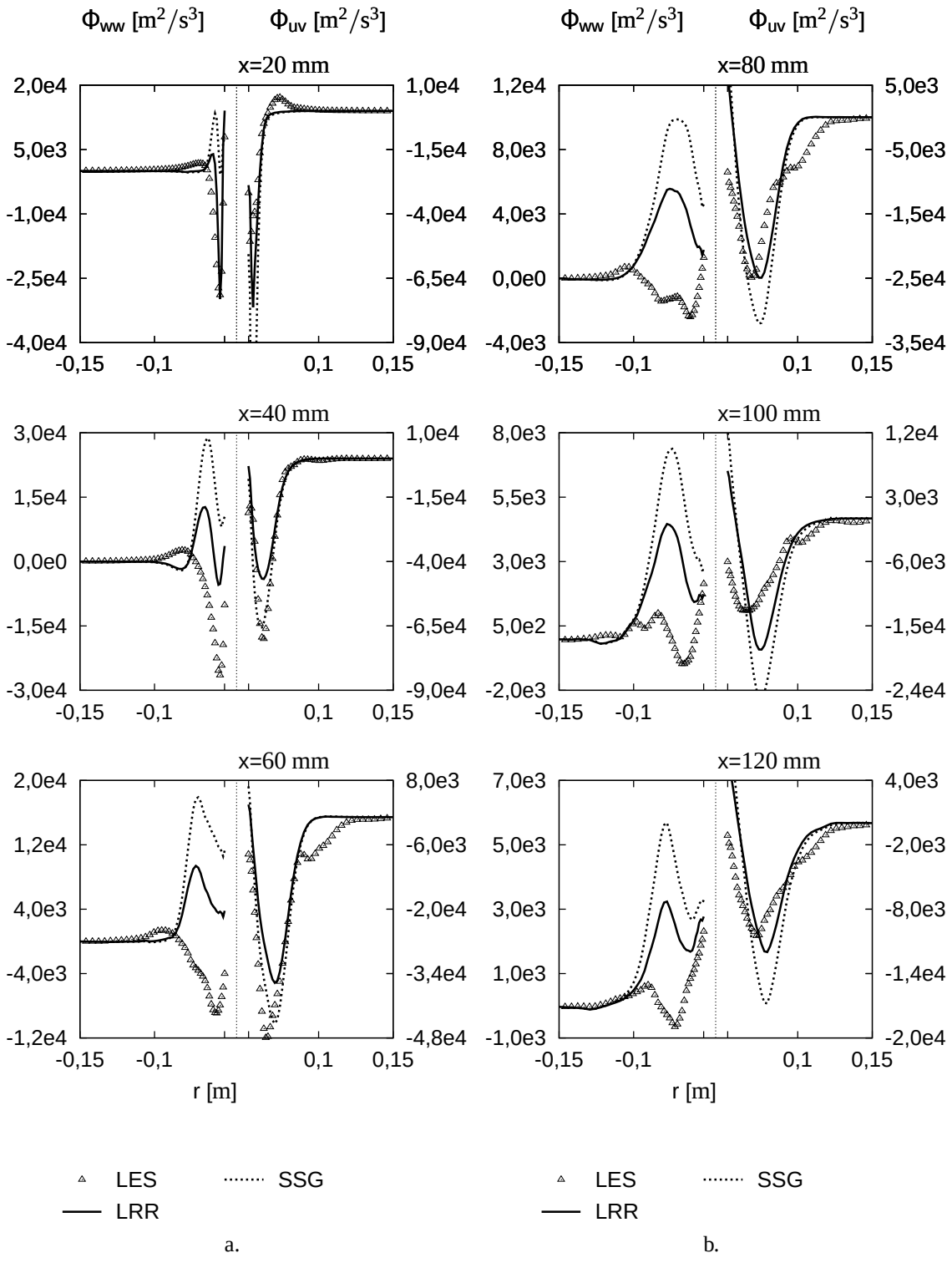


Bild H.2. Vergleich der Modellansätze von Launder et al. und Speziale et al. mit LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen Φ_{ww} und Φ_{uv} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

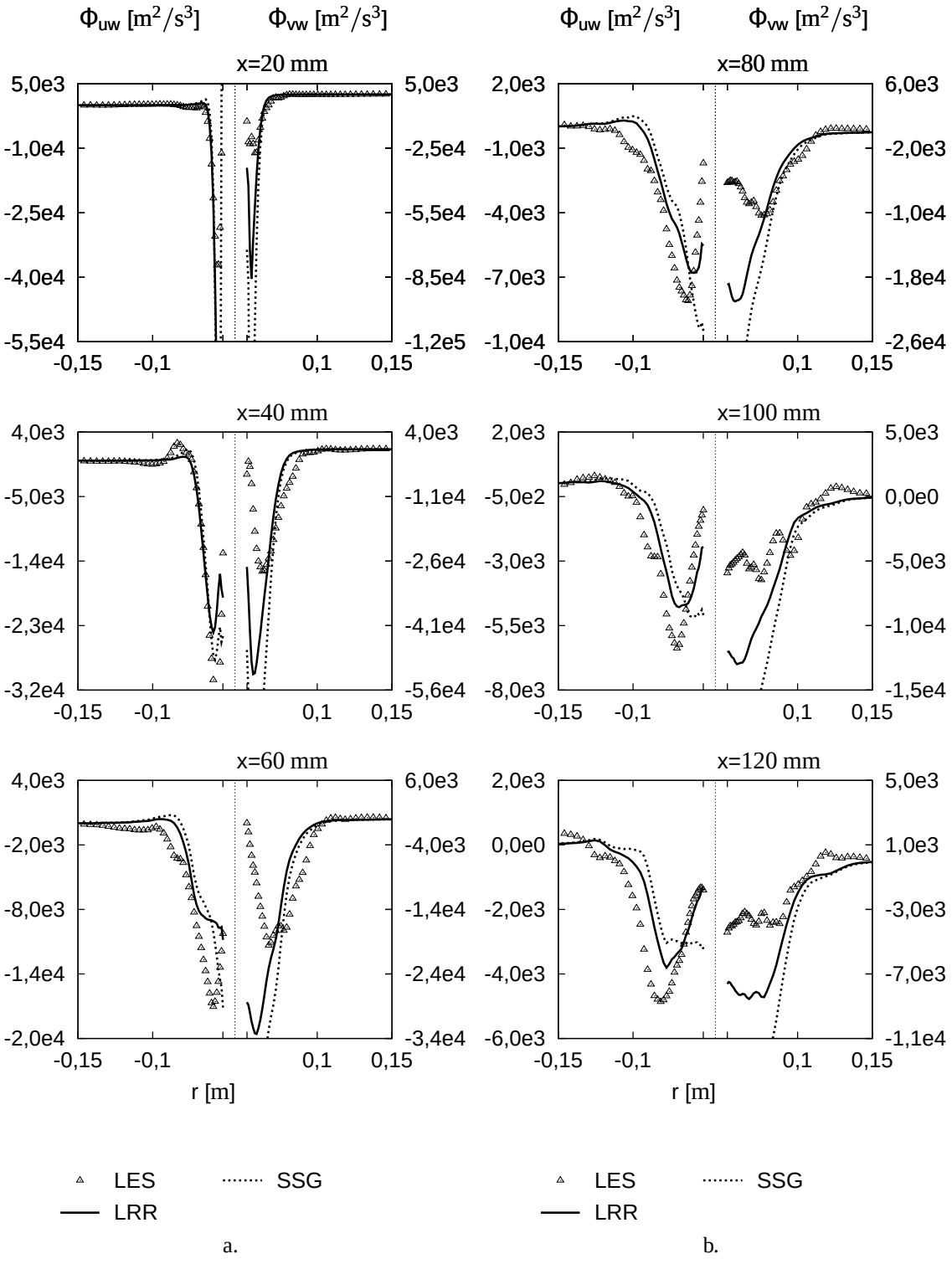


Bild H.3. Vergleich der Modellansätze von Launder et al. und Speziale et al. mit LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen Φ_{uw} und Φ_{vw} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

H.2 Zyklon

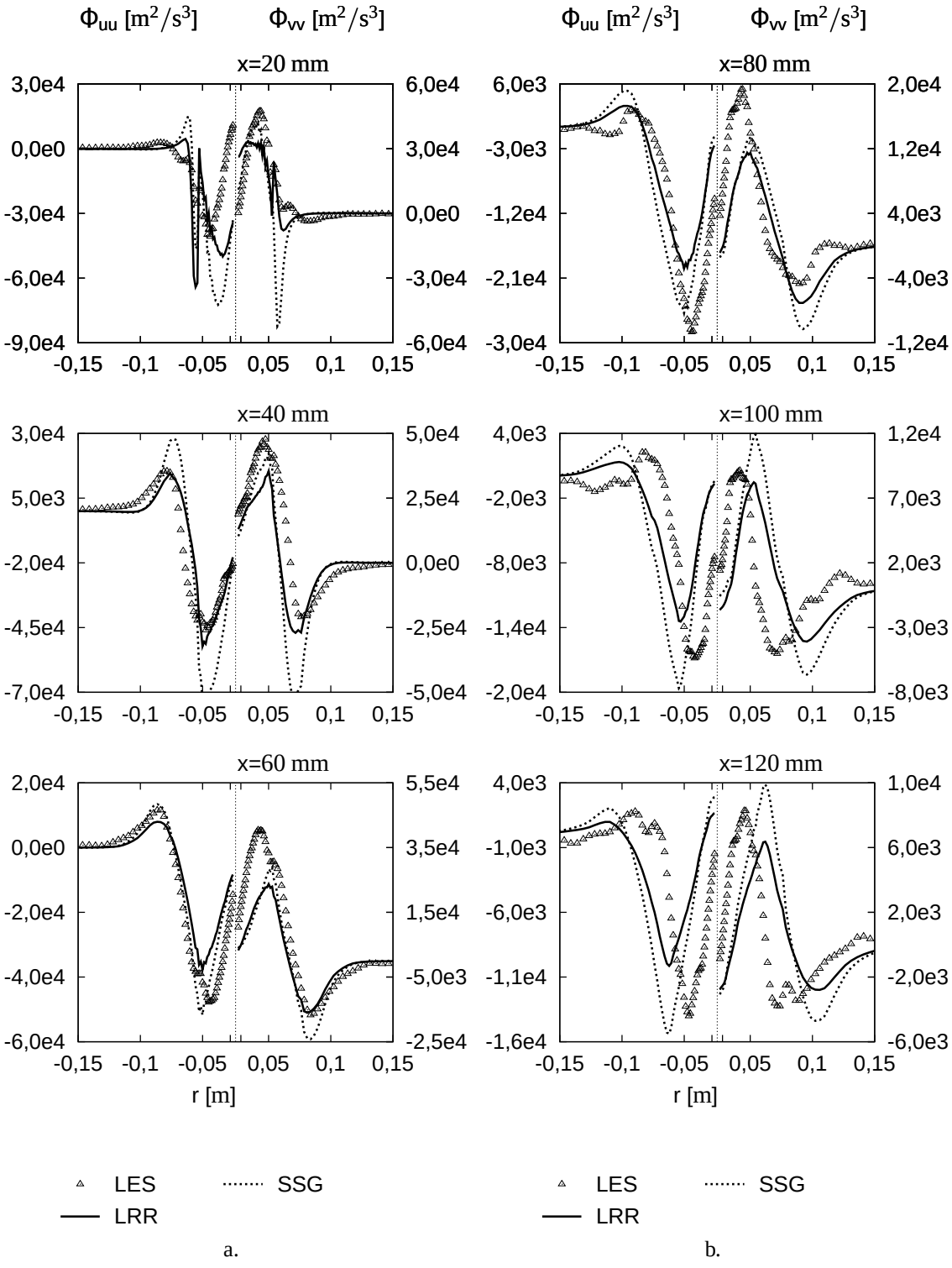


Bild H.4. Vergleich der Modellansätze von Launder et al. und Speziale et al. mit LES-Daten; Zyklon. Radiale Verteilung der Größen Φ_{uu} und Φ_{vv} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

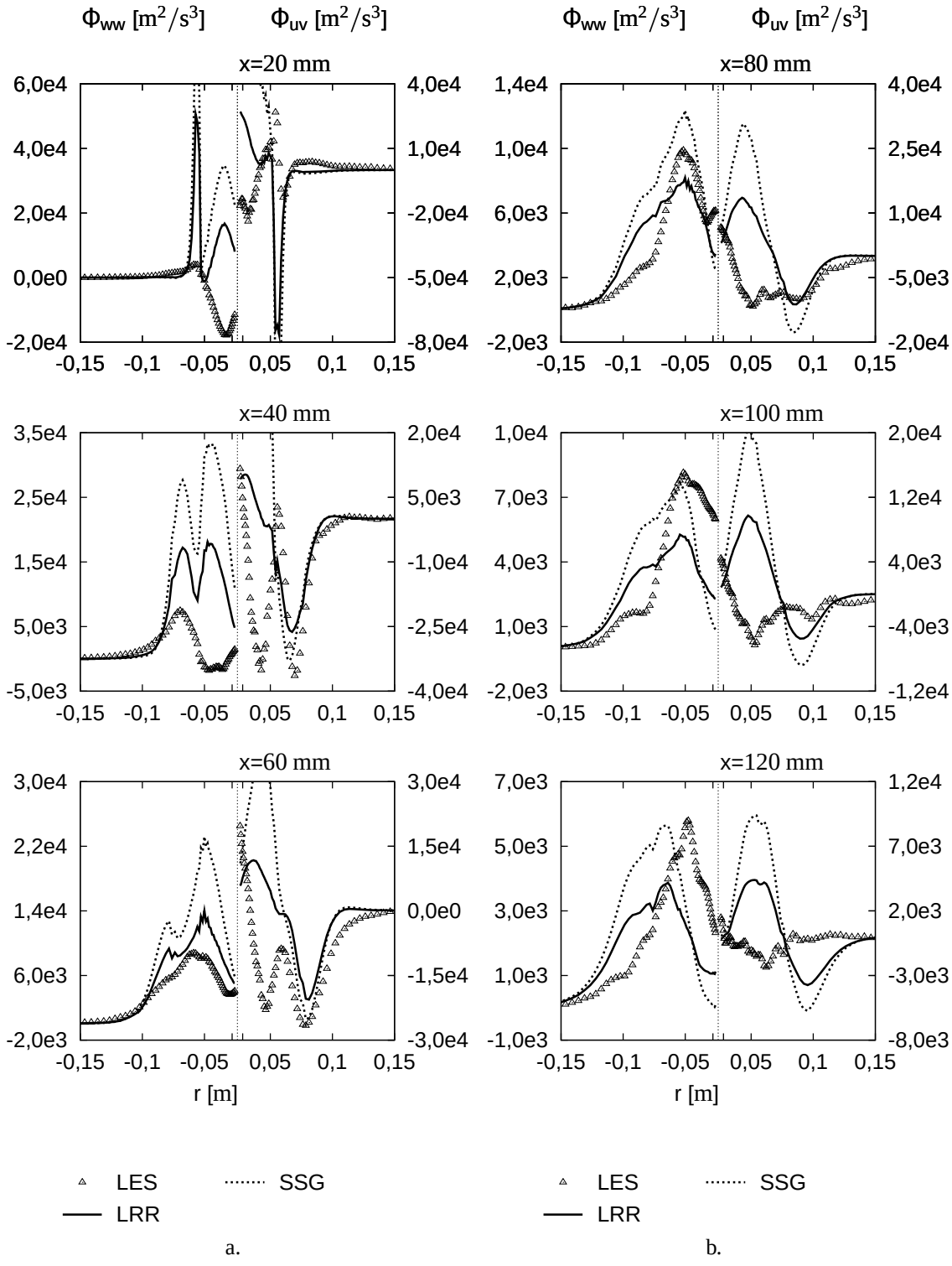


Bild H.5. Vergleich der Modellansätze von Launder et al. und Speziale et al. mit LES-Daten; Zyklon. Radiale Verteilung der Größen Φ_{ww} und Φ_{uv} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

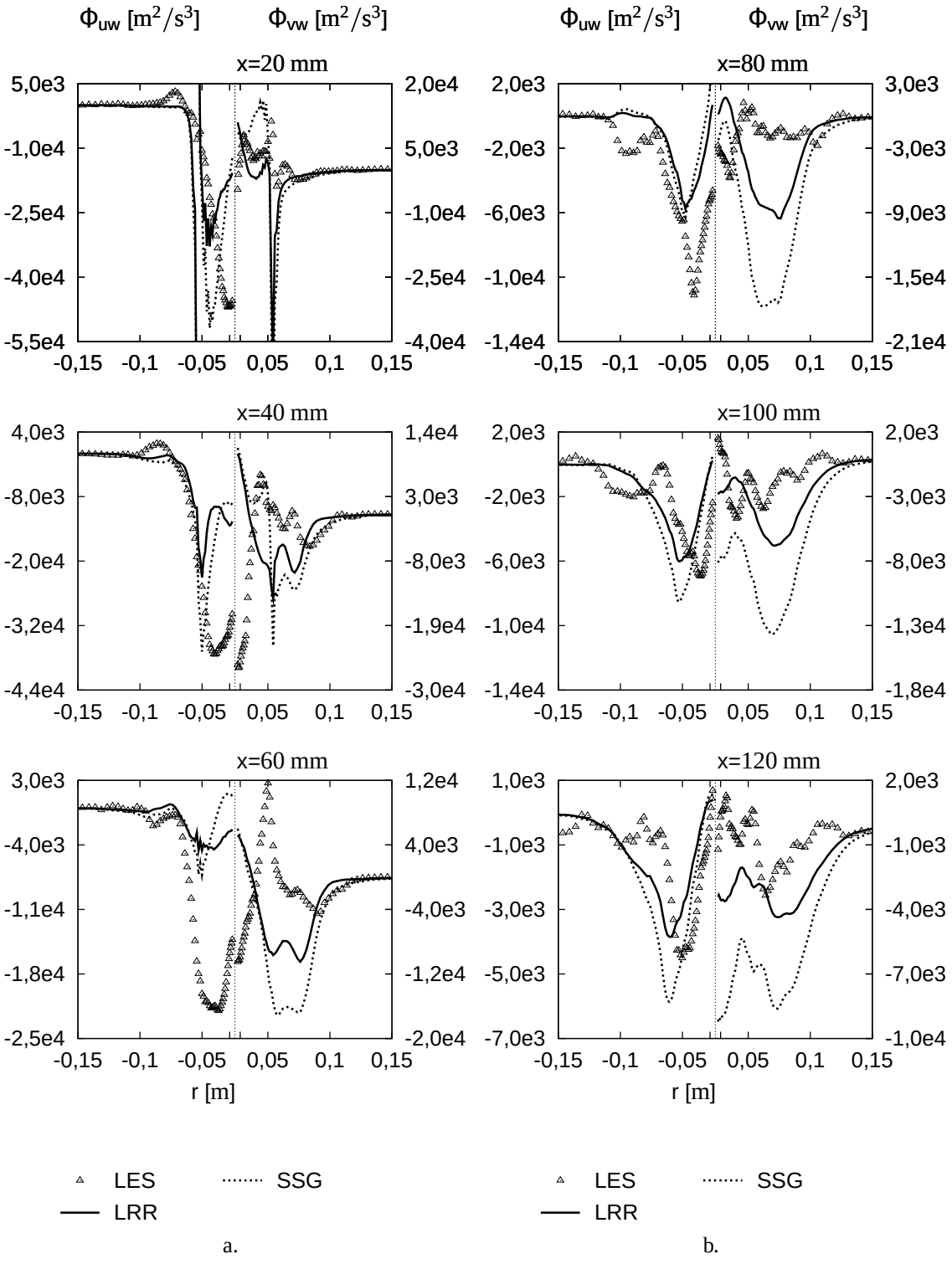


Bild H.6. Vergleich der Modellansätze von Launder et al. und Speziale et al. mit LES-Daten; Zyklon. Radiale Verteilung der Größen Φ_{uw} und Φ_{vw} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm.

Anhang I

Variation der Modellkonstanten des linearen Modells von Launder et al.

I.1 Freistrahl

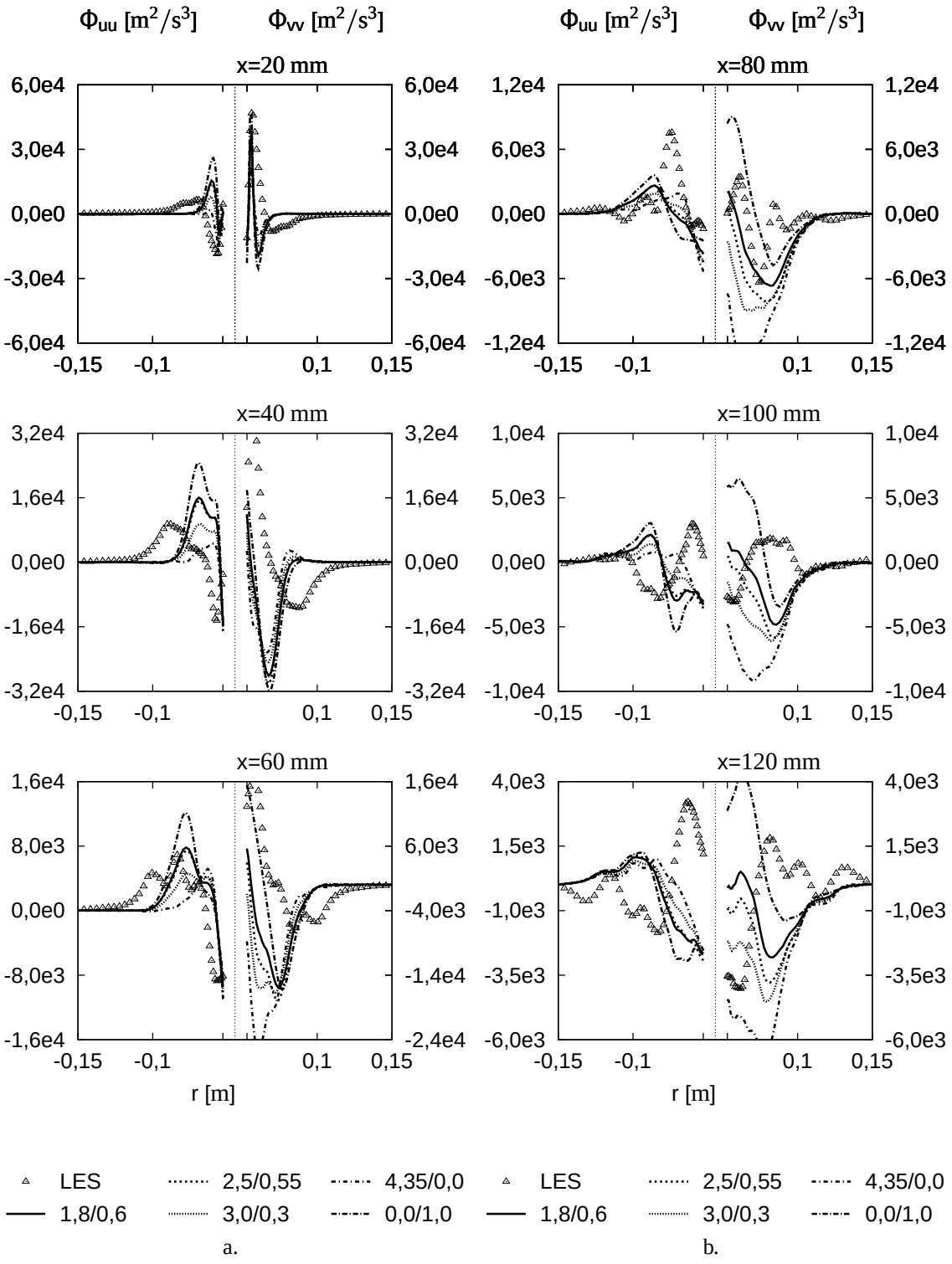


Bild I.1. Variation der Modellkonstanten des linearen Modells im Vergleich mit den LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen Φ_{uu} und Φ_{vv} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. In der Legende sind jeweils C_1/C_2 gegeben.

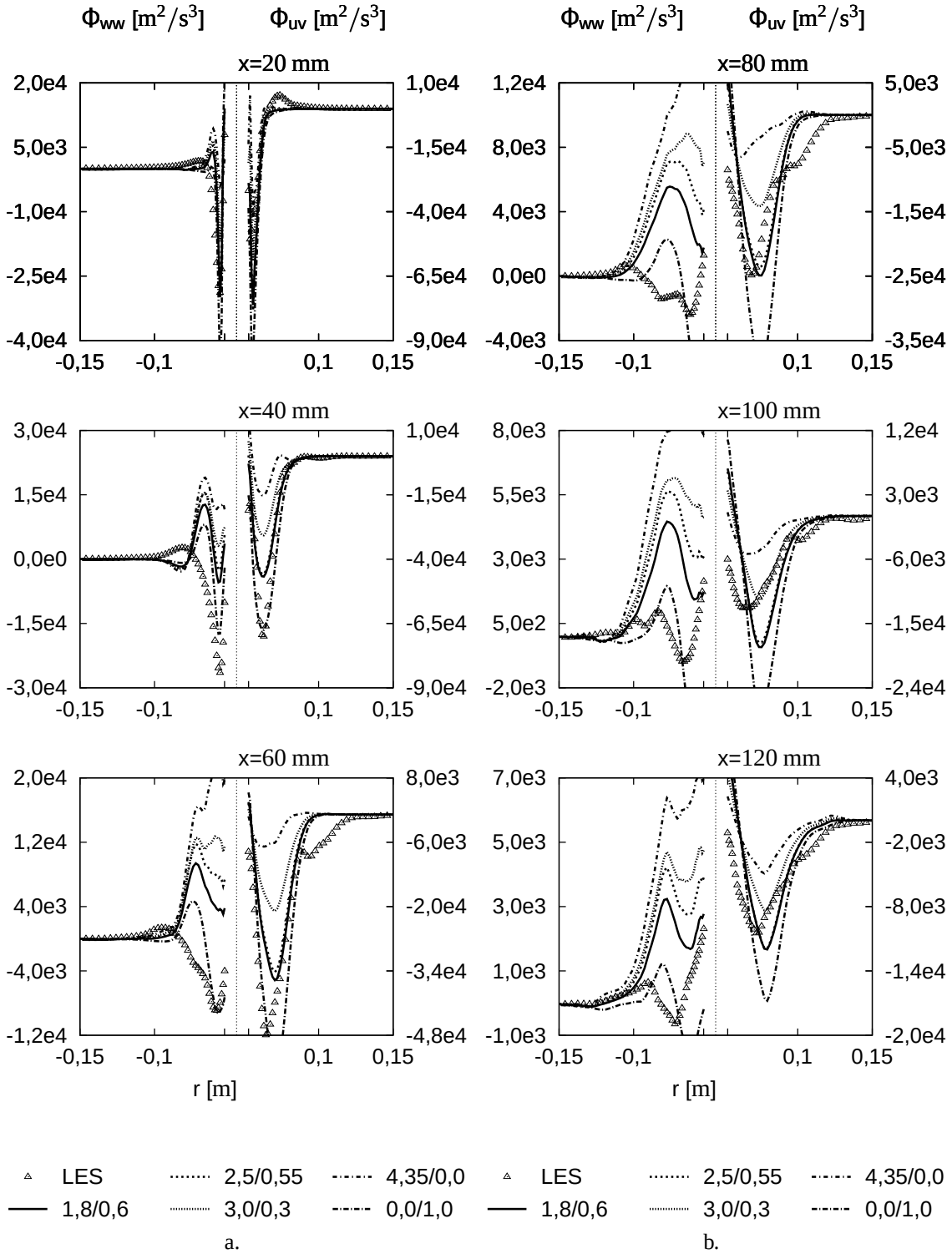


Bild I.2. Variation der Modellkonstanten des linearen Modells im Vergleich mit den LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen Φ_{ww} und Φ_{uv} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. In der Legende sind jeweils C_1/C_2 gegeben.

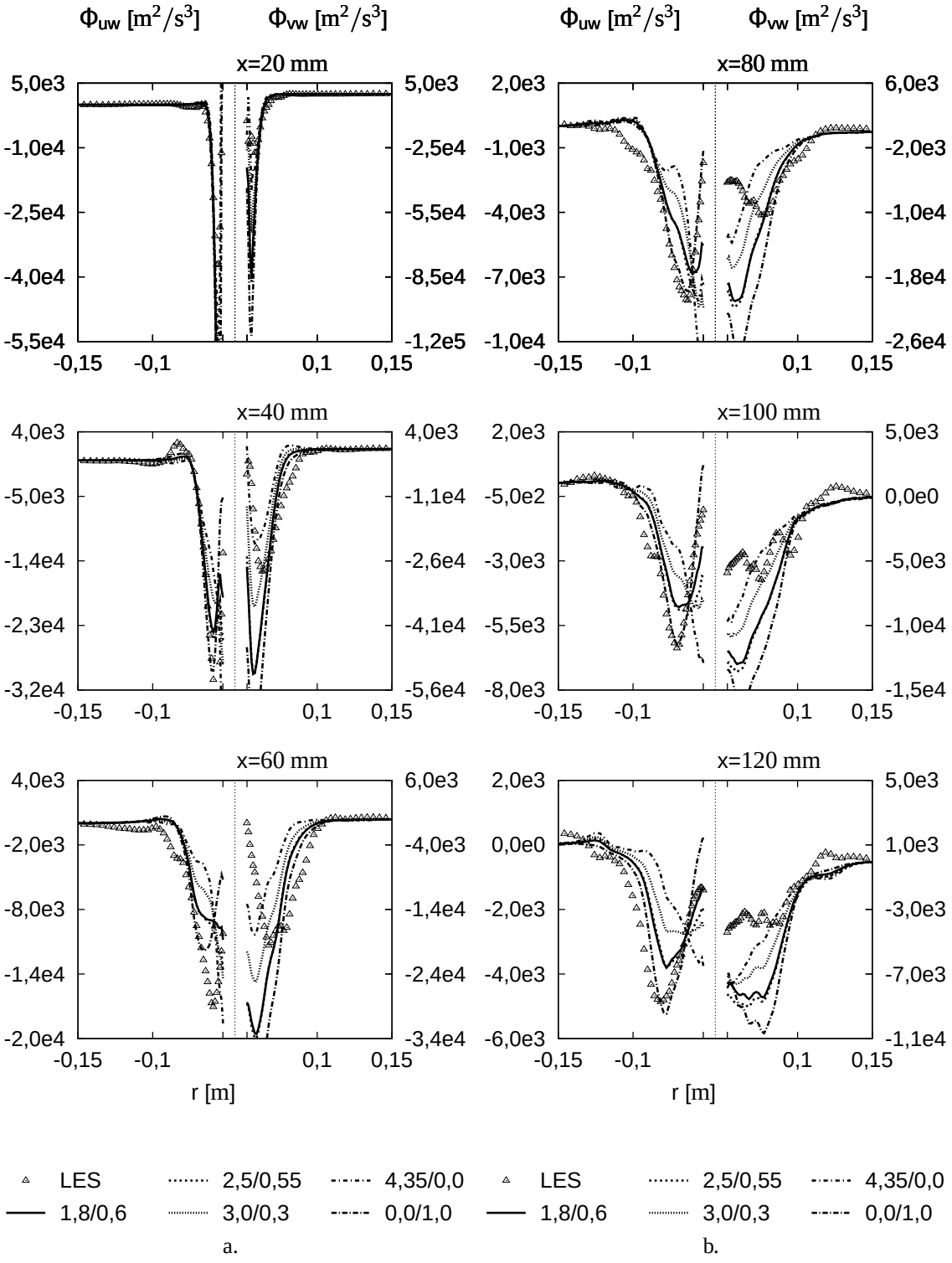


Bild I.3. Variation der Modellkonstanten des linearen Modells im Vergleich mit den LES-Daten; Freistrahl. Radiale Verteilung der Größen Φ_{uw} und Φ_{vw} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. In der Legende sind jeweils C_1/C_2 gegeben.

I.2 Zyklon

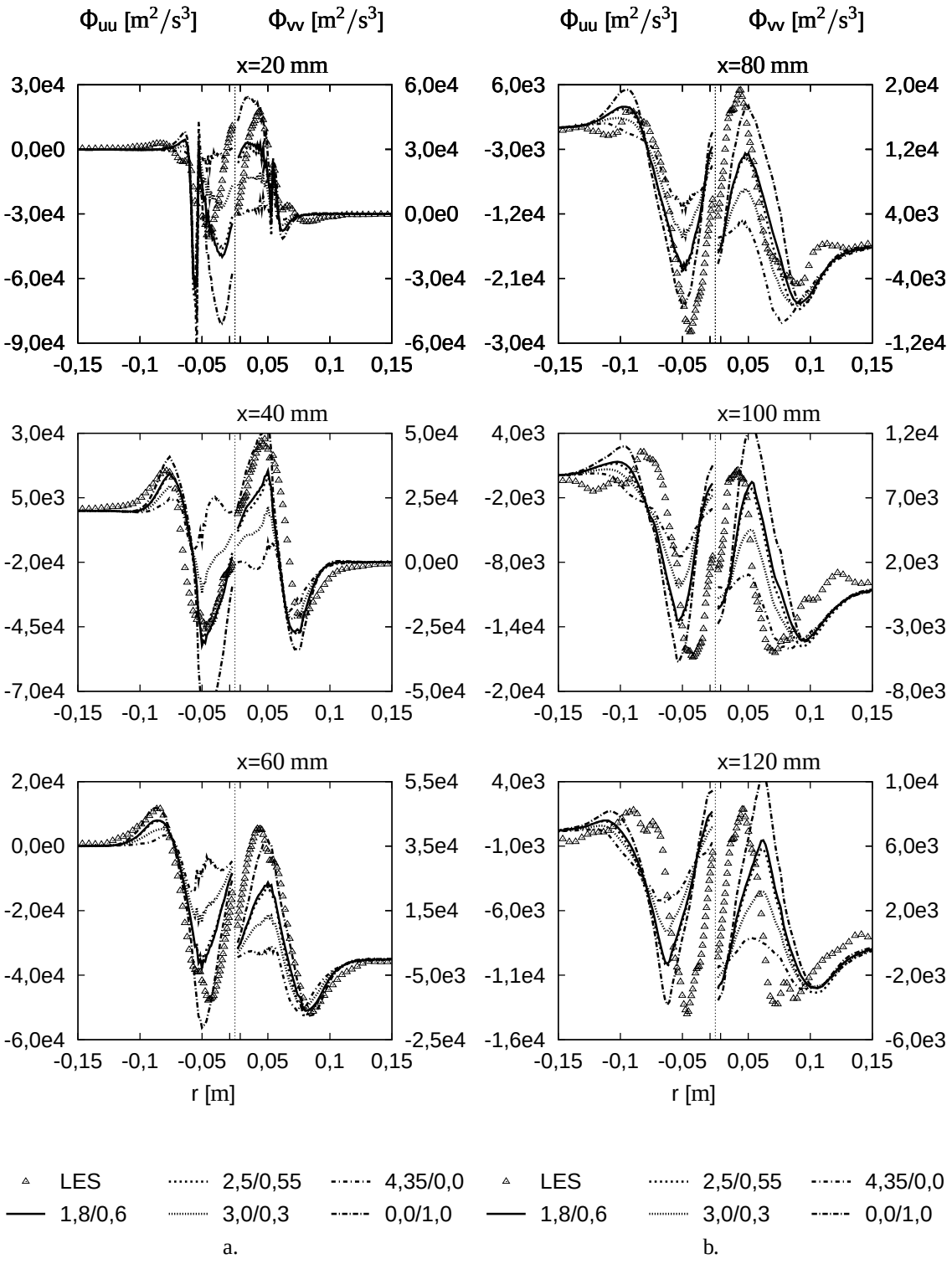


Bild I.4. Variation der Modellkonstanten des linearen Modells im Vergleich mit den LES-Daten; Zyklon. Radiale Verteilung der Größen Φ_{uu} und Φ_{vv} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. In der Legende sind jeweils C_1/C_2 gegeben.

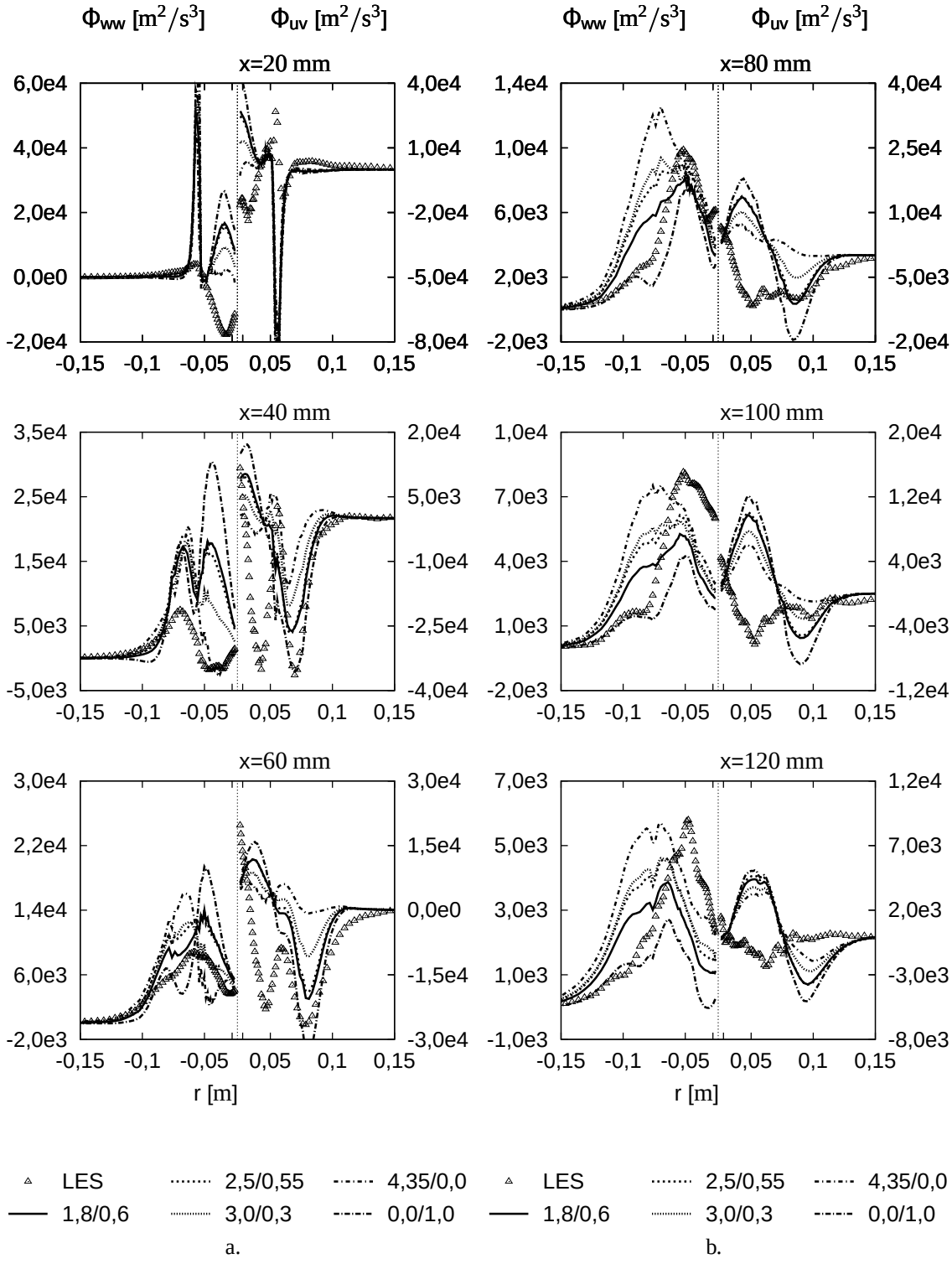


Bild I.5. Variation der Modellkonstanten des linearen Modells im Vergleich mit den LES-Daten; Zyklon. Radiale Verteilung der Größen Φ_{ww} und Φ_{uv} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. In der Legende sind jeweils C_1/C_2 gegeben.

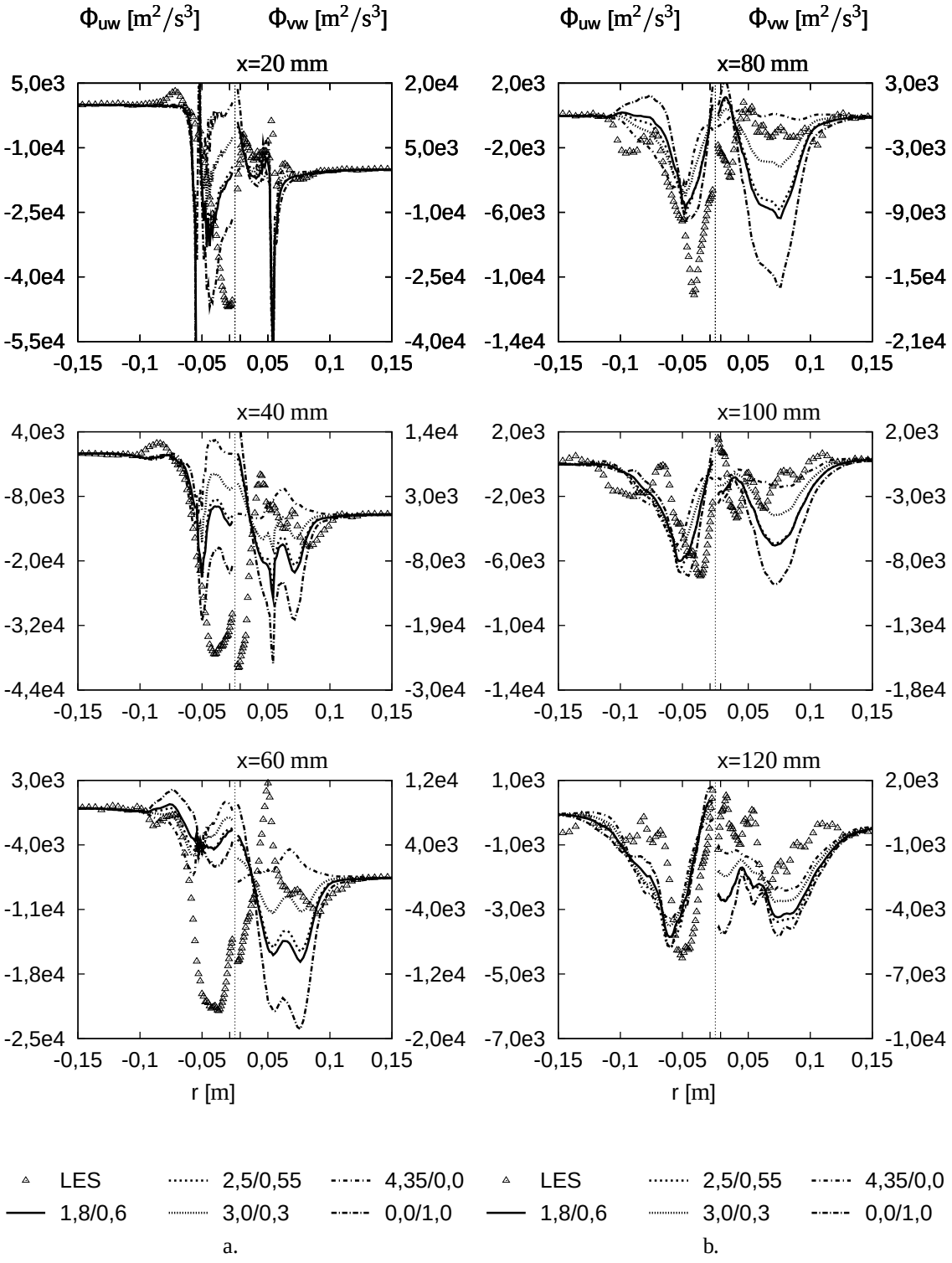


Bild I.6. Variation der Modellkonstanten des linearen Modells im Vergleich mit den LES-Daten; Zyklon. Radiale Verteilung der Größen Φ_{uw} und Φ_{vw} an axialen Positionen x=20 mm bis 120 mm. In der Legende sind jeweils C_1/C_2 gegeben.

Anhang J

Vergleich des normierten Druck-Scher-Tensors mit Stabilitätsparametern im lokalen Strombahnsystem

J.1 Freistrahl

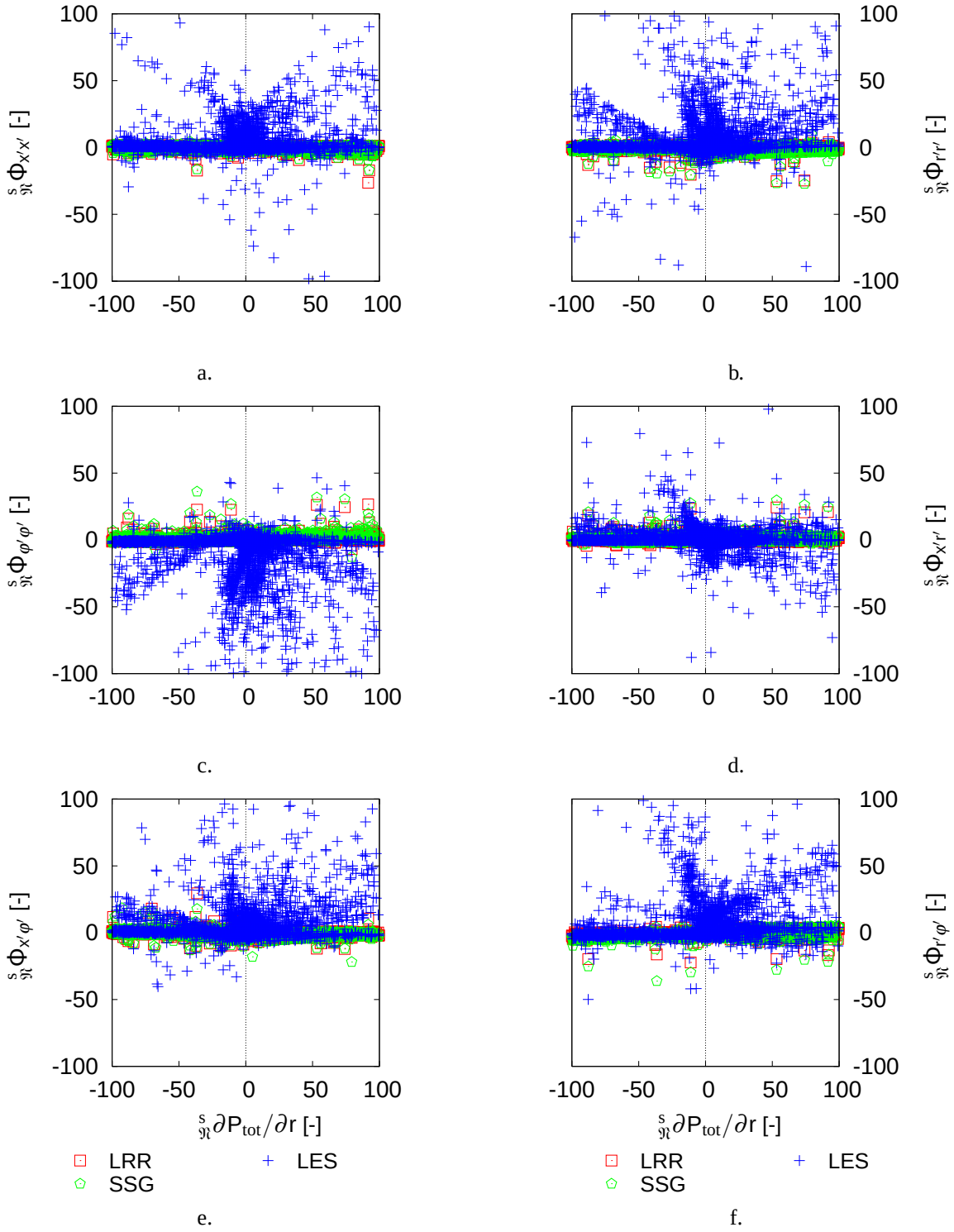


Bild J.1. Scatter-Plot Freistrahl. Normierte und im Strombahnsystem betrachtete Komponenten von Φ_{ij} über dem Totaldruckgradienten. ${}^{s}_{\mathfrak{N}}\partial P_{tot}/\partial r$ ist mit Faktor 10^2 multipliziert.

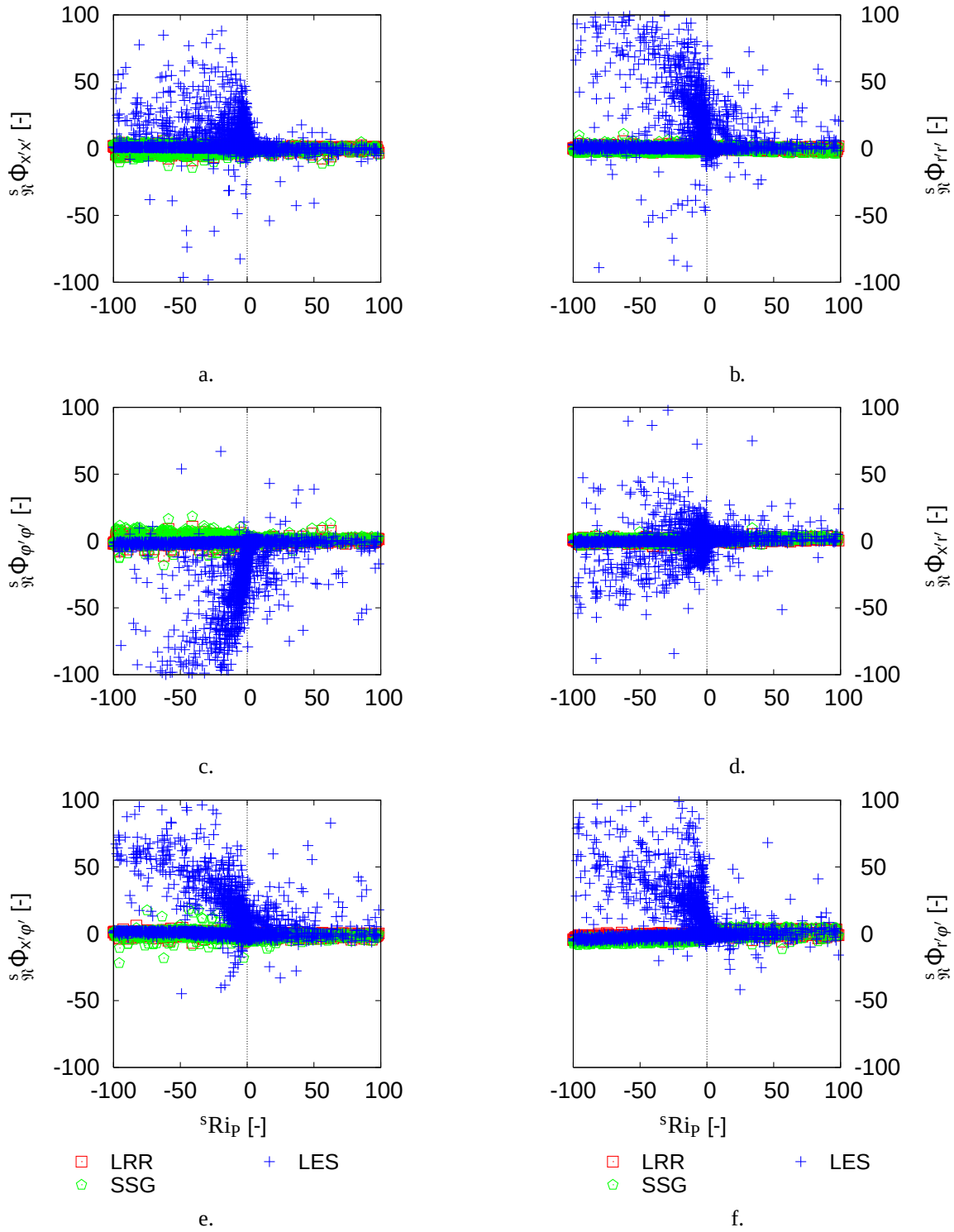


Bild J.2. Scatter-Plot Freistrahl. Normierte und im Strombahnsystem betrachtete Komponenten von Φ_{ij} über der Richardsonzahl nach Philipp. $^{s}Ri_{P}$ ist mit Faktor 10^3 multipliziert.

J.2 Zyklon

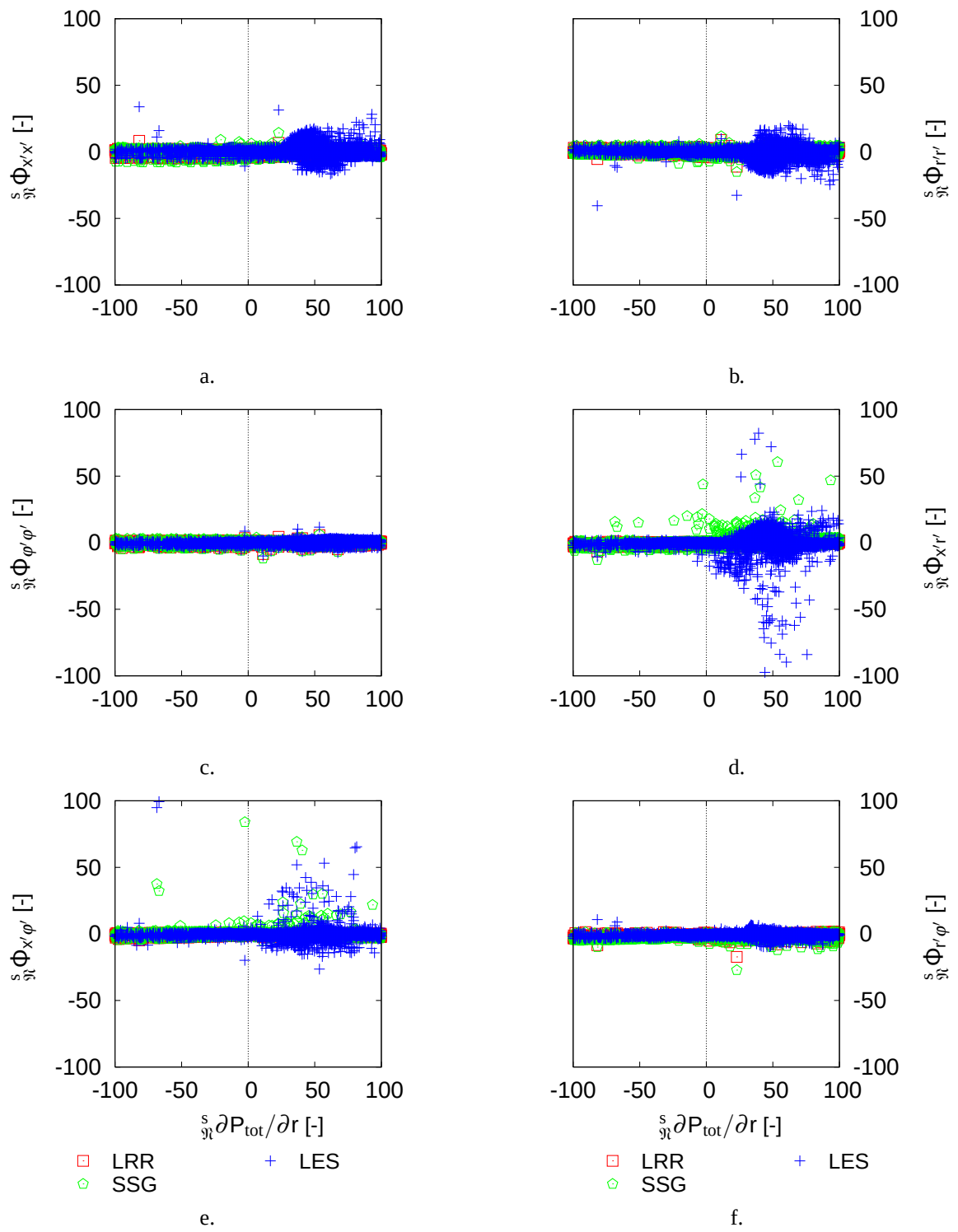


Bild J.3. Scatter-Plot Zyklon. Normierte und im Strombahnsystem betrachtete Komponenten von Φ_{ij} über dem Totaldruckgradienten. ${}^{s}_{\mathfrak{R}}\partial P_{tot}/\partial r$ ist mit Faktor 10^2 multipliziert.

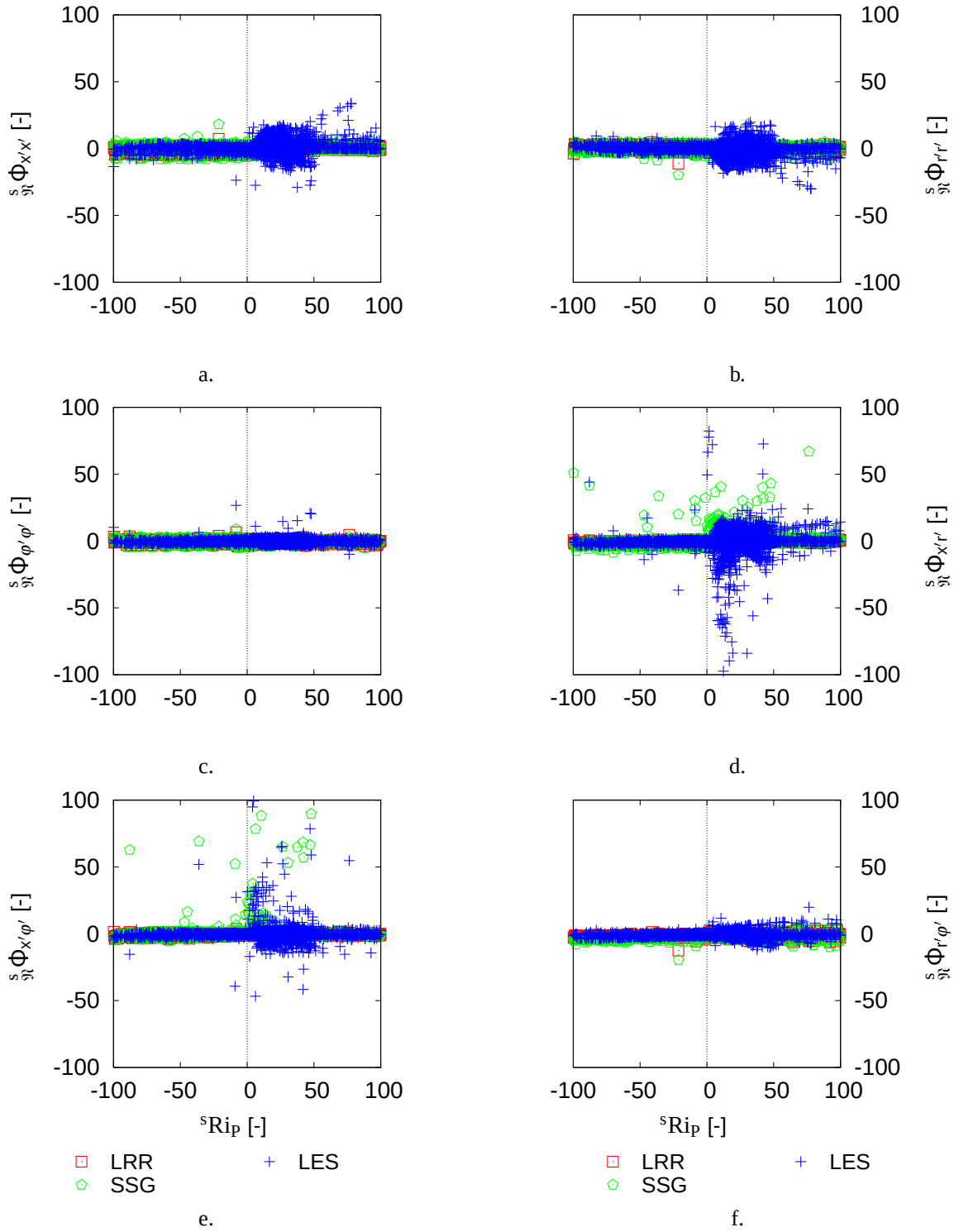


Bild J.4. Scatter-Plot Zyklon. Normierte und im Strombahnsystem betrachtete Komponenten von Φ_{ij} über der Richardsonzahl nach Philipp. ^{s}Ri$_{P}$ ist mit Faktor 10^3 multipliziert.

Anhang K

Transformation

Die Mittelwertbildung einer beliebigen Strömungsgröße über die Umfangskomponente φ einer axialsymmetrischen Geometrie macht eine Koordinatentransformation von kartesischen hin zu zylindrischen Koordinaten[a] notwendig. Zusammenhänge für Tensoren 0., 1., 2. und 3. Stufe sollen an dieser Stelle kurz erörtert werden. Eingehende Beschreibungen der Matrizentheorie finden sich z.B. bei Gantmacher (1986) oder Zurmühl und Falk (1984). Bild K.1 visualisiert die Lage der beiden Systeme, die durch Drehung um die x-Achse ineinander überführbar sind. Für

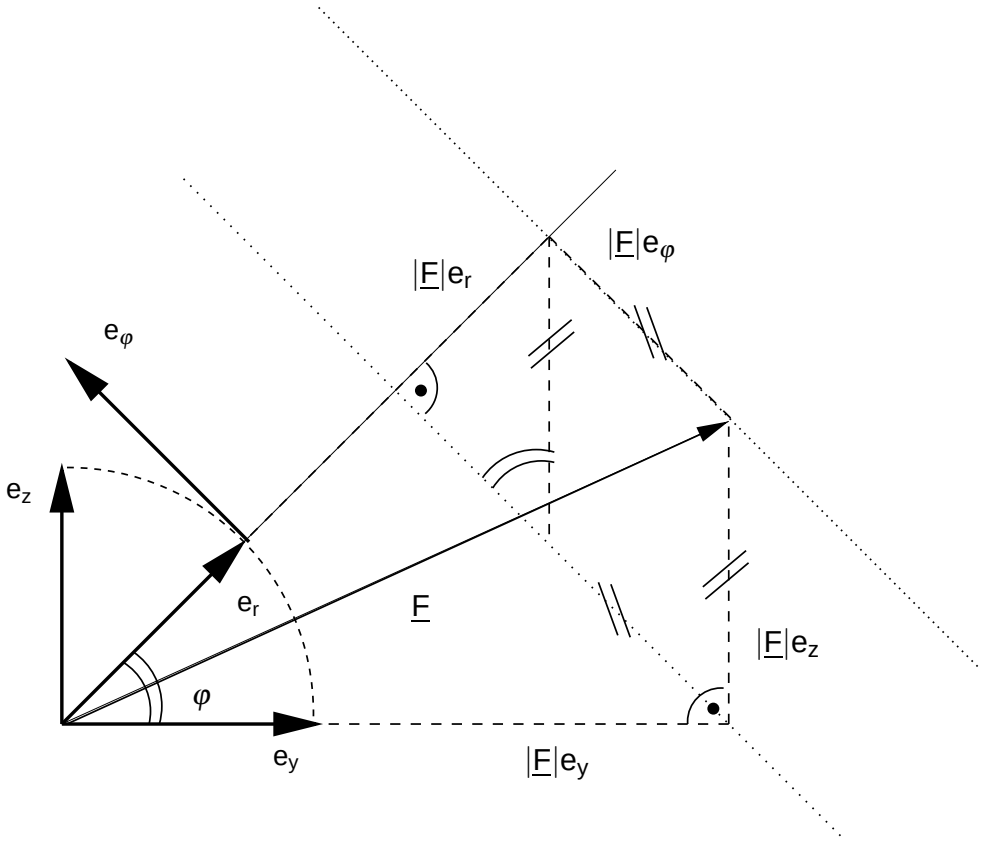


Bild K.1. Beliebiger Vektor in kartesischem und zylindrischem System.

a Im Grunde handelt es sich hierbei um eine Transformation zweier kartesischer Koordinatenachsen (y und z) in die ebene Polarform (r und φ), da die Hauptachsenrichtung x von der Transformation unberührt bleibt. Mathematisch betrachtet handelt es sich um einen Basiswechsel.

die Umrechnung von kartesischen (x, y, und z) in Zylinderkoordinaten (hier: x, r und φ) lautet die Transformationsmatrix $\underline{\underline{A}}$[b]:

$$\underline{\underline{A}} = a_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{K.1}$$

Betrachtet man einen allgemeinen Tensor n-ter Stufe $t_{ij\ldots m}$, so gilt nach Bronstein et al. (1999) bei der Koordinatentransformation von K ins Bildsystem K'

$$t'_{\mu\nu\ldots\rho} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\cdots\sum_{m=1}^{3} a_{\mu i}a_{\nu j}\ldots a_{\rho m}t_{ij\ldots m}, \tag{K.2}$$

wobei die Anzahl der Indizes $i, j, \ldots, m$ genau der Ordnung n des Tensors entspricht. Tensoren nullter Stufe, also skalare Größen, bedürfen keiner weiteren Betrachtung, da sie per Definition transformationsinvariant sind, von einem Wechsel des Basissystems also unberührt bleiben. Eine Transformation von Tensoren höherer Ordnung hingegen läßt sich durch nachfolgend gegebene Gesetzmäßigkeiten mathematisch beschreiben:

- Für die Transformation von K ins Bildsystem K' eines Vektors $\underline{F} = (f_1, f_2, f_3)^T$ (also eines Tensors erster Stufe) mit der Transformationsmatrix $\underline{\underline{A}} = a_{ij}$ gilt:

$$t'_\mu = \sum_{i=1}^{3} a_{\mu i}t_i \quad (\mu = 1,2,3) \quad \Rightarrow \underline{F}' = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2\cos\varphi + f_3\sin\varphi \\ -f_2\sin\varphi + f_3\cos\varphi \end{pmatrix}$$

- Die Rücktransformation von $\underline{F}' = (f'_1, f'_2, f'_3)^T$ mit Hilfe von $\underline{\underline{A}}^T = a_{ji}$ lautet dann:

$$\underline{F} = \begin{pmatrix} f'_1 \\ f'_2\cos\varphi - f'_3\sin\varphi \\ f'_2\sin\varphi + f'_3\cos\varphi \end{pmatrix}$$

Aus dem allgemein für Tensoren n-ter Stufe formulierten Gesetz (Gleichung (K.2)) folgt direkt die Vorschrift für solche der Stufe zwei:

$$t'_{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{\mu i}a_{\nu j}t_{ij}, \tag{K.3}$$

und ohne die Verwendung der Summenzeichen

$$\begin{aligned} t'_{\mu\nu} = \quad & a_{\mu 1}(a_{\nu 1}t_{11} + a_{\nu 2}t_{12} + a_{\nu 3}t_{13}) \\ & + a_{\mu 2}(a_{\nu 1}t_{21} + a_{\nu 2}t_{22} + a_{\nu 3}t_{23}) \\ & + a_{\mu 3}(a_{\nu 1}t_{31} + a_{\nu 2}t_{32} + a_{\nu 3}t_{33}). \end{aligned} \tag{K.4}$$

b Da $\underline{\underline{A}}$ zwischen zwei orthogonalen Systemen transformiert gilt (siehe Bronstein et al., 1999): $\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{A}}^T$. Es folgt direkt: $\underline{\underline{A}}^{-1}\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{E}}$

- Betrachtet man einen *symmetrischen* Tensor $\underline{\underline{T}}$ zweiter Stufe mit $\underline{\underline{A}} = a_{ij}$, so gilt für den Wechsel von K ins Bildsystem K':

$$\underline{\underline{T}}' = \left(\begin{array}{c|c|c} t_{11} & t_{12}\cos\varphi + t_{13}\sin\varphi & -t_{12}\sin\varphi + t_{13}\cos\varphi \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ \ddots & t_{22}\cos^2\varphi + t_{33}\sin^2\varphi & t_{23}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \\ & +2t_{23}\sin\varphi\cos\varphi & +(t_{33}-t_{22})\sin\varphi\cos\varphi \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ \ddots & \ddots & t_{22}\sin^2\varphi + t_{33}\cos^2\varphi \\ & & -2t_{23}\sin\varphi\cos\varphi \end{array}\right),$$

- und für die Rücktransformation mit $\underline{\underline{A}}^T = a_{ji}$:

$$\underline{\underline{T}} = \left(\begin{array}{c|c|c} t'_{11} & t'_{12}\cos\varphi - t'_{13}\sin\varphi & t'_{12}\sin\varphi + t'_{13}\cos\varphi \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ \ddots & t'_{22}\cos^2\varphi + t'_{33}\sin^2\varphi & t'_{23}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right) \\ & -2t'_{23}\sin\varphi\cos\varphi & +\left(t'_{22}-t'_{33}\right)\sin\varphi\cos\varphi \\ & \cdots\cdots\cdots & \\ \ddots & \ddots & t'_{22}\sin^2\varphi + t'_{33}\cos^2\varphi \\ & & +2t'_{23}\sin\varphi\cos\varphi \end{array}\right).$$

Neben Tensoren erster und zweiter Stufe muß im hier behandelten Rahmen auch die Tripelkorrelation der Geschwindigkeitsfluktuationen $\overline{u'_i u'_j u'_k}$ einer Koordinatentransformation unterzogen werden. Es handelt sich um einen Tensor der Stufe 3 ($3\times3\times3$-Matrix) für den aus dem allgemein formulierten Transformationsgesetz folgenden Vorschrift abgeleitet werden kann,

$$t'_{\mu\nu\xi} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} a_{\mu i}a_{\nu j}a_{\xi k}t_{ijk}, \tag{K.5}$$

beziehungsweise, ohne die Summenzeichen,

$$\begin{aligned} t'_{\mu\nu\xi} = a_{\mu1}\big[& \quad a_{\nu1}\left(a_{\xi1}t_{111} + a_{\xi2}t_{112} + a_{\xi3}t_{113}\right) \\ & + a_{\nu2}\left(a_{\xi1}t_{121} + a_{\xi2}t_{122} + a_{\xi3}t_{123}\right) \\ & + a_{\nu3}\left(a_{\xi1}t_{131} + a_{\xi2}t_{132} + a_{\xi3}t_{133}\right)\big] \\ + a_{\mu2}\big[& \quad a_{\nu1}\left(a_{\xi1}t_{211} + a_{\xi2}t_{212} + a_{\xi3}t_{213}\right) \\ & + a_{\nu2}\left(a_{\xi1}t_{221} + a_{\xi2}t_{222} + a_{\xi3}t_{223}\right) \\ & + a_{\nu3}\left(a_{\xi1}t_{231} + a_{\xi2}t_{232} + a_{\xi3}t_{233}\right)\big] \\ + a_{\mu3}\big[& \quad a_{\nu1}\left(a_{\xi1}t_{311} + a_{\xi2}t_{312} + a_{\xi3}t_{313}\right) \\ & + a_{\nu2}\left(a_{\xi1}t_{321} + a_{\xi2}t_{322} + a_{\xi3}t_{323}\right) \\ & + a_{\nu3}\left(a_{\xi1}t_{331} + a_{\xi2}t_{332} + a_{\xi3}t_{333}\right)\big]. \end{aligned} \tag{K.6}$$

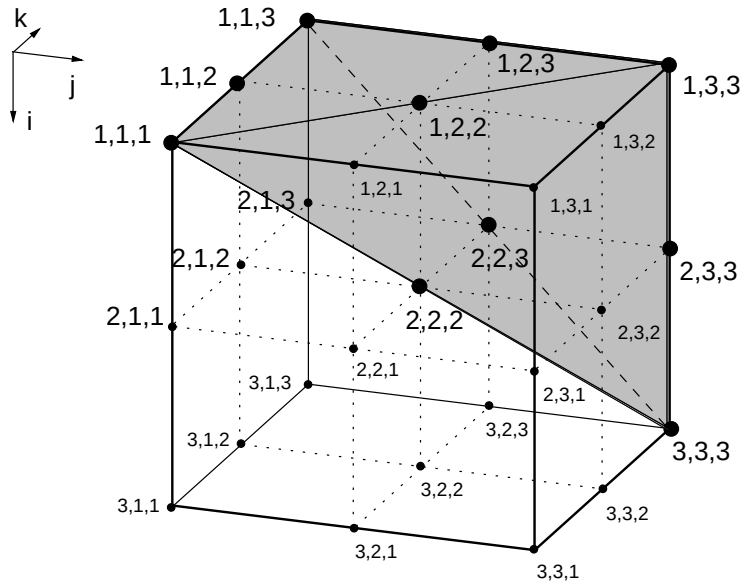


Bild K.2. Tensor 3. Stufe.

Da ebenfalls Symmetrieeigenschaften zur Reduktion der „freien“ Indizes angesetzt werden können, sind von dem dreidimensionalen quadratischen Tensor nur 10 Komponenten zu bestimmen. Bild K.2 soll dies visualisieren. Aus Gründen einer übersichtlichen Darstellung sind die einzelnen Komponenten des transformierten bzw. rücktransformierten Tensors tabellarisch in Tabelle K.1 und Tabelle K.2 angegeben.

K'	K	K'	K
t'_{111}	t_{111}	t'_{122}	$t_{133}\sin^2\varphi + t_{122}\cos^2\varphi + 2t_{123}\sin\varphi\cos\varphi$
t'_{222}	$t_{222}\cos^3\varphi + t_{333}\sin^3\varphi + 3\sin\varphi\cos\varphi\,(t_{223}\cos\varphi + t_{233}\sin\varphi)$	t'_{133}	$t_{122}\sin^2\varphi + t_{133}\cos^2\varphi - 2t_{123}\sin\varphi\cos\varphi$
t'_{333}	$-t_{222}\sin^3\varphi + t_{333}\cos^3\varphi + 3\sin\varphi\cos\varphi\,(t_{223}\sin\varphi - t_{233}\cos\varphi)$	t'_{223}	$\sin\varphi\cos\varphi\,(-t_{222}\cos\varphi + t_{333}\sin\varphi) + \left(\cos^3\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi\right)t_{223} - \left(\sin^3\varphi - 2\sin\varphi\cos^2\varphi\right)t_{233}$
t'_{112}	$t_{112}\cos\varphi + t_{113}\sin\varphi$	t'_{233}	$\sin\varphi\cos\varphi\,(t_{222}\sin\varphi + t_{333}\cos\varphi) + \left(\sin^3\varphi - 2\sin\varphi\cos^2\varphi\right)t_{223} + \left(\cos^3\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi\right)t_{233}$
t'_{113}	$-t_{112}\sin\varphi + t_{113}\cos\varphi$	t'_{123}	$\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)t_{123} + \sin\varphi\cos\varphi\,(t_{133} - t_{122})$

Tabelle K.1. Transformationsvorschrift für einen symmetrischen Tensor dritter Stufe; K nach K'.

K	K'	K	K'
t_{111}	t'_{111}	t_{122}	$t'_{133}\sin^2\varphi + t'_{122}\cos^2\varphi - 2t'_{123}\sin\varphi\cos\varphi$
t_{222}	$t'_{222}\cos^3\varphi - t'_{333}\sin^3\varphi + 3\sin\varphi\cos\varphi\left(-t'_{223}\cos\varphi + t'_{233}\sin\varphi\right)$	t_{133}	$t'_{122}\sin^2\varphi + t'_{133}\cos^2\varphi + 2t'_{123}\sin\varphi\cos\varphi$
t_{333}	$t'_{222}\sin^3\varphi + t'_{333}\cos^3\varphi + 3\sin\varphi\cos\varphi\left(t'_{223}\sin\varphi + t'_{233}\cos\varphi\right)$	t_{223}	$\sin\varphi\cos\varphi\left(t'_{222}\cos\varphi + t'_{333}\sin\varphi\right) + \left(\cos^3\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi\right)t'_{223} + \left(\sin^3\varphi - 2\sin\varphi\cos^2\varphi\right)t'_{233}$
t_{112}	$t'_{112}\cos\varphi - t'_{113}\sin\varphi$	t_{233}	$\sin\varphi\cos\varphi\left(t'_{222}\sin\varphi - t'_{333}\cos\varphi\right) - \left(\sin^3\varphi - 2\sin\varphi\cos^2\varphi\right)t'_{223} + \left(\cos^3\varphi - 2\sin^2\varphi\cos\varphi\right)t'_{233}$
t_{113}	$t'_{112}\sin\varphi + t'_{113}\cos\varphi$	t_{123}	$\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)t'_{123} + \sin\varphi\cos\varphi\left(t'_{122} - t'_{133}\right)$

Tabelle K.2. Transformationsvorschrift für einen symmetrischen Tensor dritter Stufe; K' nach K.

Anhang L

Herleitung der exakten Transportgleichung für die Reynolds'schen Spannungen

Die Transportvorschrift einer Geschwindigkeitsschwankung resultiert, der Reynolds'schen Dekomposition folgend, aus der Subtraktion der Reynolds'schen Gleichung von der Navier-Stokes-Gleichung. Zur Darstellung werden im folgenden die Impulsgleichungen in inkompressibler Formulierung verwendet (abgeleitet aus Gleichung (2.4) und (2.16))[a]. Zu beachten ist, daß zuvor einer der beiden Indizes umbenannt werden muß. Setzt man für „j" den neuen Index „k" so erhält man:

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right), \tag{L.1a}$$

$$\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \overline{U}_k \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\overline{\rho}}\frac{\overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} - \overline{u_i' u_k'}\right) \tag{L.1b}$$

Substituiert man in Gleichung (L.1a) die Geschwindigkeitskomponenten und den Druck durch $U_i = \overline{U}_i + u_i'$ bzw. $P = \overline{P} + p'$ und subtrahiert im folgenden Gleichung (L.1b), so erhält man:

$$\left[\frac{\partial\left(\overline{U}_i + u_i'\right)}{\partial t} - \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t}\right] + \left[\left(\overline{U}_k + u_k'\right)\frac{\partial\left(\overline{U}_i + u_i'\right)}{\partial x_k} - \overline{U}_k \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}\right] =$$
$$-\frac{1}{\rho}\left[\frac{\left(\overline{P} + p'\right)}{\partial x_i} - \frac{\overline{P}}{\partial x_i}\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu \frac{\partial\left(\overline{U}_i + u_i'\right)}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu \frac{\partial \overline{U}_i + u_i'}{\partial x_k} - \overline{u_i' u_k'}\right)\right],$$

und nach dem Ausmultiplizieren der Produkte:

$$\left[\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i'}{\partial t} - \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial t}\right] + \left[\overline{U}_k \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + \overline{U}_k \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + u_k' \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} - \overline{U}_k \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}\right] =$$
$$-\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial p'}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{P}}{\partial x_i}\right] + \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\nu\left(\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} - \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}\right) + \overline{u_i' u_k'}\right].$$

Hieraus kann nun direkt die Transportgleichung der turbulenten Schwankungsgeschwindigkeit u_i' für den inkompressiblen Fall abgeleitet werden (Jakirlić, 1997; Oberlack, 1994):

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + \overline{U}_k \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i} - u_k' \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} - u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + \overline{u_i' u_k'}\right),$$

a Der in geschweiften Klammern gesetzte Ausdruck der Gleichung (2.4) reduziert sich wegen $\frac{\partial U_k}{\partial x_k} = 0$ sowie der Anwendung des Schwarz'schen Satzes, $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$, über die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen (siehe u. a. Meyberg und Vachenauer, 1997).

bzw.

$$\frac{Du_i'}{Dt} = \frac{\partial u_i'}{\partial t} + \overline{U}_k \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i} - u_k' \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k} - u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + \overline{u_i' u_k'}\right). \tag{L.2}$$

Folglich lauten die mit u_j' (u_i') multiplizierten Gleichungen für u_i' (u_j'):

$$u_j' \frac{Du_i'}{Dt} = \underbrace{u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial t}}_{\text{I a}} + \underbrace{u_j' \overline{U}_k \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}_{\text{II a}} = -\underbrace{\frac{u_j'}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i}}_{\text{III a}} - \underbrace{u_j' u_k' \frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}}_{\text{IV a}} - \underbrace{u_j' u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}_{\text{V a}} + u_j' \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\underbrace{\nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}}_{\text{VI a}} + \underbrace{\overline{u_i' u_k'}}_{\text{VII a}}\right),$$

$$u_i' \frac{Du_i'}{Dt} = \underbrace{u_i' \frac{\partial u_j'}{\partial t}}_{\text{I b}} + \underbrace{u_i' \overline{U}_k \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}_{\text{II b}} = -\underbrace{\frac{u_i'}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_j}}_{\text{III b}} - \underbrace{u_i' u_k' \frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k}}_{\text{IV b}} - \underbrace{u_i' u_k' \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}_{\text{V b}} + u_i' \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\underbrace{\nu \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}_{\text{VI b}} + \underbrace{\overline{u_j' u_k'}}_{\text{VII b}}\right),$$

wobei die mit identischen römischen Ziffern gekennzeichneten Terme offensichtlich vom selben Typ sind und in den folgenden Schritten durch Addition zusammengefaßt werden sollen. Um eine konsistente Beschreibung der Gleichung zu ermöglichen ist eine Reynolds'sche Mittelung im Anschluß daran notwendig.

- **Term I a und I b**

  Die Summe der zeitlichen Ableitungen läßt sich unter Verwendung der Kettenregel zusammenfassen. Folglich gilt

  $$u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial t} + u_i' \frac{\partial u_j'}{\partial t} = \frac{\partial u_i' u_j'}{\partial t},$$

  und nach der Mittelung, unter Beachtung der Regel (2.10c),

  $$\frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial t}.$$

- **Term II a und II b**

  Der konvektive Teil ist in analoger Weise zu entwickeln. Durch Ausklammern der bereits gemittelten und somit für die anschließende Mittelung als konstant zu betrachtende Geschwindigkeit sowie der Anwendung der Kettenregel gilt:

  $$u_j' \overline{U}_k \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + u_i' \overline{U}_k \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} = \overline{U}_k \left(u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + u_i' \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\right) = \overline{U}_k \frac{\partial u_i' u_j'}{\partial x_k}.$$

  Term II lautet nach der weiteren Mittelung unter Beachtung der Regeln (2.11b) und (2.10c):

  $$\overline{U}_k \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k}.$$

- **Term III a und III b**

  Die Summe der beiden Terme beschreibt eine Korrelation der fluktuierenden Geschwindigkeit und des Gradienten des fluktuierenden Druckes. Weitere mathematische Manipulationen sind hierfür nicht notwendig, es gilt nach durchgeführter Mittelung:

$$-\overline{\frac{1}{\rho}\left(u_i'\frac{\partial p'}{\partial x_j}+u_j'\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right)}=\Pi_{ij}$$

  Π_{ij} läßt sich physikalisch als Summe zweier Prozesse interpretieren: einer Umverteilung der Spannungskomponenten Φ_{ij} sowie einem diffusiven Transport von Spannungskomponenten infolge der Druckschwankung $\mathscr{D}_{ij}^{p}$. Aus dieser Zerlegung des Terms mit Hilfe der Kettenregel und unter Beachtung der Regel (2.10a) folgt dabei die Summe

$$\Pi_{ij}=\Phi_{ij}+\mathscr{D}_{ij}^{p}=\overline{\frac{p'}{\rho}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)}+\frac{\partial}{\partial x_k}\left[-\overline{\frac{p'}{\rho}\left(u_i'\delta_{jk}+u_j'\delta_{ik}\right)}\right],$$

  wobei die Kontraktion der Indizes der Gradienten mit Hilfe des Kronecker Deltas erreicht wird.

- **Term IV a und IV b**

  Hier bedarf es ebenfalls keiner weiteren mathematischen Manipulation, nach der Mittelung resultiert direkt der sogenannte Produktionsterm P_{ij}. Physikalisch interpretiert, beschreibt P_{ij} die Produktion von Reynolds'schen Spannungen als Folge eines Gradienten in der mittleren Strömung.

$$\overline{u_i'u_k'\frac{\partial\overline{U}_j}{\partial x_k}+u_j'u_k'\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_k}}=\left(\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial\overline{U}_j}{\partial x_k}+\overline{u_j'u_k'}\frac{\partial\overline{U}_i}{\partial x_k}\right)=-P_{ij}$$

Im weiteren sind nur noch die Terme V und VI zu betrachten. Term VII wird durch die Mittelung zu Null, da, Gleichung (2.12) folgend, ein beliebiges Moment von mittleren Größen und *einem* Schwankungswert stets verschwindet.

- **Term V a und V b**

  Aus der einfachen Summation der Terme V a und V b folgt zunächst:

$$u_i'u_k'\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}+u_j'u_k'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}.$$

  Erweitert man diese Summe um einen zusätzlichen Summanden - um die dritte Möglichkeit der Permutation der Indizes - und wendet auf diese Summe die Kettenregel an, so folgt

$$u_i'u_k'\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}+u_j'u_k'\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}+u_i'u_j'\frac{\partial u_k'}{\partial x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}u_i'u_j'u_k'.$$

Aufgrund der Kontinuitätsbedingung des inkompressiblen Fluids $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} \stackrel{!}{=} 0$ sind beide Gleichungen identisch und die beiden Terme lassen sich zu einer Tripel-Korrelation zusammenfassen, wobei wiederum Regel (2.11b) zu beachten ist:

$$\overline{u_i' u_k' \frac{\partial u_j'}{\partial x_k} + u_j' u_k' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}} = \frac{\partial}{\partial x_k} \overline{u_i' u_j' u_k'} = -\mathscr{D}_{ij}^t.$$

Physikalisch interpretiert beschreibt dieser Term den diffusiven Transport Reynolds'scher Spannungen bedingt durch eine Schwankungsbewegung.

- **Term VI a und VI b**

Es gilt

$$u_i' \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\right) + u_j' \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\right) = \nu \left[u_i' \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\right) + u_j' \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\right)\right].$$

Durch das „Hineinziehen" der vorgestellten Schwankung in die partielle Ableitung ergeben sich weitere „Korrektur-" Terme

$$\nu \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_i' \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\right] + \left[\frac{\partial}{\partial x_k}\left(u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\right) - \frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}\right] \right\},$$

wobei sich die beiden Teilterme in runden Klammern durch den Ausdruck $\frac{\partial u_i' u_j'}{\partial x_k} = u_j' \frac{\partial u_i'}{\partial x_k} + u_i' \frac{\partial u_j'}{\partial x_k}$ zusammenfassen lassen. Es resultiert nach der Mittelung:

$$\underbrace{-2\nu \overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}}_{\varepsilon_{ij}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu \frac{\partial \overline{u_i' u_j'}}{\partial x_k}\right)}_{\mathscr{D}_{ij}^{\nu}}.$$

ε_{ij} beschreibt hierbei die viskose Dissipation der Reynolds'schen Spannungen und $\mathscr{D}_{ij}^{\nu}$ ihren viskosen (molekularen) Transport.

Die Zusammenfassung aller Teilterme resultiert in der exakten Transportgleichung.

$$\begin{aligned}
\frac{D\overline{u_i'u_j'}}{Dt} = \underbrace{\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial t}}_{L_{ij}} + \underbrace{\overline{U}_k \frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k}}_{C_{ij}} = & \underbrace{-\left(\overline{u_i'u_k'}\frac{\partial \overline{U}_j}{\partial x_k} + \overline{u_j'u_k'}\frac{\partial \overline{U}_i}{\partial x_k}\right)}_{P_{ij}} \\
& \underbrace{-\overline{\frac{1}{\rho}\left(u_i'\frac{\partial p'}{\partial x_j} + u_j'\frac{\partial p'}{\partial x_i}\right)}}_{\Pi_{ij}} \\
& \underbrace{+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(-\overline{u_i'u_j'u_k'}\right)}_{\mathscr{D}_{ij}^t} \\
& \underbrace{+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\nu\frac{\partial \overline{u_i'u_j'}}{\partial x_k}\right)}_{\mathscr{D}_{ij}^\nu} \\
& \underbrace{-2\nu\overline{\frac{\partial u_i'}{\partial x_k}\frac{\partial u_j'}{\partial x_k}}}_{\varepsilon_{ij}},
\end{aligned}$$

Anhang M

Verschiedene Darstellungen der Druck-Scher-Korrelation

M.1 Alternative Schreibweisen des Druck-Scher-Tensors

In der Literatur tauchen im allgemeinen zwei unterschiedliche Darstellungen der Druck-Scher-Korrelation auf. Zum einen eine Form als Funktion des Produktionstensors P_{ij} und weiterer Tensoren (siehe Launder et al., 1975), andererseits eine Funktion des Anisotropietensors b_{ij}, des Schertensors S_{ij} und des Wirbeltensors W_{ij} (siehe Speziale et al., 1991). Entsprechend der gewählten Darstellung ergeben sich unterschiedliche Koeffizienten, deren Zusammenhang auf den ersten Blick ohne Weiteres nicht zu erkennen ist.

Die folgende Darstellung soll dies genauer beleuchten und ein Gleichungssystem ergeben, mit dessen Hilfe die Koeffizienten ineinander umgerechnet werden können. Dies wird sowohl für den „schnellen Term“(rapid term) Φ^r_{ij} als auch für den „langsamen “(slow term, Rotta Term) durchgeführt. In der ursprünglichen Veröffentlichung von Launder et al. (1975) taucht folgende Form des schnellen Terms auf:

$$\begin{aligned}\Phi^r_{ij} =& -\frac{c_2+8}{11}\left(P_{ij}-2/3\mathscr{P}\delta_{ij}\right)-\frac{30c_2-2}{55}\rho k\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)\\ &-\frac{8c_2-2}{11}\left(D_{ij}-2/3\mathscr{P}\delta_{ij}\right)\\ =& -\mathscr{K}^r_1\left(P_{ij}-2/3\mathscr{P}\delta_{ij}\right)-\mathscr{K}^r_2\rho k 2S_{ij}\\ &-\mathscr{K}^r_3\left(D_{ij}-2/3\mathscr{P}\delta_{ij}\right),\end{aligned} \tag{M.1}$$

mit δ_{ij} dem Kronecker Delta, $P_{ij}=-\left(\overline{\rho u'_i u'_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k}+\overline{\rho u'_j u'_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)$ dem Produktionstensor und dem Tensor D_{ij}, definiert als $D_{ij}=-\left(\overline{\rho u'_i u'_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_j}+\overline{\rho u'_j u'_k}\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)$. $\mathscr{P}$ beschreibt die Produktion turbulenter kinetischer Energie. Die alternative Darstellung des schnellen Terms lautet wie folgt:

$$\begin{aligned}\Phi^r_{ij} =& +C^r_2\rho k S_{ij}+C^r_3\rho k\left(b_{ik}S_{jk}+b_{jk}S_{ik}-2/3 b_{mn}S_{mn}\delta_{ij}\right)\\ &+C^r_4\rho k\left(b_{ik}W_{jk}+b_{jk}W_{ik}\right),\end{aligned} \tag{M.2}$$

mit dem Schertensor $S_{ij}=1/2\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$ sowie dem Wirbeltensor $W_{ij}=1/2\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}-\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)$. Aus der Überführung von Gleichung (M.1) in (M.2) folgt ein Gleichungssystem für die Koeffizienten $C^r_{1\ldots3}$ als Funktion von $\mathscr{K}^r_{1\ldots3}$, $C_{1\ldots3}=f(\mathscr{K}^r_{1\ldots3})$.

M.2 Umrechnung

Durch Umformung soll aus Gleichung (M.1) die Form (M.2) erzeugt werden. Es gilt:

- Anisotropie-Tensor b_{ij}

$$b_{ij} = \frac{\tau_{ij} - 1/3\tau_{kk}\delta_{ij}}{\tau_{kk}} = \frac{\tau_{ij} + 2/3\rho k\delta_{ij}}{-2\rho k}, \tag{M.3}$$

es folgt unmittelbar

$$\tau_{ij} = -\left(2\rho k b_{ij} + 2/3\rho k\delta_{ij}\right), \tag{M.4}$$

da $\rho k = 1/2\overline{\rho u_k' u_k'} = -1/2\tau_{kk}$ und $\tau_{ij} = -\overline{\rho u_i' u_j'}$.

- Produktions-Tensor P_{ij}

$$\begin{aligned}
P_{ij} =& -\left(\overline{\rho u_i' u_k'}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \overline{\rho u_j' u_k'}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)\\
=& \tau_{ik}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \tau_{jk}\frac{\partial U_i}{\partial x_k}\\
=& \tau_{ik}\left[\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_j}\right)}_{S_{jk}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_j}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_j}\right)}_{W_{jk}}\right]\\
&+\tau_{jk}\left[\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)}_{S_{ik}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)}_{W_{ik}}\right]\\
=& \tau_{ik}\left(S_{jk} + W_{jk}\right) + \tau_{jk}\left(S_{ik} + W_{ik}\right).
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von Gleichung (M.4) folgt:

$$P_{ij} = -\left(2\rho k b_{ik} + 2/3\rho k\delta_{ik}\right)\left(S_{jk} + W_{jk}\right) - \left(2\rho k b_{jk} + 2/3\rho k\delta_{jk}\right)\left(S_{ik} + W_{ik}\right);$$

$$P_{ij} = -2\rho k b_{ik}\left(S_{jk} + W_{jk}\right) - 2\rho k b_{jk}\left(S_{ik} + W_{ik}\right) - 2/3\rho k\delta_{ik}S_{jk} - 2/3\rho k\delta_{jk}S_{ik},$$

da gilt: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & : \quad i = j \\ 0 & : \quad i \neq j \end{cases}$ und $W_{ij} = \begin{cases} 0 & : \quad i = j \\ W_{ij} & : \quad i \neq j \end{cases}$.

Die endgültige Form des Produktionstensors erhält man durch das Verknüpfen der beiden δ-Terme. Hier gilt: $\delta_{ik}S_{jk} = S_{ji}$ da $\delta_{ik} = 0 \;\forall\; i \neq k$ und $\delta_{jk}S_{ik} = S_{ij} = S_{ji}$, da S_{ij} symmetrisch.

$$P_{ij} = -2\rho k b_{ik}\left(S_{jk} + W_{jk}\right) - 2\rho k b_{jk}\left(S_{ik} + W_{ik}\right) - 4/3\rho k S_{ij} \tag{M.5}$$

- „D“-Tensor D_{ij}

$$\begin{aligned}
D_{ij} =& -\left(\overline{\rho u_i' u_k'}\frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \overline{\rho u_j' u_k'}\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\right)\\
=& \tau_{ik}\frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \tau_{jk}\frac{\partial U_k}{\partial x_i}\\
=& \tau_{ik}\left[\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_k}\right)}_{S_{kj}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_j} - \frac{\partial U_j}{\partial x_k}\right)}_{W_{kj}}\right]\\
&+\tau_{jk}\left[\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)}_{S_{ki}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_k}{\partial x_i} - \frac{\partial U_i}{\partial x_k}\right)}_{W_{ki}}\right]\\
=& \tau_{ik}\left(S_{kj} + W_{kj}\right) + \tau_{jk}\left(S_{ki} + W_{ki}\right)
\end{aligned}$$

  Die weitere Umformung erfolgt analog derer des Produktionstensors P_{ij}. Es resultiert:

$$D_{ij} = -2\rho k b_{ik}\left(S_{kj} + W_{kj}\right) - 2\rho k b_{jk}\left(S_{ki} + W_{ki}\right) - 4/3\rho k S_{ij} \tag{M.6}$$

- Produktion von k: $\mathscr{P}$

$$\mathscr{P} = -\overline{\rho u_i' u_j'}\underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)}_{S_{ij}} = \tau_{mn} S_{mn}$$

  mit Gleichung (M.4) folgt für die zusätzlichen Terme auf der Spur von Π_{ij}:

$$2/3\mathscr{P}\delta_{ij} = -2/3\left(2\rho k b_{mn} + 2/3\rho k\delta_{mn}\right) S_{mn}\delta_{ij},$$

  wobei der zweite Term in der Klammer im inkompressiblen Fall ($\rho \stackrel{!}{=} \text{const.}$) gleich Null wird ($\delta_{nm}S_{nm} = S_{nn} = 0$, da $\partial U_i/\partial x_i \stackrel{!}{=} 0$). Es folgt:

$$2/3\mathscr{P}\delta_{ij} = -4/3\rho k b_{mn} S_{mn}\delta_{ij}. \tag{M.7}$$

Nach dem Einsetzen von (M.5), (M.6) und (M.7) in (M.1), sowie dem Ordnen der Terme erhält man Gleichung (M.1) in der Form von Gleichung (M.2). Man beachte, daß W_{ij} ein antisymmetrischer Tensor ist, es gilt somit $W_{ji} = -W_{ij}$:

$$\begin{aligned}
\Phi_{ij}^r =& +\left[4/3\left(\mathscr{K}_1^r + \mathscr{K}_3^r\right) - 2\mathscr{K}_2^r\right]\rho k S_{ij}\\
&+\left[2\left(\mathscr{K}_1^r + \mathscr{K}_3^r\right)\right]\rho k\left(b_{ik}S_{jk} + b_{jk}S_{ik} - 2/3 b_{mn}S_{mn}\delta_{ij}\right)\\
&+\left[2\left(\mathscr{K}_1^r - \mathscr{K}_3^r\right)\right]\rho k\left(b_{ik}W_{jk} + b_{jk}W_{ik}\right)
\end{aligned} \tag{M.8}$$

M.3 Gleichungssystem für die Koeffizienten des schnellen Terms

Aus dem Koeffizientenvergleich der gerade vorgestellten Gleichungen folgt unmittelbar der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} C_2^r &= [4/3\,(\mathscr{K}_1^r + \mathscr{K}_3^r) - 2\mathscr{K}_2^r] \\ C_3^r &= [2\,(\mathscr{K}_1^r + \mathscr{K}_3^r)] \\ C_4^r &= [2\,(\mathscr{K}_1^r - \mathscr{K}_3^r)]\,, \end{aligned} \tag{M.9}$$

beziehungsweise:

$$\begin{aligned} \mathscr{K}_1^r &= [1/4\,(C_3^r + C_4^r)] \\ \mathscr{K}_2^r &= [-1/2C_2^r + 1/3C_3^r] \\ \mathscr{K}_3^r &= [1/4\,(C_3^r - C_4^r)]\,. \end{aligned} \tag{M.10}$$

Die gegebenen Gleichungssysteme erlauben eine einfache Umrechnung der Koeffizienten und einen übersichtlichen Vergleich, aus dem Tendenzen bzgl. der Wirkweise leichter ablesbar sind.

M.4 Gleichungssystem für die Koeffizienten des Rotta-Terms

Auch für den Rotta-Term existieren zwei verschiedene Darstellungen, einmal als Funktion der Reynold'schen Spannungen, eine andere als Funktion des Anisotropietensors. Unter anderem findet sich bei Launder et al. (1975) die Darstellung als Funktion der Reynolds'schen Spannungen,

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^s = &- c_1\,(\varepsilon/k)\left(\overline{\rho u_i' u_j'} - 2/3\rho k\delta_{ij}\right) \\ &- \mathscr{K}_1^s\,(\varepsilon/k)\left(\overline{\rho u_i' u_j'} - 2/3\rho k\delta_{ij}\right), \end{aligned} \tag{M.11}$$

während die alternative Darstellung als Funktion des Anisotropietensors b_{ij} wie folgt formuliert ist[a]:

$$\Pi_{ij}^s = -C_1^s \rho\varepsilon b_{ij} \tag{M.12}$$

Setzt man nun Gleichung (M.4) in (M.11) ein, so ergibt sich der Zusammenhang:

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}^s &= -\mathscr{K}_1^s\,(\varepsilon/k)\left(\overline{\rho u_i' u_j'} - 2/3\rho k\delta_{ij}\right) \\ &= -\mathscr{K}_1^s\,(\varepsilon/k)\left(-\tau_{ij} - 2/3\rho k\delta_{ij}\right) \\ &= -\mathscr{K}_1^s\,(\varepsilon/k)\left(2\rho k b_{ij} + 2/3\rho k\delta_{ij} - 2/3\rho k\delta_{ij}\right) \\ &= -2\mathscr{K}_1^s \rho\varepsilon b_{ij}. \end{aligned}$$

a Beachte: hier ist die Taylorreihenentwicklung mit Abbruch nach dem nullten Glied beschrieben. Der funktionale Zusammenhang der Koeffizienten der beiden Alternativen bezieht sich ebenso auf weitere Terme. Vergleiche Speziale et al. (1991)

Der Koeffizientenvergleich ergibt:

$$\begin{aligned} C_1^s &= 2\mathscr{K}_1^s \\ \mathscr{K}_1^s &= 1/2 C_1^s \end{aligned} \tag{M.13}$$

M.5 Weitere Formulierungen

In der Formulierung von Jones und Musonge (1988) taucht der Produktionsterm der turbulenten kinetischen Energie $\mathscr{P}$ nicht in der Spur der Tensoren P_{ij} und D_{ij} auf. Stattdessen erhält er einen eigenständigen Koeffizienten. Bei der Implementierung bleibt folglich zu beachten, daß auf der rechten Seite des Gleichungssystems nicht $2/3\delta_{ij}\mathscr{P}\left(\mathscr{K}_1^r + \mathscr{K}_2^r\right)$ subtrahiert wird, sondern $\delta_{ij}\mathscr{P}\mathscr{K}_{\mathrm{JM}}^r$.