

Andreas Fischer

# Hybride, thermoakustische Charakterisierung von Drallbrennern



Lehrstuhl für Thermodynamik  
Technische Universität München

# Hybride, thermoakustische Charakterisierung von Drallbrennern

Andreas Fischer

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für  
Maschinenwesen  
der Technischen Universität München  
zur Erlangung des akademischen Grades eines  
DOKTOR – INGENIEURS  
genehmigten Dissertation.

Vorsitzender: Univ.-Prof. Wolfgang H. Polifke, Ph.D. (CCNY)  
Prüfer der Dissertation: 1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattelmayer  
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Christian Oliver Paschereit,  
Technische Universität Berlin

Die Dissertation wurde am 1. Dezember 2003 bei der  
Technischen Universität München eingereicht und durch die  
Fakultät für Maschinenwesen am 6. April 2004 angenommen.



Für Elena und Konstantin

# Zusammenfassung

Ein wesentlicher Aspekt bei der Vorhersage von Verbrennungsinstabilitäten ist die akustische Charakterisierung des Verbrennungssystems. Insbesondere werden die Beschreibung des Brenners und der Flamme für Stabilitätsanalysen benötigt. Das Übertragungsverhalten von vorgemischten, atmosphärischen Drallbrennern und Drallflammen wurde experimentell untersucht und mit den Vorhersagen akustischer Netzwerkmodelle verglichen. Durch Kombination der Transfermatrix des Brenners und einer unter Modellannahmen aus der Übertragungsfunktion der Flamme berechneten Flammen-transfermatrix wird die Transfermatrix des Brenners mit Flamme errechnet.

## Abstract

The acoustic transfer characteristics of combustion systems are of particular importance for a stability analysis of combustion instabilities. Especially a description of the burner and flame are required. This work compares the measured acoustic transfer characteristics of swirl burners and swirl flames with results from acoustic network models. The measured transfer matrix of the burner and the flame transfer function are used for the calculation of the combined transfer matrix of burner and flame.

# Vorwort

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Thermodynamik der Technischen Universität München. Sie wurde von der Arbeitsgemeinschaft AG Turbo im Rahmen des Verbundprojektes “GuD-Kraftwerk, 500 MW auf einer Welle” finanziell gefördert.

Mein herzlicher Dank gilt Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattelmayer für sein reges Interesse und viele wertvolle Anregungen, die massgeblich zur Entstehung dieser Arbeit beigetragen haben sowie für die Übernahme des Hauptreferates. Bei Herrn Prof. Dr.-Ing. Christian Oliver Paschereit von der TU Berlin bedanke ich mich für die freundliche Übernahme des Koreferates und bei Herrn Prof. Wolfgang Polifke für den Vorsitz bei der mündlichen Prüfung.

Ein besonderer Dank gilt den Angestellten des Lehrstuhls in Sekretariat, elektrischer und mechanischer Werkstatt für die hervorragende Zusammenarbeit.

Viele Kolleginnen und Kollegen am Lehrstuhl haben durch ihre tatkräftige Unterstützung einen wesentlichen Teil zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen. Besonders erwähnen möchte ich Marco Auer, Johannes Eckstein, Ewald Freitag, Alexander Gentemann, Klaas Kunze und Stephan Pettinger. Herr Dr.-Ing. Christoph Hirsch und Herr Prof. Ph.D. Wolfgang Polifke hatten stets ein offenes Ohr für Probleme und haben mir mit unzähligen fachlichen Anregungen entscheidend weitergeholfen.

Meinen Eltern danke ich für ihre langjährige Unterstützung. Der Rückhalt, den sie mir während meiner gesamten Ausbildung gaben, war die entscheidende Voraussetzung für diese Arbeit.

Ganz besonders bedanke ich mich schliesslich bei meiner lieben Frau Elena, die während der Promotion auf vieles verzichtet hat und mich auch in unglücklichen Zeiten motivierte, immer wieder nach neuen Lösungen zu suchen.

München, im Oktober 2003

Andreas Fischer

# Inhaltsverzeichnis

Tabellenverzeichnis . . . . .	IV
Abbildungsverzeichnis . . . . .	V
<b>Nomenklatur</b>	<b>VII</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Lineare Akustik</b>	<b>7</b>
2.1 Linearisierung . . . . .	7
2.2 Die Wellengleichung . . . . .	8
2.3 Lösungen der Wellengleichung . . . . .	10
2.4 Die Schallgeschwindigkeit . . . . .	11
2.5 Harmonische Wellen . . . . .	12
2.6 Ebene Wellen in einem bewegten Medium . . . . .	13
2.7 Dämpfende Effekte . . . . .	15
<b>3 Charakterisierung akustischer Elemente</b>	<b>17</b>
3.1 Elektrische und akustische Zweitore . . . . .	17
3.1.1 Elektromechanische Analogien . . . . .	17
3.1.2 Zweitore in der Elektrotechnik . . . . .	17
3.1.3 Zweitore in der Akustik . . . . .	18
3.1.4 Darstellungen akustischer Vierpole . . . . .	20
3.1.5 Transformationen zwischen den Darstellungen . . . . .	24
3.2 Zeitbereichsanalyse von Streumatrizen . . . . .	25
3.2.1 Streumatrix eines Rohrabschnitts . . . . .	26
3.2.2 Streumatrix des verlustfreien Flächensprungs . . . . .	28
3.2.3 Streumatrix der Expansionskammer . . . . .	31
<b>4 Experimentelle Bestimmung akustischer Vierpole</b>	<b>37</b>
4.1 Die Versuchsanlage . . . . .	37
4.1.1 Die Versuchsanlage . . . . .	37
4.1.2 Der TD <sup>1</sup> Brenner . . . . .	39
4.1.3 Die Lochsirene . . . . .	43
4.2 Messmethoden . . . . .	48
4.2.1 Die Viermikrofon-Methode . . . . .	50
4.2.2 Die Multimikrofonmethode . . . . .	52
4.3 Beschreibung des Messverfahrens . . . . .	53
4.3.1 Bestimmung von Druckvektoren . . . . .	54
4.3.2 Mikrofonkalibration . . . . .	56
4.4 Sensitivitätsanalyse . . . . .	60

4.4.1	Extrapolation von zwei Messwerten . . . . .	61
4.4.2	Übertragung von Fehlern . . . . .	63
4.4.3	Extrapolation mehrerer Messwerte . . . . .	66
4.4.4	Auswirkungen von Temperaturfehlern . . . . .	69
4.4.5	Übertragungsverhalten des Gleichungslösers . . . . .	70
4.4.6	Übertragungsverhalten der Multimikrofonmethode . . . . .	70
4.4.7	Das Fehlerniveau realer Messungen . . . . .	74
4.4.8	Konvergenz von Transfermatrixelementen . . . . .	75
4.4.9	Empfehlungen für zukünftige Messungen . . . . .	78
<b>5</b>	<b>Transfermatrizen des TD<sup>1</sup> Brenners</b>	<b>81</b>
5.1	Transfermatrix des kompakten Elements mit Verlusten . . . . .	81
5.1.1	Theorie . . . . .	81
5.1.2	Experimentelle Resultate . . . . .	85
5.1.3	Modellierung . . . . .	87
5.2	Transfermatrix der Brennerdüse . . . . .	87
5.2.1	Geometrie . . . . .	87
5.2.2	Modellierung . . . . .	89
5.3	Transfermatrizen des TD <sup>1</sup> Brenners . . . . .	91
5.3.1	Modellierung . . . . .	93
5.3.2	Durchsatzvariation . . . . .	97
5.3.3	Brennerdüsendurchmesser . . . . .	97
5.3.4	Dralleinsätze . . . . .	101
<b>6</b>	<b>Flammentransferfunktionen des TD<sup>1</sup> Brenners</b>	<b>103</b>
6.1	Chemilumineszenz . . . . .	103
6.1.1	Chemilumineszenz . . . . .	103
6.1.2	Bildung von angeregtem OH* . . . . .	104
6.1.3	Rückkehr von OH* in den Grundzustand . . . . .	105
6.1.4	Literatur über Chemilumineszenz von Flammen . . . . .	106
6.2	Bestimmung von Flammentransferfunktionen . . . . .	107
6.3	Flammentransferfunktionen des TD <sup>1</sup> Brenners . . . . .	111
6.3.1	Drallvariation . . . . .	112
6.3.2	Leistungsvariation . . . . .	116
6.3.3	Luftzahlvariation . . . . .	117
6.3.4	Zusammenfassung der Parameterstudie Flammen- transferfunktionen . . . . .	117
6.4	Transfermatrix der kompakten Flamme . . . . .	122
6.5	Hybride Charakterisierung von Brenner und Flamme . . . . .	123
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>128</b>

<b>A Software</b>	<b>131</b>
A.1 Steuersoftware . . . . .	131
A.2 Messsoftware . . . . .	133
A.3 Auswertesoftware . . . . .	134
<b>B Dateiformate</b>	<b>135</b>
B.1 Messwerte (.fft) . . . . .	135
B.2 Protokollfile (.txt) . . . . .	135
B.3 Kalibrationsfile (.cal) . . . . .	136
B.4 Transfermatrizen, f-g Werte (.dat) . . . . .	137
<b>C Strömungsfeld in der Brennkammer</b>	<b>138</b>
<b>D Transformationseigenschaften von Transfermatrizen</b>	<b>140</b>
D.1 Allgemeine Eigenschaften von Spur und Determinante . . . . .	140
D.1.1 Spur . . . . .	140
D.1.2 Determinante . . . . .	141
D.2 Translationen und Kontraktionen . . . . .	141
<b>E Tabellen</b>	<b>146</b>
E.1 Analytische Ansätze für Transfermatrizen . . . . .	146
E.1.1 Rohrstück . . . . .	146
E.1.2 Flächensprung verlustfrei . . . . .	146
E.1.3 kompaktes Element mit Verlust . . . . .	147
E.1.4 Druckverlust . . . . .	148
E.1.5 kompakte Flamme . . . . .	148
E.2 Eigenschaften des verwendeten Erdgases . . . . .	149
E.3 Eckdaten des Sirenenmotors . . . . .	151
<b>Literatur</b>	<b>152</b>

## Tabellenverzeichnis

3.1	Elementarvierpole der Elektrotechnik . . . . .	19
3.2	Vierpoldarstellungen akustischer Zweitore . . . . .	21
5.1	Geometriedaten Flächensprung mit Blende . . . . .	87
5.2	Druckverlustbeiwerte des TD <sup>1</sup> Brenners . . . . .	94
5.3	Strömungsgeschwindigkeiten im TD <sup>1</sup> Brenner . . . . .	100
5.4	Kennwerte der Brennerklasse 36xx . . . . .	101
B.1	Dateiformat FFT File . . . . .	135
B.2	Batch Skript zum Zusammenhängen von FFT Files . . . . .	135
B.3	Positionscode für Mikrofonpositionen . . . . .	136
B.4	Dateiformat Protokollfile . . . . .	136
B.5	Dateiformat Kalibrationsfile . . . . .	136
B.6	Dateiformat Transfermatrizen . . . . .	137
B.7	Dateiformat für Riemann Invariante $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ . . . . .	137
E.1	Eckdaten Elektromotor Faulhaber 3564 K024BC . . . . .	151

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Weltweiter Primärenergieverbrauch . . . . .	1
1.2	Stromerzeugung nach Energieträgern . . . . .	2
2.1	Kontrollvolumen . . . . .	8
3.1	Zweitore der Elektrotechnik . . . . .	18
3.2	Transfermatrix in $pu$ Darstellung . . . . .	22
3.3	Transfermatrix in $fg$ Darstellung . . . . .	22
3.4	Die Streumatrix . . . . .	23
3.5	Zeitverzug am Rohr . . . . .	27
3.6	Streuung am Flächensprung . . . . .	28
3.7	Querschnitt der Expansionskammer . . . . .	31
3.8	$x-t$ Diagramm für die Streuung an der Expansionskammer . .	33
3.9	Verlauf von $r$ und $t$ einer Beispielgeometrie . . . . .	35
4.1	Querschnitt der Versuchsanlage . . . . .	37
4.2	Elemente der Versuchsanlage . . . . .	39
4.3	Der TD <sup>1</sup> Brenner . . . . .	40
4.4	Drallerzeuger des TD <sup>1</sup> Brenners . . . . .	41
4.5	Querschnitt TD <sup>1</sup> Brenner . . . . .	42
4.6	Aufbau der Lochsirene . . . . .	43
4.7	Die Lochsirene . . . . .	44
4.8	Frequenzspektrum der Sirene . . . . .	46
4.9	Die Reflexlichtschranke Siemens SFH 900 . . . . .	47
4.10	Die two load Methode . . . . .	51
4.11	Die two source location Methode . . . . .	51
4.12	Mittelung von Druckvektoren . . . . .	56
4.13	Mikrofonkalibration . . . . .	57
4.14	Kalibrationsaufbau . . . . .	59
4.15	Übertragung von Fehlern . . . . .	64
4.16	Erzeugung fehlerbehafteter Vektoren . . . . .	65
4.17	Fehlerfortpflanzung bei der Zweimikrofonmethode . . . . .	66
4.18	Fehlerfortpflanzung bei Verwendung von drei Mikrofonen . . .	68
4.19	Einfluss von Fehlern in der Temperatur . . . . .	69
4.20	Quantifizierung der Fehlerfortpflanzung . . . . .	72
4.21	Fehlerfortpflanzung bei der Multimikrofonmethode . . . . .	73
4.22	Fehlerfortpflanzung bei heißen Messungen . . . . .	74
4.23	Fehlerniveau bei Transfermatrixmessungen . . . . .	76
4.24	Konvergenz von Transfermatrixelementen . . . . .	79
5.1	Querschnitte der untersuchten Geometrien . . . . .	85
5.2	Transfermatrizen Flächensprung mit Blende . . . . .	86

5.3	Verlustbehafteter Flächensprunges: Vergleich zwischen Messung und Modellrechnung . . . . .	88
5.4	Querschnitt der Brennerdüse . . . . .	89
5.5	Akustisches Netzwerkmodell der Brennerdüse . . . . .	91
5.6	Brennerdüse: Vergleich zwischen Messung und Modellrechnung	92
5.7	TD <sup>1</sup> Brenner: Vergleich zwischen Messung und Modellrechnung	96
5.8	Transfermatrix unter Durchsatzvariation . . . . .	98
5.9	Transfermatrix für unterschiedliche Brennerdüsen . . . . .	99
5.10	Transfermatrix für unterschiedliche Dralleinsätze . . . . .	102
6.1	Reaktionsdiagramm für Methan . . . . .	105
6.2	Spektrale Empfindlichkeit der UV-Diode SFH 530 . . . . .	109
6.3	Kalibrationskurven von Hitzdraht und UV-Diode . . . . .	110
6.4	Transferfunktion unter Drallvariation, $\lambda = 1,25$ . . . . .	113
6.5	Transferfunktion unter Drallvariation, $\lambda = 1,35$ . . . . .	114
6.6	Transferfunktion unter Drallvariation, $\lambda = 1,45$ . . . . .	115
6.7	OH* Chemilumineszenz . . . . .	116
6.8	Transferfunktion unter Leistungsvariation, $\lambda = 1,35$ . . . . .	118
6.9	Transferfunktion unter Luftzahlvariation, $P = 60$ kW . . . . .	119
6.10	Transferfunktionen der Konfiguration 3632 . . . . .	124
6.11	Flammentransfermatrix der Konfiguration 3632 . . . . .	126
6.12	Transfermatrix von Brenner und Flamme . . . . .	127
A.1	Sirenenfrequenz über Vorgabespannung . . . . .	132
C.1	Brennkammerströmung am TD <sup>1</sup> Brenner bei Drallvariation . .	138
D.1	Definition der Transfermatrix . . . . .	142
D.2	Verschiebung der rechten Definitionsebene . . . . .	143
D.3	Verschiebung der linken Definitionsebene . . . . .	143
D.4	Verschiebung beider Definitionsebenen . . . . .	144
D.5	Verschiebung nach Links . . . . .	144
D.6	Symmetrische Kontraktion . . . . .	145

# Nomenklatur

## Lateinische Buchstaben

$a$	[m]	Radius
$A$	[m <sup>2</sup> ]	Fläche
	[–]	RMS Schwingungsamplitude
$A, B, C, D$	[–]	Matrixelemente
$C$	[–]	Konstante
$C_i$	[–]	Mikrofonkalibrationsfunktion
$c$	[m/s]	Schallgeschwindigkeit
$c_p$	[–]	spezifische Wärme bei konst. Druck
$c_v$	[–]	spezifische Wärme bei konst. Volumen
$D$	[m]	Durchmesser
$d_v$	[m]	Dicke der viskosen Grenzschicht
$f$	[1/s]	Frequenz
$f_s$	[1/s]	Anregungsfrequenz der Sirene
$\tilde{f}$	[m/s]	Riemann Invariante in pos. Richtung
$\tilde{g}$	[m/s]	Riemann Invariante in neg. Richtung
$h$	[V]	Signal
	[J s]	Plancksche Konstante
<b>H</b>	[–]	Matrix der Einheitsimpulsantworten
$\mathcal{H}$	[V/Hz]	Spektrum
$I$	[A]	elektr. Stromstärke
$\tilde{I}$	[N/m <sup>2</sup> ]	RMS Amplitude einlaufende Welle
$\mathcal{I}$	[–]	allgem. Inputsignal
$k$	[1/m]	Wellenzahl $\omega/c$
	[–]	Index
$l$	[m]	Länge
$l_{ec}$	[m]	Effekte scharfer Kanten
$l_{eff}$	[m]	effektive Länge
$l_{red}$	[m]	reduzierte Länge
$L_a$	[kg/m <sup>4</sup> ]	akust. Induktanz
$M$	[–]	Mach-Zahl
$\mathbf{M}_{pu}$	[–]	Mobilitätsmatrix
$N$	[–]	Gesamtzahl
$n$	[–]	Index

$\mathcal{O}$	[-]	allgem. Outputsignal
$P$	[W]	Leistung
$Q$	[W]	integrale Wärmefreisetzung
$Q'$	[W]	RMS integrale Wärmefreisetzung
$\bar{Q}$	[W]	zeitgemittelte Wärmefreisetzung
$Re$	[-]	Reynolds-Zahl
$q$	[-]	Quotient der geom. Reihe
$r$	[-]	Reflexionsfaktor
$\mathcal{R}_d$	[-]	Referenzebene stromab (downstream)
$\mathcal{R}_u$	[-]	Referenzebene stromauf (upstream)
$\tilde{R}$	[N/m <sup>2</sup> ]	RMS Amplitude reflektierte Welle
$R_a$	[kg/m <sup>4</sup> s]	akust. Resistanz
$r_t$	[-]	Verhältnis von thermischer Grenzschicht und Radius
$r_v$	[-]	Verhältnis von viskoser Grenzschicht und Radius
$t$	[-]	Transmissionsfaktor
$S$	[-]	Drallzahl
$S_\infty$	[-]	Grenzwert der geom. Reihe
$\mathbf{S}_{fg}$	[-]	Streumatrix
$Str$	[-]	Strouhal-Zahl
$T$	[-]	Transferfunktion
$\tilde{T}$	[N/m <sup>2</sup> ]	RMS Amplitude transmittierte Welle
$T_E$	[-]	Übertragungsfunktion für Fehler
$T_Q$	[-]	Flammentransferfunktion
$\mathbf{T}$	[-]	Transfermatrix ohne Angabe der Darstellung
$T_{ij}$	[-]	Transfermatrixelement
$\mathbf{T}_{fg}$	[-]	Transfermatrix in $fg$ Darstellung
$\mathbf{T}_{pu}$	[-]	Transfermatrix in $pu$ Darstellung
$p$	[N/m <sup>2</sup> ]	Druck
$\bar{p}$	[N/m <sup>2</sup> ]	zeitgemittelter Druck
$p'$	[N/m <sup>2</sup> ]	RMS der Druckschwankungen
$Pr$	[-]	Prandtl-Zahl
$T$	[K]	Temperatur
$t$	[s]	Zeit (Laborsystem)
$\hat{t}$	[s]	Zeit (mitbewegtes System)
$u$	[m/s]	axiale Geschwindigkeit
$\bar{u}$	[m/s]	zeitgemittelte axiale Geschwindigkeit
$u'$	[m/s]	RMS der axialen Geschwindigkeitsschwankungen
$U$	[V]	elektr. Spannung

$x$	[m]	räumliche Koordinate (Laborsystem)
$x^+$	[m]	mitbewegte Koordinate in pos. Richtung
$x^-$	[m]	mitbewegte Koordinate in neg. Richtung
$\hat{x}$	[m]	räumliche Koordinate (mitbewegtes System)
$\delta x$	[m]	kleine räumliche Länge
$\mathbf{Y}$	[A/V]	Leitwertmatrix
$z$	[m]	Tiefe des rechteckigen Kanals
$z_n$	[-]	zeitdiskretes Signal

## Griechische Buchstaben

$\alpha$	[-]	Flächenverhältnis $A_d/A_u$
$\alpha_{vt}$	[-]	Dämpfungskonstante
$\gamma$	[-]	Isentropenexponent $c_p/c_v$
$\Gamma^+$	[N/m <sup>2</sup> ]	allg. Riemann Invariante in pos. Richtung
$\Gamma^-$	[N/m <sup>2</sup> ]	allg. Riemann Invariante in neg. Richtung
$\delta$	[-]	Dirac-Deltadistribution
	[-]	Fehlermaß
$\lambda$	[-]	Luftzahl ( $1/\phi$ )
$\nu$	[1/s]	Frequenz (Licht)
$\phi$	[-]	equivalence ratio $1/\lambda$
$\rho$	[kg/m <sup>3</sup> ]	Dichte
$\bar{\rho}$	[kg/m <sup>3</sup> ]	zeitgemittelte Dichte
$\rho'$	[kg/m <sup>3</sup> ]	RMS der Dichteschwankungen
$\omega$	[rad/s]	Kreisfrequenz $2\pi f$
$\mathbf{\Omega}$	[-]	Koordinatentransformationsmatrix
$\sigma$	[-]	Standardabweichung
$\zeta$	[-]	Druckverlustbeiwert
$\Phi$	[rad]	Phase
$\eta_v$	[Ns/m <sup>2</sup> ]	dynamische Viskosität
$\kappa$	[W/m K]	Wärmeleitfähigkeit
$\varphi$	[-]	allgemeine Funktion
$\tau$	[s]	Zeitverschiebung

## Superscripts

<i>a</i>	erste Teilmessung
<i>b</i>	zweite Teilmessung
<i>E</i>	mit Fehler versehen (error)
<i>H</i>	mit Hanning Fenster versehen

## Indices

<i>a</i>	erste Teilmessung
<i>ax</i>	axial
<i>b</i>	zweite Teilmessung
<i>BR</i>	Brenner
<i>c</i>	Kaltgas (cold)
<i>D</i>	Düse
<i>d</i>	stromab (downstream)
<i>du</i>	in Richtung $d \rightarrow u$
<i>FL</i>	Flamme
<i>h</i>	Heissgas (hot)
<i>E</i>	Extrapolation
<i>ges</i>	gesamt
<i>hyd</i>	hydraulisch
<i>mess</i>	Messung
<i>opt</i>	optimal
<i>ref</i>	Referenz
<i>source</i>	Quellterm
<i>u</i>	stromauf (upstream)
<i>ud</i>	in Richtung $u \rightarrow d$
<i>R</i>	zufällige Werte (random)
<i>SL</i>	Schlitzmitte
<i>max</i>	Maximalwert
<i>min</i>	Minimalwert



The intellect has little to do on the road to discovery. There comes a leap in consciousness, call it intuition or what you will, and the solution comes to you and you don't know how or why.

Albert Einstein (1879-1955)



# 1 Einleitung

Der weltweite Bedarf an Primärenergie steigt seit mehreren Jahrzehnten kontinuierlich an. Wie Abbildung 1.1 zeigt, verdoppelte sich der weltweite Primärenergieverbrauch im Zeitraum von 1971 bis 1997 nahezu und liegt derzeit bei etwa 10.000 Mtoe<sup>1)</sup> pro Jahr [IEA02]. Die Mitgliedsstaaten der OECD konsumieren seit mehreren Jahrzehnten unverändert etwas mehr als die Hälfte der weltweit verbrauchten Primärenergie. Prognosen sagen für die kommenden Jahrzehnte einen weiteren Anstieg des Energiebedarfs voraus (siehe Abbildung 1.1) [IEA02]. Rund 80 Prozent der jährlich verbrauchten Primärenergie sind heute fossilen Ursprungs und werden durch die Energieträger Öl, Gas und Kohle abgedeckt<sup>2)</sup>.

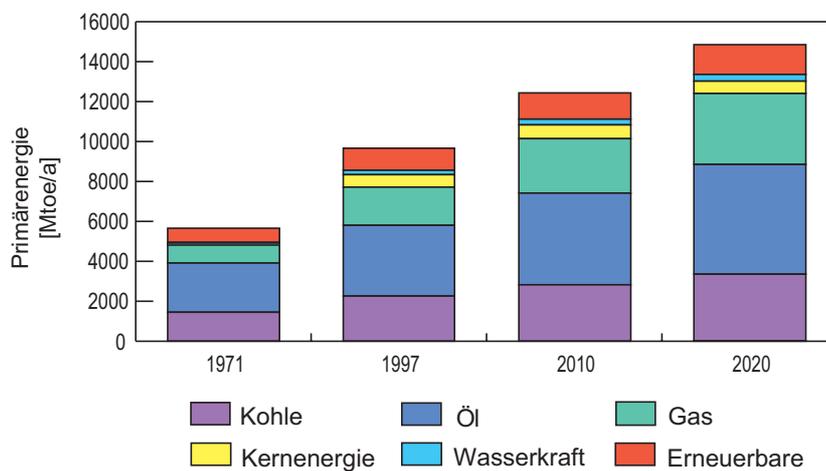


Bild 1.1: Jährlicher Primärenergiebedarf nach Energieträgern für die Jahre 1971 und 1997 sowie Prognosen für die Jahre 2010 und 2020 (nach [IEA02]).

Der Anteil elektrischer Energie am gesamten Energiekonsum stieg auf Seiten der Verbraucher zwischen 1973 und 2000 weltweit von 9.6 auf 15.8 Prozent. Innerhalb der OECD liegt der Anteil elektrischer Energie mit 11.4 (1973) und 19.7 (2000) Prozent heute bei fast einem Fünftel des gesamten Energiekonsums [IEA02]. Wie aus Abbildung 1.2 hervorgeht, lag der Anteil

<sup>1)</sup> 1 Mtoe (Million tons oil equivalent) =  $4.1868 \times 10^4$  TJ =  $10^7$  Gcal =  $3.968 \times 10^7$  MBtu = 11630 GWh [IEA02]

<sup>2)</sup> Die Anteile der fossilen Energieträger lagen 2000 bei Öl (34.90 %), Gas (21.10 %) und Kohle (23.50 %). Die restlichen Anteile verteilten sich auf Wasserkraft (2.30 %), Kernkraft (6.80 %), erneuerbare Brennstoffe und Müll (11.00 %) und sonstige (0.50 %) (Quelle [IEA02])

fossiler Energieträger an der weltweiten Stromproduktion im Jahr 2000 bei 64.4 %, gefolgt von erneuerbaren Energieträgern (18.7 %) und Kernenergie (16.90 %) [IEA02]. Technologien für eine schadstoffarme und effiziente Umwandlung fossiler Energie in Kraftwerken sind daher von grosser technischer und umweltpolitischer Relevanz.

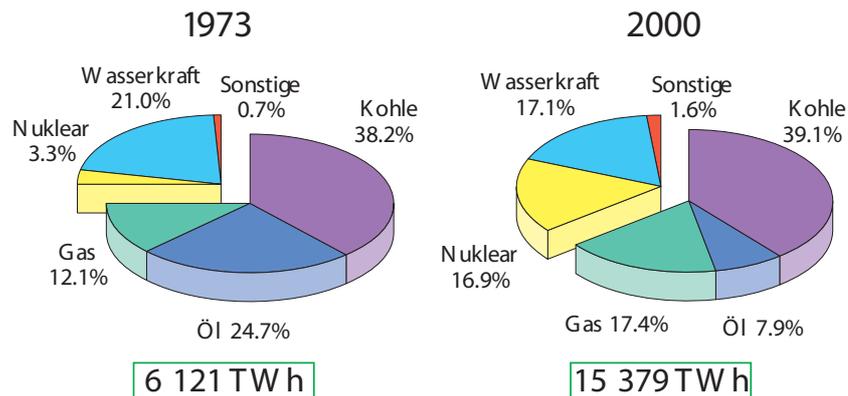


Bild 1.2: Weltweite Stromerzeugung nach Energieträgern für die Jahre 1973 und 2000 (nach [IEA02]).

Der Wirkungsgrad fossiler Kraftwerke konnte in den letzten 50 Jahren verdoppelt werden. Hatten die Dampfkraftwerke der 1940er Jahre noch Wirkungsgrade von 30-35 %, so erzielen kombinierte GuD-Kraftwerke<sup>3)</sup> mittlerweile Wirkungsgrade von bis zu 59 Prozent [Dol01, HD02]. Die CO<sub>2</sub> Emissionen liegen in modernen Kraftwerken bei der Verbrennung von Erdgas pro erzeugter elektrischer Kilowattstunde 40-50 % unter jenen von Kohle und 25 % unter jenen von Heizöl [ASU99]. Moderne Gasturbinen erreichen damit deutlich niedrigere CO<sub>2</sub> Emissionen pro erzeugtem Kilowatt als andere Technologien. Gasturbinen sind heute eine zuverlässige Technologie mit hoher Verfügbarkeit, niedrigen leistungsspezifischen Investitionen, hoher Kompaktheit und geringem Gewicht. Aus diesen Gründen stieg die Anzahl von Gasturbinen in Deutschland zwischen 1990 und 1998 von 100 auf 300 Anlagen mit einer elektrischen Gesamtleistung von 4500 MW [ASU99].

Da die Belastung durch Schwefeldioxid in den letzten zwei Jahrzehnten weltweit deutlich reduziert wurde<sup>4)</sup>, zählen heute in den westlichen Industrieländern Stickoxide (NO<sub>x</sub>) und Ozon (O<sub>3</sub>) zu den hauptsächlichen Luftschad-

<sup>3)</sup> In GuD-Kraftwerken (GuD = **G**as- und **D**ampf) wird ein Gasturbinen- mit einem Dampfkreislauf kombiniert.

<sup>4)</sup> In Deutschland wurden die Emissionen von Schwefeloxiden (SO<sub>x</sub>) in den 1990er Jahren von 5.3 (1990) auf 0.8 (1999) Mio Tonnen jährlich reduziert [OEC02].

stoffen<sup>5)</sup> [Fen03]. Die weltweiten Emissionen von Stickoxiden liegen heute auf dem drei- bis fünffachen des Wertes von 1950 [Fen03]. Stickoxide sind in Bodennähe unter Sonneneinstrahlung an der Entstehung des aggressiven Reizgases Ozon (Photosmog) und der Bildung des sauren Regens beteiligt. In höheren atmosphärischen Schichten spielen sie eine Rolle beim Abbau des stratosphärischen Ozons [Fel99, OEC02]. Dies führt über der Antarktis zur Bildung des so genannten Ozonlochs und macht sich in weiten Bereichen der südlichen Hemisphäre durch eine erhöhte UV-Einstrahlung bemerkbar. Eine wesentliche Forderung moderner Umweltgesetzgebung ist deshalb die Reduktion des Ausstoßes von  $\text{NO}_x$  bei der Verbrennung fossiler Brennstoffe.

Das so genannte *thermische NO* entsteht in Verbrennungsprozessen bei hohen Temperaturen durch Spaltung des  $\text{N}_2$  Moleküls des Luftstickstoffs unter Mitwirkung von Sauerstoff-Radikalen in einer Kettenreaktion, die als *Zel-dovich Mechanismus* bezeichnet wird [Tur00, LS03].



Das in der Verbrennungszone freigesetzte Stickstoffmonoxid NO wird später in einer weiteren Reaktion oxidiert, wodurch das wesentlich schädlichere Stickstoffdioxid  $\text{NO}_2$  entsteht [MCL88]. Die Reaktion (1.1) besitzt eine hohe Aktivierungsenergie und dadurch eine starke Temperaturabhängigkeit, die durch den starken Anstieg der Konzentration von Sauerstoffradikalen bei steigenden Temperaturen verstärkt wird [Tur00, LS03]. Thermisches NO spielt daher erst ab Temperaturen von etwa 1800 K eine Rolle [Tur00].

Durch die hohen Verbrennungstemperaturen in Gasturbinen waren hohe Stickoxidemissionen lange Zeit ein Problem. Ein wesentliches Ziel bei der Entwicklung moderner stationärer Gasturbinen liegt daher in der Erfüllung der stetig sinkenden Grenzwerte für die Emission von Stickoxiden. Eine erfolgreiche Strategie zur Reduktion der Stickoxidemissionen von Gasturbinen besteht in der Reduktion der Verbrennungstemperatur in Form der *mageren Vormischverbrennung*<sup>6)</sup>. Der Anteil von Stickoxiden im Abgas konnte bei der Verbrennung von Erdgas durch technische Weiterentwicklung seit den 1970er Jahren um einen Faktor 20-50 reduziert werden [LS03].

---

<sup>5)</sup> Weltweit belaufen sich die antropogenen Stickoxidemissionen auf jährlich 53 Mio. Tonnen (als  $\text{NO}_2$  gerechnet, Stand 1987). Im Vergleich dazu werden allerdings jährlich 770 Mio. Tonnen von natürlichen Prozessen freigesetzt [Par91].

<sup>6)</sup> Neben dem thermischen NO existieren noch weitere Mechanismen der Stickoxidbildung. Die magere Vormischverbrennung eignet sich nicht für Brennstoffe, in denen Stickstoff chemisch gebunden ist [Tur00, LS03].

Generell werden in Vormischsystemen, in denen Luft und Brennstoff vor der Verbrennung gemischt werden, hohe Leistungsdichten erzielt. Systeme mit hohen Leistungsdichten sind anfällig für *Verbrennungsschwingungen*, für die eine starke Wechselwirkung zwischen Leistungsschwankungen und akustischen Druckschwankungen charakteristisch ist. Lord Rayleigh erkannte bereits im Jahr 1878, dass in schwingenden thermoakustischen Systemen eine positive Korrelation zwischen der Wärmefreisetzung und den Druckschwankungen besteht [Ray78]. Lord Rayleigh formulierte sein bekanntes Kriterium folgendermassen:

If heat be periodically communicated to, and abstracted from, a mass of air vibrating (for example) in a cylinder bounded by a piston, the effect produced will depend upon the phase of the vibration at which the transfer of heat takes place. If the heat is given to the air at the moment of greatest condensation, or be taken from it at the moment of greatest rarefaction, the vibration is encouraged. On the other hand, if heat be given at the moment of greatest rarefaction, or abstracted at the moment of greatest condensation, the vibration is discouraged [Ray78].

Um die Entstehung von Verbrennungsschwingungen in neuen Generationen von Gasturbinen besser vorhersagen zu können, ist es notwendig, mehr über die Mechanismen thermoakustischer Instabilitäten zu erfahren. Experimentelle Studien an industriellen Gasturbinen verursachen hohe Kosten. Daher sind Methoden, die Verbrennungsschwingungen ohne teure Testläufe vorherzusagen können, von großem Interesse.

Ein wesentlicher Aspekt bei der Vorhersage von Verbrennungsinstabilitäten ist die akustische Charakterisierung des Verbrennungssystems. Insbesondere werden die Beschreibung des Brenners und der Flamme für Stabilitätsanalysen benötigt. Aufgrund der komplexen Vorgänge in Verbrennungssystemen geht man üblicherweise nicht detailliert auf die physikalischen Vorgänge ein, sondern betrachtet die Systeme als *Black Box*.

Eine aus der Systemanalyse bekannte Vorgehensweise bei der Charakterisierung linearer, zeitinvarianter Systeme besteht in der Angabe der *Transferfunktion* des Systems. Die Transferfunktion bezeichnet man auch als *Übertragungsfunktion*. Sie stellt eine Verbindung zwischen den Frequenzspektren von in das System einlaufenden und aus dem System auslaufenden Signalen her und ist in der Regel eine komplexwertige Funktion der Signalfrequenz. Stellen  $\mathcal{I}(\omega)$  und  $\mathcal{O}(\omega)$  die Spektren<sup>7)</sup> einlaufender und auslaufender Signale dar, so wird die Transferfunktion  $T(\omega)$  des Systems nach Gleichung (1.3) als deren Quotient definiert [Ise91, Sch92, Car95].

---

<sup>7)</sup> siehe Gleichung (2.29)

$$T(\omega) = \frac{\mathcal{O}(\omega)}{\mathcal{I}(\omega)} \quad (1.3)$$

Systeme, die  $N$  Eingänge und  $N$  Ausgänge besitzen, beschreibt man nach (1.4) durch Angabe einer  $N \times N$  *Transfermatrix*  $\mathbf{T}(\omega)$ . Die Elemente  $T_{ij}(\omega)$  der Transfermatrix

$$\mathcal{O}_j(\omega) = \sum_{i=1}^N T_{ij}(\omega) \mathcal{I}_i(\omega) \quad (1.4)$$

verknüpfen das Ausgangssignal  $\mathcal{I}_i(\omega)$  mit den Signalen aller Eingänge  $\mathcal{O}_j(\omega)$ . Die Elemente  $T_{ij}(\omega)$  sind im Allgemeinen komplexe Funktionen der Signalfrequenz. Interpretiert man Gleichung (1.4) als Mischung der Eingangssignale, so können die Elemente  $T_{ij}(\omega)$  der Transfermatrix  $\mathbf{T}(\omega)$  als die Gewichte der einzelnen Eingangssignale interpretiert werden.

In dieser Arbeit wird eine Methode zur experimentellen Bestimmung der akustischen Transfermatrizen von Drallbrennern beschrieben. Die Methode besteht aus zwei Schritten:

- Zuerst ermittelt man die Transfermatrix des mit Luft, ohne Verbrennung durchströmten Brenners.
- Die Flamme wird anschließend durch Bestimmung des Übertragungsverhaltens zwischen akustischer Schnelle am Brennermund und integraler Wärmefreisetzung charakterisiert. Die Übertragungsfunktion der Flamme kann mit Hilfe von Modellannahmen in eine akustische Transfermatrix der Flamme umgerechnet werden.

Durch Kombination der Transfermatrizen von Brenner und Flamme errechnet man nun die Transfermatrix des Brenners mit Flamme. Diese kann man anschließend in ein akustisches Netzwerk integrieren. Wendet man Methoden der Stabilitätsanalyse auf das akustische Netzwerk an, kann dessen Schwingungsneigung untersucht werden<sup>8)</sup>.

Kapitel 2 beginnt mit einer kurzen Einführung in die lineare Akustik. Anschließend werden in Kapitel 3 elektroakustische Analogien und akustische Zweipole besprochen. Die gebräuchlichen Vierpoldarstellungen akustischer Zweipole werden vorgestellt und anschließend anhand von Zeitbereichsanalysen für Rohrsegment, Flächensprung und Expansionskammer hergeleitet.

---

<sup>8)</sup> Stabilitätsuntersuchungen werden in dieser Arbeit nicht behandelt. Ein allgemeines Stabilitätskriterium für thermoakustische Systeme geben Polifke *et al.* [PPS97] an.

Das akustische Verhalten komplexer Geometrien kann bei der Modellierung in akustischen Netzwerken auf Kombinationen solcher elementarer Geometriebausteine reduziert werden.

In Kapitel 4 werden der Versuchsaufbau und Methoden für die experimentelle Bestimmung von Transfermatrizen behandelt. Einer detaillierten Beschreibung des Messverfahrens folgt eine Sensitivitätsanalyse der Methode gegenüber den nicht vermeidbaren Unschärfen bei der experimentellen Bestimmung akustischer Feldvariablen.

Kapitel 5 vergleicht experimentell ermittelte Transfermatrizen für verschiedene Geometrien mit den entsprechenden akustischen Netzwerkmodellen. Dabei wird versucht, die akustischen Netzwerke direkt aus den Geometriedaten abzuleiten. Durch die Modellierung mit akustischen Netzwerken wird es möglich, den Einfluss einzelner Faktoren auf die Transfermatrix zu untersuchen. Neben einem theoretischen Modell für den durchströmten Flächensprung werden akustische Netzwerke für die Brennerdüse und verschiedene Geometrien des Brenners vorgestellt.

Experimentell bestimmte Transferfunktionen von Drallflammen werden in Kapitel 6 behandelt. Abschließend wird unter Modellannahmen aus der Transferfunktion der Flamme eine Transfermatrix berechnet und mit der Transfermatrix des Brenners verknüpft.

Eine Zusammenfassung in Kapitel 7, Anhänge und ein Literaturverzeichnis schliessen die Arbeit ab.

## 2 Lineare Akustik

Dieses Kapitel behandelt die Gleichungen für die Ausbreitung von Wellen in einem homogenen Medium. Dabei beschränken wir uns mit Blick auf die Anwendungen in den folgenden Kapiteln auf die Beschreibung von Wellen in einer Raumdimension.

### 2.1 Linearisierung

Als lineare Akustik bezeichnet man die Beschreibung kleiner Störungen  $p'$ ,  $u'$  und  $\rho'$  eines Druck-, Geschwindigkeits- und Dichtefeldes anhand eines aus der Strömungsmechanik unter wesentlichen Vereinfachungen abgeleiteten Satzes von gekoppelten Gleichungen. Aufgrund der Kopplung der Gleichungen haben Änderungen in einer Größe Auswirkungen auf die anderen Größen. Um die Gleichungen der linearen Akustik herzuleiten, geht man von den bekannten Gleichungen der Kontinuumsmechanik aus und vereinfacht diese durch einen linearisierenden Ansatz [DF83, Mun87, MI68, Pie81, Ses02, RH03].

Im Rahmen der linearen Akustik werden die strömungsmechanischen Feldgrößen in Form eines mittleren Strömungsfeldes mit überlagerten kleinen Störungen beschrieben. Den statischen Druck  $p$  zerlegt man gemäß (2.1) in einen mittleren Druck  $\bar{p}$  mit überlagerten Störungen  $p'$ .

$$p = \bar{p} + p' \quad p'/\bar{p} \ll 1 \quad (2.1)$$

$$u = \bar{u} + u' \quad u'/\bar{u} \ll 1 \quad (2.2)$$

$$\rho = \bar{\rho} + \rho' \quad \rho'/\bar{\rho} \ll 1 \quad (2.3)$$

Mit Geschwindigkeit und Dichte verfährt man nach (2.2) und (2.3) analog. Da man sich im Rahmen der linearen Akustik nur für die Beschreibung kleiner Störungen  $u'$ ,  $p'$  und  $\rho'$  interessiert, können die Produkte von Störgrößen vernachlässigt werden.

Besonders anschaulich lässt sich die Ausbreitung von ebenen Wellen beschreiben. Ebene Wellen werden dadurch charakterisiert, dass die Größen  $p'$ ,  $u'$  und  $\rho'$  überall in Ebenen normal zur Ausbreitungsrichtung konstante Amplitude und Phase besitzen. Da in diesem Fall Druckgradienten bloß in Ausbreitungsrichtung existieren, besitzt das Problem nur entlang einer Raumdimension Dynamik und es ist somit ausreichend, für die mathematische Beschreibung ebener Wellen nur diese eine Raumdimension zu verwenden. In großem Abstand zu einer Schallquelle und in engen Röhren, wie sie für viele Musikinstrumente typisch sind, kann die Ausbreitung von Schall in guter Näherung durch ebene Wellen beschrieben werden. In Kapitel 3.1.3

werden wir akustische Elemente durch ihr Übertragungsverhalten für ebene Wellen charakterisieren.

## 2.2 Die Wellengleichung

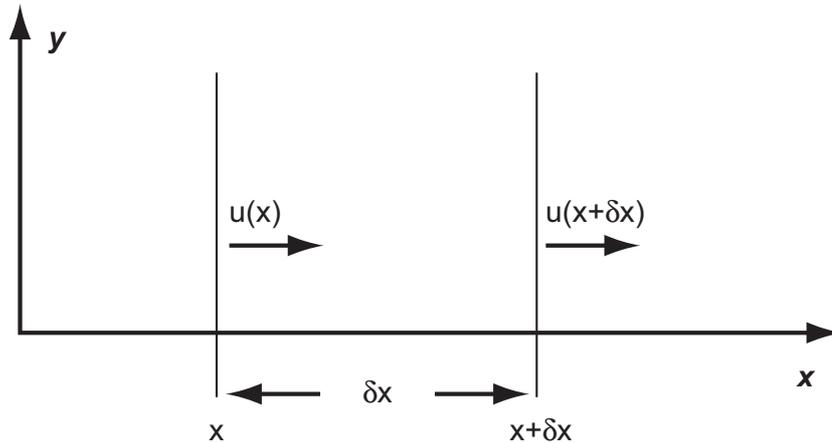


Bild 2.1: Kontrollvolumen für die Herleitung von Kontinuitäts- und Impulsgleichung

Betrachtet man das Volumen aus Abbildung 2.1 im Bereich  $[x, x + \delta x]$  entlang der  $x$ -Achse, so kann man die Massenbilanz (2.4) aufstellen.

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} \delta x = [(\bar{\rho} + \rho')u'](x, t) - [(\bar{\rho} + \rho')u'](x + \delta x, t) \quad (2.4)$$

Der Term  $\rho'u'$  ist ein Produkt aus zwei kleinen Störgrößen und wird deshalb in der linearen Theorie vernachlässigt. Für den Grenzwert kleiner Längen  $\delta x$  erhält man damit die linearisierte, eindimensionale *Kontinuitätsgleichung* (2.5).

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial x} = 0 \quad (2.5)$$

Es sollen keine äußeren Kräfte auf das betrachtete Volumen  $[x, x + \delta x]$  einwirken. Der Impuls in dem betrachteten Volumen ändert sich daher in der Impulsbilanz (2.6) nur aufgrund von Druckgradienten an den Seitenflächen des Volumens.

$$\bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial t} \delta x = p'(x, t) - p'(x + \delta x, t) \quad (2.6)$$

Bildet man wieder den Grenzwert kleiner Längen  $\delta x$  und vernachlässigt Produkte von Störgrößen, so gelangt man zu der linearisierten, eindimensionalen *Impulsgleichung* (2.7).

$$\bar{\rho} \frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

Leitet man Gleichung (2.5) nach der Zeit ab und subtrahiert davon die räumliche abgeleitete Gleichung (2.7), erhält man Gleichung (2.8).

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} = 0 \quad (2.8)$$

Um die Dichte aus Gleichung (2.8) zu eliminieren, benötigt man den funktionalen Zusammenhang zwischen Druck und Dichte. Dieser Zusammenhang wird durch die Angabe der Zustandsgleichung  $p = p(\rho)$  des Mediums der Wellenausbreitung hergestellt. In der Umgebung von  $\bar{\rho}$  kann man die Funktion  $p(\rho)$  durch die Reihenentwicklung

$$p = \bar{p} + \rho' \frac{dp}{d\rho}(\bar{\rho}) + \dots \quad (2.9)$$

approximieren. Unter Vernachlässigung höherer Terme erhält man (2.10).

$$p' = \rho' \frac{dp}{d\rho}(\bar{\rho}) \quad (2.10)$$

Die Ableitung  $dp/d\rho$  ist für die meisten Medien positiv. Mit der Definition (2.11)

$$c^2 \equiv \frac{dp}{d\rho}(\bar{\rho}) \quad (2.11)$$

gelangt man zu der Beziehung (2.12).

$$p' = c^2 \rho' \quad (2.12)$$

Setzt man (2.12) nun in (2.8) ein, erhält man die lineare, eindimensionale *Wellengleichung* (2.13).

$$\left( \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) p' = 0 \quad (2.13)$$

Die Wellengleichung ist charakteristisch für Vorgänge, bei denen Energie verlustfrei in homogenen Medien mit einer einzigen Geschwindigkeit unabhängig von der Gestalt der Welle übertragen wird. Andere Wellenphänomene, die

durch die Wellengleichungen beschrieben werden, sind zum Beispiel die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen im Vakuum und die Schwingungen einer gespannten Saite [MI68, Lig78, DF83].

### 2.3 Lösungen der Wellengleichung

Die Wellengleichung (2.13) löst man nach der Methode von d'Alembert, indem man neue Variable  $x^+ = x - ct$  und  $x^- = x + ct$  einführt [BW90a, Whi74] und Gleichung (2.13) auf die neuen Variablen transformiert. Wendet man die Kettenregel auf die Ableitungen (2.14) und (2.15) der Funktion  $p(x^+, x^-)$  an,

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{\partial p'}{\partial x^-} \underbrace{\frac{\partial x^-}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial p'}{\partial x^+} \underbrace{\frac{\partial x^+}{\partial x}}_{=1} = \frac{\partial p'}{\partial x^-} + \frac{\partial p'}{\partial x^+} \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial p'}{\partial t} = \frac{\partial p'}{\partial x^-} \underbrace{\frac{\partial x^-}{\partial t}}_{=c} + \frac{\partial p'}{\partial x^+} \underbrace{\frac{\partial x^+}{\partial t}}_{=-c} = c \left( \frac{\partial p'}{\partial x^-} - \frac{\partial p'}{\partial x^+} \right) \quad (2.15)$$

so sieht man, dass die Wellengleichung (2.13) in den neuen Variablen die besonders einfache Gestalt (2.16) erhält.

$$\frac{\partial^2 p'(x^+, x^-)}{\partial x^+ \partial x^-} = 0 \quad (2.16)$$

Die Wellengleichung (2.13) besitzt somit die allgemeine Lösung (2.17)

$$p'(x, t) = \Gamma^+(x^+) + \Gamma^-(x^-) \equiv \bar{\rho}c (\tilde{f}(x - ct) + \tilde{g}(x + ct)) \quad (2.17)$$

wobei die Funktionen  $\Gamma^+(x^+)$  und  $\Gamma^-(x^-)$  beliebige zweifach differenzierbare Funktionen sind, die durch Randbedingungen festgelegt werden. Lösungen partieller Differentialgleichungen vom Typ der Funktionen  $\Gamma^+(x^+)$  und  $\Gamma^-(x^-)$  nennt man *Riemann Invarianten*<sup>9)</sup>. In der Akustik ist die Konvention verbreitet, die mit dem Faktor  $\bar{\rho}c$  normierten Funktionen  $\tilde{f}(x^+)$  und  $\tilde{g}(x^-)$  als Riemann Invarianten zu bezeichnen.

Betrachtet man die rechte Seite von Gleichung (2.17), so wird klar, dass der Ausdruck  $\bar{\rho}c \tilde{f}(x^+) = \bar{\rho}c \tilde{f}(x - ct)$  eine Druckstörung beschreibt, die sich

<sup>9)</sup> Wie der Mathematiker Riemann 1860 zeigte [HB97], lassen sich Invarianten wie die Größen  $\Gamma^+$  und  $\Gamma^-$  nicht nur für die Wellengleichung, sondern für eine ganze Reihe partieller Differentialgleichungen, die als hyperbolische Systeme klassifiziert werden, finden. Für eine Herleitung der Riemann Invarianten verschiedener Systeme partieller Differentialgleichungen und eine Diskussion der zugrunde liegenden Theorie hyperbolischer Systeme sei auf die Darstellungen in [Whi74] und [Zau89, BS96, RH03] verwiesen.

in positiver Richtung mit der Geschwindigkeit  $c$  ausbreitet, ohne dabei die Form zu verändern.  $\bar{\rho}c\tilde{g}(x^-) = \bar{\rho}c\tilde{g}(x+ct)$  beschreibt eine Druckstörung, die ebenfalls ohne Änderung der Form mit der Geschwindigkeit  $c$  in negativer Richtung läuft.

Die Lösung (2.18) für Dichteschwankungen leitet man direkt durch Kombination der Gleichungen (2.17) und (2.12) ab.

$$\rho'(x, t) = \frac{p'}{c^2} = \frac{\bar{\rho}}{c} (\tilde{f}(x - ct) + \tilde{g}(x + ct)) \quad (2.18)$$

Für die Geschwindigkeitsschwankungen  $u'$  liefert die Kontinuitätsgleichung (2.5) die Beziehung (2.19).

$$\frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial \rho'}{\partial t} \quad (2.19)$$

Setzt man für  $\rho'$  den Ausdruck aus (2.18) in Gleichung (2.19) ein, erhält man nach Anwendung der Kettenregel und Integration

$$u'(x, t) = \tilde{f}(x - ct) - \tilde{g}(x + ct) \quad (2.20)$$

Fassen wir die Gleichungen (2.17) und (2.20) zusammen, so erhalten wir für  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  die Beziehungen

$$\tilde{f} = \frac{1}{2} \left( \frac{p'}{\bar{\rho}c} + u' \right) \quad (2.21)$$

$$\tilde{g} = \frac{1}{2} \left( \frac{p'}{\bar{\rho}c} - u' \right) \quad (2.22)$$

## 2.4 Die Schallgeschwindigkeit

Durch Vergleich von (2.17), (2.18) und (2.20) wird klar, dass sich Störungen in den Größen  $u'$  und  $\rho'$  ebenfalls mit der Geschwindigkeit  $c$  ausbreiten. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit von Druck-, Geschwindigkeits- und Dichtewellen wird in der Wellengleichung (2.13) somit durch die Größe  $c$  angegeben, die man *Schallgeschwindigkeit* nennt. Obwohl die Beziehung (2.11) bereits Newton im 17. Jahrhundert bekannt war, gelang es für über hundert Jahre nicht, den aus Experimenten bekannten Wert der Schallgeschwindigkeit von Luft theoretisch zu erklären. Boyle fand bei Experimenten mit Gasen heraus, dass für Druckänderungen bei konstanter Temperatur das Gesetz von Boyle-Mariotte  $p/\rho = \text{const}$  erfüllt wird. Wendet man diese Beziehung auf (2.11) an, errechnet man für die Schallgeschwindigkeit von Luft bei einer Temperatur von 293 K ungefähr

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}(\bar{\rho})} \stackrel{\text{isotherm}}{=} \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T} = \sqrt{\frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}} \approx 290 \text{ m/s.} \quad (2.23)$$

Experimentell ermittelt man jedoch einen um etwa 15 % höheren Wert. Dieser experimentelle Befund konnte erst im Jahr 1816 von Laplace damit erklärt werden, dass Schallwellen üblicherweise so schnell ablaufen, dass die Zeit nicht ausreicht, um die bei der Kompression entwickelte Wärme abzuleiten und einen Temperatursausgleich herzustellen. Die Ausbreitung von Schall ist somit kein isothermer, sondern ein weitgehend reversibler adiabatischer Prozess. Die adiabatische Zustandsänderung idealer Gase wird durch die Beziehung  $p/\rho^\gamma = \text{const}$  beschrieben<sup>10)</sup>. Der Wert des Isentropenexponenten von Luft liegt bei atmosphärischen Bedingungen bei  $\gamma = c_p/c_V = 1.40$  [Lig78], somit erhält man für die Schallgeschwindigkeit in Luft bei 293 K in guter Übereinstimmung mit dem experimentell bestimmten Wert

$$c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}(\bar{\rho})} \stackrel{\text{isentrop}}{=} \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S} = \sqrt{\gamma \frac{\bar{p}}{\bar{\rho}}} = 343 \text{ m/s.} \quad (2.24)$$

## 2.5 Harmonische Wellen

Eine spezielle Lösung der Wellengleichung (2.13) erhält man, wenn die Riemann Invarianten  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  harmonische Funktionen sind [DF83].

$$p'(x, t) = \bar{\rho}c \left( \tilde{f}_0 e^{i\omega(t+x/c)} + \tilde{g}_0 e^{i\omega(t-x/c)} \right) \quad (2.25)$$

$$u'(x, t) = \left( \tilde{f}_0 e^{i\omega(t+x/c)} - \tilde{g}_0 e^{i\omega(t-x/c)} \right) \quad (2.26)$$

Die Kreisfrequenz  $\omega$  gibt die Frequenz der harmonischen Wellen  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  in Radiant pro Sekunde an. Definiert man weiters die Wellenzahl  $k = \omega/c$ , kann man Gleichungen (2.25) und (2.26) auch in der Form (2.27) und (2.28) schreiben.

$$p'(x, t) = \bar{\rho}c \left( \tilde{f}_0 e^{ikx} + \tilde{g}_0 e^{-ikx} \right) e^{i\omega t} \quad (2.27)$$

$$u'(x, t) = \left( \tilde{f}_0 e^{ikx} - \tilde{g}_0 e^{-ikx} \right) e^{i\omega t} \quad (2.28)$$

Wie man aus (2.27) und (2.28) erkennt, entkoppeln bei harmonischen Wellen die zeitliche und räumliche Entwicklung. Dadurch eignen sich harmonische

<sup>10)</sup> Die reversible Adiabate bezeichnet man auch als Isentrope, weshalb  $\gamma = c_p/c_V$ , das Verhältnis der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und konstantem Volumen, als *Isentropenexponent* bezeichnet wird.

Wellen besonders gut für theoretische Modelle. Hinzu kommt, dass mit Hilfe der *Fouriertransformation* (2.29) jedes Signal  $h(t)$  in seine harmonischen Anteile  $\mathcal{H}(\omega)$  zerlegt werden kann.  $\mathcal{H}(\omega)$  bezeichnet man als *Spektrum* des Signals  $h(t)$ .

$$\mathcal{H}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{i\omega t} dt \quad (2.29)$$

$\mathcal{H}(\omega)$  ist im Allgemeinen eine komplexe Funktion, die angibt, welche harmonischen Anteile  $e^{i\omega t}$  das Signal  $h(t)$  besitzt. Die Amplitude von Wellen im Frequenzband  $[\omega, \omega + \delta\omega]$  beträgt  $|\mathcal{H}(\omega)|\delta\omega/2\pi$ . Deren Phase ist durch  $\arg(\mathcal{H}(\omega))$  gegeben und bezieht sich auf den zeitlichen Beginn der Messreihe.

Die inverse Fouriertransformation (2.30) erlaubt eine Rekonstruktion des Signals  $h(t)$  bei bekanntem Spektrum  $\mathcal{H}(\omega)$ .

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (2.30)$$

Ein reelles Signal  $h(t)$  lässt sich bei bekanntem Spektrum  $\mathcal{H}(\omega)$  durch eine Summe von Funktionen

$$\delta\omega \frac{|\mathcal{H}(\omega)|}{2\pi} \cos(\omega t + \arg(\mathcal{H}(\omega))) \quad (2.31)$$

annähern.

## 2.6 Ebene Wellen in einem bewegten Medium

Bewegt sich das Trägermedium der Welle mit der Strömungsgeschwindigkeit  $\bar{u}$  entsprechend der Machzahl  $M = \bar{u}/c$  in Richtung der positiven  $x$ -Achse, so wird die Ausbreitung von Wellen in einem mit der Strömung mitbewegten System weiterhin durch die Kontinuitätsgleichung (2.5) und die Impulsgleichung (2.7) beschrieben. Um die Wellengleichung für das ruhende Laborsystem aufzustellen, untersuchen wir, welchen Effekt die Transformation der mitbewegten Koordinaten  $(\hat{x}, \hat{t})$  auf das ruhende Laborsystem  $(x, t)$

$$x = \hat{x} + \bar{u}\hat{t} \quad (2.32)$$

$$t = \hat{t} \quad (2.33)$$

auf die partiellen Ableitungen in den Gleichungen (2.5) und (2.7) hat. Für die räumliche Ableitung einer beliebigen Funktion  $\varphi(\hat{x}, \hat{t})$  von Raum und Zeit erhalten wir durch Anwendung der Kettenregel die Beziehung (2.34).

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \hat{x}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2.34)$$

Die Transformation (2.32) und (2.33) hat also keine Auswirkungen auf die räumliche Ableitung. Für die Ableitung nach der Zeit erhalten wir das Transformationsverhalten (2.35).

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial \hat{t}} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad (2.35)$$

Die zeitliche Ableitung bleibt unter der Transformation (2.32) und (2.33) nicht invariant und transformiert gemäß (2.35). Die Gleichungen (2.5) und (2.7) für Massen- und Impulserhaltung werden somit in das Laborsystem transformiert, wenn man darin alle partiellen Ableitungen nach der Zeit durch den Operator der so genannten *substantiellen Ableitung*

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.36)$$

ersetzt. Die lineare, eindimensionale Wellengleichung der Ausbreitung ebener Wellen in einem bewegten Medium lautet somit im Laborsystem

$$\left[ \frac{1}{c^2} \frac{D^2}{Dt^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] p' = \left[ \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] p' = 0 \quad (2.37)$$

Die Lösungen (2.38) von Gleichung (2.37) für harmonische Druckwellen spiegeln die durch die Durchströmung auftretende Asymmetrie des Problems wieder.

$$p'(x, t) = \bar{\rho} c \left( \tilde{f}_0 e^{\frac{ikx}{1+M}} + \tilde{g}_0 e^{\frac{ikx}{1-M}} \right) e^{i\omega t} \quad (2.38)$$

Gleichung (2.38) lässt sich so interpretieren, dass Wellen in positiver  $x$ -Richtung mit der Geschwindigkeit  $c + \bar{u}$  laufen, während Wellen in negativer  $x$ -Richtung gegen die Strömung ankämpfen müssen und daher nur langsamer mit der Geschwindigkeit  $c - \bar{u}$  vorwärts kommen. Die symmetrischen Lösungen (2.27) für die Wellenausbreitung in einem ruhenden Medium finden sich in (2.38) für  $M = 0$  wieder.

Bei den in Kapitel 5 besprochenen Experimenten traten an der engsten Stelle des Brenners nur geringe Machzahlen bis etwa  $M = 0.1$  auf, so dass der Einfluss der Strömungsgeschwindigkeit auf das akustische Verhalten des Brenners nur gering war. Dies wurde auch durch eine Vergleichsmessung mit unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten (siehe Kapitel 5.3.2) bestätigt.

## 2.7 Dämpfende Effekte

Bei Strömungen realer Medien beobachtet man *Viskosität* als Folge der inneren Reibung, wenn benachbarte Schichten des Mediums unterschiedliche Strömungsgeschwindigkeiten haben, also normal zur Strömungsrichtung ein Geschwindigkeitsgefälle besteht. Die Viskosität wird als Zähigkeit des Mediums erlebt und hat auf Wellen beim Durchlaufen des Mediums einen dämpfenden Einfluss. Die Viskosität ist stark temperaturabhängig und in Flüssigkeiten üblicherweise deutlich höher als in Gasen. Neben der Viskosität wirkt weiters die *Wärmeleitung* des Trägermediums dämpfend auf die Ausbreitung von Schallwellen. Die Dämpfung von frei laufenden Schallwellen spielt in Luft bei atmosphärischen Bedingungen nur eine geringe Rolle. Eine Schallwelle mit einer Frequenz von 1 kHz muss in der Atmosphäre etwa 10 km weit laufen, damit ihre Intensität auf ein Drittel des ursprünglichen Wertes absinkt [MI68].

In der Nähe von Oberflächen haben Viskosität und Wärmeleitung durch das Entstehen einer Grenzschicht an der Oberfläche und die üblicherweise wesentlich höhere Wärmeleitung in der Wand jedoch einen viel stärkeren Einfluss. Auch Turbulenz erhöht die Dämpfung von Schallwellen<sup>11)</sup>. Durch die Berücksichtigung von Verlusten erhält die Wellenzahl  $k_{vt}$  im Vergleich zur verlustfreien Wellenzahl  $k = \omega/c$  eine kleine imaginäre Komponente, die Dämpfungskonstante  $\alpha_{vt}$ , die sich in einer exponentiellen Abdämpfung der Welle auswirkt.

$$k_{vt} = \frac{\omega}{c} + \alpha_{vt}(1 - i) = \frac{\omega}{c} - i\alpha_{vt} \quad (2.39)$$

[Tij75] gibt einen Überblick über die geschichtliche Entwicklung der Theorien zur Wellenausbreitung in Rohren. Aufbauend auf die Arbeiten von Stokes und Helmholtz gelang es Kirchhoff [Kir68] erstmals Mitte des 19. Jahrhunderts, die Ausbreitung von Wellen in Rohren unter Berücksichtigung der Viskosität und Wärmeleitung theoretisch zu beschreiben. In Röhren wird der Einfluss viskoser Effekte durch das dimensionslose Verhältnis  $r_v$  von Radius  $a$  des Rohres und Dicke der viskosen Grenzschicht in (2.40) charakterisiert [Ben68, Kee84, RF94].

$$r_v = a \left( \frac{\rho\omega}{\eta_v} \right)^{1/2} \quad (2.40)$$

Dabei gibt  $\eta_v$  die dynamische Zähigkeit des Mediums an. Ein Maß für die relative Stärke thermischer Effekte liefert das Verhältnis  $r_t$  von Innenradius und

---

<sup>11)</sup> In vielen Fällen kann Turbulenz durch Berücksichtigung einer überlagerten *turbulenten Viskosität* modelliert werden [Pop00].

Dicke der thermischen Grenzschicht in (2.41), wobei  $\kappa$  die Wärmeleitfähigkeit und  $c_p$  die spezifische Wärmekapazität des Mediums bezeichnen.

$$r_t = a \left( \frac{\rho \omega c_p}{\kappa} \right)^{1/2} \quad (2.41)$$

Das Verhältnis aus der Dicke von thermischer und viskoser Grenzschicht entspricht der Quadratwurzel der Prandtl-Zahl  $Pr$  [Ben68, Kee84].

$$\frac{r_t}{r_v} = (Pr)^{1/2} = \left( \frac{\eta_v c_p}{\kappa} \right)^{1/2} \quad (2.42)$$

Rayleigh [Ray45] entwickelte aufbauend auf Kirchhoffs Theorie Näherungslösungen für die Grenzfälle tiefer Frequenzen und/oder enger Röhren ( $r_v \ll 1$ ) und hoher Frequenzen und/oder dicker Rohrdurchmesser ( $r_v \gg 1$ ), die für viele praktische Anwendungen eine vereinfachte Berechnung gestatten. Eine ausführliche Darstellung findet sich bei Morse [MI68]. Pierce [Pie81] gibt Rayleighs Approximationen für dicke und dünne Kanäle wieder.

Analytische Lösungen für die Ausbreitung von Schallwellen in Röhren unter Berücksichtigung der Dämpfung durch Viskosität und Wärmeleitung werden von Benade [Ben68], Tijdeman [Tij75], Keefe [Kee84] und Davies [Dav88] diskutiert. Diese Autoren besprechen weiters verschiedene Näherungslösungen und deren Anwendbarkeit.

Wie der Vergleich von akustischen Netzwerkmodellen mit Messungen in Kapitel 5 zeigen wird, spielen akustische Verluste bei den vermessenen Geometrien eine wesentliche Rolle. Insbesondere bei plötzlichen Querschnittserweiterungen in Strömungsrichtung müssen diese Verluste in Form der Transfermatrix des kompakten Elements mit Verlusten aus Kapitel 5.1.1 unbedingt berücksichtigt werden, um eine gute Übereinstimmung von akustischen Netzwerkmodellen mit experimentellen Resultaten zu erlangen.

## 3 Charakterisierung akustischer Elemente

### 3.1 Elektrische und akustische Zweitore

#### 3.1.1 Elektromechanische Analogien

Aufgrund der Analogien zwischen akustischen, mechanischen und elektrischen Netzwerken [Ols58, Len01], finden ähnliche mathematische Verfahren in so unterschiedlichen Fachdisziplinen wie Optik, Elektrotechnik und Mikrowellentechnik Anwendung. Matrizenmethoden verwendet man beispielsweise bei der Berechnung von Mehrlinsensystemen [Bro57, Bro64], in der Polarisationsoptik [Hec89, O’N63], in der Rohrakustik [Pie81, Mun87, Len01], bei der Auslegung von Mikrowellen-Systemen [Col66, BB91] oder bei der Beschreibung elektronischer Schaltkreise [BB69, Phi00].

Die Theorie der *Zweitore* [BB69, Sch91, BB91, FHN97, Phi00] ist in der Elektrotechnik eine Standardmethode für die Beschreibung von Netzwerken. Die vielfältigen Analogien zwischen akustischen und elektrischen Netzwerken erlauben eine Übertragung von Konzepten aus der Elektrotechnik in den Bereich der akustischen Modellierung [Len01]. Wie sich zeigt, eignen sich Zweitore auch für die Beschreibung akustischer Netzwerke.

#### 3.1.2 Zweitore in der Elektrotechnik

In der Elektrotechnik wird ein Netzwerk passiver Elemente durch Angabe von Strom und Spannung an zwei Punkten des Netzwerks, den Toren, charakterisiert. Abbildung 3.1 zeigt die schematische Darstellung eines elektrischen Zweitores. Die linke Seite des Zweitores bezeichnet man als Eingang, die rechte als Ausgang. Der Zustand an Eingang und Ausgang des Zweitores kann durch Angabe von je zwei *Zustandsvariablen* vollkommen beschrieben werden. In der Elektrotechnik verwendet man üblicherweise die Zustandsvariablen Strom und Spannung. Fasst man zwei Zustandsvariablen zu einem Vektor zusammen, erhält man einen *Zustandsvektor*.

Mathematisch wird das Zweitor durch eine  $2 \times 2$  Matrix, die man als *Vierpol* bezeichnet, dargestellt<sup>12)</sup>. Die Leitwertform der Vierpolgleichung ist in (3.1) wiedergegeben.

$$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \equiv \underbrace{\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix}}_{\text{Leitwertmatrix } \mathbf{Y}} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

<sup>12)</sup> Das Konzept der Matrix geht auf Cayley zurück, der Matrizen im Jahr 1857 für die Beschreibung linearer Gleichungssysteme einführte [GB75].

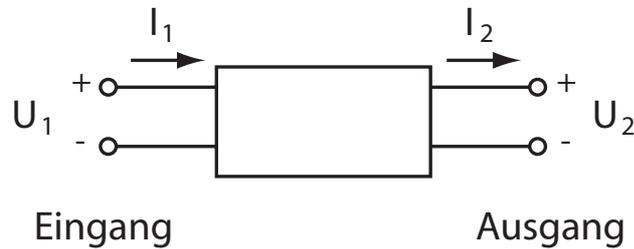


Bild 3.1: Zweitore der Elektrotechnik (nach [BB69])

Die Leitwertmatrix  $\mathbf{Y}$  stellt eine Verbindung zwischen einem Zustandsvektor der Ströme  $I_1$  und  $I_2$  und einem Zustandsvektor der Spannungen  $U_1$  und  $U_2$  her. Die Elemente des Vierpols besitzen im Allgemeinen eine Frequenzabhängigkeit. Neben der Leitwertform existieren noch andere Darstellungen, je nachdem welche Kombinationen der Variablen  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $U_1$  und  $U_2$  in den Zustandsvektoren verwendet werden. Tabelle 3.1 zeigt eine Übersicht in der Elektrotechnik gebräuchlicher Vierpoldarstellungen (Elementarvierpole). Die verschiedenen Darstellungen des Zweitors sind äquivalent und lassen sich problemlos ineinander umrechnen [Sch91]. In Abhängigkeit von der konkreten Problemstellung ist es vorteilhafter, mit der einen oder anderen Darstellung zu arbeiten.

Ein Zweitor bildet ein lineares System. Sind die Transformationseigenschaften des Zweitors für eine Basis bekannt, so kann die Transformation jedes anderen Zustandsvektors durch Linearkombination der Transformaten der Basis ermittelt werden.

### 3.1.3 Zweitore in der Akustik

Akustische Systeme lassen sich ebenfalls mit Hilfe von Zweitoren beschreiben. Analog zur Vorgehensweise in der Elektrotechnik wird dabei ein akustisches Element durch die Transformation der akustischen Zustandsvektoren über das Element vollständig charakterisiert. Als Zustandsvariablen kommen alternativ der Druck  $p'$  und die Schnelle  $u'$  oder die Riemann Invarianten  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  in Frage. Diese beiden Sätze von Zustandsvariablen lassen sich mit Hilfe der Beziehungen (2.21) und (2.22) ineinander überführen.

Von zentralem Interesse für die Anwendung von Matrizen auf Probleme der Akustik oder Elektrotechnik sind ihre Multiplikationseigenschaften. Ist es möglich, die Transformationseigenschaften zweier Elemente durch zwei Vierpole  $A$  und  $B$  zu beschreiben, so liefert das Produkt  $B \cdot A$  den Vierpol des zusammengesetzten Systems. Konsequenterweise erlaubt die Kombina-

Bezeichnung	Definitionsgleichung
Leitwertform	$\begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$
Widerstandsform	$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$
Hybridform	$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$
Kettenform	$\begin{pmatrix} U_1 \\ I_1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} U_1 \\ -I_2 \end{pmatrix}$

Tabelle 3.1: Elementarvierpole der Elektrotechnik (nach [Sch91])

tion mehrerer, vorzugsweise analytisch fassbarer Vierpole die Beschreibung ausgesprochen komplexer Systeme. Eine wichtige Voraussetzung für die Kombination mehrerer akustischer Vierpole ist allerdings die strömungsmechanische Unabhängigkeit der einzelnen Elemente. Spielt das akustische Nahfeld in den Ebenen von Eingang und Ausgang des Vierpols nur eine untergeordnete Rolle und sind die aus dem Element auslaufenden Wellenfronten eben, so können die Elemente problemlos kombiniert werden. Beeinflussen sich die einzelnen Komponenten eines Systems gegenseitig, weil die Elemente etwa räumlich nahe aneinander liegen, kann das Gesamtsystem nicht als Summe unabhängiger Elemente beschrieben werden und die gegenseitige Beeinflussung der Elemente muss berücksichtigt werden. Vielfach versucht man dann, diese Effekte durch Korrekturterme auszugleichen, um die bequeme Matrixschreibweise nicht aufgeben zu müssen.

Um das akustische Verhalten technischer Anlagen zu modellieren, stellt man diese in Form eines Netzwerks von passiven akustischen Elementen<sup>13)</sup> dar [Pie81, Mun87]. Den Grundbaustein bilden dabei Rohrstücke, die durch

<sup>13)</sup> Man unterscheidet zwischen aktiven und passiven Zweipolen. Aktive Zweipole geben Energie ab, während passive Zweipole Energie aufnehmen. Ein Akkumulator ist ein Beispiel für einen elektrischen Zweipol, der je nach Zustand sowohl aktiv als auch passiv sein kann [FHN97].

Flächensprünge, Bogensegmente, T-Kreuzungen usw. verbunden werden.

Bei der Beschreibung akustischer Netzwerke wollen wir uns weiterhin ausschließlich auf ebene Wellen beschränken. Diese Beschränkung ermöglicht es, überschaubare analytische Beziehungen für die Eigenschaften der wichtigsten akustischen Elemente abzuleiten. Im den folgenden Abschnitten wollen wir uns näher mit der Beschreibung passiver akustischer Elemente durch Zweipole befassen.

### 3.1.4 Darstellungen akustischer Vierpole

Nun wollen wir einen konkreten Satz von Zustandsvariablen wählen. Für die Beschreibung akustischer Eigenschaften bilden Zustandsvektoren aus den Fouriertransformierten von Druck  $p'$  und Schnelle  $u'$  eine sinnvolle Wahl, da diese Größen üblicherweise in der theoretischen Beschreibung verwendet werden und experimentelle Methoden existieren, um Druck und Schnelle direkt zu bestimmen. Einen weiteren gebräuchlichen Satz von Zustandsvektoren stellen die Riemann Invarianten  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  dar.

Je nach Wahl der betrachteten Variablen erhält man unterschiedliche Darstellungen des Transferverhaltens eines akustischen Elements. Die Vierpoldarstellung stellt eine mathematische Beschreibung der physikalischen Vorgänge beim Durchgang ebener Wellen durch das Element dar. Das physikalische Verhalten des Elements ist unabhängig von der Wahl einer bestimmten Darstellung. Wie in der Elektrotechnik ist auch in der Akustik je nach Art des beschriebenen Elements die eine oder andere Wahl einer Vierpoldarstellung besser auf ein konkretes Problem angepasst. Tabelle 3.2 stellt einige gebräuchliche akustische Vierpoldarstellungen zusammen. Die *Transfermatrix* eignet sich besonders für die Beschreibung akustischer Netzwerke, in denen akustische Elemente in Serie geschaltet werden, wie etwa im Abstrakt von Automobilen [Mun87]. Die *Streumatrix* ist vorteilhaft bei der Beschreibung von Netzwerken mit vielen Verzweigungen<sup>14)</sup>. Die Stärken der *Mobilitätsmatrix* liegen schließlich in der Modellierung von Netzwerken mit parallel gekoppelten Elementen [Åbo91].

**Transfermatrix in  $pu$  Darstellung** Die Transfermatrix beschreibt das Übertragungsverhalten von Zustandsvektoren  $(p'/\bar{\rho}c, u')^T$  zwischen den Definitionsebenen  $u$  (upstream) und  $d$  (downstream) eines akustischen Elements. Die Definitionsgleichung (3.2) der Transfermatrix  $\mathbf{T}_{pu}$  in  $pu$  Darstellung lautet

<sup>14)</sup> Die Streumatrix ist auch in anderen Bereichen der Physik verbreitet, zum Beispiel in der Quantenmechanik.

Bezeichnung	Zustandsvariable	Definitionsgleichung
Transfermatrix in $pu$ Darstellung	$p', u'$	$\begin{pmatrix} p'/\bar{\rho}c \\ u' \end{pmatrix}_d \equiv \mathbf{T}_{pu} \cdot \begin{pmatrix} p'/\bar{\rho}c \\ u' \end{pmatrix}_u$
Transfermatrix in $fg$ Darstellung	$\tilde{f}, \tilde{g}$	$\begin{pmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{g} \end{pmatrix}_d \equiv \mathbf{T}_{fg} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{g} \end{pmatrix}_u$
Streumatrix	$\tilde{f}, \tilde{g}$	$\begin{pmatrix} \tilde{f}_d \\ \tilde{g}_u \end{pmatrix} \equiv \mathbf{S}_{fg} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{f}_u \\ \tilde{g}_d \end{pmatrix}$
Mobilitätsmatrix	$p', u'$	$\begin{pmatrix} u'_u \\ u'_d \end{pmatrix} \equiv \mathbf{M}_{pu} \cdot \begin{pmatrix} p'_u/\bar{\rho}c \\ p'_d/\bar{\rho}c \end{pmatrix}$

Tabelle 3.2: Vierpoldarstellungen akustischer Zweitore

$$\begin{pmatrix} p' \\ \bar{\rho}c \\ u' \end{pmatrix}_d \equiv \underbrace{\begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix}}_{\text{Transfermatrix } \mathbf{T}_{pu}} \cdot \begin{pmatrix} p' \\ \bar{\rho}c \\ u' \end{pmatrix}_u \quad (3.2)$$

Die Transfermatrix  $\mathbf{T}_{pu}$  verknüpft entsprechend Abbildung 3.2 den Zustandsvektor  $(p'/\bar{\rho}c, u')_u^T$  aus Druck  $p'_u$  und Schnelle  $u'_u$  in der Referenzebene  $\mathcal{R}_u$  am Eingang des akustischen Zweitores (upstream) mit dem Zustandsvektor  $(p'/\bar{\rho}c, u')_d^T$  der entsprechenden Größen  $p'_d$  und  $u'_d$  in der Referenzebene  $\mathcal{R}_d$  am Ausgang des akustischen Zweitores (downstream). Wie bei Zweitoren üblich, geht die Beschreibung durch akustische Vierpole in den verschiedenen Darstellungen nicht auf die detaillierten physikalischen Vorgänge in dem beschriebenen Element ein, sondern begnügt sich damit anzugeben, wie Zustandsvektoren über die Systemgrenzen des akustischen Elements propagieren.

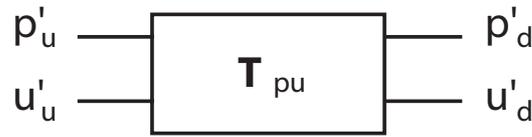


Bild 3.2: Die Transfermatrix  $\mathbf{T}_{pu}$  beschreibt das Transformationsverhalten der akustischen Größen  $p'$  und  $u'$  zwischen Eingang  $u$  und Ausgang  $d$  des akustischen Zweiters.

**Transfermatrix in  $fg$  Darstellung** Die Transfermatrix in  $pu$  Darstellung charakterisiert das akustische Element durch Angabe der Transformationseigenschaften von Zustandsvektoren  $(p'/\bar{\rho}c, u')^T$ . Wie in Abbildung 3.3 skizziert, besteht eine weitere Möglichkeit darin, das akustische Element durch Angabe des Übertragungsverhaltens für Zustandsvektoren  $(\tilde{f}, \tilde{g})^T$  aus den Riemann Invarianten zu beschreiben.

$$\begin{pmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{g} \end{pmatrix}_d \equiv \mathbf{T}_{fg} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{f} \\ \tilde{g} \end{pmatrix}_u \quad (3.3)$$

Man erhält damit die Transfermatrix  $\mathbf{T}_{fg}$  in  $fg$  Darstellung.

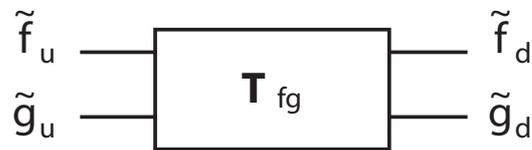


Bild 3.3: Die Transfermatrix  $\mathbf{T}_{fg}$  in  $fg$  Darstellung beschreibt das Transformationsverhalten der Riemann Invarianten  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  zwischen Eingang  $u$  und Ausgang  $d$  des akustischen Zweiters.

Die Wahl der Referenzebenen  $\mathcal{R}_u$  und  $\mathcal{R}_d$ , also der räumlichen Lage von Eingang und Ausgang des akustischen Zweiters, ist immer integraler Bestandteil der Definition einer speziellen Transfermatrix. Transfermatrizen für unterschiedlich gewählte Referenzebenen  $\mathcal{R}_u$  und  $\mathcal{R}_d$  sind nicht direkt vergleichbar. Wie sich zeigt, sind Spur und Determinante der Vierpoldarstellung invariant gegenüber räumlicher Verschiebung und Änderung des Abstands<sup>15)</sup>

<sup>15)</sup> Änderungen des Abstandes der Referenzebenen  $\mathcal{R}_u$  und  $\mathcal{R}_d$  werden im weiteren kurz als Kontraktionen bezeichnet, auch wenn sich der Abstand gegebenenfalls vergrößert. Die Transformationseigenschaften von Transfermatrizen unter räumlicher Verschiebung und Kontraktion der Referenzebenen, sodass  $\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_d$ , werden in Anhang D diskutiert.

der Referenzebenen. Auch linearen Koordinatentransformationen zwischen unterschiedlichen Basen von Zustandsvektoren, etwa der Übergang zwischen  $pu$  und  $fg$  Darstellung, haben keine Auswirkungen auf Spur und Determinante der Vierpoldarstellung.

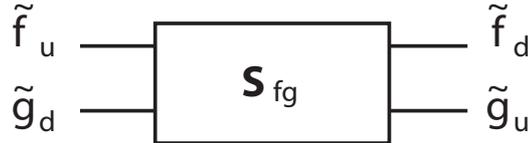


Bild 3.4: Die Streumatrix  $\mathbf{S}_{fg}$  koppelt in das Element einlaufende und daraus auslaufende Wellen. Die Bezugsebenen  $\mathcal{R}_u$  und  $\mathcal{R}_d$  werden für die Riemann Invarianten  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  in Abbildung 3.5 am Beispiel des Rohrs dargestellt.

**Die Streumatrix** Eine ebenfalls gebräuchliche Darstellung für das akustische Übertragungsverhalten ist die Streumatrix  $\mathbf{S}_{fg}$  des akustischen Elements. Dabei betrachtet man, wie in Abbildung 3.4 dargestellt, die aus beiden Richtungen auf das Element zulaufenden Wellen  $\tilde{f}_u$  und  $\tilde{g}_d$ . Die Interaktion der Wellen mit dem akustischen Element wird in Anlehnung an die Quantenmechanik<sup>16)</sup> im Sinne eines Streuprozesses interpretiert. In das Element einlaufende Wellen werden in einen weiterlaufenden (transmittierten) und einen zurückgeworfenen (reflektierten) Anteil gestreut.

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_d \\ \tilde{g}_u \end{pmatrix} \equiv \mathbf{S}_{fg} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{f}_u \\ \tilde{g}_d \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

Die gestreute Welle  $\tilde{f}_d$  setzt sich aus einem transmittierten Anteil von  $\tilde{f}_u$  und einem reflektierten Anteil von  $\tilde{g}_d$  zusammen. Analog ist  $\tilde{g}_u$  eine Superposition aus dem transmittierten Anteil von  $\tilde{g}_d$  und einem reflektierten Anteil von  $\tilde{f}_u$ .

$$\begin{aligned} \tilde{f}_d &= t_{ud}\tilde{f}_u + r_{du}\tilde{g}_d \\ \tilde{g}_u &= r_{ud}\tilde{f}_u + t_{du}\tilde{g}_d \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ein Vorteil der Streumatrixdarstellung ist die vollkommene Entkopplung der einlaufenden und auslaufenden Wellen. Dadurch bleibt im Gegensatz zu der Transfermatrixdarstellung die Kausalität des Problems erhalten. Diese Eigenschaft wollen wir später für die Zeitbereichsanalyse von akustischen Elementen nutzen. Zudem können damit die Elemente der Streumatrix mit Hilfe

<sup>16)</sup> vergleiche [Mes91]

der Transmissionskoeffizienten  $t_{ud}$  und  $t_{du}$  sowie der Reflexionskoeffizienten  $r_{ud}$  und  $r_{du}$  der beiden Streuprozesse in Richtung  $ud$  und  $du$  physikalisch sehr anschaulich interpretiert werden (3.6).

$$\mathbf{S}_{fg} = \begin{pmatrix} t_{ud} & r_{du} \\ r_{ud} & t_{du} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

### 3.1.5 Transformationen zwischen den Darstellungen

**Transfermatrix in  $pu$  und  $fg$  Darstellung** Der Wechsel zwischen den Zustandsvektoren  $(p'/\bar{\rho}c, u')^T$  und  $(\tilde{f}, \tilde{g})^T$  entspricht aufgrund der Linearität von (2.21) und (2.22) einer linearen Koordinatentransformation [BW90b]. Somit lassen sich die Transfermatrizen  $\mathbf{T}_{pu}$  und  $\mathbf{T}_{fg}$ , wie in Gleichung (3.7) und (3.8) dargestellt, mit Hilfe der Transformationsmatrix  $\mathbf{\Omega}$

$$\mathbf{T}_{fg} = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{T}_{pu} \cdot \mathbf{\Omega}^{-1} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{T}_{pu} = \mathbf{\Omega}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{fg} \cdot \mathbf{\Omega} \quad (3.8)$$

ineinander überführen. Für die Matrix  $\mathbf{\Omega}$  der Koordinatentransformation erhält man aufgrund von (2.21) und (2.22) die Form (3.9).

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}^{-1} \quad (3.9)$$

**Transfermatrix in Streumatrix** Für die Umrechnung zwischen der Transfermatrix  $\mathbf{T}_{fg}$  in  $fg$  Darstellung und der Streumatrix  $\mathbf{S}_{fg}$  leitet man die folgende Vorschrift (3.11) her: Wird die Transfermatrix  $\mathbf{T}_{fg}$  durch die Elemente  $A_{fg}, B_{fg}, C_{fg}$  und  $D_{fg}$  aus (3.10) dargestellt,

$$\mathbf{T}_{fg} = \begin{pmatrix} A_{fg} & B_{fg} \\ C_{fg} & D_{fg} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

so errechnet man durch Umformung des Gleichungssystems (3.3) nach  $\tilde{f}_d$  und  $\tilde{g}_u$  die zu  $\mathbf{T}_{fg}$  gehörige Streumatrix  $\mathbf{S}_{fg}$  mit Hilfe der Transformation (3.11).

$$\mathbf{S}_{fg} = \frac{1}{D_{fg}} \begin{pmatrix} A_{fg}D_{fg} - B_{fg}C_{fg} & B_{fg} \\ -C_{fg} & 1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

Für die Rücktransformation von  $\mathbf{S}_{fg}$  nach  $\mathbf{T}_{fg}$  verwendet man wieder die Transformation (3.11), jedoch mit dem Unterschied, dass die Größen  $A_{fg}$  bis  $D_{fg}$  nun die Elemente der Streumatrix bezeichnen<sup>17)</sup>.

<sup>17)</sup> Wie man durch Vergleich mit Gleichung (3.11) erkennt, entsprechen diagonalen Transfermatrizen  $\mathbf{T}_{fg}$  immer diagonale Streumatrizen  $\mathbf{S}_{fg}$  und umgekehrt.

**Transfermatrix in Mobilitätsmatrix** Den Zusammenhang zwischen der Transfermatrix  $\mathbf{T}_{pu}$  und der Mobilitätsmatrix  $\mathbf{M}_{pu}$  berechnet man ganz ähnlich. Stellen  $A_{pu}, B_{pu}, C_{pu}$  und  $D_{pu}$  die Elemente der Transfermatrix  $\mathbf{T}_{pu}$  dar, so leitet man die Transformation zwischen Transfermatrix- und Mobilitätsmatrixdarstellung durch Umformung der Definitionsgleichung (3.2) ab und erhält

$$\mathbf{M}_{pu} = \frac{1}{B_{pu}} \begin{pmatrix} -A_{pu} & 1 \\ B_{pu}C_{pu} - A_{pu}D_{pu} & D_{pu} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

### 3.2 Zeitbereichsanalyse von Streumatrizen

In den folgenden Abschnitten wollen wir die Streumatrizen einfacher akustischer Elemente aus einer Zeitbereichsanalyse herleiten. Dazu sendet man von einer Seite einen Dirac-Impuls  $\delta(t)$  in das System und betrachtet die Einheitsimpulsantworten an den Ausgängen für reflektierte und transmittierte Anteile. Die Dirac'sche Deltafunktion  $\delta(t)$  bietet sich als Anregungssignal an<sup>18)</sup>, da sie den gesamten Frequenzbereich abdeckt und gleichzeitig besonders einfache Integrationseigenschaften besitzt.

Nach einem Theorem aus der Signaltheorie kann man lineare, zeitinvariante Systeme sowohl durch Angabe der Einheitsimpulsantwort  $h(t)$  als auch der Transferfunktion  $T(\omega)$  charakterisieren. Diese beiden Beschreibungen lassen sich nach Gleichung (3.15) ineinander überführen [Ise91, Car95, Yue03, CB80a, CB80b].

$$T(\omega) = \mathcal{H}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-i\omega t} dt \quad (3.15)$$

Demnach entspricht die Transferfunktion  $T(\omega)$  der Fouriertransformierten der Einheitsimpulsantwort  $h(t)$ . Ein Vergleich mit Gleichung (2.29) zeigt,

<sup>18)</sup> Die Dirac'sche Deltadistribution  $\delta(t)$  besitzt die wichtige Eigenschaft

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\phi(t)dt = \phi(0) \quad (3.13)$$

$\phi(t)$  ist eine beliebige, integrierbare Funktion der Zeit. Insbesondere gilt

$$\phi(t)\delta(t-\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-\tau)\phi(t)dt = \phi(\tau) \quad (3.14)$$

Für eine strengere Definition der Dirac'schen Deltadistribution  $\delta(t)$  sei auf [BW90b, BS95] verwiesen.

dass die Transferfunktion  $T(\omega)$  das Frequenzspektrum der Einheitsimpulsantwort  $h(t)$  darstellt<sup>19)</sup>.

Die Streumatrizen einfacher Geometrien können somit durch Anwendung von Einheitsimpulsen  $\delta(t)$  aus einigen einfachen und sehr anschaulichen Überlegungen im Zeitbereich direkt hergeleitet werden. Diese Betrachtungsweise erlaubt einige interessante Interpretationen der ablaufenden physikalischen Vorgänge.

### 3.2.1 Streumatrix eines Rohrabschnitts

Im Folgenden soll anhand von Abbildung 3.5 die Streumatrix für ein Rohrstück der Länge  $l$  betrachtet werden. Der Zusammenhang zwischen Streumatrix und Einheitsimpulsantwort ist im Fall des Rohrs besonders transparent.

Das Rohrstück leitet jedes am Eingang einlaufende Signal mit einem Zeitverzug  $l/c$  an den Ausgang weiter. Da die Impedanz entlang der gesamten Rohrstrecke konstant bleibt wird das Signal nicht teilweise reflektiert. Schickt man links einen Puls  $\delta(t)$  in Richtung von  $\tilde{f}_u$  in das Element kommt dieser nach einer Laufzeit  $l/c$  am anderen Ende des Rohres an, somit wird  $\tilde{f}_d$  durch  $\delta(t - l/c)$  beschrieben. Aufgrund des verschwindenden Reflexionsfaktors wird auf  $\tilde{g}_u$  nichts übertragen, somit gilt  $\tilde{g}_u = 0$ .

Da die Anordnung symmetrisch ist, gilt in umgekehrter Richtung für Pulse, die auf der rechten Seite in Richtung von  $\tilde{g}_d$  eingespeist werden dasselbe. Somit erhält man für die Matrix  $\mathbf{H}(t)$  der Einheitsimpulsantworten den Ausdruck (3.16).

$$\mathbf{H}(t) = \begin{pmatrix} \delta(t - l/c) & 0 \\ 0 & \delta(t - l/c) \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Transformiert man die zeitabhängige Matrix der Einheitsimpulsantworten (3.16) mit Hilfe der Fouriertransformation (3.15) in den Frequenzraum, so erhält man die zugehörige frequenzabhängige Streumatrix (3.18). Für die nichtverschwindenden Diagonalelemente von (3.16) errechnet man

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - l/c) e^{-i\omega t} dt = e^{-i\omega l/c} = e^{-ikl} \quad (3.17)$$

Somit ergibt sich für die Streumatrix eines Rohrstücks die in Gleichung (3.18) angegebene Form.

---

<sup>19)</sup> Diese Aussage stellt wegen  $\mathcal{I}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$  und  $\mathcal{O}(\omega) = \mathcal{H}(\omega)$  eine alternative Formulierung von Gleichung (1.3) dar.

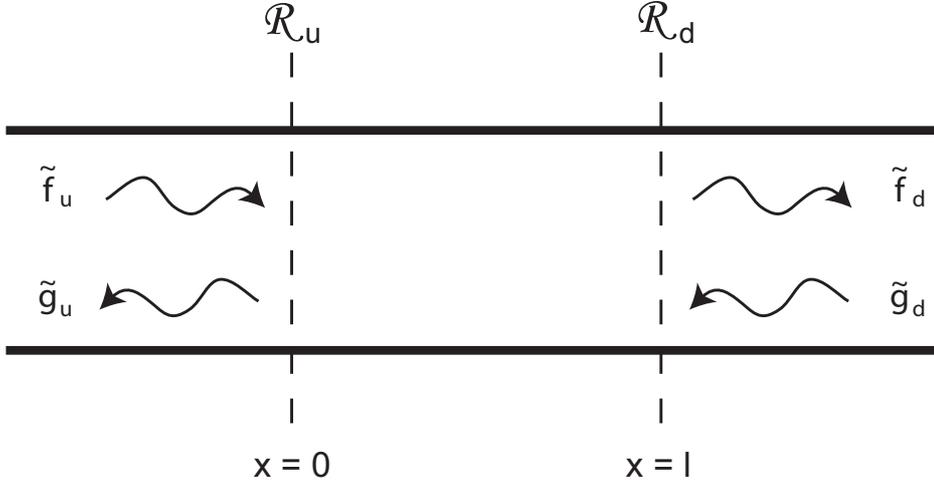


Bild 3.5: Die einlaufende Welle  $\tilde{f}_u$  am Eingang des Elements wird mit einem Zeitverzug  $l/c$  an den Ausgang  $\tilde{f}_d$  weitergereicht.

$$\mathbf{S}_{fg} = \begin{pmatrix} e^{-ikl} & 0 \\ 0 & e^{-ikl} \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

Im Fall des Rohres erhält man die Streumatrix (3.18) alternativ durch Transformation der Transfermatrix  $\mathbf{T}_{pu}$  eines Rohrstücks der Länge  $l$ , die sich direkt aus den Gleichungen (2.27) und (2.28) für harmonische Wellen ableiten lässt. Setzt man in Gleichung (2.27) ein, so erhält man für den Druck  $p'(x+l, t)$  am rechten Rand des Rohrstücks

$$\begin{aligned} \frac{p'(x+l, t)}{\bar{\rho}c} &= [\tilde{f}_0 e^{ik(x+l)} + \tilde{g}_0 e^{-ik(x+l)}] e^{i\omega t} = \\ &= [\tilde{f}_0 e^{ikx} e^{ikl} + \tilde{g}_0 e^{-ikx} e^{-ikl}] e^{i\omega t} = \\ &= [\tilde{f}_0 e^{ikx} (\cos(kl) + i \sin(kl)) + \tilde{g}_0 e^{-ikx} (\cos(kl) - i \sin(kl))] e^{i\omega t} = \\ &= \underbrace{[\tilde{f}_0 e^{ikx} + \tilde{g}_0 e^{-ikx}] \cos(kl)}_{p'(x,t)/\bar{\rho}c} + \underbrace{[\tilde{f}_0 e^{ikx} - \tilde{g}_0 e^{-ikx}] i \sin(kl)}_{u'(x,t)} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

Für die Schnelle  $u'(x+l, t)$  am rechten Rand des Rohrstücks errechnet man mit Rückgriff auf (2.28) und unter Auslassung der Zwischenschritte

$$\begin{aligned} u'(x+l, t) &= [\tilde{f}_0 e^{ik(x+l)} - \tilde{g}_0 e^{-ik(x+l)}] e^{i\omega t} = \dots = \\ &= \underbrace{[\tilde{f}_0 e^{ikx} - \tilde{g}_0 e^{-ikx}] i \sin(kl)}_{u'(x,t)/\bar{\rho}c} + \underbrace{[\tilde{f}_0 e^{ikx} + \tilde{g}_0 e^{-ikx}] \cos(kl)}_{p'(x,t)} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

und erhält somit die zu (3.18) äquivalente Transfermatrix

$$\mathbf{T}_{\text{pu}} = \begin{pmatrix} \cos kl & i \sin kl \\ i \sin kl & \cos kl \end{pmatrix} \stackrel{(3.7 \text{ und } 3.11)}{\iff} \mathbf{S}_{\text{fg}} = \begin{pmatrix} e^{-ikl} & 0 \\ 0 & e^{-ikl} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

Da das Rohr in Ausbreitungsrichtung der Welle konstante Querschnittsfläche und somit auch konstante Impedanz besitzt, tritt keine Reflexion auf  $r_{ud} = r_{du} = 0$ . Die Transmissionskoeffizienten  $t_{ud} = t_{du} = e^{-ikl}$  bewirken beim Durchgang durch das Element eine Phasenverschiebung um den Winkel  $-kl$ . Diese Phasenverschiebung ist frequenzabhängig und kann im Zeitbereich im Sinne einer Zeitverschiebung des Eingangssignals um  $\tau = kl/\omega = l/c$  interpretiert werden. Die Ursache für die Zeitverschiebung liegt in der räumlichen Ausdehnung des Elements in Ausbreitungsrichtung der Wellen. Da  $|t_{ud}| = |t_{du}| = 1$  tritt beim Durchgang durch das Element keine Dämpfung auf.

### 3.2.2 Streumatrix des verlustfreien Flächensprungs

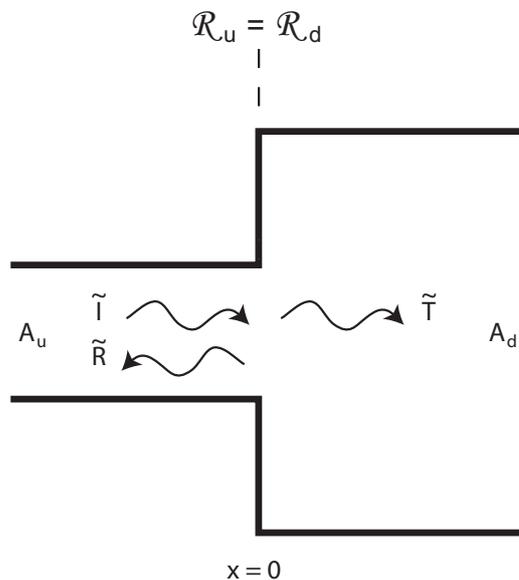


Bild 3.6: Streuung der einlaufenden Welle  $I$  in einen reflektierten Anteil  $R$  und einen transmittierten Anteil  $T$  am Flächensprung.

Eine einlaufende ebene Welle  $Ie^{i\omega(t-x/c)}$  wird an dem in Abbildung 3.6 skizzierten Flächensprung wegen der sprunghaft veränderten Impedanz am

Übergang  $x = 0$  in einen reflektierten Anteil  $Re^{i\omega(t+x/c)}$  und einen transmittierten Anteil  $Te^{i\omega(t-x/c)}$  gestreut.

Zur Berechnung des Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für die in Abbildung 3.6 eingezeichnete, von links einlaufende Welle fordert man unter Vernachlässigung akustischer Verluste am Flächensprung [DF83, Sha96, Mun87] an der Stelle  $x = 0$  Kontinuität für den Druck. Somit erhält man

$$\begin{aligned} p' &= I e^{i\omega(t-x/c)} + R e^{i\omega(t+x/c)} & \text{für } x < 0 \\ &= T e^{i\omega(t-x/c)} & \text{für } x > 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

$R$  und  $T$  berechnet man nun aus Erhaltungssätzen für den Übergang an der Stelle  $x = 0$ . Die erste Bedingung lautet, dass aufgrund der Massenerhaltung der Massenfluss über die Schnittstelle erhalten bleibt,

$$\bar{\rho} A_u u'_u = \bar{\rho} A_d u'_d \quad (3.21)$$

wobei  $u'_u$  und  $u'_d$  die Schnelle unmittelbar vor und nach der Erweiterung darstellen. Auf der linken Seite setzt sich die Schnelle aus dem einfallenden und reflektierten Anteil zusammen, während sie auf der rechten Seite nur von der transmittierten Welle herrührt. Somit erhält man

$$\frac{A_u}{\bar{\rho}c} (I - R) = \frac{A_d}{\bar{\rho}c} T \quad (3.22)$$

Die zweite Bedingung besagt, dass an der Grenzfläche  $x = 0$  der beiden Gebiete unterschiedlicher Impedanz aufgrund des verschwindenden Volumens keine akustischen Energie gespeichert werden kann und somit die einlaufende akustische Leistung  $A_u p'_u u_u$  gleich der auslaufenden  $A_d p'_d u_d$  ist.

$$A_u p'_u u_u = A_d p'_d u_d \quad (3.23)$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (3.21)  $A_u u_u = A_d u_d$  reduziert sich diese Bedingung darauf, dass der Druck über den Flächensprung kontinuierlich verläuft.

$$\begin{aligned} p'_u &= p'_d \\ I + R &= T \end{aligned} \quad (3.24)$$

Diese beiden Gleichungen löst man nun nach  $R$  und  $T$  auf und erhält

$$R = \frac{A_u - A_d}{A_u + A_d} I \quad \text{und} \quad T = \frac{2A_u}{A_u + A_d} I \quad (3.25)$$

Daraus berechnet man schließlich den Reflexionsfaktor  $r_{ud} = R/I$  und den Transmissionsfaktor  $t_{ud} = T/I$  in Abhängigkeit vom Flächenverhältnis  $\alpha_{ud} = A_d/A_u$  der Anordnung zu

$$r_{ud} = r = \frac{1 - \alpha_{ud}}{1 + \alpha_{ud}} \quad \text{und} \quad t_{ud} = \frac{2}{1 + \alpha_{ud}} = 1 + r_{ud} \quad (3.26)$$

Der Reflexions- und Transmissionskoeffizient  $r_{ud}$  und  $t_{ud}$  sind somit nur vom Flächenverhältnis  $\alpha_{ud}$  abhängig und, da keine akustischen Verluste auftreten, gilt  $t - r = 1$ .

Interessiert man sich nun für die Streuung einer in der entgegengesetzten Richtung  $du$  laufenden Welle, so errechnet man die entsprechenden Größen  $r_{du}$  und  $t_{du}$  durch Ersetzen von  $\alpha_{du} = 1/\alpha_{ud}$  zu

$$r_{du} = \frac{1 - 1/\alpha_{ud}}{1 + 1/\alpha_{ud}} = -\frac{1 - \alpha_{ud}}{1 + \alpha_{ud}} = -r_{ud} \quad (3.27)$$

$$t_{du} = \frac{2}{1 + 1/\alpha_{ud}} = \frac{2\alpha_{ud}}{1 + \alpha_{ud}} = \alpha_{ud} t_{ud} = 1 - r_{ud}$$

Somit kann man die Streumatrix des Flächensprunges ohne akustische Verluste alleinig als Funktion des Eingangsreflexionskoeffizienten  $r_{ud} = \frac{1 - \alpha_{ud}}{1 + \alpha_{ud}}$  schreiben

$$\mathbf{S}_{fg} = \begin{pmatrix} 1 + r_{ud} & -r_{ud} \\ r_{ud} & 1 - r_{ud} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

Die Streumatrix für den verlustfreien Flächensprung mit dem Flächenverhältnis  $\alpha_{ud}$  lautet somit

$$\mathbf{S}_{fg} = \frac{1}{1 + \alpha_{ud}} \begin{pmatrix} 2\alpha_{ud} & 1 - \alpha_{ud} \\ \alpha_{ud} - 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Die Wellen werden als Reaktion auf die sprunghafte Änderung der Impedanz teilweise reflektiert und können nur anteilig weiterlaufen. Da der Flächensprung in Ausbreitungsrichtung keine räumliche Ausdehnung besitzt, verwundert es nicht, dass beim Durchgang durch das Element keine Phasenverschiebung auftritt.

Betrachten wir den Vorgang nun mit Hilfe von Einheitsimpulsen. Ein pulsformiger Input  $\delta(t)$  spaltet sich am Flächensprung in einen transmittierten Anteil  $t_{ud} \delta(t)$  und einen reflektierten Anteil  $r_{ud} \delta(t)$  auf. Nach der Fouriertransformation der Einheitsimpulsantworten entsprechen die Elemente der Streumatrix in diesem Fall aufgrund von

$$\int_{-\infty}^{\infty} C \delta(t) e^{-i\omega t} dt = C e^0 = C \quad (3.30)$$

den frequenzunabhängigen Reflexions- und Transmissionskoeffizienten aus Gleichung (3.26).

Abschließend sei erwähnt, dass die hier beschriebenen Phänomene nicht zufällig eine große Ähnlichkeit zu Streuphänomenen bei der Ausbreitung von Lichtwellen und in der Quantenmechanik haben<sup>20)</sup> [Mes91, BS94, WV97, BJ74]. Bei Lichtwellen spielt der Brechungsindex des Trägermediums eine mit der Impedanz akustischer Wellen vergleichbare Rolle, in der Quantenmechanik das elektrische Potential.

### 3.2.3 Streumatrix der Expansionskammer

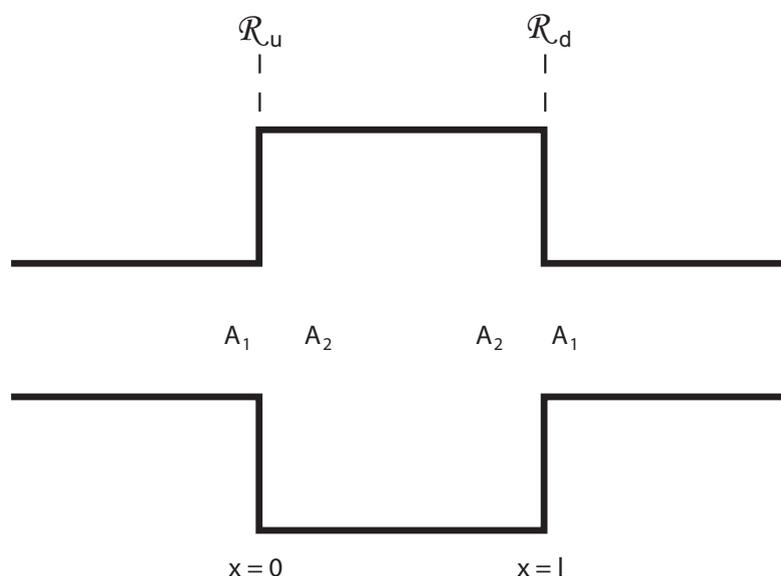


Bild 3.7: Die Expansionskammer besteht aus zwei durch ein Rohrstück getrennten Flächensprüngen.

Kombiniert man entsprechend Abbildung 3.7 zwei durch ein Rohrstück der Länge  $l$  getrennte Flächensprünge, so dass zwei Rohre identischen Querschnitts  $A_1$  durch ein Rohrstück mit davon abweichendem Querschnitt  $A_2$  verbunden werden, dann erhält man eine Expansionskammer<sup>21)</sup>. In diesem Abschnitt sollen die akustischen Eigenschaften dieser Kombination einfacher Elemente untersucht werden.

<sup>20)</sup> Diese Ähnlichkeit wird später im Zusammenhang mit Gleichung (5.1) wieder angesprochen.

<sup>21)</sup> Alles im Zusammenhang mit der Expansionskammer Gesagte gilt auch für Kontraktionen mit Flächenverhältnissen  $\alpha < 1$ .

Sendet man auf der linken Seite einen Impuls  $\delta(t)$  in die Expansionskammer, wird an der Erweiterung bei  $x = 0$  ein Teil des Signals reflektiert und man erhält instantan auf  $\tilde{g}_u$  folgend das Signal  $r \delta(t)$ . Dabei ist  $r = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$  der Reflexionsfaktor des Flächensprungs mit dem Flächenverhältnis  $\alpha = A_2/A_1$ . Der übrige Anteil  $t = 1 + r$  läuft bis zur Verengung bei  $x = l$  weiter und wird dort wieder in einen reflektierten und einen transmittierten Anteil aufgespalten. Dieses Signal besitzt die Amplitude  $t_\alpha t_{1/\alpha} = (1+r)(1-r) = 1-r^2$  und liefert somit mit  $(1-r^2)\delta(t-l/c)$  das erste Signal am Ausgang  $\tilde{f}_d$ . Der reflektierte Anteil pendelt nun im weiteren Verlauf zwischen den beiden Flächensprüngen hin und her, wobei sich die Amplitude durch die teilweise Transmission des Signals bei jeder Reflexion um einen Faktor  $(-r)$  verringert und auf beiden Seiten periodisch Pulse aus dem System hinauslaufen. Abbildung 3.8 zeigt das  $x$ - $t$  Diagramm dieses Vorgangs. Das Signal  $\tilde{f}_d$  an der Stelle  $x = l$  entspricht einer Superposition von Einzelpulsen.

$$\tilde{f}_d = (1-r^2) \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \delta(t - (2n+1)l/c) \quad (3.31)$$

Fouriertransformiert man  $\tilde{f}_d$  nun, so erhält man das Element  $S_{11}$  der Streumatrix der Expansionskammer (3.32).

$$\begin{aligned} S_{11} &= (1-r^2) \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} \delta(t - (2n+1)l/c) e^{-i\omega t} dt \\ &= (1-r^2) \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} e^{-i\omega(2n+1)l/c} \\ &= (1-r^2) e^{-ikl} \sum_{n=0}^{\infty} (r^2 e^{-2ikl})^n \end{aligned} \quad (3.32)$$

Da für positive  $\alpha$  immer (3.33) gilt, konvergiert die unendliche geometrische Reihe  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$

$$|q| = |r^2 e^{-2ikl}| = |r|^2 = \left| \frac{1-\alpha}{1+\alpha} \right|^2 < 1 \quad (3.33)$$

und besitzt einen Grenzwert  $S_\infty = 1/(1-q)$ . Somit erhält man für  $S_{11}$

$$S_{11} = \frac{(1-r^2)e^{-ikl}}{1-r^2e^{-2ikl}} \quad (3.34)$$

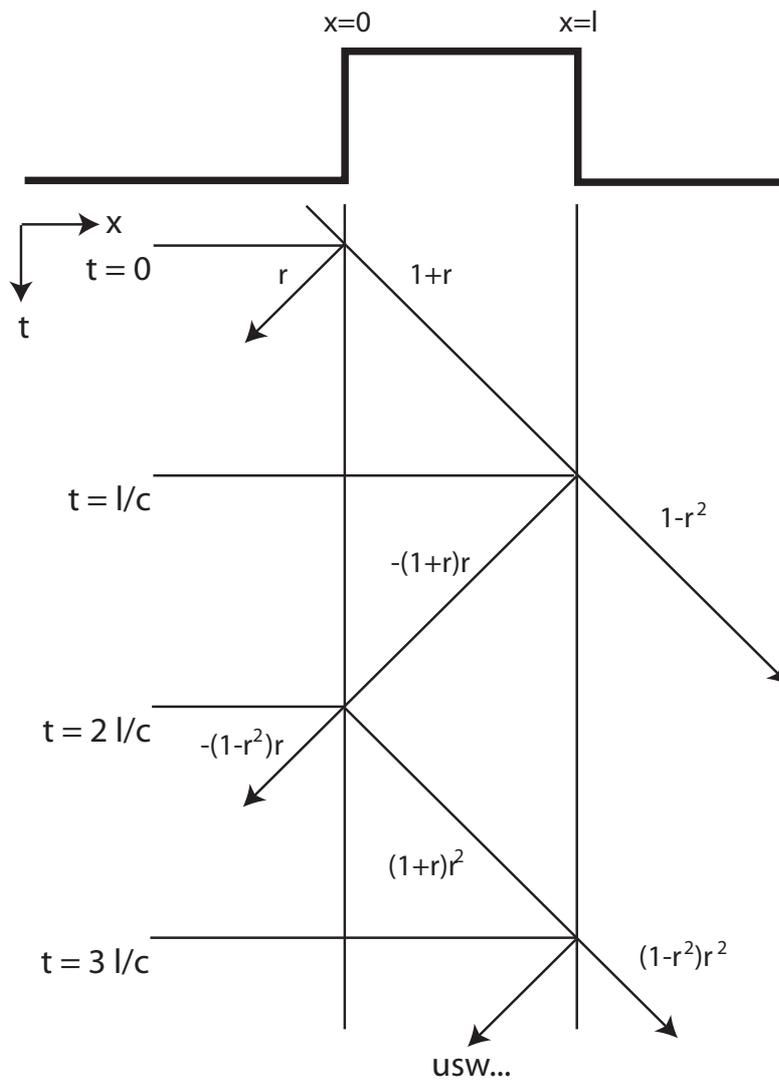


Bild 3.8: Das  $x$ - $t$  Diagramm zeigt die mehrfache Streuung eines links einlaufenden Pulses an den Flächensprüngen der Expansionskammer.

Die Anordnung ist symmetrisch um die Ebene  $x = l/2$ . Somit sind die Transmissionskoeffizienten in beiden Richtungen identisch  $t_{ud} = t_{du}$  und man kommt für das zweite Diagonalelement zu demselben Resultat  $S_{22} = S_{11}$ .

Bei der Berechnung der ebenfalls identischen Reflexionskoeffizienten fällt die besondere Stellung des ersten direkt reflektierten Pulses  $r \delta(t)$  auf. Die restlichen Pulse resultieren aus der mehrfachen internen Reflexion an den Flächensprüngen der Expansionskammer. Auch diese Pulse bilden nach (3.35) eine geometrische Reihe.

$$\tilde{g}_u = r \delta(t) + (1 - r^2) \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n+1} \delta(t - 2nl/c) \quad (3.35)$$

Transformiert man die Pulsfolge (3.35) in den Frequenzraum so erhält man

$$\begin{aligned} S_{21} &= r + (1 - r^2) \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (-r)^{2n+1} \delta(t - 2nl/c) e^{-i\omega t} dt \\ &= r - (1 - r^2)r \sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} e^{-i\omega 2nl/c} \\ &= r - (1 - r^2)r \sum_{n=0}^{\infty} (r^2 e^{-2ikl})^n \\ &= r - (1 - r^2)r \sum_{n=0}^{\infty} (r^2 e^{-2ikl})^n \end{aligned} \quad (3.36)$$

Auch die Elemente der transformierten Summe bilden eine geometrische Reihe, wodurch man

$$S_{21} = r - \frac{(1 - r^2)r}{1 - r^2 e^{-2ikl}} \quad (3.37)$$

erhält. Diesen Ausdruck kann man schließlich in die Form (3.38) überführen.

$$S_{21} = \frac{r(1 - e^{-2ikl})}{1 - r^2 e^{-2ikl}} = S_{12} \quad (3.38)$$

Abbildung 3.9 zeigt Reflexions- und Transmissionskoeffizienten für eine Beispielgeometrie, eine  $l = 0.3$  m lange Expansion mit dem Flächenverhältnis  $\alpha = 4$ . Für die Schallgeschwindigkeit wurde in der Berechnung ein Wert von  $c = 340$  m/s angesetzt.

Anhand von Abbildung 3.9 kann man sich das Verhalten von  $r$  und  $t$  für niedrige Frequenzen veranschaulichen. Der Reflexionsfaktor  $r$  verschwindet

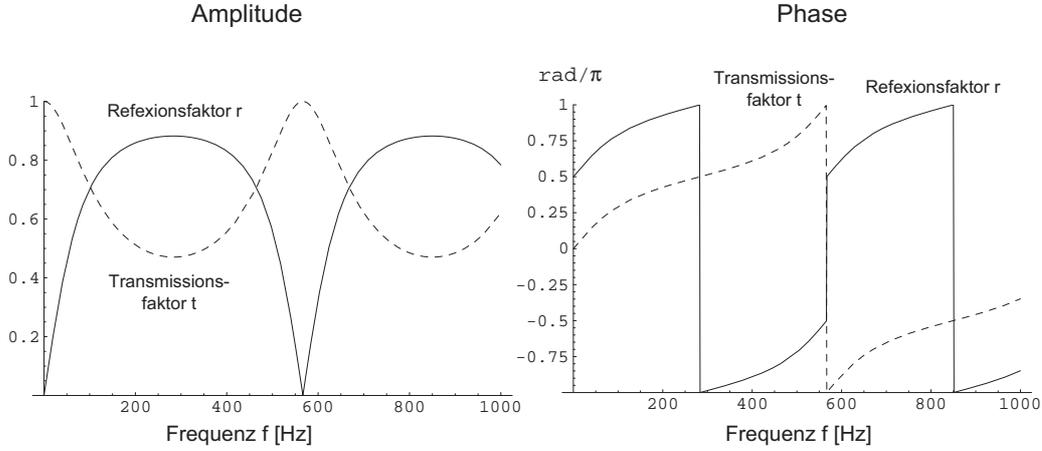


Bild 3.9: Verlauf von Amplitude und Phase des Reflexionskoeffizienten  $r$  und des Transmissionskoeffizienten  $t$  für eine Beispielgeometrie mit  $l = 0.3$  m,  $\alpha = 4$  bei  $c = 340$  m/s im Bereich von 0 bis 1000 Hz.

für  $f \rightarrow 0$ , der Transmissionsfaktor  $t$  geht in diesem Bereich gegen Eins. Dieses Verhalten ist für quasistationäre Vorgänge charakteristisch.

Nun soll untersucht werden, ob die in Abbildung 3.8 skizzierte unendliche Kaskade interner Reflexionen auch durch eine Kombination von Transfermatrizen abgebildet wird. Dazu multiplizieren wir die Transfermatrizen der einzelnen Elemente in  $fg$  Darstellung, wobei man die aus Gleichung (3.26) abgeleitete Beziehung  $\alpha = \frac{1-r_{12}}{1+r_{12}}$  verwendet um die Matrizen als Funktion des Eingangsreflexionsfaktors  $r_{12}$  darzustellen.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{fg} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1+r_{12}} & \frac{r}{1+r_{12}} \\ \frac{r}{1+r_{12}} & \frac{1}{1+r_{12}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{+ikl} & 0 \\ 0 & e^{-ikl} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{1-r_{12}} & \frac{-r}{1-r_{12}} \\ \frac{-r_{12}}{1-r_{12}} & \frac{1}{1-r_{12}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^{-ikl}}{1-r^2} \begin{pmatrix} r_{12}^2 - e^{2ikl} & 1 - e^{2ikl} \\ 1 - e^{2ikl} & 1 - r_{12}^2 e^{2ikl} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.39)$$

Anschließend führt man die  $fg$  Transfermatrix des Gesamtsystems nach Gleichung (3.11) in Streumatrixdarstellung über und erhält in (3.40) das bereits aus (3.34) und (3.38) bekannte Ergebnis.

$$\mathbf{S}_{fg} = \frac{1}{1 - r_{12}^2 e^{2ikl}} \begin{pmatrix} (1 - r_{12}^2) e^{ikl} & (1 - e^{2ikl}) r_{12} \\ (1 - e^{2ikl}) r_{12} & (1 - r_{12}^2) e^{ikl} \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

Damit wäre anhand einer einfachen Geometrie gezeigt, dass Transfermatrizen die gesamte Kaskade interner Reflexionen abbilden. Zudem wird aufgrund der

Komplexität des ablaufenden physikalischen Prozesses klar, warum bereits die Transfermatrizen relativ einfacher Geometrien kaum intuitiv fassbar sind.

Expansionskammern finden unter anderem bei Schalldämpfern im Abgasstrakt von Verbrennungsmotoren oder Klimatisierungs- und Belüftungssystemen Anwendung [Mun87, Bro78]. Die akustische Energie im System wird durch eine Expansionskammer ohne zusätzliche Dämpfungsmaßnahmen nicht reduziert [DF83], allerdings kann durch Anpassung des Flächenverhältnisses  $\alpha$  und der Länge  $l$  der Expansionskammer entscheidender Einfluss auf den Frequenzverlauf der Reflexions- und Transmissionskoeffizienten genommen werden.

Die hier anhand der Expansionskammer vorgezeichnete Vorgehensweise kann problemlos auf komplexere Geometrien mit mehreren Flächensprüngen erweitert werden. Röhrenförmige Geometrien mit einem entlang der  $x$ -Achse variierenden Flächenverlauf  $A(x)$  können schließlich als Kombination vieler kurzer Zylinderstücke, die durch Flächensprünge verbunden werden, angenähert werden [Väl95, RAS95a, RAS95b, Put94, WV97]. Die Modellierung komplexer röhrenförmiger Geometrien findet unter anderem Anwendung in der Analyse der akustischen Eigenschaften von Blasinstrumenten und des menschlichen Vokaltrakts [Ber99a, Ber99b, KL62]. Die dort gewonnenen Erkenntnisse können verwendet werden, um Modelle für den Klang von Instrumenten oder der menschlichen Stimme zu erstellen und diesen synthetisch nachzubilden.

Die Umkehrung der hier besprochenen Vorgehensweise, nämlich die Bestimmung des Innendurchmessers eines röhrenförmigen Objekts durch Messung der Reflexionen, die entstehen wenn ein akustischer Puls in das Objekt geleitet wird ist eine etwa bei der zerstörungsfreien Vermessung von Blasinstrumenten verbreitete Methode [Sha96, MG99, RAS95a, RAS95b]. Berücksichtigt man bei der Wellenausbreitung auch Verluste [Ben68, Kee84], kann bei der Bestimmung der Innenkontur nach [BKS<sup>+</sup>02] eine Messgenauigkeit bis zu  $\pm 0.05$  mm erreicht werden.

## 4 Experimentelle Bestimmung akustischer Vierpole

### 4.1 Die Versuchsanlage

#### 4.1.1 Die Versuchsanlage

Für die experimentelle Bestimmung von Transfermatrizen wurde eine Versuchsanlage konstruiert, die einen vorgemischten Drallbrenner mit einer Messstrecke für die experimentelle Charakterisierung akustischer Elemente verbindet. Abbildung 4.1 zeigt einen schematischen Querschnitt des Versuchsanstandes.

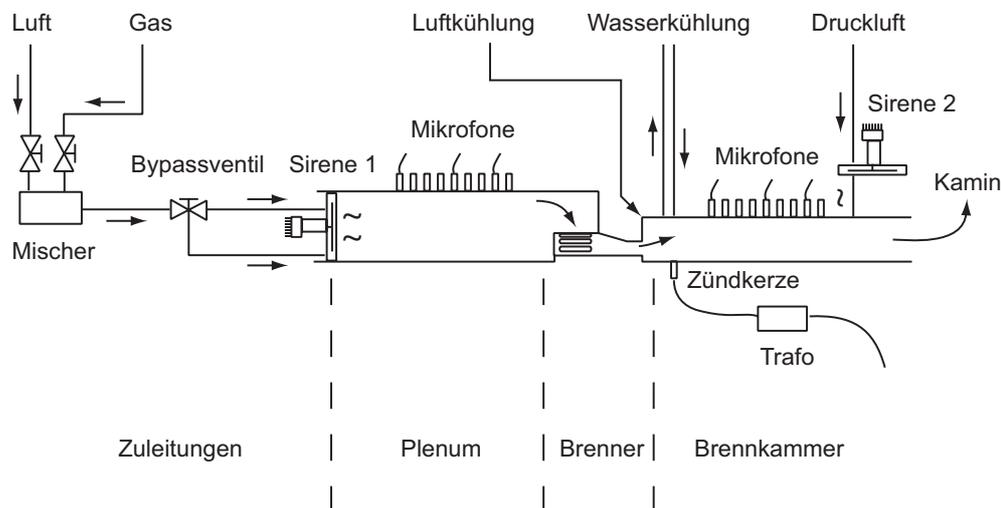


Bild 4.1: Schematischer Querschnitt der Versuchsanlage

Luft und Gas für den Verbrennungsprozess werden der hauseigenen Medienversorgung entnommen. Der Luft- und Gasmassenstrom durchlaufen Filter und Schnellschlussventile und werden durch thermische Durchflussregler vom Typ Bronkhorst Hi-Tech<sup>22)</sup> bestimmt. Nach Durchlaufen des Mixers wird das zündfähige Gemisch zum Bypassventil geführt. Dort wird ein Teil über die Bypassleitung direkt in das Plenum geleitet. Das restliche Gemisch strömt in der Sirene durch eine rotierende Lochscheibe und tritt in Form eines pulsierten Freistrahls in das Plenum ein. Dieser Teilmassenstrom bildet die akustische Anregung. Das Plenum besteht aus einem Stahlrohr mit einem

<sup>22)</sup> Type F-203C-FA-40V und F-203C-FA-44V (Luft) sowie F-201AC-FA (Gas)

Innendurchmesser von 200 mm und einer Wandstärke von 10 mm. Die Innenseite des Plenumsrohrs besitzt eine glatte, bearbeitete Oberfläche, sodass die Sirene über ein Gestänge problemlos von Hand in dem Rohr verschoben werden kann. Die Position der Sirene kann durch eine Klammer fixiert werden. Der Brenner befindet sich am gegenüberliegenden Ende des Plenums. Im Brenner wird die Strömung verdrallt, um eine Flammenstabilisierung bei Eintritt in die Brennkammer zu erreichen. Eine Seitenwand der Brennkammer besitzt ein Sichtfenster<sup>23)</sup>, das eine Beobachtung der Flamme und optische Messungen gestattet. An einer weiteren Seitenwand befindet sich eine Zündkerze<sup>24)</sup>, mit der das Gemisch durch einen Hochspannungsfunken gezündet werden kann. Die obere und untere Wand der Brennkammer werden durch einen Wasserkreislauf gekühlt. Zumindest eine Seitenwand der Brennkammer ist üblicherweise mit einem Sichtfenster versehen, das nicht an die Wasserkühlung angeschlossen werden kann. Die Seitenwände der Brennkammer werden daher zur Kühlung über Flachdüsen mit Druckluft angeblasen. Plenum und Brennkammer sind mit verschliessbaren Zugängen für Mikrofone versehen, die eine akustische Charakterisierung des Brenners gestatten. Am Ende der Brennkammer befindet sich eine Verlängerungsstrecke, die aus Blech besteht und auf die eine weitere baugleiche Sirene aufgesteckt werden kann. Die zweite Sirene verfügt über eine unabhängige Druckluftversorgung.

Abbildung 4.2 zeigt ein Foto der Versuchsanlage bei laufendem Betrieb. Hinter dem Kamin im Vordergrund kann man die brennkammerseitige Sirene und das Sichtfenster für optische Messungen an der Flamme mit dem blauen Leuchten der Vormischflamme im Inneren der Brennkammer erkennen. Auf der Oberseite der Brennkammer sieht man einige Mikrofone, die über einen Warmwasserkreislauf temperiert werden. Die Flachdüse für die Luftkühlung des Sichtfensters bläst von der linken Seite auf das Fenster. Auf der Oberseite des Plenumsrohrs sind weitere Mikrofonstützen angebracht. Die plenumseitige Sirene ist auf dem Bild zur Gänze in das Innere des Plenumsrohrs eingeschoben und daher nicht sichtbar. Am hinteren Ende des Plenumsrohrs ist nur der schwarze Schlauch für die Zuleitung des Gemisches zu erkennen. Das Gestänge zum Verschieben der Sirene befindet sich auf dem Bild zur Gänze im Inneren des Plenumsrohrs. Der Mischer und die Medienversorgung sind an der Wand im Rücken des Betrachters angebracht daher auf dieser Aufnahme nicht zu sehen.

---

<sup>23)</sup> Bezugsquelle: Sico-Jena Quarzschmelze, Quarzglas SILUX 4 (Dicke 3 mm)

<sup>24)</sup> Über einen Zündtrafo mit 10 kV versorgte, bündig in die Brennkammerwand eingeschraubte Gleitfunkenzündkerze vom Typ Champion G54V.

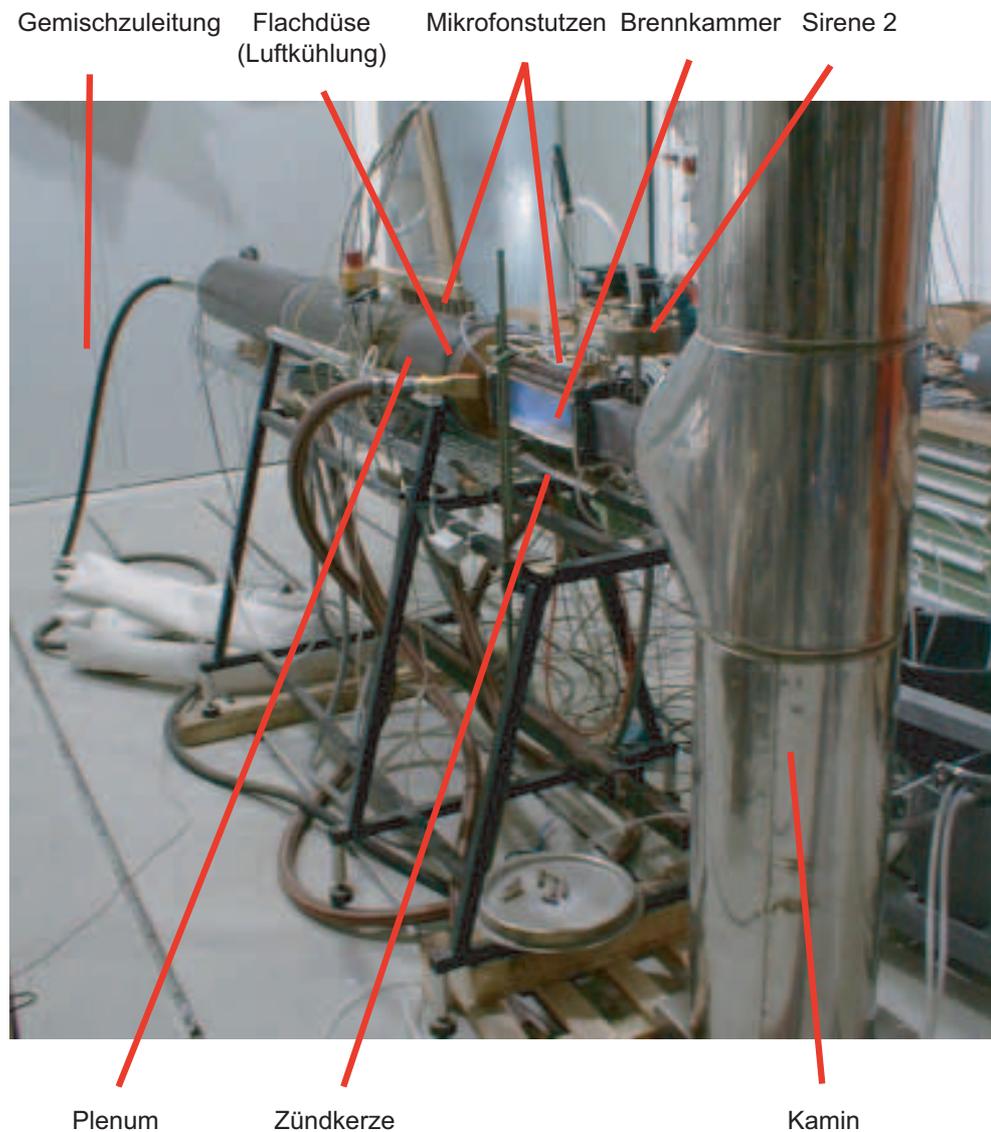


Bild 4.2: Elemente der Versuchsanlage im Betrieb

#### 4.1.2 Der TD<sup>1</sup> Brenner

Bei der Entwicklung des TD<sup>1</sup> Brenners sollte ein problemlos fertigbarer, möglichst kompakter, vorgemischter Drallbrenner für Erdgas mit einer Auslegungsleistung von 60 kW entstehen. Wie die Aufnahmen in Abbildung 4.3 und die Schnittzeichnung in Abbildung 4.4 zeigen, besitzt der TD<sup>1</sup> Brenner einen Tangentialdrallerzeuger. Die Drallzahl des Brenners kann ohne großen

Aufwand durch teilweises Blockieren der tangentialen Schlitzte variiert werden. Es wurden Einsätze von 32, 16 und 8 mm Länge gefertigt. Dadurch kann die offene Schlitzlänge von 64 mm ohne Einsatz auf 32, 16 bzw 8 mm reduziert werden. Auch die Kombination mehrerer Einsätze ist möglich, wodurch sich weitere Einstellungen ergeben.

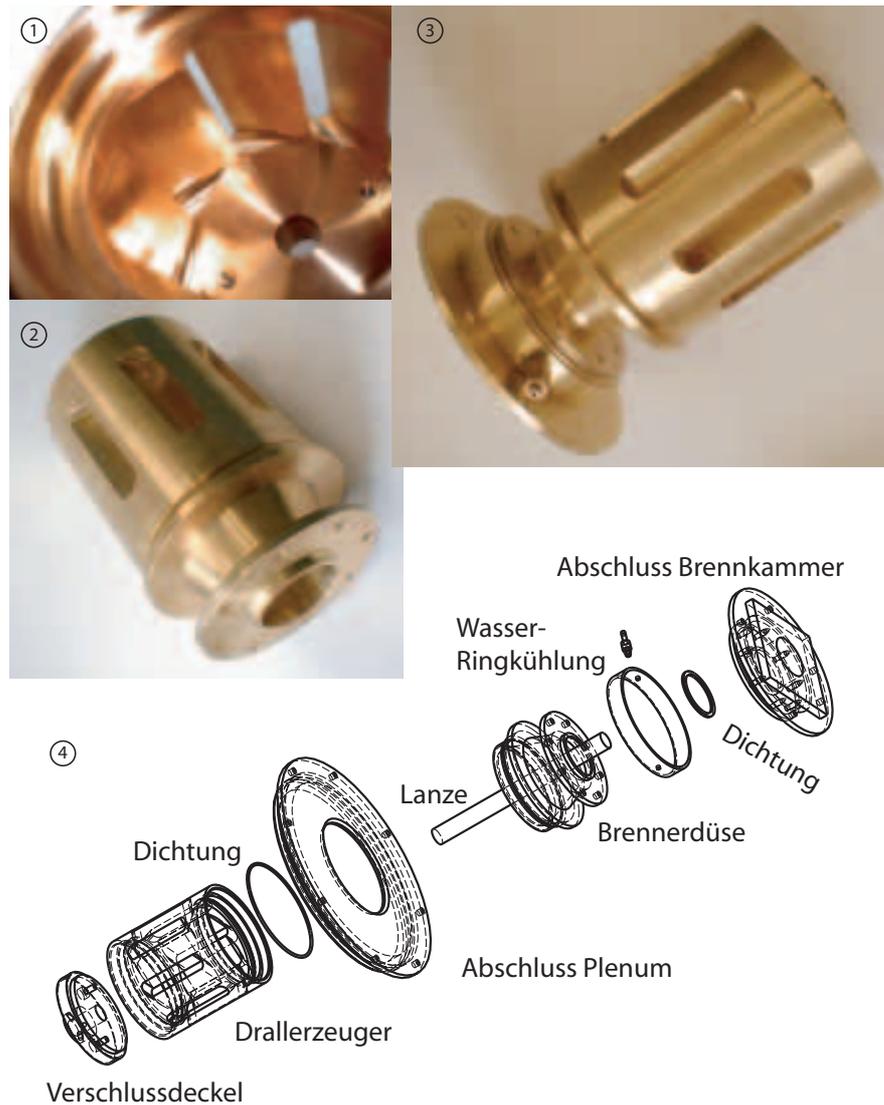


Bild 4.3: ① Innenansicht Drallerzeuger, ② Drallerzeuger und Brennerdüse, ③ TD<sup>1</sup> Brenner, ④ Explosionszeichnung mit Bauteilbezeichnungen.

Im Anschluss an den Drallerzeuger wird die verdrehte Strömung in der Brennerdüse in axialer Richtung beschleunigt. Abbildung 4.5 zeigt einen

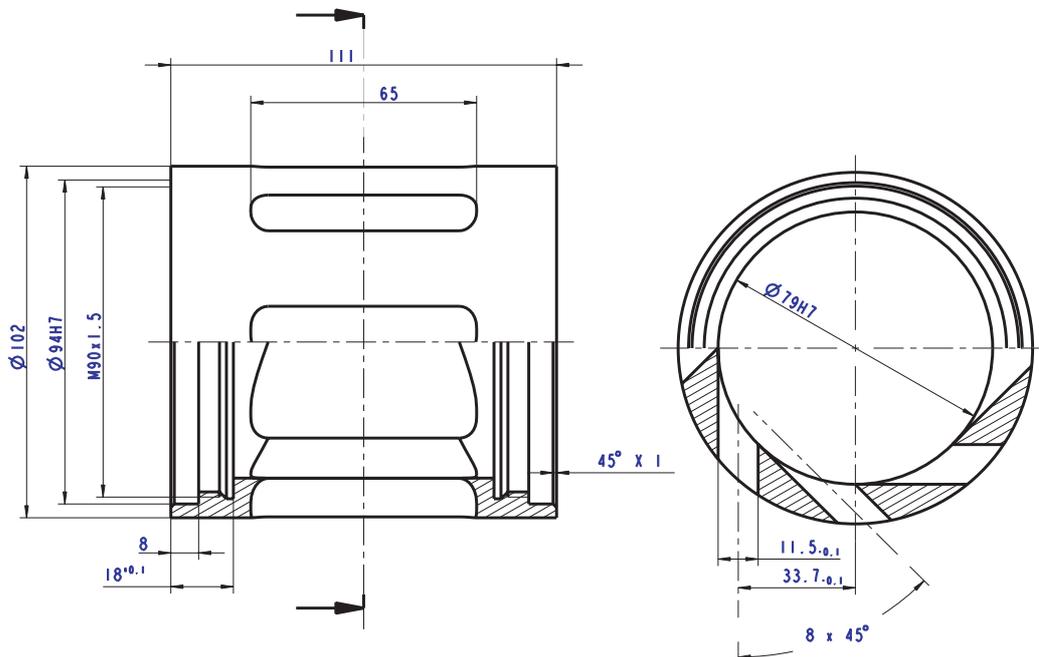


Bild 4.4: Konstruktionsskizze für den Drallerzeuger des TD<sup>1</sup> Brenners

Querschnitt des TD<sup>1</sup> Brenners. Die Düse besitzt eine kegliche Innenkontour und mündet in eine kurze zylindrische Auslaufstrecke. In der Brennkammer bildet sich aufgrund der Drallströmung im Bereich der Mittelachse eine innere Rezirkulationszone. Zusätzlich entstehen äußere Rezirkulationszonen in den Ecken der Brennkammer. Die Flamme stabilisiert sich an der Scherschicht zwischen innerer und äußerer Rezirkulationszone.

Eine massive Zentrallanze mit 16 mm Durchmesser blockiert die inneren Bereiche der Drallströmung mit niedrigen Axialgeschwindigkeiten. Dadurch wird insbesondere bei Brennerbetriebspunkten mit hohen Drallzahlen ein plötzliches Rückschlagen der Flamme in den Brenner verhindert.

Die Variation des Düsenaustrittsdurchmessers wird durch den Einbau von Einsätzen möglich, die bei dem gewünschten Austrittsdurchmesser einen sanften Übergang von der Düse auf den zylindrischen Kanal zwischen Düse und Brennkammer herstellen. Neben dem Durchmesser der Austrittsdüse von 40 mm liegen Einsätze für 32, 34 und 36 mm vor. Ein Einsatz für eine Verengung der Düse auf einen Durchmesser von 38 mm konnte aufgrund der konstruktionsbedingt geringen Wandstärken nicht gefertigt werden.

Die Bezeichnung der unterschiedlichen Brennergeometrien in der Arbeit erfolgt jeweils durch Angabe des Düsendurchmessers am Brenneraustritt und

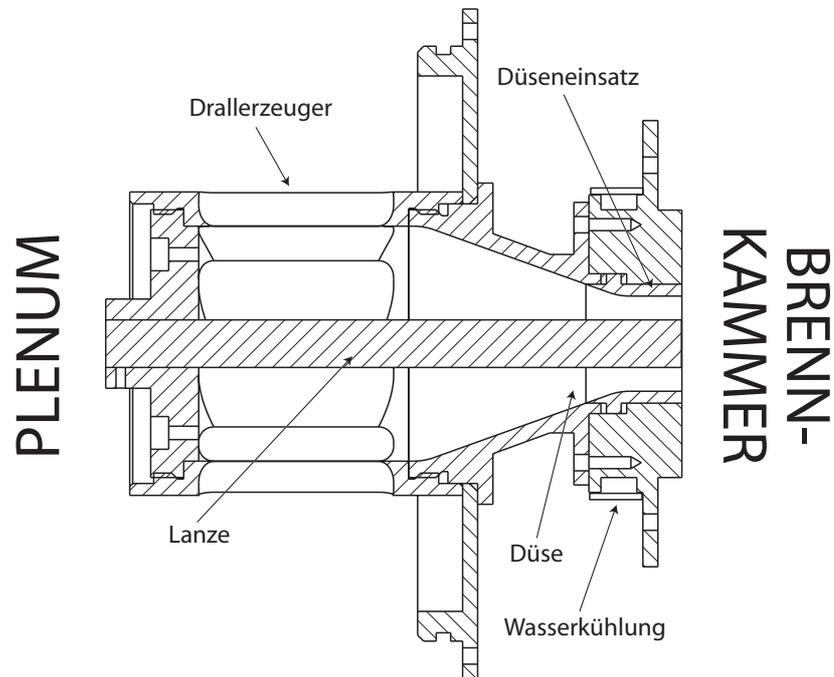


Bild 4.5: Querschnitt des TD<sup>1</sup> Brenners mit 32 mm Einsatz für die Austrittsdüse

der offenen Schlitzlänge am Drallerzeuger. Die Brennerkonfiguration 3632 bezeichnet beispielsweise eine Kombination aus einer Austrittsdüse von 36 mm Durchmesser und einem Drallerzeuger mit einer offenen Schlitzlänge von 32 mm.

Der Brenner wurde aus Messing gefertigt. Der im Vergleich zu anderen Werkstoffen relativ niedrige Schmelzpunkt von Messing<sup>25)</sup> stellte kein Problem bei der Auslegung dar. Der Brenner verfügt über eine ringförmige Wasserkühlung der brennkammerseitigen Stirnwand aus Messing, um während des Betriebs einen guten Abtransport der durch Strahlung und Konvektion eingetragenen Verbrennungswärme sicherzustellen.

Versuche bei Luftzahl der  $\lambda = 1.4$  zeigten, dass der TD<sup>1</sup> Brenner bereits ab Verbrennungsleistungen von etwa 15 kW zuverlässig über einen längeren Zeitraum betrieben werden kann, ohne dass es zu einem Pulsieren, Rückschlagen oder plötzlichen Verlöschen der Flamme kommt. Bei einem weiteren Absenken der Brennerleistung wird die Flamme diffuser, bis man ein plötzliches Verlöschen beobachtet. Nach oben konnte die Verbrennungsleistung problemlos weit über den Auslegungspunkt von 60 kW hinaus bis auf etwa

<sup>25)</sup> je nach Legierung im Bereich von 880 bis 1020 °C [Czi96]

150 kW gesteigert werden. Danach war der Maximaldurchsatz der Luftventile erreicht, sodass höhere Verbrennungsleistungen nicht angefahren werden konnten.

Wie eine Variation der Luftzahl zeigte, wird die magere Verlöschgrenze bei der Auslegungsleistung von 60 kW bei  $\lambda \approx 1.6 - 1.65$  erreicht. Ab einer Luftzahl von etwa  $\lambda \geq 1.55$  löst sich die Flamme erst kurzzeitig springend, schließlich durchgehend vom Brenner ab und kann erst wieder durch Reduktion der Luftzahl unter  $\lambda \approx 1.5$  am Brennermund stabilisiert werden.

Bei Brennergeometrien mit hoher Drallzahl zieht sich die Flamme für fallende Luftzahlen entlang der Lanze kontinuierlich in den Brenner zurück. Ein plötzliches Rückschlagen über den Brenner aus dem stationären Betrieb konnte dennoch bei keiner Konfiguration beobachtet werden.

### 4.1.3 Die Lochsirene

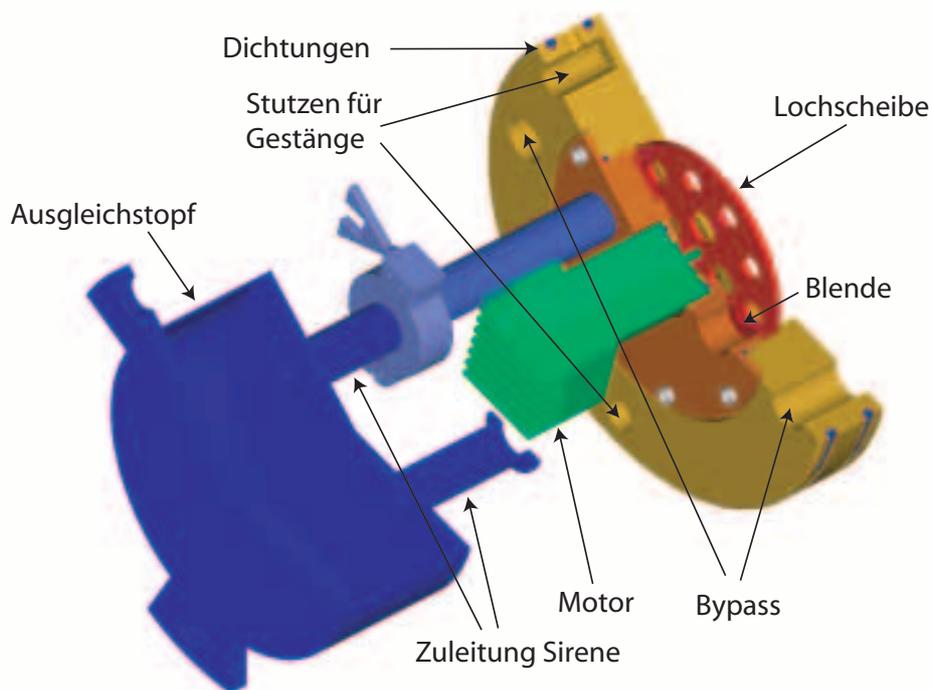


Bild 4.6: Aufbau der Lochsirene

Für Experimente zur Bestimmung der Transfermatrix nach der Multi-mikrofonmethode wird eine monofrequente akustische Anregung bei hohen Druckamplituden benötigt. In dem Bereich niedriger Frequenzen, der für

Transfermatrixmessungen relevant ist, erlauben Sirenen eine wesentlich effektivere Anregung als Lautsprecher [Pet93, PHRW93]. Das Prinzip der Lochsirene ist schon lange bekannt [BS74]. Lochsirenen wurden unter anderem von Büchner [Büc92] und Peters *et al.* [Pet93, PHRW93] für akustische Messungen eingesetzt. Um die Anregung des Brenners von stromauf und stromab zu ermöglichen, wurden zwei baugleiche Lochsirenen gefertigt. Eine Lochsirene bildet stromauf den Abschluss des Plenums, eine weitere kann stromab auf die Brennkammerverlängerung aufgesteckt werden.

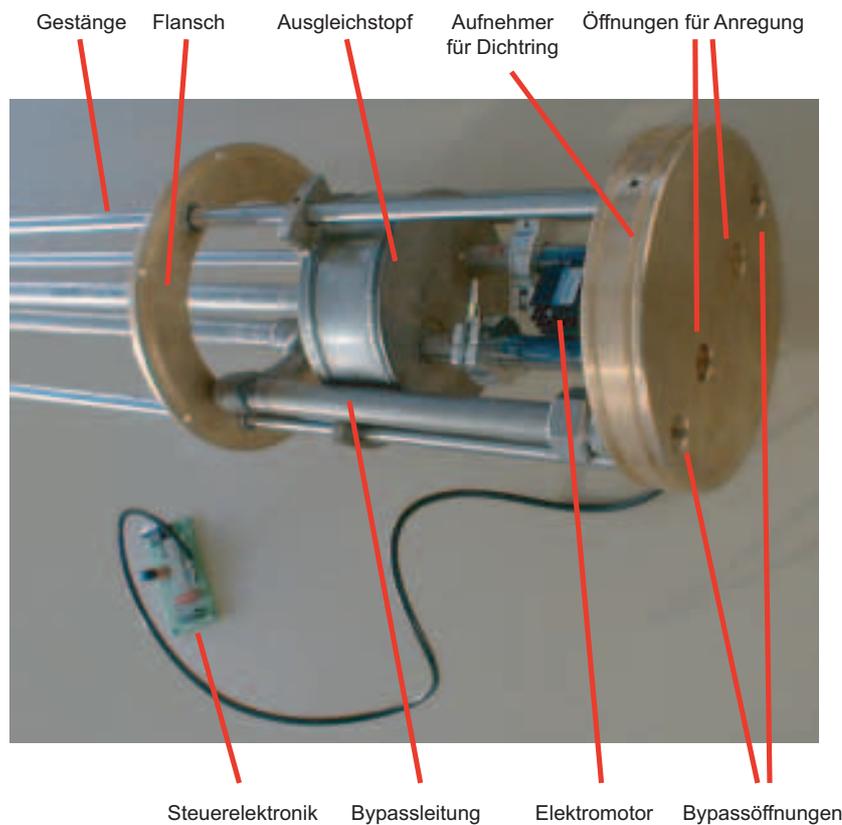


Bild 4.7: Die Lochsirene vor dem Einbau in den Versuchsstand.

Abbildung 4.7 zeigt eine Aufnahme der Sirene vor dem Einbau in die Versuchsanlage, auf der man das Gestänge zum Verfahren der Sirene und den Flansch für die Montage am Plenumsrohr erkennt. Die Zuleitungen für Sirene und Bypass wurden parallel zum Gestänge geführt. Der Elektromotor sitzt zwischen den beiden Zuleitungen der Sirene und ist über ein Kabel mit der Steuerelektronik verbunden. Der Ausgleichstopf wurde in Strömungsrichtung vor der Sirene angebracht, um eine akustische Entkopplung der Zuleitung zu

erreichen. Die große Messingscheibe rechts im Bild trägt die Sirene, bildet den Abschluss des Plenums und verfügt deshalb über zwei Aufnehmer für Dichtringe. Rechts an der Sirene erkennt man die jeweils zwei Öffnungen für Sirene und Bypass, durch die das zündfähige Gemisch in das Plenum einströmt.

Wie aus Abbildung 4.6 ersichtlich, bestehen die Lochsirenen aus einer Lochscheibe aus Messing mit acht identischen Öffnungen auf einem Teilkreis um die Mittelachse, die von einem Elektromotor angetrieben wird. Die Lochscheibe wurde direkt mit der Achse des Elektromotors der Type Faulhaber 3564 K024BC verbunden<sup>26)</sup>. Die Drehzahl des Motors kann am Steuerrechner in der Leitwarte vorgegeben werden. Wie Abbildung A.1 in Kapitel A.1 zeigt, können mit den Sirenen des Einzelbrennerversuchsstands Anregungsfrequenzen von über 1 kHz erreicht werden. Die Öffnungen der Lochscheibe sind quadratisch<sup>27)</sup>. Im Zusammenspiel mit den starr eingebauten, cosinusförmigen Blenden unmittelbar vor der Lochscheibe ergibt sich somit über die Zeit ein cosinusförmiger Verlauf der offenen Lochfläche. Dadurch wird ein Großteil der akustischen Energie, die von der Sirene abgestrahlt wird, auf die Grundfrequenz konzentriert. Abbildung 4.8 zeigt das Frequenzspektrum der Sirene bei freier Abstrahlung für unterschiedliche Anregungsfrequenzen. Das Drucksignal der Sirene wurde dafür in einem Abstand von wenigen cm mit einem Mikrofon aufgezeichnet. Die Versorgung der Sirene erfolgte mit Druckluft von einem bar Überdruck. Die Oberfrequenzen sind in der Grafik neben der Grundfrequenz zu erkennen, spielen allerdings über weite Bereiche nur eine untergeordnete Rolle. Die Anregung wird bei höheren Frequenzen stärker.

Ein der Sirene vorgeschaltetes Bypassventil regelt, welcher Anteil des die Anlage durchströmenden Gemischmassenstroms durch eine Bypassleitung an der Sirene vorbeigeführt wird. Nur der Massenstrom, der die Sirene durchströmt, wird pulsiert. Dadurch kann die Amplitude der von der Sirene angeregten Schwingung im Plenum eingestellt werden. Die brennkammerseitige Sirene wird mit Druckluft betrieben, hier kann die Amplitude der Anregung durch Veränderung des Vordruckes reguliert werden. Die Druckluft hat bei Messungen mit Verbrennung gleichzeitig eine erwünschte kühlende Funktion.

Die stromaufseitige Sirene bildet den verschiebbaren Abschluss des Plenumsrohrs. Im Betrieb ist das Plenum mit einem zündfähigem Gemisch aus Gas und Luft gefüllt. Ein Austreten des Gemisches wird durch zwei Dichtringe an der Sirene verhindert, die den Spalt zwischen Sirene und Plenumsrohr

<sup>26)</sup> Tabelle E.1 in Appendix E.3 listet die Kennzahlen des Motors auf

<sup>27)</sup> Die Öffnungen der Lochscheibe sind in Abbildung 4.6 kreisförmig dargestellt. Dieses Design wurde anfänglich verwendet, jedoch später gegen das im Text beschriebene ausgetauscht, um die Signalqualität der Sirene zu verbessern.

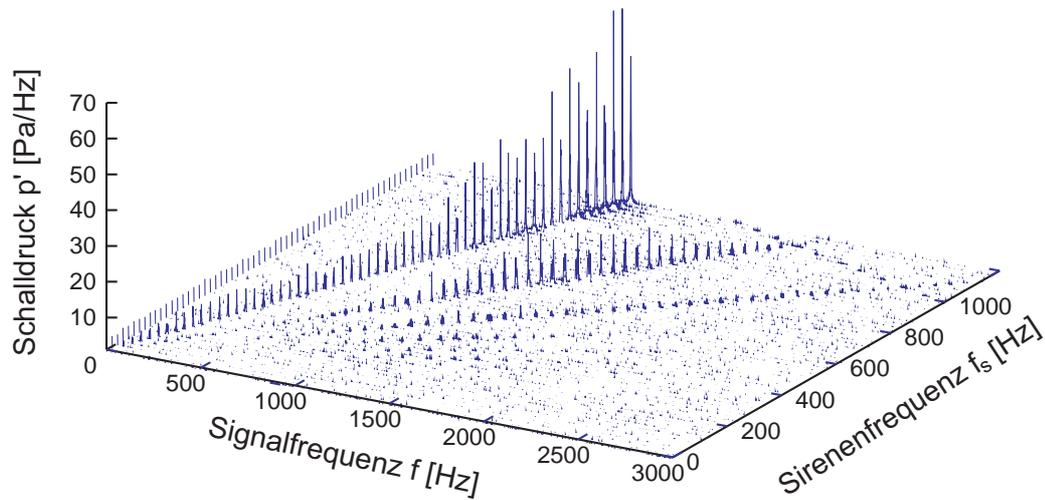


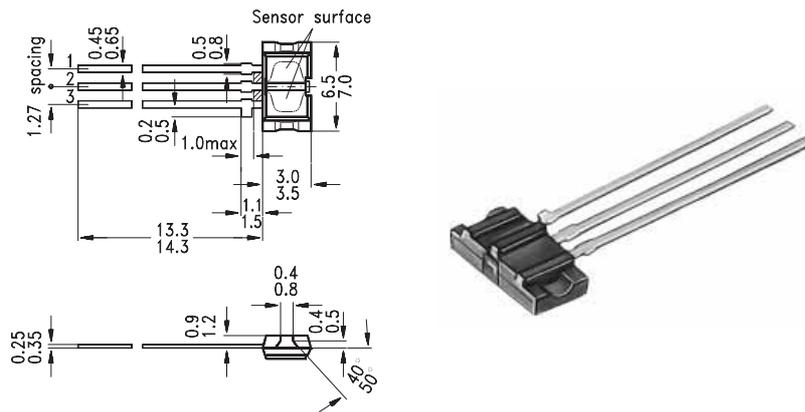
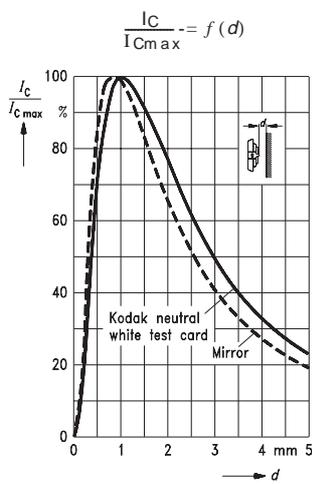
Bild 4.8: Frequenzspektrum der Lochsirene bei einem Überdruck von 1 bar in Abhängigkeit von der Anregungsfrequenz. Das Signal wurde mit einem Mikrofon bei freier Abstrahlung in einer Entfernung von wenigen cm aufgezeichnet.

verschließen. Durch Verschieben der Sirene kann die Resonanzfrequenz des Plenums verändert werden, um Eigenschwingungen des Brenners zu unterdrücken oder die Amplitude der Anregung zu verstärken.

Zur Überwachung der Drehzahl wurde die Sirene mit einem optischen Sensor ausgestattet (Miniatur-Reflexlichtschranke Siemens SFH 900). Der Sensor emittiert mittels einer integrierten Diode Licht, das von der nur wenige Millimeter entfernten, blanken Messingoberfläche der Lochscheibe reflektiert wird. Wie Abbildung (4.9) zeigt, nimmt die Kollektorspannung am Detektor bereits bei geringen Entfernungen zwischen Emitter und reflektierender Oberfläche stark ab. Platziert man die Lichtschranke etwa zwei Millimeter vor der reflektierenden Lochscheibe, besitzt das Sensorsignal einen ausreichenden Signalabstand.

Eine wichtige Modifikation der Sirene besteht in einem Lochblech, das im Plenum circa 100 mm von den Ausströmöffnungen der Sirene entfernt angebracht wurde. Das Gemisch strömt aus der Sirene in Form von pulsierten Freistrahlen mit hoher Geschwindigkeit aus. Durch Einbau des Lochblechs konnten im Plenum die Bereiche mit hoher Strahlgeschwindigkeit im Wesentlichen auf das Stück zwischen der Sirene und dem Lochblech beschränkt

## a) Maße

b) Kollektorspannung  $U_c$ 

## c) relative spektrale Emission von Emitter (GaAs) und Detektor (Si)

Emitter:  $I_{rel} = f(\lambda)$ , Detektor:  $S_{rel} = f(\lambda)$

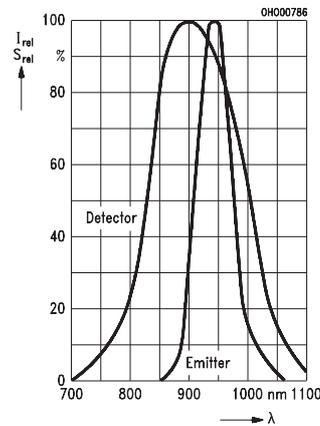


Bild 4.9: Die Reflexlichtschranke Siemens SFH 900 a) Abmessungen und Aussehen b) Kollektorspannung in Abhängigkeit von Reflektorabstand c) spektrale Eigenschaften von Emitter- und Detektordiode (Quelle: [Sie95])

werden. Auf diese Weise wird im Bereich der Druckaufnehmer eine homogene Strömungsgeschwindigkeit erreicht. Dadurch wird es erst möglich, die akustischen Wellen im Plenum mit der benötigten Genauigkeit zu rekonstruieren. Die stromab auf Seite der Brennkammer gelegene Sirene besitzt eine ähnliche Vorrichtung.

## 4.2 Messmethoden

Nach der Definition und Interpretation akustischer Zweipole und der Vierpoldarstellung akustischer Systeme behandelt dieses Kapitel Methoden für die experimentelle Bestimmung von akustischen Vierpolen realer Geometrien. Am Beginn steht eine kurze Zusammenfassung von bisherigen Arbeiten zu diesem Thema.

Die experimentelle Bestimmung von Transfermatrizen oder akustischen Vierpolen im Allgemeinen wurde erst durch Fortschritte bei der Analyse von zeitlichen Signalen und die Entwicklung leistungsfähiger Fourieranalysatoren möglich. Meistens wurde bei der experimentellen Charakterisierung akustischer Systeme auf die Transfermatrixdarstellung zurückgegriffen. Wie bereits besprochen stellt dies keine Einschränkung dar, da man Ergebnisse problemlos in andere Darstellungen umrechnen kann.

Seybert und Ross [SR77] berichten 1977 über eine Zweimikrofon-Methode zur Bestimmung von Impedanzen. Im selben Jahr schreiben Kathuriya und Munjal [KM77, KM77] über eine Methode, mit der die Impedanz einer Black Box bei niedrigen Frequenzen bestimmt werden kann. Blaser und Chung [BC78] verwenden eine andere Methode, um Reflexionsfaktoren mit einer Zweimikrofonmethode zu bestimmen.

To und Doige [To75, TD79a, TD79b] beschreiben zwischen 1975 und 1979 eine Methode, um die Matrixparameter akustischer Systeme mit transienten Signalen zu bestimmen. Die Technik verarbeitet Druckmessungen in vier Ebenen, zwei vor und zwei nach dem System und ist geeignet, durchströmte Systeme zu untersuchen.

Lung und Doige [LD83] erweiterten die Methode 1983 und präsentierten experimentelle Daten für Strömungsgeschwindigkeiten bis zu  $M = 0.2$ . Die Methode von Lung und Doige beruht auf Messungen zwischen Mikrofonpaaren. Um die Fehlereinflüsse des Strömungsrauschens zu mindern, mitteln sie im Zeitbereich. Nishimura *et al.* [NFA83] verwendeten eine Methode, die prinzipiell mit jener von Lung und Doige übereinstimmt, benutzten aber in den Experimenten ein Zufallssignal für die Anregung.

In einer weiteren Arbeit beschreiben Fumoux *et al.* [FLM85] 1985 eine Methode zur Bestimmung der Transfermatrizen von Elementen hydraulischer

Leitungen. Dabei gewannen sie zwei unterschiedliche Testzustände, indem sie von zwei Seiten anregen. Doige *et al.* [DMA88] schlugen 1988 eine Verbesserung ihrer Methode aus [LD83] vor. Die beiden für die Bestimmung der Matrix benötigten Zustände werden dabei durch Verschiebung der Anregung erzeugt, das restliche System bleibt unverändert.

Wie Doige *et al.* in [DMA88] und [MD90] aufzeigten, ist diese *two-source-location* genannte Methode üblicherweise stabiler als die bis dahin verwendete *two-load* Methode<sup>28)</sup>. Ein weiterer Vorteil der Methode liegt darin, dass das Strömungsfeld zwischen den beiden Messungen nicht verändert wird, da die Geometrie unverändert bleibt.

Åbom lieferte in [Åbo92] 1992 eine weitergehende Analyse zur Stabilität der *two-source location* Methode und untersuchte zusammen mit Bodén den Einfluss von Fehlern [Åbo86, BÅ86, ÅB88]. Paschereit *et al.* [PSPM99] lieferten schließlich 1999 einen weiteren Beitrag, indem sie durch eine Erweiterung auf beliebig vieler Messstellen die Fehleranfälligkeit der Methode deutlich reduzierten<sup>29)</sup>.

Der Vollständigkeit halber soll erwähnt werden, dass die Methoden schließlich so erweitert wurden, dass die experimentelle Bestimmung von Quelltermen möglich wurde. Quellterme beschreiben nach (4.1) Prozesse, die unabhängig vom akustischen Feld einen Beitrag zu Druck- und Schnellechwankungen liefern. Beispiele für solche Prozesse sind Strömungsinstabilitäten oder Wirbelablösungen.

$$\begin{pmatrix} p' \\ \bar{\rho}c \\ u' \end{pmatrix}_d = \mathbf{T}_{pu} \cdot \begin{pmatrix} p' \\ \bar{\rho}c \\ u' \end{pmatrix}_u + \begin{pmatrix} p' \\ \bar{\rho}c \\ u' \end{pmatrix}_{source} \quad (4.1)$$

Bodén [Bod91] beschreibt die experimentelle Bestimmung von Quelltermen mit der *two-load* Methode. Untersuchungen zu akustischen Quelltermen wurden jedoch bereits früher unternommen, ein Überblick findet sich bei Gupta [Gup91]. Lavrentjev *et al.* [LBÅ92] diskutieren 1991 ein Testkriterium, mit dem die Linearität und Zeitinvarianz einer Quelle überprüft werden kann. Lavrentjev *et al.* beschreiben 1995 in [LAB95] eine Methode, die viele unabhängige Testzustände einbezieht, um ein überbestimmtes Gleichungssystem zu bilden, dessen Lösung auch die Bestimmung akustischer Quellterme ermöglicht. Paschereit *et al.* [PSPM99] präsentierten 1999 eine Messung von Quelltermen vorgemischter Flammen. Auf akustische Quellterme wird in dieser Arbeit aber nicht näher eingegangen.

---

<sup>28)</sup> siehe Kapitel 4.4

<sup>29)</sup> siehe Kapitel 4.2.2

Neben Methoden zur Messung von Transfermatrizen wurden auch Verfahren vorgeschlagen, um Streumatrizen direkt experimentell zu bestimmen. Bereits 1983 diskutierte Bento Coelho [Coe83] eine Methode für die Messung von Streumatrizen, jedoch ohne diese auch experimentell anzuwenden. Åbom [Åbo91] schlug 1989 eine Methode zur direkten experimentellen Bestimmung von Streumatrizen vor, die er durch Messungen an einem Rohrstück und an einem Schalldämpfer erprobte. Dabei verwendete er ein Referenzsignal zur Unterdrückung von Störungen und verglich Ergebnisse bei Anwendung der *two-source location* und *two-load* Methode.

#### 4.2.1 Die Viermikrofon-Methode

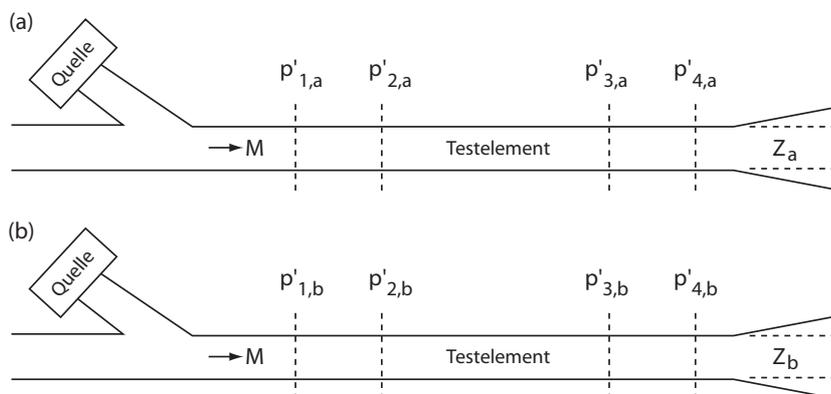
Die Größen  $p'$  und  $u'$  können grundsätzlich simultan bestimmt werden. Da Drücke jedoch wesentlich einfacher und genauer gemessen werden können als Schnellen, möchte man die Transfermatrix üblicherweise nur mit Mikrofonen, also aus einer reinen Druckmessung bestimmen. Ist die Mobilitätsmatrix  $\mathbf{M}_{pu}$  einer Messtrecke bekannt, so können die Elemente  $u'_1$  und  $u'_2$  der Zustandsvektoren auf beiden Seiten der Messtrecke durch Anwendung der Mobilitätsmatrix  $\mathbf{M}_{pu}$  auf die Druckmessungen  $p'_1$  und  $p'_2$  vervollständigt werden. Die Mobilitätsmatrix des Rohres ist analytisch bekannt. Daher ist es möglich, die vollständigen Druckvektoren  $(p'/\bar{\rho}c, u')^T$  aus der Messung des Druckes an zwei Positionen eines Rohres zu errechnen<sup>30)</sup>.

Verwendet man vier Mikrofone, so kann man die Zustandsvektoren in den beiden Referenzebenen  $\mathcal{R}_u$  und  $\mathcal{R}_d$  der gesuchten Transfermatrix vervollständigen und erhält somit zwei Gleichungen für die vier unbekannt Elemente der Transfermatrix. Um die Transfermatrix vollständig bestimmen zu können, sind jedoch insgesamt vier Gleichungen notwendig. Man benötigt also einen zweiten Satz von Zustandsvektoren. Die beiden Sätze von Zustandsvektoren müssen *linear unabhängig* sein, da sich die Anzahl der unabhängigen Gleichungen sonst reduziert und kleiner wird als die Anzahl der unbekannt Variablen. Das hat zur Folge, dass das System nicht gelöst werden kann.

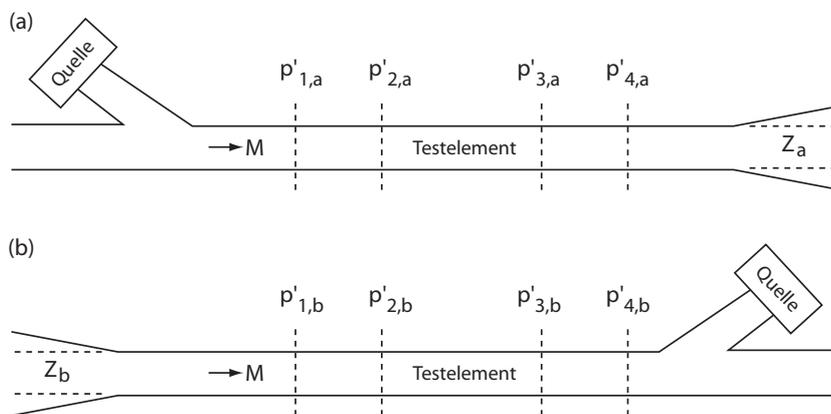
Eine gängige Methode, um linear unabhängige Testzustände zu erzeugen, ist die *two-load* Methode, die in Abbildung (4.10) skizziert wird. Bei diesem Verfahren wird die Impedanz auf einer Seite des Testelements, etwa durch Aufsetzen einer Blende, zwischen den Teilmessungen verändert. Bei der *two-load* Methode ist eine lineare Unabhängigkeit der Zustandsvektoren aus den Teilmessungen nicht immer gewährleistet. Munjal [MD90] demonstriert anhand eines Beispiels, dass es Fälle gibt, wo die *two-load* Methode

---

<sup>30)</sup> siehe auch Kapitel 4.4.1

Bild 4.10: Die *two-load* Methode (nach [MD90])

versagt. Wie Åbom [Åbo92] zeigt, bricht die Methode in der Umgebung von Zuständen zusammen, wo sich die Impedanzen der Teilversuche nur wenig unterscheiden. In der Praxis gibt es immer Frequenzen, für die dieser Fall eintritt [Åbo92]. Ein weiterer Nachteil der *two-load* Methode besteht bei durchströmten Systemen oftmals in der Veränderung der Strömung, wenn Blenden oder Ähnliches eingebaut werden um die Impedanzen zwischen den Teilmessungen zu verändern.

Bild 4.11: Die *two-source location* Methode (nach [MD90])

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, die akustische Quelle zwischen den beiden Teilmessungen zu verschieben. Bei der in Abbildung 4.11 dargestellten *two-source location* Methode regt man das System bei einer Teilmessung von stromauf, bei der zweiten von stromab akustisch an. Åbom

[Åbo92] leitet ein Kriterium für die lineare Unabhängigkeit der Teilmessungen ab und kommt in einer detaillierten Analyse zu dem Schluss, dass bei dieser Methode *grundsätzlich immer* ein Paar linear unabhängiger Zustände aus den Teilmessungen hervorgeht. Die two-source Methode ist daher für die Bestimmung von Transfermatrizen vorzuziehen<sup>31)</sup>.

Hat man einen Satz von zwei linear unabhängigen Testzuständen experimentell erzeugt, so kann man das vollständige Gleichungssystem (4.2) aufstellen und den Vektor der Transfermatrizelemente  $\vec{\mathbf{T}}_{pu} = (T_{11} \ T_{12} \ T_{21} \ T_{22})^T$  durch Lösung von (4.2) mit numerischen Standardmethoden [Pre86, Ves93, Wol99] bestimmen.

$$\begin{pmatrix} p'_a & u'_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p'_a & u'_a \\ p'_b & u'_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p'_b & u'_b \end{pmatrix}_u \cdot \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{21} \\ T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p'_a \\ u'_a \\ p'_b \\ u'_b \end{pmatrix}_d \quad (4.2)$$

Einige Vorversuche haben gezeigt, dass die Viermikrofonmethode grundsätzlich funktioniert. Wie die Diskussion in Kapitel 4.4 zeigt, stellt die Methode jedoch hohe Anforderungen an die Qualität der experimentell bestimmten Druckvektoren und besitzt eine inhärente Instabilität, wenn der Abstand der Mikrofone mit der halben Wellenlänge zusammenfällt. Dies führt dazu, dass mit der Viermikrofonmethode ermittelte Transfermatrizen nicht die gewünschte Genauigkeit erreichen. Experimentell ist die Viermikrofonmethode daher eher als Minimalvariante anzusehen.

#### 4.2.2 Die Multimikrofonmethode

Die eben angesprochenen Stabilitätsprobleme der Viermikrofonmethode lassen sich beseitigen, indem man die Methode auf eine beliebige Anzahl von Stützpunkten erweitert. Da die Messwerte von mehreren Mikrofonen aufgezeichnet werden, wird diese Technik als *Multimikrofonmethode* bezeichnet. Die Multimikrofonmethode wurde unter anderem von Ronneberger und Ahrens [RA77], Peters [Pet93, PHRW93] und Paschereit *et al.* [PSPM99] angewandt. Wie in Kapitel 4.4 dargestellt wird, tritt bei der Verwendung mehrerer Messstellen die Instabilität der Viermikrofonmethode nur in verringertem Maße auf und die Auswerterroutine wird unempfindlicher gegenüber Messfehlern.

<sup>31)</sup> Zusätzlich schlägt Åbom [Åbo92] eine dritte Methode vor, mit der eine beliebig grosse Zahl von linear unabhängigen Testzuständen erzeugt werden kann. Dieses Verfahren ermöglicht eine Mittelung über eine beliebige Zahl von Teilmessungen und eignet sich daher besonders bei stark verrauschten Messsignalen.

Bei der Multimikrofonmethode gehen Schalldruckmessungen an beliebig vielen Positionen stromauf und stromab zu dem Testelement in die Auswertung ein. Auf die Druckmesswerte wird ein nichtlinearer Levenberg-Marquardt Fit [Mar63, Pre86, Wol99] der Riemann Invarianten  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  gelegt, um die Koeffizienten  $\tilde{f}_0$  und  $\tilde{g}_0$  in den beiden Referenzebenen  $\mathcal{R}_u$  und  $\mathcal{R}_d$  der Transfermatrix  $\mathbf{T}_{fg}$  zu bestimmen. Diese bilden ein lineares Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_a & \tilde{g}_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{f}_a & \tilde{g}_a \\ \tilde{f}_b & \tilde{g}_b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{f}_b & \tilde{g}_b \end{pmatrix}_u \cdot \begin{pmatrix} T_{11} \\ T_{12} \\ T_{21} \\ T_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{f}_a \\ \tilde{g}_a \\ \tilde{f}_b \\ \tilde{g}_b \end{pmatrix}_d \quad (4.3)$$

äquivalent zu (4.2), dessen Lösung die gesuchte Transfermatrix  $\mathbf{T}_{fg}$  in  $fg$  Notation darstellt. Die gewonnene Transfermatrix  $\mathbf{T}_{fg}$  kann anschließend mit der Transformation (3.8) in die  $pu$  Darstellung  $\mathbf{T}_{pu}$  oder mittels (3.11) in die Streumatrixdarstellung  $\mathbf{S}_{fg}$  umgerechnet werden.

Wie in Kapitel 4.4 dargestellt, erweist sich die Methode als wesentlich robuster gegenüber Messfehlern und ermöglicht durch grafische Auftragung der Messwerte und Fits bereits vorab eine Abschätzung über die Qualität einer Messung. Durch den Vergleich der Ergebnisse für unterschiedliche Anregungsfrequenzen können unzuverlässige Mikrofone identifiziert und vorab von der Auswertung ausgeschlossen werden.

Eine weitere Verfeinerung der Methode stellt die Mittelung über eine große Anzahl von Zustandsvektoren im Frequenzraum bei einer Anregungsfrequenz dar [GFEP03]. Voraussetzung dafür sind konstante Versuchsbedingungen über einen Zeitraum von mehreren Minuten. Dann ist es möglich, im Frequenzraum über eine große Anzahl von Zustandsvektoren bei einer Anregungsfrequenz zu mitteln. In der Praxis hat sich für etwas komplexere Geometrien eine Zahl von 250 Messungen pro Frequenz bewährt.

Erst diese Erweiterungen der Viermikrofonmethode machten es möglich, auch die Transfermatrizen komplexer Testelemente in der angestrebten Qualität experimentell zu messen.

### 4.3 Beschreibung des Messverfahrens

In diesem Kapitel werden die einzelnen Schritte einer Transfermatrixmessung detailliert beschrieben.

### 4.3.1 Bestimmung von Druckvektoren

Zunächst soll der Ausdruck *Druckvektor* erläutert werden. Der Druck ist an sich eine skalare Feldgröße. Er besitzt im Gegensatz zur Geschwindigkeit keine vektoriellen Eigenschaften und auch keine Orientierung, wie etwa die Riemann Invarianten. Im Zusammenhang mit der Bestimmung von Transfermatrizen macht die Bezeichnung Druckvektor allerdings insofern Sinn, als dabei auf fouriertransformierte Zeitreihen von Druckdaten an den Mikrofonpositionen Bezug genommen wird, die aufgrund der Eigenschaften der Fouriertransformation im Frequenzraum Vektoren sind, welche die Amplitude  $A$  und die Phase  $\Phi$  besitzen <sup>32)</sup>. Diese lassen sich in der komplexen Ebene mathematisch zu einem Vektor  $Ae^{i\Phi}$  zusammenfassen. Wird im weiteren Text von Druckvektoren gesprochen, sind diese komplexwertigen Vektoren im Frequenzraum gemeint.

Wie bereits erwähnt, ist es für die Bestimmung der Transfermatrix eines Testelements notwendig, den Schalldruck an den jeweiligen Messstellen zu ermitteln. Grundsätzlich spricht nichts dagegen, die Transfermatrix alternativ aus der Messung der Schnelle an verschiedenen Messpunkten abzuleiten. Aufgrund der relativ großen Querschnitte in Plenum und Brennkammer war bei dem untersuchten Messaufbau eine Messung der Schnelle mit Hitzdraht jedoch nur in der wesentlich engeren Düse mit der erforderlichen Genauigkeit möglich.

Um Phasenfehler zu vermeiden, sollte der Schalldruck an allen Messstellen zeitgleich bestimmt werden. Das wurde durch Einsatz eines Eagle PC-30F-S16 Sample-and-Hold Boards erreicht, welches die simultane Abtastung von bis zu 16 Kanälen gestattet.

Bei einer Samplingrate von  $f_s = 10$  kHz, entsprechend einem Abtastintervall von  $\delta t = 0.1$  ms, wurden eine Sekunde lang die Spannungen an den Mikrofonen und an einem optischen Sensor in der Sirene aufgezeichnet. Man erhält für jeden Kanal einen Vektor  $z_n$  mit einer Zeitreihe von  $N = 10^4$  Messwerten. Die Zeitreihen  $z_n$  werden mit einem Hanning Fenster nach Gleichung (4.4) versehen.

$$z_n^H = \frac{z_n}{2} \cos\left(\frac{2\pi n}{N-1}\right) \quad (4.4)$$

Dadurch wird der Einfluss der aperiodischen Anteile an den Enden der Zeitreihen in der anschließenden Fouriertransformation abgedämpft [RG75,

---

<sup>32)</sup> Die Fouriertransformation zerlegt die Mikrofonsignale in ihre spektralen Anteile, wodurch man für jede Frequenz - oder genauer, da man im Fall von Messreihen die diskrete Fouriertransformation anwendet, jeden *Bin* - Amplitude und Phase erhält. Eine Interpretation dieser Größen findet sich in Kapitel 2.5

Sch92]. Diese Zeitreihen  $z_n^H$  werden anschliessend nach Gleichung (4.5) fouriertransformiert.

$$Z_k = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N z_n^H e^{-i2\pi(k-1)(n-1)/N} \quad (4.5)$$

Mit Hilfe der diskreten Fouriertransformation (4.5) berechnet man aus der Zeitreihe  $z_n^H$  ein Spektrum von Druckvektoren  $Z_k$ , bestehend aus Amplitude und Phase des Drucksignals  $z_n^H$  bei den diskreten Frequenzen  $\omega_k = k\omega_s/N$ .

Durch Analyse des Spektrums des Signals des Sensors in der Sirene wird nun die Anregungsfrequenz der Sirene während des Messzeitraums bestimmt<sup>33)</sup>. Das ist erforderlich, da die Drehgeschwindigkeit der Sirenenlochscheibe im Laufe der Zeit leichten Schwankungen unterliegt. Um die Anregungsfrequenz der Sirene zu bestimmen, sucht man das Maximum der Amplitude  $|Z_k|$  in einem Bereich von wenigen Hz um die bekannte Vorgabedrehzahl im Frequenzspektrum des Sensorsignals. Im weiteren Verlauf werden für alle Kanäle nur die Werte bei dieser Frequenz  $\omega_a$  weiterverarbeitet. Alle anderen Frequenzen bleiben unberücksichtigt.

Der Sensor in der Lochsirene besteht aus einer Reflexlichtschranke, die um eine Lochposition versetzt, ein nahezu rechteckiges, periodisches Signal liefert. Die momentane Spannung des Signals zeigt an, ob sich vor dem Sensor gerade ein Stück Lochscheibe oder ein Loch befindet. Durch die symmetrische Anordnung von Sensor und Lochblende gibt das Signal somit Auskunft darüber, ob die Sirene den Luftmassenstrom gerade durchlässt oder blockiert. Dieses Signal kann wie ein Mikrofonsignal auf einem Kanal der Messkarte aufgezeichnet werden.

Das Sensorsignal ermöglicht die Bestimmung der Phase der Anregung in Bezug auf den Beginn der Messung. Zieht man bei jeder Messung die Phase der Anregung wie in Abbildung 4.12 von den Mikrofonphasen ab, kann man auch ohne Verwendung eines Triggers bei einer Anregungsfrequenz über mehrere Sätze von Druckvektoren mitteln. Erst durch die Mittelung über viele Datensätze erreicht man die für die Bestimmung von Transfermatrizen notwendige Messgenauigkeit.

Für die Mittelung über einen Datensatz von Druckvektoren bei einer Anregungsfrequenz wurde zuerst das arithmetische Mittel verwendet. Eine ge-

---

<sup>33)</sup> Bei der diskreten Fouriertransformation ist es nur möglich, die Frequenz auf eine Binbreite  $d\omega = \omega_s/N$ , in unserem Fall ist das üblicherweise 1 Hz, genau zu bestimmen. Da die Signale alle von der gleichen Quelle stammen ist die Signalfrequenz für alle Kanäle gleich. Die speziellen Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation müssen bei der Verarbeitung nichtzentraler Frequenzen in der Auswerterroutine nicht näher berücksichtigt werden, da nur relative Größen interessieren.

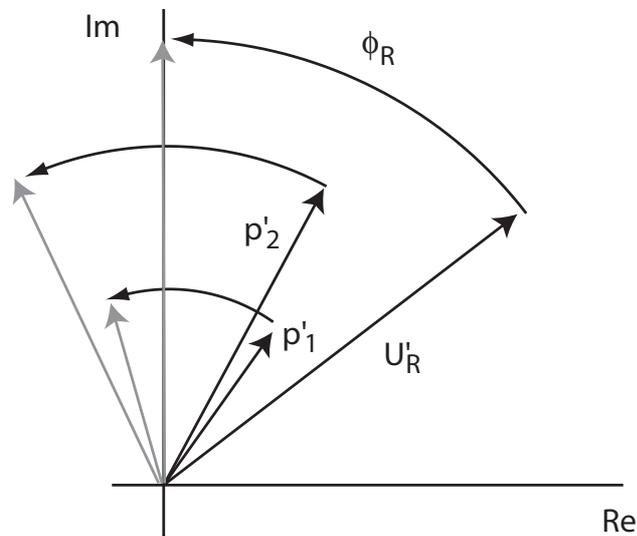


Bild 4.12: Für die Mittelung von Druckvektoren wird jeder Vektor  $p'_i$  um die Phase  $\Phi_R$  des Referenzsignals  $U'_R$  zurückgedreht. Dadurch ist es auch ohne Verwendung eines Triggers möglich, über mehrere Sätze von Druckvektoren zu mitteln.

naue Analyse der Verteilung der Druckvektoren zeigte allerdings, dass diese mitunter ungünstig ausfällt und sich Druckvektoren in mehreren Regionen der komplexen Ebene häufen. Eine ausgesprochene Schwäche des arithmetischen Mittels liegt in solchen Fällen darin, dass alle Werte des Datensatzes mit dem selben Gewicht in die Mittelwertbildung eingehen.

Eine gewisse Verbesserung brachte die Verwendung der *median* Funktion unter Matlab. Bei *median* wird ein Mittelwert über den zentralen Bereich der Verteilung gebildet, Randwerte der Verteilung werden nicht berücksichtigt. Amplituden und Phasen eines Datensatzes von Druckvektoren werden mit *median* getrennt gemittelt, wobei die grössten und kleinsten 30 Prozent eines Datensatzes nicht in die Mittelung eingingen. Durch Anwendung dieses Verfahrens konnte im Vergleich zur Bildung des arithmetischen Mittelwerts die Streuung der errechneten Transfermatrizen reduziert werden.

### 4.3.2 Mikrofonkalibration

Wie Abbildung 4.13 erkennen lässt, muss der unterschiedliche Frequenzgang der verwendeten Mikrofone unbedingt berücksichtigt werden. Versorgt man mehrere Mikrofone mit einem monofrequenten, periodischen Drucksignal von identischer Amplitude, differieren die Amplituden der resultierenden

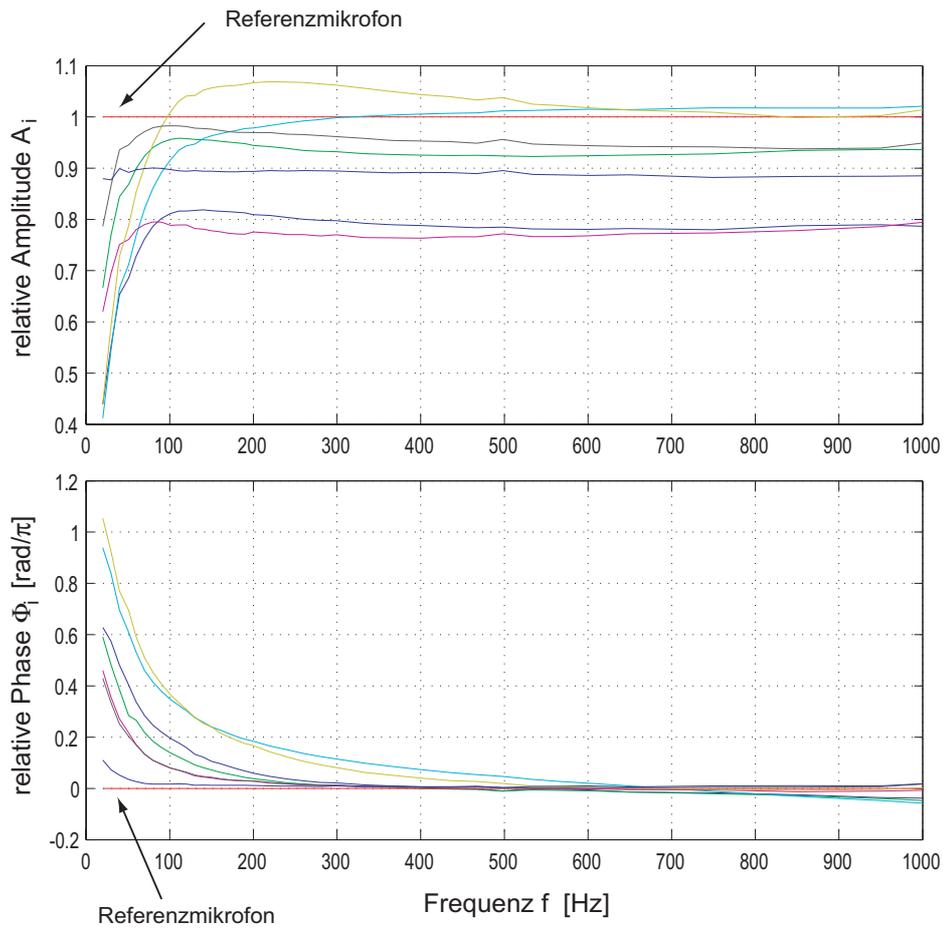


Bild 4.13: Eine typische Mikrofonkalibration. Die gemessenen Amplituden und Phasen der Signalspannungen bei unterschiedlichen Signalfrequenzen werden auf die Werte eines Referenzmikrofons bezogen. Besonders bei tiefen Frequenzen zeigen sich starke Abweichungen zwischen den Mikrofonen.

Spannungssignale nicht selten um 10-20 %. Auch die Phasen zeigen starke Abweichungen von 60 Grad oder mehr. Die Abweichungen variieren zudem stark mit der Signalfrequenz, bei Frequenzen unterhalb von etwa 150 Hz zeigen sich in den Kalibrationskurven in Amplitude und Phase starke Abweichungen zwischen den Mikrofonen. Die Ursache für dieses Verhalten konnte nicht geklärt werden. Einflüsse der verwendeten Kühladapter können jedoch ausgeschlossen werden, da eine Vergleich zwischen Kalibrationen mit und ohne Adapterkappe keine signifikanten Unterschiede aufzeigte.

Zur Kalibrierung der Mikrofone werden in der Literatur im Wesentlichen zwei unterschiedliche Methoden zur Beseitigung dieses bekannten Fehlereinflusses vorgeschlagen:

- Die Mikrofone werden demselben Schalldruck ausgesetzt und durch den Vergleich der Mikrofonspannungen wird für jedes Mikrofon ein komplexwertiger Kalibrationsfaktor ermittelt. Der Kalibrationsfaktor korrigiert unterschiedliche Amplituden- und Phasengänge der Mikrofone und ist üblicherweise frequenzabhängig. [SR77, TD79b, LD83].
- Bei einer zusätzlichen Messung werden die Mikrofone vertauscht. Dadurch ist es möglich, die korrekten relativen Schalldrücke ohne vorherige Kalibration zu ermitteln [CB80a, CB80b]. Bei der Vertauschungsmethode verdoppelt sich die Messzeit, was insbesondere bei Mittelung über eine große Anzahl von Einzelmessungen nicht mehr akzeptabel ist.

Mit der in Abbildung 4.14 skizzierten Kalibrationseinrichtung wurde entsprechend der ersten Methode in einer gesonderten Kalibrationsmessung die relativen Kalibrationsfunktionen der Mikrofone ermittelt. Der Kalibrationsaufbau besteht aus einem zwei Meter langen PVC Rohr, an dessen einem Ende sich ein Deckel mit konzentrisch um die Mittelachse angeordneten Öffnungen für die Mikrofone befindet. In das Rohr wird ein verschiebbarer Einsatz mit einem Lautsprecher eingesetzt. Mit Hilfe eines Frequenzgenerators treibt man den Lautsprecher nun bei unterschiedlichen Frequenzen an und vergleicht Amplituden und Phasen der Spannungssignale an den Ausgängen der Mikrofonverstärker. Das Signal des Frequenzgenerators wird als Referenz mitgeschrieben.

Für die Messung der Transfermatrix ist es ausreichend, die relativen Phasen der Mikrofone zueinander und die Verhältnisse der Amplituden zwischen den Mikrofonen zu kennen. Daher kann man bei der Bestimmung der Kalibrationskurven von der Arbeitshypothese ausgehen, dass ein willkürlich ausgewähltes Mikrofon einen linearen Frequenzgang besitzt. Auf dieses Mikrofon

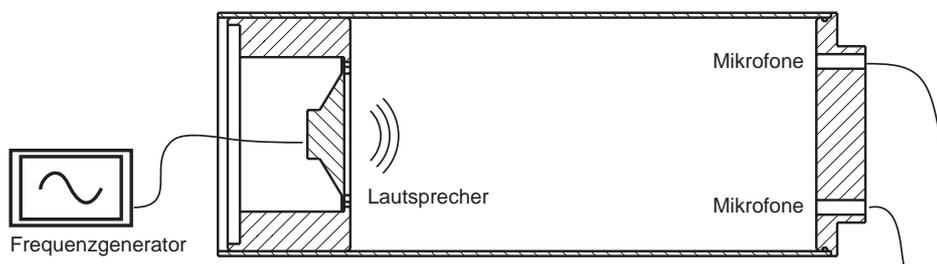


Bild 4.14: Aufbau zur Kalibrierung von Mikrofonen (verkürzte Darstellung).

werden alle Amplituden und Phasen bei der Kalibrationsmessung bezogen. Das Verhältnis  $A_i/A_{ref}$  der ermittelten komplexen Signalvektoren liefert die Stützpunkte der Kalibrationskurven  $C_{i,c}$  der Mikrofone. Werte für Frequenzen zwischen den Stützpunkten der Kalibration werden in der Auswerterroutine durch lineare Interpolation errechnet.

$$C_i(\omega) = \frac{A_i(\omega)}{A_{ref}(\omega)} \quad (4.6)$$

Die bei der Kalibration ermittelten Quotienten  $C_i(\omega)$  werden bei der Auswertung der Messung berücksichtigt. Da die Kalibrationskurven der Mikrofone im Lauf von wenigen Tagen driften, ist es notwendig, die Kalibrationsmessung in regelmäßigen Abständen zu wiederholen. Bestens bewährt hat es sich, die Kalibration zwischen den Teilmessungen einer Transfermatrixbestimmung zu ermitteln.

Unter der Prämisse, dass bei der Kalibration tatsächlich alle Mikrofone mit identischem Schalldruck versorgt wurden, gehen sämtliche mit der Anregung korrelierten Störeinflüsse zwischen der Messstelle und der Messkarte ein. Insbesondere werden von der Kalibration folgende Fehlereinflüsse ausgeglichen:

- Durch den Filter des Mikrofonverstärkers verursachte Phasenverschiebungen,
- Langsame Veränderungen der Empfindlichkeit der Mikrofone durch sukzessive Alterung der Kapseln und Vorverstärker der Mikrofone,
- Das individuelle Übertragungsverhalten der Mikrofonadapter,
- Unterschiedliche Empfindlichkeit der Kanäle der Messkarte,
- Unterschiede in den Dämpfungseigenschaften der Signalleitungen

Die Kalibrationstabellen werden in einem Textfile abgespeichert. Details zum Format der Kalibrationsfiles finden sich in Appendix B.3.

#### 4.4 Sensitivitätsanalyse

Bereits bei den ersten Versuchen, Transfermatrizen experimentell mit der Multimikrofonmethode zu bestimmen, zeigte sich, dass die Multimikrofonmethode, wenngleich wesentlich stabiler als die Viermikrofonmethode, empfindlich auf Fehler in den Druckdaten reagiert. Die Hauptursache für die beobachteten Messfehler liegt in dem durch Turbulenz induzierten Rauschen bei der Durchströmung der Testelemente und kann damit nicht beseitigt werden.

Um ein besseres Verständnis für die Qualität der experimentell ermittelten Transfermatrizen zu erhalten und konkrete Aussagen über die benötigte Anzahl von Mikrofonen, die optimale Lage der Messpositionen in Bezug auf das Testelement oder die benötigte Mindestzahl von Einzelmessungen pro Frequenz zu gewinnen, wurde der Einfluss dieser Parameter auf den Gesamtfehler untersucht. Weitere Fehlereinflüsse stellen etwa Ungenauigkeiten bei der Bestimmung der Messpositionen, der Temperatur bzw. Schallgeschwindigkeit und der Strömungsgeschwindigkeiten in der Versuchsanlage dar. Diese und der Einfluss der endlichen Größe der Mikrofonmembranen werden ausführlich von Åbom und H. Bodén [Åbo86, BÅ86, ÅB88, Åbo92] diskutiert.

Eine klassische Fehlerfortpflanzungsrechnung zur Quantifizierung des in den Elementen der Transfermatrix zu erwartenden Fehlers gestaltet sich aufgrund der Komplexität der Auswerteroutine schwierig. Insbesondere die Übertragung der Fehler von experimentell bestimmten Druckvektoren auf die Elemente der Transfermatrix über den Kern der Auswerteroutine lassen sich nur schwer quantifizieren. Die zentrale Auswerteroutine wendet einen *nichtlinearen Levenberg-Marquardt Fit* [Pre86, Wol99, Mar63] an, um die Koeffizienten der Riemann Invarianten in den Definitionsebenen der Transfermatrix zu bestimmen. Um die Fehlerfortpflanzung über die Auswerteroutine zu untersuchen, wurde die Bestimmung der Transfermatrix im Sinne einer *Monte-Carlo Simulation* nachgebildet [Pre86, Ves93]. Dadurch war es möglich, das Übertragungsverhalten von Messfehlern in den Druckvektoren über die Auswerteroutine numerisch zu bestimmen.

Um insbesondere Einflüsse der Lage der Mikrofone zueinander auf die Fehleranfälligkeit der Auswerteroutine detailliert zu untersuchen, wurde die Sensitivitätsanalyse in mehrere Abschnitte gegliedert. Die Auswerteroutine besteht im wesentlichen aus drei Schritten:

- Bestimmung des Zustandsvektors  $(\tilde{f}_a, \tilde{g}_a)^T$  in der Definitionsebene stromauf von dem Testelement durch Extrapolation von Messwerten,
- Bestimmung des Zustandsvektors  $(\tilde{f}_b, \tilde{g}_b)^T$  in der Definitionsebene stromab von dem Testelement durch Extrapolation von Messwerten,
- Berechnung der Elemente der Transfermatrix durch Lösung eines linearen Gleichungssystems aus den Zustandsvektoren von zwei unabhängigen Teilmessungen

Den Ausgangspunkt der Sensitivitätsanalyse bildet die Herleitung einer Vorschrift für die Berechnung vollständiger Zustandsvektoren  $(p' / \bar{\rho}c, u')^T$  in Rohren aus der alleinigen Messung des Druckes  $p'$  an zwei Querschnitten des Rohrs. Diese Vorschrift wird anschließend erweitert, sodass in Rohren vollständige Zustandsvektoren an beliebigen Stellen aus Druckmessungen an zwei Positionen extrapoliert werden können. Anschließend wird das Übertragungsverhalten dieser Extrapolation fehlerbehafteter Druckmesswerte auf den extrapolierten Wert diskutiert. Diese Diskussion wird auf die Extrapolation beliebig vieler Messwerte erweitert. Damit ist die Übertragung von Messfehlern auf die Zustandsvektoren in den Definitionsebenen geklärt. Nach der Charakterisierung des Gleichungslösers können alle Elemente zusammengefasst und das Übertragungsverhalten der Auswerteroutine besprochen werden. Um den Eingangsfehler bei realen Messungen zu bestimmen, werden diese statistisch untersucht. Ein weiterer Abschnitt behandelt die experimentell bestimmte Konvergenz von Transfermatrixmessungen bei Erhöhung der Anzahl der Messpunkte. Zum Abschluss werden aus der Sensitivitätsanalyse Empfehlungen für Verbesserungen bei zukünftige Messungen abgeleitet.

#### 4.4.1 Extrapolation von zwei Messwerten

Die verlustlose Ausbreitung von Wellen in einem Rohr lässt sich analytisch sehr einfach beschreiben. Vernachlässigen wir die Dämpfungseffekte aus Kapitel 2.7, so können wir die Wellengleichung (2.13) anwenden und erhalten für die Ausbreitung von ebenen Wellen in einem Rohr mit  $l = x_2 - x_1$  die Transfermatrix<sup>34)</sup>  $\mathbf{T}_{pu}$  des Rohrabschnitts

$$\mathbf{T}_{pu} = \begin{pmatrix} \cos kl & i \sin kl \\ i \sin kl & \cos kl \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

Führt man die Transfermatrix  $\mathbf{T}_{pu}$  mit der Transformation (3.7) in eine Transfermatrix  $\mathbf{T}_{fg}$  in  $fg$  Darstellung über, so sind die Riemann Invarianten  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  an jeder beliebigen Positionen des Rohres festgelegt, sobald ein

<sup>34)</sup> Gleichung (3.19) aus Kapitel 3.2.1

Zustandsvektor  $(\tilde{f}, \tilde{g})^T$  an einer Stelle des Rohres bekannt ist. Leider können die Riemann Invarianten nicht direkt gemessen werden. Es existieren allerdings genaue Messmethoden für die Bestimmung von Druckschwankungen. Transformiert man die Transfermatrix  $\mathbf{T}_{fg}$  mit der Koordinatentransformation (3.8) in die  $pu$  Darstellung, so sind die Zustandsvektoren  $(p'/\bar{\rho}c, u')^T$  an jedem beliebigen Querschnitt des Rohres festgelegt, sobald die Werte von Druck und Schnelle an einer Position bestimmt wurden. Die Messung der Schnelle gestaltet sich allerdings schwierig, sodass man eine Methode benötigt, die sich nur auf Druckmessungen stützt. Die Verwendung der Mobilitätsmatrix  $\mathbf{M}_{pu}$  gestattet die Berechnung der zugehörigen Schnellen aus der Messung des Druckes an zwei Positionen. Die Mobilitätsmatrix  $\mathbf{M}_{pu}$  des Rohrabschnitts berechnet man mit Hilfe von Transformation (3.12) zu

$$\mathbf{M}_{pu} = \frac{i}{\sin kl} \begin{pmatrix} \cos kl & -1 \\ 1 & -\cos kl \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

Durch Anwendung von (4.8) erhält man die Schnellen  $u'_1$  und  $u'_2$  an den Positionen  $x_1$  und  $x_2$  aus den Drücken  $p'_1$  und  $p'_2$  und leitet die Beziehungen

$$\begin{aligned} u'_1 &= i \frac{p'_1 \cos kl - p'_2}{\sin kl} \\ u'_2 &= i \frac{p'_1 - p'_2 \cos kl}{\sin kl} \end{aligned} \quad (4.9)$$

ab. Es existieren somit physikalisch sinnvolle Lösungen von  $u'_1$  und  $u'_2$  für alle Wellenzahlen, bei denen  $\sin(kl) \neq 0$ . Für die Wellenzahlen  $k = n\pi/l$  mit  $n = 0, 1, 2, \dots$  gilt  $\sin(kl) = 0$ . An diesen Stellen divergiert die Mobilitätsmatrix  $\mathbf{M}_{pu}$ . In der Umgebung dieser Wellenzahlen ist es nicht möglich, die Schnellen  $u'_1$  und  $u'_2$  aus den Drücken  $p'_1$  und  $p'_2$  zu rekonstruieren.

In einem weiteren Schritt versucht man nun, den Druck in einer außerhalb des Bereichs  $[x_1, x_2]$  gelegenen Ebene  $x_E$  durch Extrapolation der bekannten Messdaten  $p'_1$  und  $p'_2$  zu errechnen. Die Extrapolation wird in der Auswertung von Transfermatrixmessungen benötigt, um aus den gemessenen Drücken die Riemann Invarianten  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  in den Referenzebenen  $\mathcal{R}_u$  und  $\mathcal{R}_d$  der Transfermatrix zu bestimmen. Zur Vereinfachung der Schreibweise legt man das Koordinatensystem so, dass  $x_E = 0$ . Durch Anwendung der Transfermatrix  $\mathbf{T}_{pu}$  (4.7) auf den Zustandsvektor  $(p'_1/\bar{\rho}c, u'_1)^T$  erhält man die Extrapolationsvorschrift

$$p_E = p'_1 \cos kx_1 - \sin kx_1 \frac{p'_1 \cos kl - p'_2}{\sin kl} \quad (4.10)$$

Wieder sind Schwierigkeiten für die Nullstellen von  $\sin(kl)$  zu erwarten, die Wahl von  $x_1$  spielt für die Stabilität der Extrapolation eine untergeordnete Rolle.

Die Extrapolation von Druckmesswerten stellt einen zentralen Schritt bei der Auswertung von Transfermatrixmessungen dar. In der Auswerterroutine wird jedoch nicht die Extrapolation nach Gleichung (4.10) durchgeführt, sondern es werden die Koeffizienten  $\tilde{f}_0$  und  $\tilde{g}_0$  der Riemann Invarianten in der Ebene der Extrapolation durch eine Optimierungsroutine ermittelt. Diese Vorgangsweise erlaubt es bei der Auswertung von Experimenten, eine einzige Routine für die Auswertung von Messungen mit einer unterschiedlichen Anzahl von Messstellen zu verwenden und verleiht dem Auswerteprogramm dadurch eine große Flexibilität. Wie sich zeigt, ist das Stabilitätsverhalten bei Verwendung der Optimierungsroutine für zwei Messpunkte identisch mit jenem der Extrapolation nach Gleichung (4.10).

#### 4.4.2 Übertragung von Fehlern

In der Praxis sind die Messwerte in den Ebenen  $x_1$  und  $x_2$  fehlerbehaftet. Die Fehler der Messwerte werden durch die Extrapolation auf die Koeffizienten der Riemann Invarianten  $\tilde{f}_0$  und  $\tilde{g}_0$  übertragen, die für die Berechnung von Transfermatrizen benötigt werden. Um zu untersuchen, wie sich zufällige Fehler der Drücke  $p'_1$  und  $p'_2$  in der Ebene der Extrapolation auswirken, wurden Modellrechnungen durchgeführt. In diesen wird die Fehlerfortpflanzung auf die Koeffizienten  $\tilde{f}_0$  und  $\tilde{g}_0$  unter Anwendung der allgemeinen Extrapolationsfunktion der Auswertesoftware untersucht.

In der Modellrechnung wird die Extrapolation wie in Abbildung 4.15 dargestellt simuliert. Die Messstellen  $x_1$  und  $x_2$  und die Ebene der Extrapolation  $x_E$  sollen in einem unendlich langen Rohr konstanten Querschnitts liegen. Da in der Modellrechnung die exakten Werte für die Druckvektoren an den Messstellen und in der Ebene der Extrapolation vorgegeben werden, ist es möglich, durch Vergleich der Extrapolationen von fehlerfreien und mit Fehlern versehenen Messwerten die Fortpflanzung des kontrolliert aufgeprägten Fehlers über die Extrapolation zu untersuchen.

Den Ausgangspunkt der Rechnung bilden Werte der Riemann Invarianten  $\tilde{f}_0$  und  $\tilde{g}_0$  in der Ebene  $x_E$ , die von einem Zufallsgenerator erstellt werden. Die Riemann Invarianten  $\tilde{f}_0$  und  $\tilde{g}_0$  in der Ebene  $x_E$  bilden einen Zustandsvektor  $(\tilde{f}_0, \tilde{g}_0)^T$ . Bereits ein Zustandsvektor an einer beliebigen Stelle des Rohrs legt die Werte der Riemann Invarianten und damit auch die akustischen Variablen  $p'$  und  $u'$  in jeder Ebene des Rohres fest, da die Zustandsvektoren  $(\tilde{f}, \tilde{g})^T$  aller Punkte entlang der Mittelachse des Rohres über Transfermatrizen  $\mathbf{T}_{fg}$  verbunden sind. Mit den entsprechenden Transfermatrizen  $\mathbf{T}_{fg}$  errechnet man

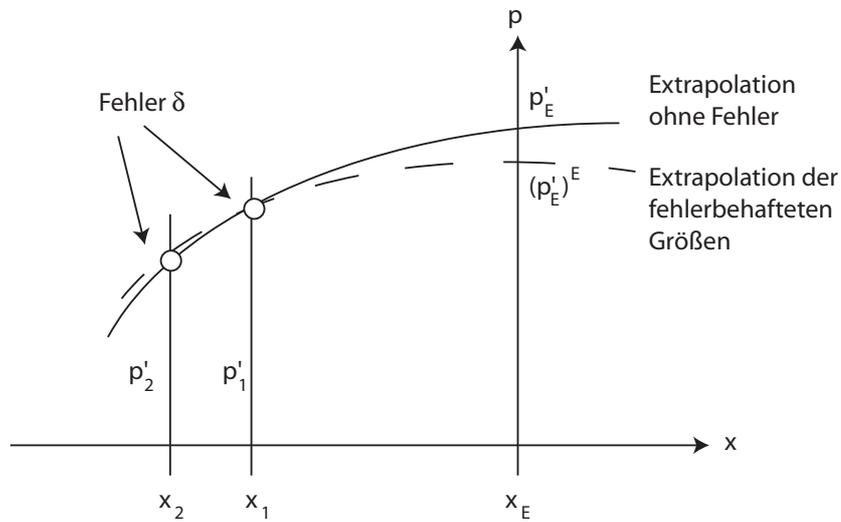


Bild 4.15: Bei der Extrapolation der fehlerbehafteten Größen  $p'_1$  und  $p'_2$  wird deren Fehler  $\delta$  auf die Größe  $(p'_E)^E$  übertragen.

nun die Zustandsvektoren  $(\tilde{f}_1, \tilde{g}_1)^T$  und  $(\tilde{f}_2, \tilde{g}_2)^T$  an den Messstellen  $x_1$  und  $x_2$ . Sind die Riemann Invarianten an den Messstellen bekannt, können durch Anwendung von (2.17) auch die Drücke  $p'_1$  und  $p'_2$  an den Messstellen  $x_1$  und  $x_2$  bestimmt werden. Bisher gehen in die Rechnung keine Messfehler ein und die Extrapolation der Drücke an den Messstellen liefert den zu Beginn festgelegten Wert des Zustandsvektors  $(\tilde{f}_E, \tilde{g}_E)^T$ .

Um die Drücke an den Messstellen nun zu verrauschen, werden sie nach Gleichung (4.11) mit einem Fehlervektor  $(p'_R)^E$  versehen<sup>35)</sup>, wodurch man die fehlerbehafteten Drücke  $(p'_1)^E$  und  $(p'_2)^E$  erhält.

$$(p'_i)^E = p'_i + (p'_R)^E = \tilde{p}'_i + |p'_i| \delta e^{i\Phi_R} \quad (4.11)$$

Den komplexwertigen Fehlervektor  $(p'_R)^E$  konstruiert man durch Zusammensetzung einer zufälligen komplexen Phase  $\Phi_R$  aus dem Intervall  $[0, 2\pi]$  und einer Amplitude von  $\delta$  Prozent des Absolutbetrags des Vektors  $p'_i$ . Abbildung 4.16 illustriert die Vorgehensweise bei der Konstruktion fehlerbehafteter Druckvektoren.

Durch Extrapolation der fehlerbehafteten Druckvektoren  $(p'_1)^E$  und  $(p'_2)^E$  erhält man die fehlerhaften Koeffizienten  $(\tilde{f}_E)^E$  und  $(\tilde{g}_E)^E$  der Riemann In-

<sup>35)</sup> Bei dieser Betrachtung werden zufällige Fehler simuliert, die etwa aufgrund des Strömungsrauschens auftreten. Systematische Fehler können mit diesem Ansatz nicht untersucht werden.

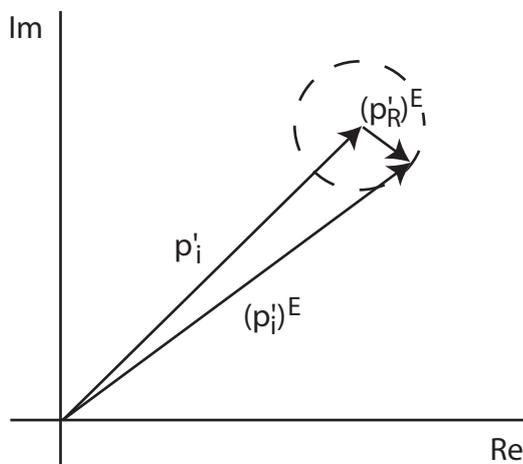


Bild 4.16: Um einen fehlerbehafteten Vektor  $(p'_i)^E$  zu erzeugen, wird zu dem ursprünglichen (exakten) Vektor  $p'_i$  ein Fehlervektor  $(p'_R)^E$  mit beliebiger Phase und vorgegebener Amplitude addiert.

varianten.

$$\delta_{\tilde{f}} = \frac{(\tilde{f}_0)^E - \tilde{f}_0}{|\tilde{f}_0|} \quad (4.12)$$

Das Fehlermaß  $\delta_{\tilde{f}}$  errechnet man für unterschiedliche Wellenzahlen  $k$  und mittelt im Sinne einer Monte-Carlo Rechnung über eine hinreichende Zahl von Durchläufen<sup>36)</sup>. Betrachtet man die Extrapolationsroutine als eine Black Box, so stellen die vorgegebenen Fehler der Messwerte einen Input und die resultierenden Fehler in der Ebene der Extrapolation einen Output dar. Nach Gleichung (1.3) entspricht das Verhältnis

$$T_E(\omega) = \delta_{\tilde{f}}(\omega)/\delta \quad (4.13)$$

der Übertragungsfunktion  $T_E(\omega)$  der Zweimikrofonextrapolation für Fehler in Abhängigkeit von der Wellenzahl. Eine Voraussetzung für die Anwendung einer von der Eingangsamplitude unabhängigen Übertragungsfunktion, nämlich die Linearität zwischen Input und Output, konnte in den Simulationen bestätigt werden.

Modellrechnungen zeigten, dass die Übertragungsfunktion  $T_E(\omega)$  durch den Ausdruck

<sup>36)</sup> Eine Mittelung über  $10^2 - 10^3$  Durchläufe erwies sich als vollkommen ausreichend.

$$T_E(\omega) \approx 0.6 \delta |\csc kl| \quad (4.14)$$

approximiert wird<sup>37)</sup>.

Fehler der Drücke  $p'_1$  und  $p'_2$  werden durch die Extrapolation für Frequenzen, bei denen  $l$  gerade der halben Wellenlänge  $\lambda/2$  entspricht massiv verstärkt. Dies wird durch die Instabilität der Extrapolation nach Gleichung (4.10) erklärt. Abbildung 4.17 zeigt einen Vergleich zwischen  $T_E(\omega)$  und der Approximation nach Gleichung (4.14). Wie man sieht, gibt die empirische Approximation (4.14) die Frequenzabhängigkeit des Fehlers  $T_E(\omega)$  sehr gut wieder.

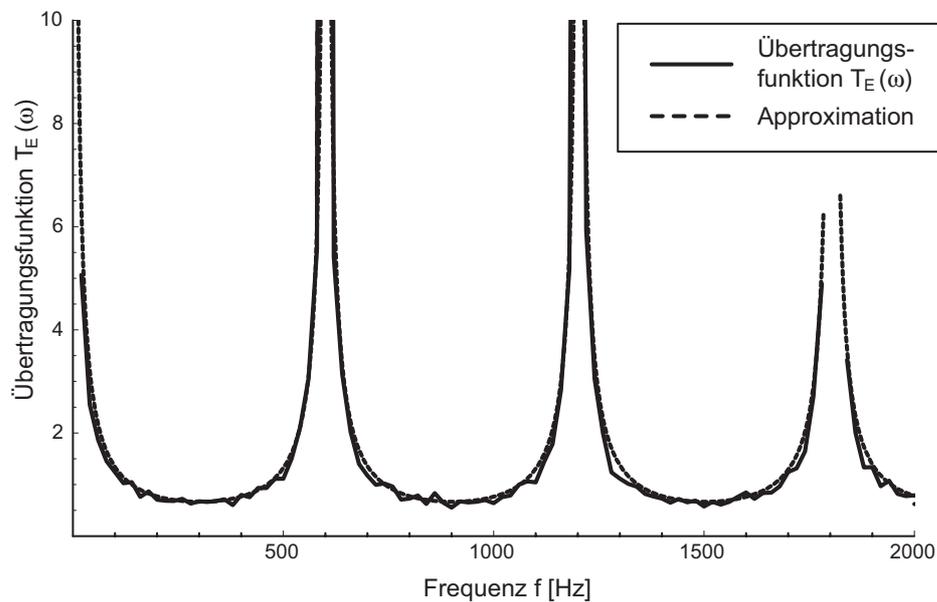


Bild 4.17: Übertragungsfunktion  $T_E(\omega)$  für Fehler bei der Zweimikrofonmethode. Vergleich der Übertragungsfunktion  $T_E(\omega)$  (durchgezogen) und der Approximation nach Gleichung (4.14) (unterbrochen). Lage der Messpositionen:  $x_i = (0.51, 0.23)$  m

#### 4.4.3 Extrapolation mehrerer Messwerte

Verwendet man nun die zusätzlichen Messwerte eines dritten oder vierten Mikrofons an den Messstelle  $x_3, x_4$  verändert sich das Übertragungsverhalten  $T_E$  für Fehler bei Anwendung der Extrapolationsroutine wesentlich. Dadurch,

<sup>37)</sup>  $\csc$  bezeichnet die Cosecans-Funktion, wobei  $\csc(x) = 1/\sin(x)$

dass zusätzliche Messpunkte in den nichtlinearen Levenberg-Marquardt Fit eingehen, wird eine generelle Abdämpfung der Fehlerneigung erwartet. Tatsächlich zeigt sich, dass die Übertragungsfunktion bei der Verwendung mehrerer Mikrofone gut durch den Ausdruck

$$T_E(\omega) \approx 0.6 \delta \min_{i \neq j} |\csc kl_{ij}| \quad (4.15)$$

angenähert wird<sup>38)</sup>.  $l_{ij}$  steht dabei für die Abstände  $l_{ij} = |x_i - x_j|$  aller Kombinationen<sup>39)</sup>  $i \neq j$  von Mikrofonpaaren  $(i, j)$ . Betrachtet man die Rolle einzelner Mikrofonpaare, so lässt sich Gleichung (4.15) dadurch erklären, dass der nichtlineare Levenberg-Marquardt Fit bei Verwendung mehrerer Mikrofone immer von jener Zweimikrofonextrapolation dominiert wird, deren Fehlerniveau aufgrund ihres Abstands  $l_{ij}$  bei der betrachteten Frequenz am niedrigsten ist. Interpretiert man Gleichung (4.15) anhand von Abbildung 4.18 grafisch, so erkennt man, dass die Cosecans Funktionen der Zweimikrofonextrapolationen sämtlicher Mikrofonpaare nach oben hin Einhüllende für die Übertragungsfunktion bei Verwendung mehrerer Mikrofone bilden.

Bei der Verwendung von nur zwei Mikrofonen lagen die Maxima der Übertragungsfunktion bei den Wellenzahlen  $k = n\pi/l_{12}$ . Gehen die Messwerte mehrerer Mikrofone in die Extrapolation ein, so treten die Maxima der Übertragungsfunktion beim kleinsten gemeinsamen Vielfachen der Wellenzahlen  $k_{ij} = n\pi/l_{ij}$  auf. Bei der Planung von Messungen führt dies zu der Empfehlung, die Mikrofone entlang der  $x$ -Achse möglichst unregelmäßig anzuordnen. Besonders die Verwendung asymmetrischer Positionen mit teilerfremden Abständen  $l_{ij}$  führt zu einer guten Verteilung und somit durch das Minimumkriterium zur gegenseitigen Unterdrückung der einhüllenden Cosecans Funktionen. Ein plötzlicher Anstieg, wie in Abbildung 4.18 bei etwa 4200 Hz tritt immer auf, da für jede beliebige Kombination von Abständen ein kleinstes gemeinsames Vielfaches der Wellenzahlen  $k_{ij}$  existiert. Durch eine günstige Wahl der Mikrofonabstände kann die Zentralfrequenz des Anstiegs jedoch zu hohen Frequenzen weit außerhalb des untersuchten Frequenzbereichs geschoben werden.

Bei der Planung von Experimenten zur Bestimmung von Transfermatrizen kommt zudem der Fragestellung, wie viele Mikrofone optimalerweise verwendet werden, eine zentrale Stellung zu. Aus Kostengründen und um den

---

<sup>38)</sup> Bei der Verwendung von zum Beispiel drei Mikrofonen berücksichtigt man somit das Minimum der Cosecanten für die in Gleichung (4.16) angegeführten Argumente  $kl_{ij}$ .

$$T_E(\omega) \approx 0.6 \delta \min(|\csc kl_{12}|, |\csc kl_{13}|, |\csc kl_{23}|) \quad (4.16)$$

<sup>39)</sup> Da  $l_{ij} = l_{ji}$  genügt es alle Kombinationen mit  $i < j$  zu betrachten.

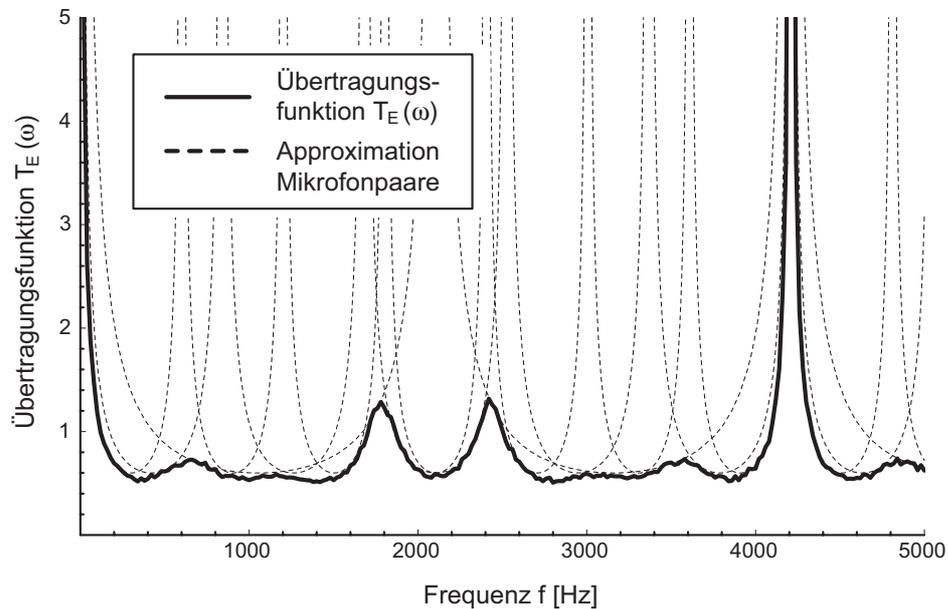


Bild 4.18: Übertragungsfunktion  $T_E(\omega)$  für Fehler bei Verwendung von drei Mikrofonen. Die fett dargestellte Übertragungsfunktion  $T_E(\omega)$  wird durch die Cosecans Funktionen  $\csc kl_{ij}$  aller Kombinationen  $l_{ij}$  von Mikrofonabständen eingehüllt. Lage der Messpositionen:  $x_i = (0.51, 0.31, 0.23)$  m

experimentellen Aufwand möglichst niedrig zu halten, wird eine möglichst kleine Anzahl von Mikrofonen angestrebt. Theoretisch werden für die Bestimmung einer Transfermatrix mindestens je zwei Mikrofone stromauf und stromab von dem Testelement benötigt. Wie aus einem Vergleich von Abbildung 4.17 und 4.18 klar wird, verbessert sich die Stabilität der Methode bei Verwendung von je drei Mikrofonen stromauf und stromab zu dem Testelement über weite Bereiche erheblich. Die Berücksichtigung weiterer Mikrofone bringt im Vergleich zu den nahezu linear mit der Zahl der Kanäle wachsenden Kosten der Messtechnik nur noch eine relativ geringe Verbesserung. Aufgrund der erhöhten Redundanz der Messung erscheint die Berücksichtigung eines vierten Mikrofons auf beiden Seiten des Testelements trotz der damit verbundenen höheren Kosten dennoch sinnvoll. Aus dem Vergleich der Messdaten ist es oft nachträglich möglich, Probleme mit einzelnen Mikrofonen zu identifizieren. Bei der Verwendung von vier Mikrofonen können bei der Nachbearbeitung die Messwerte eines Mikrofons ausgelassen werden, ohne auf die höhere Stabilität der Dreimikronextrapolation verzichten zu müssen.

#### 4.4.4 Auswirkungen von Temperaturfehlern

Neben Fehlern bei der Bestimmung von Druckvektoren liegt eine weitere Fehlerquelle in Unsicherheiten bei der Bestimmung der Temperatur des Mediums der Schallausbreitung. Bei Messungen ohne Verbrennung ist die Bestimmung der Temperatur mit einem Digitalthermometer mit hoher Genauigkeit möglich. Bei Messungen mit Verbrennung konnte die mittlere Temperatur in der Brennkammer nur auf einige Prozent genau bestimmt werden. Um die Auswirkungen von Fehlern in der Temperatur des Mediums bei der Bestimmung von Transfermatrizen zu quantifizieren, wurden diese in einer Modellrechnung simuliert. Dabei wurden fehlerfreie Druckvektoren verwendet, jedoch schwankte die für den Fit verwendete Temperatur des Mediums ein Prozent um den exakten Wert. Abbildung 4.19 zeigt die Ergebnisse dieser Simulation. Im Vergleich mit Abbildung 4.17 zeigt sich, dass die Übertragungsfunktion zusätzlich zu den Instabilitäten der Zweimikrofonmethode nach Gleichung (4.14), mit steigender Frequenz ansteigt.

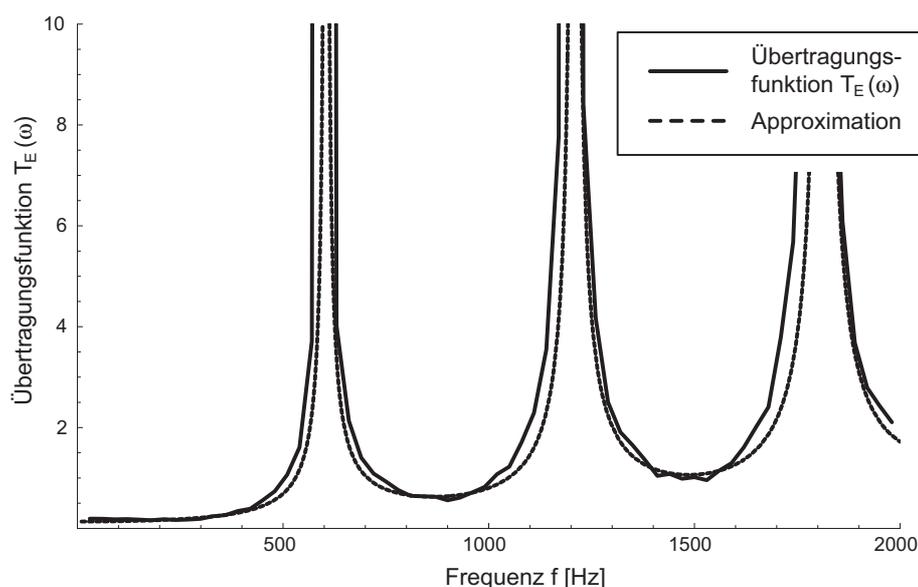


Bild 4.19: Übertragungsfunktion  $T_E(\omega)$  für Temperaturfehler bei der Zweimikrofonmethode. Vergleich der Übertragungsfunktion  $T_E(\omega)$  (durchgezogen) und der Approximation nach Gleichung (4.17) (unterbrochen). Lage der Messpositionen:  $x_i = (0.51, 0.23)$  m

$$T_E(\omega) \approx 0.24 \frac{f\delta |\csc kl|}{c} \quad (4.17)$$

Wie in Abbildung 4.19 ersichtlich, werden Temperaturfehler durch Gleichung (4.17) approximiert. Fehler in der Temperatur wirken sich demnach progressiv mit steigender Frequenz aus.

#### 4.4.5 Übertragungsverhalten des Gleichungslösers

Bis zu dieser Stelle wurde die Übertragung von Fehlern bei der Mikrofonmessung auf die durch Extrapolation gewonnenen Werte der Riemann Invarianten  $f_0$  und  $g_0$  in den Definitionsebenen der Transfermatrix besprochen. Die Extrapolation der Messdaten auf Werte in den Definitionsebenen der Matrix geschieht bei der Bestimmung von Transfermatrizen auf beiden Seiten des Elements. Die extrapolierten Werte der Riemann Invarianten in den Definitionsebenen werden anschließend in ein lineares Gleichungssystem zusammengefasst, dessen Lösungen die Elemente der Transfermatrix darstellen.

Das Übertragungsverhalten von Fehlern bei der Lösung des linearen Gleichungssystems spielt somit ebenfalls eine wichtige Rolle. Da die Wellenzahl in das lineare Gleichungssystem nur über die Koeffizienten der Transfermatrix eingeht, ist die Übertragungsfunktion des linearen Gleichungslösers selbst frequenzunabhängig.

Eingangsfehler aus der Mehrmikrofonmethode werden, wie sich herausstellt, je nach Struktur der Transfermatrix verstärkt oder gedämpft. Ein funktionaler Zusammenhang zwischen dem Verstärkungsfaktor und Kennzahlen der Matrix, etwa der Condition Number, konnte nicht nachgewiesen werden.

#### 4.4.6 Übertragungsverhalten der Multimikrofonmethode

Nachdem in den vorherigen Abschnitten die Fehlerfortpflanzung bei den einzelnen Teilschritten der Multimikrofonmethode diskutiert wurde, wollen wir nun in einer Modellrechnung die Übertragungsfunktion der gesamten Multimikrofonmethode bestimmen. Das verwendete Modell wird in Abbildung 4.20 dargestellt. Durch die Simulation der gesamten Multimikrofonmethode wird es möglich, die Interaktion von Fehlern der Teilschritte und die nur qualitativ bekannte Übertragungsfunktion des Gleichungslösers zu berücksichtigen.

Als Ausgangspunkt für die Modellierung der Multimikrofonmethode werden mit einem Zufallsgenerator die Riemann Invarianten  $\tilde{f}_u^a$  und  $\tilde{g}_u^a$  in der stromauf gelegenen Definitionsebene der Transfermatrix festgelegt. Der Zufallsgenerator erzeugt Vektoren mit Amplituden aus dem Intervall  $[0,3,1]$  und beliebigen Phasen aus  $[0,2\pi]$ . Die untere Grenze bei den Amplituden wurde gewählt, um zu verhindern, dass eine der Riemann Invarianten  $\tilde{f}$  oder  $\tilde{g}$  verschwindet. Der Bezug auf konkrete physikalische Druckeinheiten ist für die Simulation nicht notwendig, da in die Auswerterroutine nur die relativen

Amplituden an den Messstellen eingehen.

Sind die Riemann Invarianten an der stromauf gelegenen Definitionsebene festgelegt, so kann man diese an der stromab gelegenen Definitionsebene unter Anwendung der Transfermatrix des Testelements errechnen. Um die Ergebnisse möglichst von der Wahl einer konkreten Matrix unabhängig zu gestalten, wurde die verwendete Transfermatrix bei jedem Durchlauf neu aus Zufallszahlen zusammengestellt. Somit sind die Ergebnisse der Modellrechnung unabhängig von der Wahl einer speziellen Transfermatrix.

Durch die Anwendung der Transfermatrix sind die Riemann Invarianten nun in den beiden Definitionsebenen bekannt und es können, unter Anwendung der analytisch bekannten Rohrtransfermatrizen, die Riemann Invarianten  $\tilde{f}_{a,i}$  und  $\tilde{g}_{a,i}$  an den einzelnen Messstellen stromauf und stromab zu dem Testelement berechnet werden. Aus den Riemann Invarianten an den Messstellen ermittelt man nun über  $p'_{a,i} = (\tilde{f}_{a,i} + \tilde{g}_{a,i})/2$  die Druckvektoren an den Messstellen. Die obere Hälfte von Abbildung 4.20 fasst die einzelnen Schritte bei der Konstruktion der Druckvektoren zusammen.

Für die vollständige Bestimmung der Transfermatrix wird eine zweite Teilmessung benötigt. Man erzeugt daher mit dem Zufallsgenerator ein weiteres Paar Riemann Invarianten  $\tilde{f}_{a,u}$  und  $\tilde{f}_{b,u}$  und errechnet auf die soeben besprochene Art und Weise die zugehörigen Druckvektoren  $p'_{b,i}$ .

Bis zu diesem Zeitpunkt kann die Transfermatrix praktisch fehlerfrei aus den Druckdaten rekonstruiert werden. Das Verfahren zur Rekonstruktion der Transfermatrix wird in der unteren Hälfte von Abbildung 4.20 skizziert, wobei der zweite Satz Druckvektoren  $p'_{b,i}$  zur Vereinfachung der Darstellung nicht eingezeichnet wurde.

Zur Quantifizierung der Fortpflanzung von Fehlern in den Druckdaten über die Auswerterroutine werden die Druckvektoren  $p'_{a,i}$  und  $p'_{b,i}$  an den Messstellen mit einem Fehler gemäß Gleichung (4.11) versehen. Nun kann aus den fehlerbehafteten Druckvektoren  $(p'_{a,i})^E$  und  $(p'_{b,i})^E$  eine fehlerbehaftete Transfermatrix  $(\mathbf{T})^E$  errechnet werden. Dabei kommt in der Modellrechnung dieselbe Auswerterroutine wie bei der Verarbeitung experimenteller Daten zum Einsatz. Wie Abbildung 4.20 illustriert, kann nun durch Vergleich von  $(\mathbf{T})^E$  mit der für die Konstruktion der Vektoren verwendeten Transfermatrix  $\mathbf{T}$  das Übertragungsverhalten der Auswerterroutine für Messfehler bestimmt werden.

Der ständige Wechsel der Elemente der Transfermatrix in der Berechnung und die zufällige Natur der aufgeprägten Fehler bedingt eine starke Streuung der so bestimmten Übertragungsfunktion. Um diese zu mindern, wurde in der Berechnung über die Ergebnisse von jeweils  $10^4$  Durchläufen gemittelt. Die gemittelte Übertragungsfunktion weist danach nur noch eine vergleichsweise geringe Streuung auf.

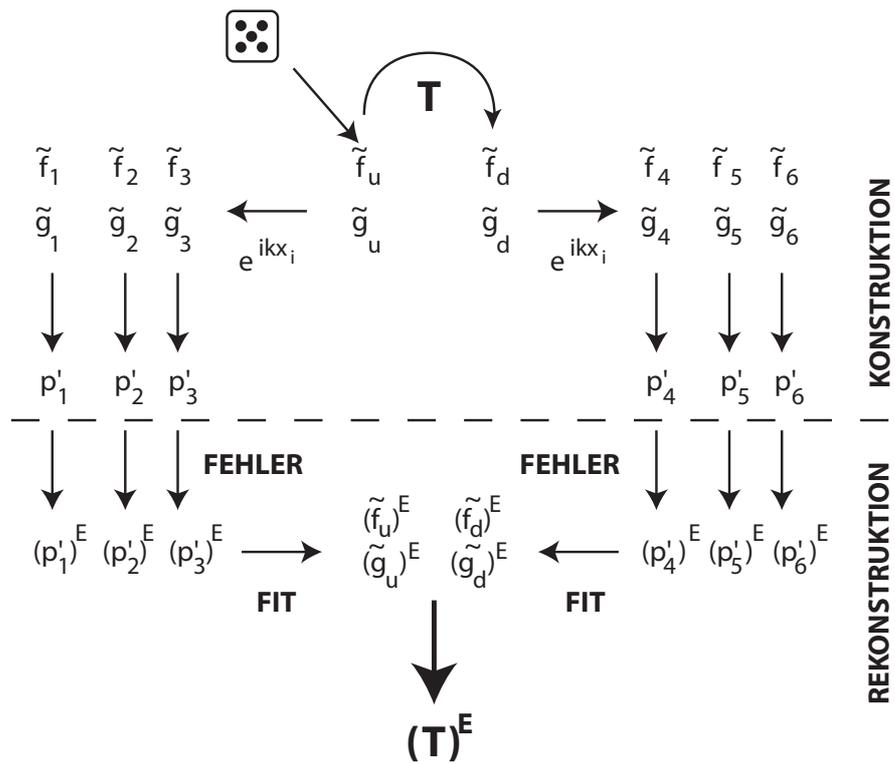


Bild 4.20: Monte-Carlo Verfahren zur Bestimmung der Fehlerfortpflanzung in der Multimikrofonmethode bei der experimentellen Bestimmung von Transfermatrizen. Die zweite Teilmessung, die für die Rekonstruktion der Transfermatrix benötigt wird, wird nicht gezeigt.

Die Ergebnisse der Modellrechnungen werden in Abbildung 4.21 gezeigt. Dort wird die Übertragungsfunktion der Multimikrofonmethode für eine unterschiedliche Zahl von Mikrofonen verglichen. Wie sich herausstellt, resultieren bei den verwendeten Mikrofonpositionen besonders im Frequenzbereich unterhalb von 200 Hz bereits aus einem Fehler von nur 1 Prozent in den Druckvektoren Fehler von 4-15 Prozent in den Elementen der Transfermatrix. Der Anstieg der Übertragungsfunktionen bei niedrigen Frequenzen ist auf die grossen Wellenlängen in diesem Bereich zurückzuführen und kann durch eine Erhöhung der Mikrofonabstände auf einen schmaleren Frequenzbereich reduziert werden. Da sich dabei auch Instabilitäten, wie jene der Zweimikrofonmethode in Abbildung 4.21 im Bereich von 600 Hz zu niedrigeren Frequenzen verschieben, ist eine bereichsweise Anpassung der Mikrofonpositionen an die Signalfrequenz sinnvoll. Bei einem Vergleich der Übertragungsfunktionen für eine unterschiedliche Anzahl von Mikrofonen erkennt man weiters, dass bei Verwendung von vier und mehr Mikrofonen auf jeder Seite dem experimentellen Aufwand nur noch eine relativ geringe Qualitätsverbesserung bei den Transfermatrizen gegenübersteht.

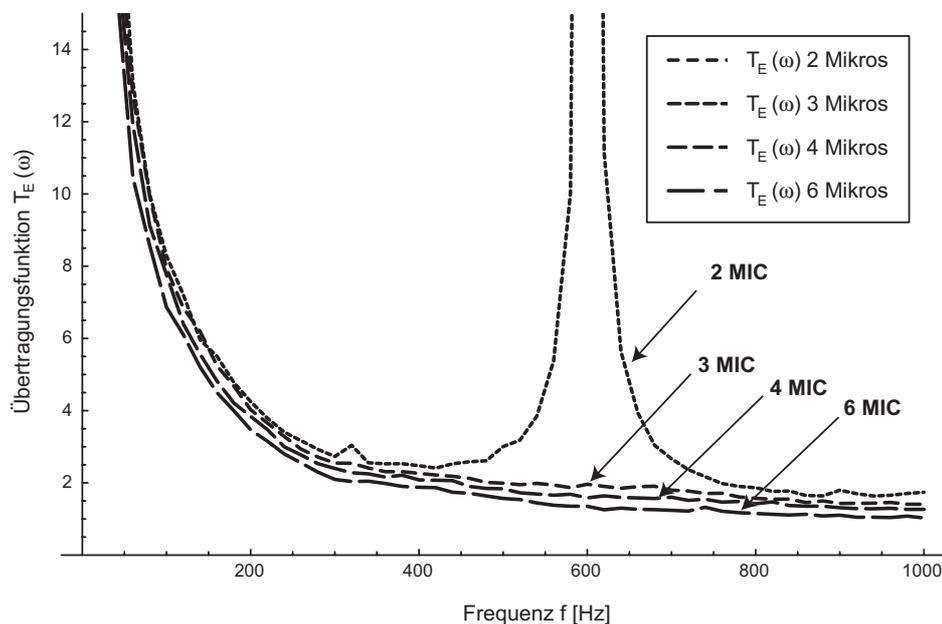


Bild 4.21: Simulationsergebnis für die Übertragungsfunktionen  $T_E(\omega)$  für Fehler bei der Multimikrofonmethode bei Verwendung von 2, 3, 4 und 6 Mikrofonen je Seite.

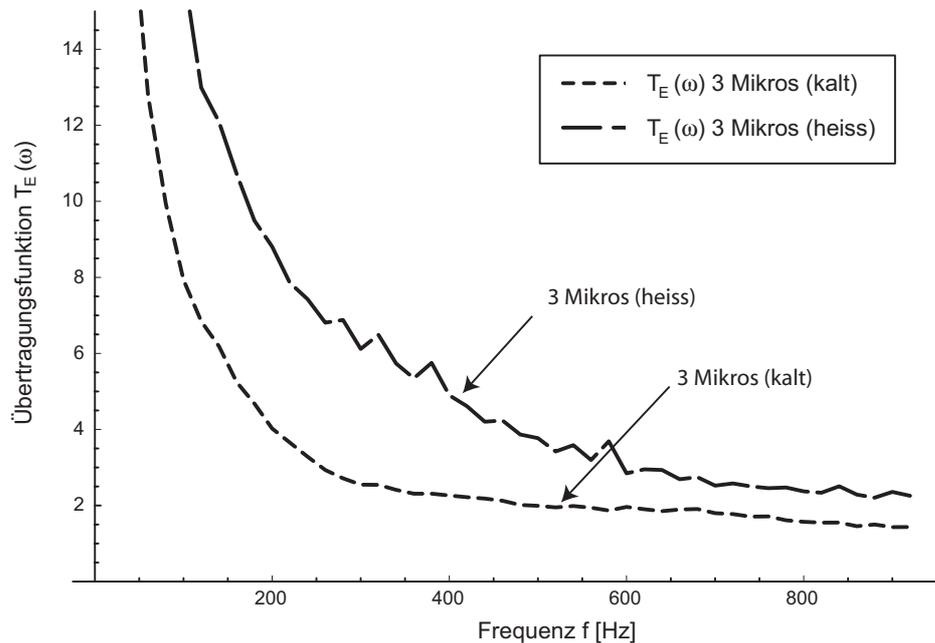


Bild 4.22: Vergleich der Übertragungsfunktionen für Fehler bei der Multimikrofonmethode für 3 Mikrofone je Seite und eine Temperatur von  $9^{\circ}\text{C}$  (kalt) und  $1250^{\circ}\text{C}$  (heiss) auf der Brennkammerseite.

#### 4.4.7 Das Fehlerniveau realer Messungen

Nachdem die Fehlerübertragung bei der Multimikrofonmethode untersucht wurde, wollen wir nun untersuchen, wie hoch das Niveau des Eingangsfehlers bei der experimentellen Bestimmung von Transfermatrizen realer Geometrien tatsächlich liegt. Da bei der Bestimmung der Transfermatrix für jede Anregungsfrequenz bis zu 250 Messpunkte<sup>40)</sup> aufgenommen wurden, ist es möglich, die Größe des Fehlers aus der statistischen Verteilung der Messwerte abzuschätzen. Die Standardabweichung  $\sigma(\omega)$  der Messwerte ist ein gebräuchliches Maß für die Streuung der einzelnen Datenpunkte um den Mittelwert. Verteilen sich die Messwerte gleichmässig um den Mittelwert, so entspricht die Standardabweichung dem Fehlermaß nach Gleichung (4.12).

Bei der Auswertung von Transfermatrixmessungen wird bei jeder Frequenz über  $N$  Datenpunkte mit der Standardabweichung  $\sigma(\omega)$  gemittelt. Der Fehler  $\delta(\omega)$  des Mittelwerts liegt um einen Faktor  $1/\sqrt{N}$  niedriger als

<sup>40)</sup> Einem Messpunkt entspricht hier ein Satz von Druckvektoren an den Mikrofonpositionen. In Kapitel 4.3.1 wird beschrieben, wie Druckvektoren aus den aufgezeichneten Zeitreihen gewonnen werden.

jener der einzelnen Datenpunkte [BS96, Kay98].

$$\delta(\omega) \approx \sigma(\omega)/\sqrt{N} \quad (4.18)$$

Nach Abbildung 4.21 reduziert sich der Fehler der Transfermatrix bei der Multimikrofonmethode durch den Einsatz von sechs statt vier Mikrofonen auf jeder Seite um etwa 10 Prozent. Ein Vergleich mit Gleichung (4.18) zeigt, dass der selbe Effekt ebenso durch Berücksichtigung von etwa 20 Prozent zusätzlicher Datenpunkte erzielt werden kann.

Abbildung 4.23 zeigt den aus den Messdaten nach Gleichung (4.18) ermittelten Eingangsfehler  $\delta(\omega) = \sigma(\omega)/\sqrt{N}$  der gemittelten Druckvektoren für zwei Messungen ohne Verbrennung und eine Messung mit Verbrennung. Bei den Messungen ohne Verbrennung wurde, wie aus Abbildung 4.23 ersichtlich, bis auf einige wenige Frequenzen ein Eingangsfehler von weniger als 1 Prozent ermittelt. Dies lässt im Bereich über 200 Hz mit Blick auf Abbildung 4.21 auf einen Fehler von einigen wenigen Prozent in den Elementen der Transfermatrix schließen. Bei allen drei Messungen zeigte sich, dass die Messwerte bei plenumseitiger Anregung eine geringere Streuung aufweisen. Dies deutet darauf hin, dass die plenumseitige Anregung das System effektiver in den gewünschten Schwingungszustand bringt. Als Ursachen für die höhere Effektivität kommen im Vergleich zur brennkammerseitigen Anregung die Pulsation des Hauptmassenstromes, die größere Entfernung der Sirene zu den Messebenen und das generell niedrigere Lärmniveau im Plenum aufgrund der geringen Strömungsgeschwindigkeiten in Frage. Bei der brennkammerseitigen Anregung wurde zudem oftmals ein niedrigeres Pulsationsniveau beobachtet.

Bei der Messung mit Verbrennung in Abbildung 4.23 ist deutlich der störende Einfluss des Flammenlärms im Bereich zwischen 150 und 300 Hz zu erkennen. Der Flammenlärm ist aufgrund der deutlichen Erhöhung des Niveaus der Eingangsfehler als Hauptursache für die wesentlich stärkere Streuung bei den Messungen mit Verbrennung anzusehen. Hinzu kommt die Streckung der Wellenzüge durch die höhere Schallgeschwindigkeit im Heißgastrakt, welche die Übertragungsfunktion bei Messungen mit Verbrennung nach Abbildung 4.22 auf das etwa doppelte Niveau anhebt. Auch die konstruktionsbedingte enge Anordnung der Messstellen schlägt sich bei tiefen Frequenzen in einer erhöhten Übertragung von Fehlern nieder.

#### 4.4.8 Konvergenz von Transfermatrixelementen

Um die Überlegungen der letzten Abschnitte experimentell zu verifizieren, wurde für ein Transfermatrixexperiment am kalt durchströmten TD<sup>1</sup> Brenner die Konvergenz der Elemente der Transfermatrix in Bezug auf die Anzahl

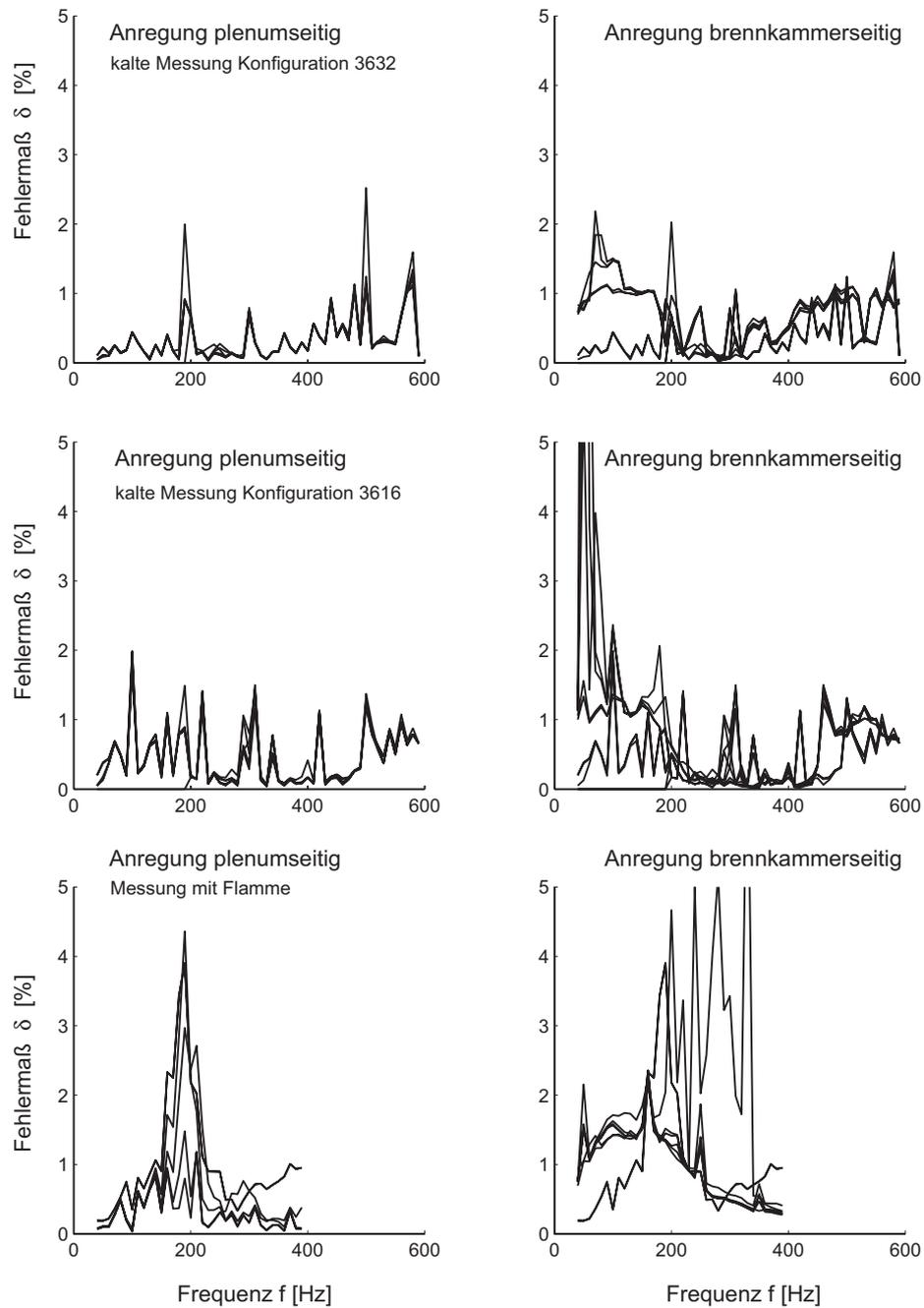


Bild 4.23: Aus der Standardabweichung experimenteller Daten bestimmtes Fehlermaß  $\delta(\omega) \approx \sigma(\omega)/\sqrt{N}$  bei der Bestimmung von Transfermatrizen.

der verwendeten Einzelmessungen untersucht. Wie bereits besprochen, wird in der Auswerterroutine über alle Einzelmessungen einer Frequenz gemittelt, um die benötigten Schalldruckvektoren mit ausreichender Genauigkeit zu bestimmen. Dabei ist a priori nicht klar, wie hoch die optimale Anzahl  $N_{opt}$  der Einzelmessungen pro Anregungsfrequenz anzusetzen ist. Wie bereits besprochen, konvergiert der Mittelwert der turbulent verrauschten Druckvektoren etwa mit  $1/\sqrt{N}$ . Die Dauer der Messung skaliert hingegen linear mit der Zahl  $N$  der Einzelmessungen.

Aufgrund der großen Messdauer wird ein möglichst niedriger Wert von  $N$  angestrebt. Neben der Aufnahmezeit von einer Sekunde benötigt der Messrechner zusätzliche Zeit, um die ermittelten Zeitreihen aller Kanäle nach dem beschriebenen Verfahren mittels Fouriertransformation in den Frequenzbereich überzuführen. Auf dem verwendeten PC-System muss man deshalb etwa  $t_E = 3.5$  Sekunden pro Einzelmessung veranschlagen. In einer Stunde verarbeitet der Rechner somit ungefähr 1000 Einzelmessungen. Umfasst eine Messung  $N_f$  Anregungsfrequenzen, so erhält man mit  $T_{mess} \approx NN_f/1000$  eine erste Abschätzung der Messdauer in Stunden, wobei  $N$  die Anzahl der Einzelmessungen pro Anregungsfrequenz darstellt. Eine typische Transfermatrixmessung umfasste etwa  $N_f = 60$  Anregungsfrequenzen. Typischerweise benötigt man daher für eine der beiden unabhängigen Teilmessungen  $T_{mess} \approx N/16.5$  Stunden. Die benötigte Zeit  $t_E$  für eine Einzelmessung kann jedoch bei Einsatz eines leistungsstarken PC-Systems durch die Verringerung der Verarbeitungszeit auf gut die Hälfte reduziert werden<sup>41)</sup>.

Um die optimale Anzahl von Einzelmessungen  $N_{opt}$  experimentell zu bestimmen, wurden bei der Anregungsfrequenz 200 Hz insgesamt 1200 Einzelmessungen aufgezeichnet. Anschließend wurden die Elemente der Transfermatrix für diese Anregungsfrequenz in Abhängigkeit von der Anzahl der ausgewerteten Einzelmessungen aufgetragen. Es soll nochmals betont werden, dass es sich in Abbildung 4.24 nicht um eine Transfermatrix sondern um die Ergebnisse für die Elemente der Transfermatrix bei einer konstanten Frequenz für unterschiedlich grosse Datenbasen handelt. Für die Berechnung wurde aus dem Datensatz von 1200 Messwerten mit Hilfe eines Zufallsgenerators jeweils die entsprechende Anzahl von Einzelmesswerten gezogen.

Abbildung 4.24 zeigt für eine Messung am kalt durchströmten TD<sup>1</sup> Brenner den Verlauf von Amplitude und Phase der Transfermatrixelemente bei Erhöhung der Anzahl berücksichtigter Messwerte. Wie aus Abbildung 4.24 hervorgeht, stellt ein Wert von etwa 250 Einzelmessungen pro Anregungsfrequenz für den untersuchten TD<sup>1</sup> Brenner einen guten Kompromiss aus Dau-

---

<sup>41)</sup> technologischer Stand 2003

er<sup>42)</sup> und Qualität der Messung dar. Im Bereich bis zu 200 Einzelmessungen konvergieren die Transfermatrixelemente vergleichsweise rasch, während die Konvergenzrate bei Verwendung einer größeren Zahl von Einzelmessungen sukzessive abflacht. Eine Vergleichsmessung bei 460 Hz Anregungsfrequenz bestätigte diese Ergebnisse.

Der grobe Verlauf der Transfermatrix ist mit einer entsprechenden Streuung üblicherweise bereits mit einem Satz von einigen wenigen Teilmessungen gut zu erkennen. Die Phasenanteile der Transfermatrix konvergieren in der Regel rascher als die Amplitudenverläufe. Möchte man auch den Amplitudengang mit einiger Genauigkeit bestimmen, sind ohne Verbrennung bei etwas komplizierteren Geometrien zumindest 100 Einzelmessungen pro Frequenz als untere Grenze anzusetzen<sup>43)</sup>.

#### 4.4.9 Empfehlungen für zukünftige Messungen

Aus der Diskussion der Fehlerfortpflanzung in der Multimikrofonmethode ergeben sich für die Planung zukünftiger Experimente folgende Empfehlungen:

- Optimales Kosten-Nutzen-Verhältnis bei Verwendung von drei bis vier Mikrofonen je Seite.
- Asymmetrische und teilerfremde Anordnung der Messpositionen, um Instabilitäten des Algorithmus zu hohen Frequenzen zu verschieben. Bereichsweise Anpassung der Mikrofonpositionen an die Signalfrequenz, um die Fehler bei tiefen Frequenzen zu reduzieren.
- Mittelung über eine ausreichende Zahl von Einzelmessungen. Verwendung eines leistungsstarken Messrechners, um die Verarbeitungszeit für die Messreihen zu verringern.
- Verwendung einer größeren Zahl von Messwerten bei Frequenzen unter 200 Hz, um dem Anstieg der Übertragungsfunktion entgegen zu steuern.
- Berücksichtigung einer deutlich größeren Zahl von Einzelmessungen bei Messungen mit Flamme.

---

<sup>42)</sup> Bei Aufzeichnung von 250 Einzelmessungen pro Frequenz ergibt sich eine Messdauer von etwa 15 Stunden für jede der beiden unabhängigen Teilmessungen.

<sup>43)</sup> Die Transfermatrizen von Geometrien, die Abschnitte von besonders engem Querschnitt beinhalten, sind in der Regel schwieriger zu ermitteln als bei Konturen ohne starke Variation der Querschnittsfläche

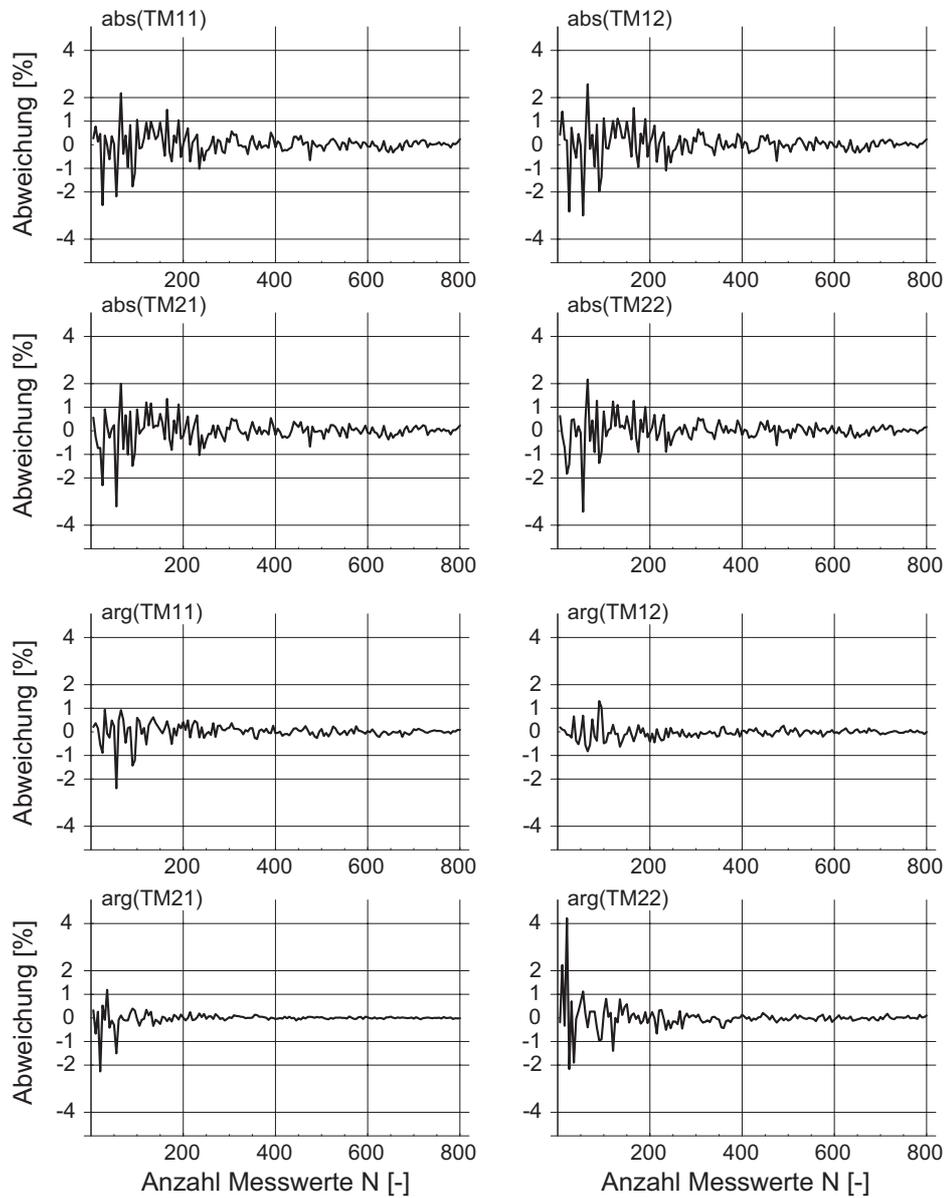


Bild 4.24: Berechnete Werte für die Transfermatrixelemente  $T_{ij}$  bei der Anregungsfrequenz 200 Hz bei Erhöhung der Anzahl berücksichtigter Einzelmessungen  $N$ .

- Verwendung einer längeren Brennkammer, um die Mikrofone auf der Heißgasseite in größerem Abstand zueinander anbringen zu können.
- Verstärktes Augenmerk auf Maßnahmen zur Verringerung des Flammenlärms und der Dämpfung von selbsterregten Schwingungen bei Messungen mit Verbrennung. Verwendung eines reflexionsarmen Endes (anechoic end).
- Konstruktive Maßnahmen zur Steigerung der Effektivität der brennkammerseitigen Anregung.
- Verwendung von preiswerten Mikrofonen und Mikrofonadaptern, die besonders bei tiefen Frequenzen gute Übereinstimmung der Kalibrationskurven zeigen.
- Umstellung der Messprozedur, um den Einfluss von langsamen Veränderungen der Versuchsbedingungen oder Drift der Mikrofonkalibration besonders bei Messungen mit Verbrennung zu minimieren. Im günstigsten Fall werden die beiden Teilmessungen mit Anregung in Plenum und Brennkammer in unmittelbarer zeitlicher Abfolge aufgezeichnet.

## 5 Transfermatrizen des TD<sup>1</sup> Brenners

In diesem Kapitel sollen experimentelle Resultate, die unter Anwendung der Multimikrofonmethode gewonnen wurden, besprochen werden. Den Ausgangspunkt der Diskussion bildet die Herleitung eines Modells für die Transfermatrix des durchströmten Flächensprunges, das die auftretenden Verluste berücksichtigt. Die Vorhersagen des Modells werden mit Experimenten am durchströmten Flächensprung verglichen. Auf diese Ergebnisse aufbauend werden anschließend die Transfermatrix der Brennerdüse des TD<sup>1</sup> Brenners und die Transfermatrizen des TD<sup>1</sup> Brenners für unterschiedliche Dralleinsätze besprochen. Ein Vergleich mit akustischen Netzwerkmodellen der untersuchten Geometrien erlaubt eine Interpretation der experimentell bestimmten Transfermatrizen.

### 5.1 Transfermatrix des kompakten Elements mit Verlusten

#### 5.1.1 Theorie

Bei der Analyse der akustischen Eigenschaften technischer Systeme interessiert man sich zumeist für das Übertragungsverhalten von durchströmten Elementen. To [To75] und Munjal [Mun75] geben analytische Lösungen für die Transfermatrix eines gleichmäßig durchströmten Rohres an. To [To83] vergleicht später die Arbeiten mehrerer Autoren zu diesem Thema und diskutiert Fehler, die in früheren Herleitung bei der Behandlung von Dämpfungstermen gemacht wurden.

Eine modifizierte Wellengleichung für die Ausbreitung ebener Wellen in Rohren mit veränderlichem Querschnitt  $A(x)$  wurde bereits 1919 von Webster [Web19] abgeleitet. Gleichung (5.1) wurde primär für die Beschreibung von Hörnern verwendet und wird daher oft *Websters Hornleichung* genannt [MI68, BJ74, Pie81, BS94, RF94, RH03].

$$\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left( A \frac{\partial p'}{\partial x} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (5.1)$$

Webster berücksichtigt nur den Einfluss der örtlich variierenden lokalen Impedanz auf die Ausbreitung der Wellen. Pierce [Pie81] und Rienstra [Rie02] geben verallgemeinerte Formen von Gleichung (5.1) an, welche Einflüsse der Grenzschicht und einer gleichmäßigen Durchströmung des Rohres einbeziehen. Durch eine Variablentransformation ist es, wie Benade [BJ74, Rie02] aufzeigte, möglich, Websters Gleichung in die Schrödingergleichung der nichtrelativistischen Quantenmechanik überzuführen. Putland [Put93] zeigte

schließlich, dass Gleichung (5.1) für alle einparametrischen Wellenfelder gilt, also auch für sphärische und zylindrische Wellen.

Die Transfermatrix für die Ausbreitung ebener Wellen in durchströmten Rohren von veränderlichem Querschnitt leitete Dokumanci in exakten [Dok98b] und angenäherten [Dok98a] analytischen Ausdrücken her. Gentemann *et al.* [GFEP03] wenden ein Modell von Schuermans *et al.* [SPP99, FPRS01, Pol02] für die Transfermatrix des durchströmten kompakten Elements auf den Spezialfall des durchströmten Flächensprungs an und vergleichen Modellrechnungen mit den experimentell bestimmten Transfermatrizen aus Kapitel 5.1.2.

Als Grundlage der weiteren Diskussion wollen wir zunächst ein analytisches Modell für die Transfermatrix eines kompakten, durchströmten Systems herleiten, das akustische Verluste berücksichtigt. Um die Transfermatrix kompakter, durchströmter akustischer Elemente herzuleiten, kombiniert man die Bernoulligleichung mit der Kontinuitätsgleichung. Schuermans *et al.* [SPP99, FPRS01, Pol02] formulierten ein entsprechendes Modell. Für Strömungen mit niedriger Machzahl und unter Vernachlässigung höherer akustischer Moden leitet man die in (5.2) und (5.3) angegebenen Formen der Kontinuitäts- und Bernoulligleichung ab [GFEP03].

$$\left[ A \left( \frac{p'}{\bar{\rho}c} M + u' \right) \right]_u^d + \frac{i\omega}{c} l_{red} A_d \frac{p'_u}{\bar{\rho}c} = 0 \quad (5.2)$$

$$\left[ \frac{p'}{\bar{\rho}c} + M u' \right]_u^d + l_{eff} \frac{i\omega}{c} u'_u + \zeta M_u u'_u = 0 \quad (5.3)$$

Die Indizes  $u$  und  $d$  beziehen sich auf die Referenzebenen  $\mathcal{R}_u$  (stromauf) und  $\mathcal{R}_d$  (stromab) des Testelements.  $p'$  und  $u'$  stellen Druck und Schnelle dar,  $M$  die Machzahl,  $c$  die Schallgeschwindigkeit,  $\bar{\rho}$  die Dichte, und  $\omega$  die Kreisfrequenz der Schwingung. Der Verlustkoeffizient  $\zeta$  in Gleichung (5.3) berücksichtigt akustische Verluste zwischen den Ebenen  $\mathcal{R}_u$  und  $\mathcal{R}_d$  und ist von der Geometrie abhängig. Der Term mit der *reduzierten Länge*  $l_{red}$  aus Gleichung (5.2) repräsentiert kapazitive Effekte des akustischen Elements. Allgemein definiert man die reduzierte Länge  $l_{red}$  eines Elements mit variabler Querschnittsfläche  $A(x)$ .

$$l_{red} \equiv \int_{x_u}^{x_d} \frac{A(x)}{A_d} dx \quad (5.4)$$

Analog zu Gleichung (5.4) führt man weiters die *effektive Länge*  $l_{eff}$  des Elements ein, wobei die Grösse  $l_{ec}$  die Effekte scharfer Kanten berücksichtigt.

Üblicherweise ist  $l_{ec}$  viel kleiner als der Integralterm aus Gleichung (5.5), daher vernachlässigen wir  $l_{ec}$  im weiteren [Pol02]. Wie bereits Munjal aufzeigte [Mun87], beschreibt das Integral in (5.5) die induktiven Effekte des Flächensprungs.

$$l_{eff} \equiv \int_{x_u}^{x_d} \frac{A_u}{A(x)} dx + l_{ec} \quad (5.5)$$

Die Gleichungen (5.2) und (5.3) führt man über in

$$\frac{p'_d}{\bar{\rho}c} = \left( \frac{1 - \frac{A_u}{A_d} M_u M_d + \frac{i\omega}{c} l_{red}}{1 - M_d^2} \right) \frac{p'_u}{\bar{\rho}c} + \left( \frac{M_u - \frac{i\omega}{c} l_{eff} - \zeta M_u - \frac{A_u}{A_d} M_d}{1 - M_d^2} \right) u'_u \quad (5.6)$$

$$u'_d = \left( \frac{\frac{A_u}{A_d} M_u - M_d - \frac{i\omega}{c} l_{red}}{1 - M_d^2} \right) \frac{p'_u}{\bar{\rho}c} + \left( \frac{\frac{A_u}{A_d} - M_u M_d + \frac{i\omega}{c} l_{eff} - \zeta M_u M_d}{1 - M_d^2} \right) u'_u \quad (5.7)$$

Kombiniert man die Resultate aus 5.6 und 5.7 und beschränkt sich auf die dominanten Terme einer Reihenentwicklung für niedrige Machzahlen, so erhält man für die Transfermatrix des kompakten Elements mit Verlusten die Abschätzung [GFEP03]

$$\mathbf{T}_{pu} = \begin{pmatrix} 1 & \left[ 1 - \zeta - \left( \frac{A_u}{A_d} \right)^2 \right] M_u - i \frac{\omega}{c} l_{eff} \\ -i \frac{\omega}{c} l_{red} - M_d & \frac{A_u}{A_d} \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

Der Verlustkoeffizient  $\zeta$  berücksichtigt akustische Verluste, die trotz der relativ kleinen Machzahlen in den weiter unten besprochenen Messungen nicht vernachlässigt werden sollten.

Die Koeffizienten  $\zeta$ ,  $l_{red}$ , und  $l_{eff}$  werden nur durch die Geometrie vorgegeben. Üblicherweise leitet man sie aus analytischen Modellen ab [Mun87]. Morse und Ingard zeigten 1968 einen eleganteren Weg zur Bestimmung dieser Koeffizienten auf [MI68]. Sie diskutieren das Beispiel eines plötzlichen Querschnittsprungs zwischen zwei rechteckigen Kanälen unterschiedlichen Querschnitts. Mit Hilfe der Schwarz-Christoffel Transformation [SL91] ist

es möglich, die reale Geometrie in ein Stromlinien-Koordinatensystem überzuführen. Nachdem die Transformation aufgestellt ist, kann man das akustische Strömungsfeld in Kanälen auf beiden Seiten des Flächensprungs berechnen. Integriert man nun über die kinetische Energie in den beiden Kanälen vor und nach dem Flächensprung, so erhält man für die Induktanz  $L_a$ :

$$L_a = \frac{\bar{\rho}}{\pi z} \left[ \frac{(D_d - D_u)^2}{2D_d D_u} \ln \frac{D_d + D_u}{|D_d - D_u|} + \ln \frac{(D_d + D_u)^2}{4D_d D_u} \right] \quad (5.9)$$

$z$  gibt die Tiefe des rechteckigen Kanals an<sup>44)</sup>,  $D_u$  und  $D_d$  bezeichnen den Durchmesser des Kanals vor und nach dem Flächensprung.

Für die effektive Länge  $l_{eff}$  leitet man die Beziehung (5.10) ab.

$$l_{eff} = \frac{L_a A_u}{\bar{\rho}} \quad (5.10)$$

Die reduzierte Länge  $l_{red}$  hängt über (5.11) mit  $L_a$  zusammen.

$$l_{red} = -\frac{\bar{\rho}}{L_a c} \quad (5.11)$$

Ähnlich zur Induktanz bildet die über das Element verloren gegangene akustische Energie den Ausgangspunkt für die Herleitung der Resistanz  $R_a$ . Für einen plötzlichen Querschnittsprung erhält man

$$R_a = \frac{\bar{\rho} \omega d_v}{2D_d z} \frac{|D_d - D_u|}{D_u} \left( 1 + \frac{|D_d^2 - D_u^2|}{\pi D_d D_u} \ln \frac{D_d + D_u}{|D_d - D_u|} \right) \quad (5.12)$$

$$d_v = \sqrt{\frac{2\mu}{\bar{\rho}\omega}} \quad (5.13)$$

$d_v$  bezeichnet die Dicke der viskosen Grenzschicht [MI68].

Der Zusammenhang zu dem akustischen Verlustbeiwert  $\zeta$  wird durch Beziehung (5.14) beschrieben:

$$\zeta = \frac{R_a A_u}{\bar{\rho} c} \quad (5.14)$$

Morse und Ingard [MI68] geben für rechteckige Kanäle neben der Lösung für die plötzliche Aufweitung auch Ausdrücke für die benötigte Schwarz-Christoffel Transformation,  $L_a$  und  $R_a$  an. Weiters werden die blendenförmige Versperrung und das rechtwinklige Knie diskutiert<sup>45)</sup>.

<sup>44)</sup> Im Fall des unendlich tiefen Kanals setzt man  $z = 1$ . Für rotationssymmetrische Anordnungen liefert  $z = D_u/2$  eine gute Näherung.

<sup>45)</sup> siehe auch Anhang E.1.3

Driscoll [Dri96, Dri02] entwickelte eine Toolbox für Matlab, die eine numerische Berechnung der Schwarz-Christoffel Transformation für allgemeine Polygonzüge erlaubt. Die Toolbox ist eine Weiterentwicklung eines Fortran Programmpakets, das Trefethen in den frühen 1980er Jahren entwickelte [Tre80].

### 5.1.2 Experimentelle Resultate

Der durchströmte Flächensprung stellt einen interessanten, da in der Praxis häufig auftretenden Fall dar. Es wurden die Transfermatrizen für drei Geometrien bestimmt:

- ① ein Flächensprung mit einem Flächenverhältnis von  $\alpha = 0.28$ ,
- ② Flächensprung  $\alpha = 0.28$  mit zusätzlichem Blendeneinsatz von 76 mm Durchmesser und
- ③ Flächensprung  $\alpha = 0.28$  mit zusätzlichem Blendeneinsatz von 51 mm Durchmesser.

Abbildung 5.1 zeigt die Querschnitte der untersuchten Geometrien ①, ② und ③. Durch die Blendeneinsätze von ② und ③ wird die Strömung an der Engstelle weiter eingeschnürt, wodurch aufgrund der Beschleunigung der Strömung zusätzliche akustische Energie verloren geht.

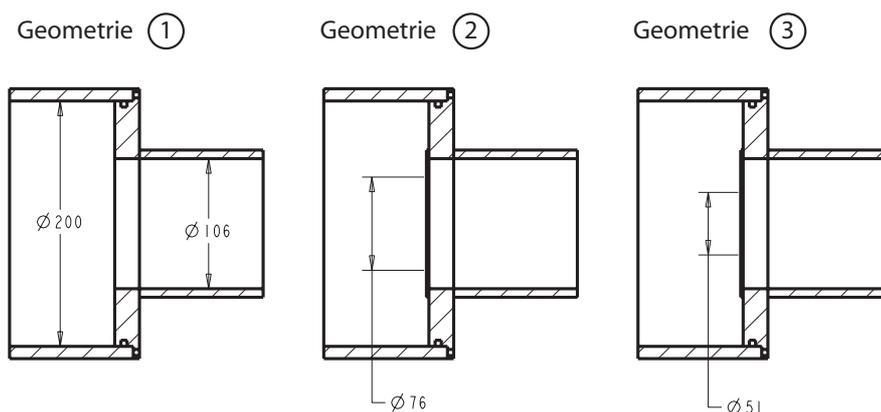


Bild 5.1: Querschnitte der untersuchten Geometrien ①, ② und ③

Vergleicht man die Transfermatrizen der drei untersuchten Geometrien in Abbildung 5.2, sieht man im Einklang mit Gleichung (5.5) ganz deutlich

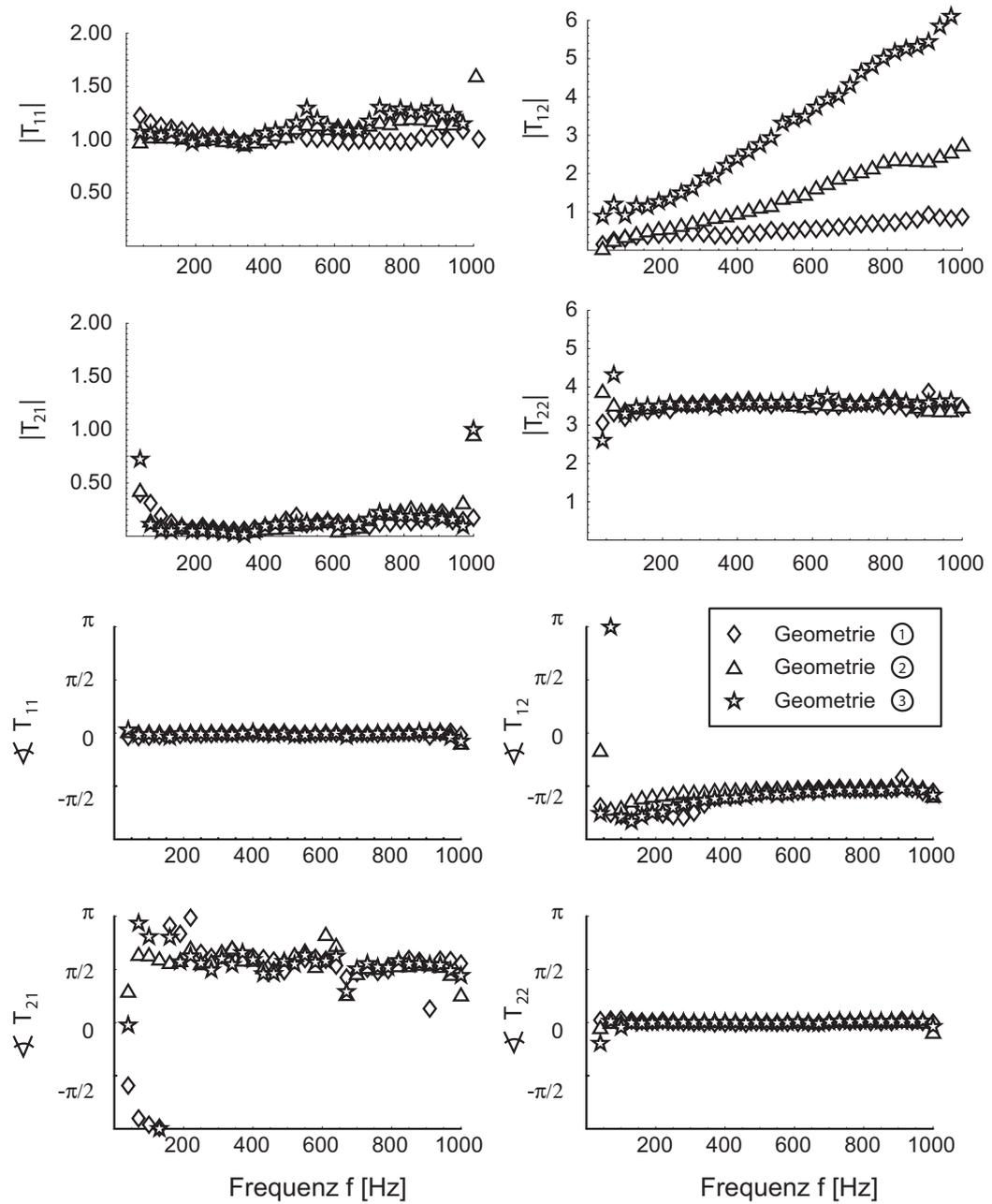


Bild 5.2: Transfermatrizen von Flächensprung und Flächensprung mit Blende für die Geometrien ①, ② und ③ nach Abbildung 5.1 und Tabelle 5.1.

	$D_u$ [mm]	$D_{Blende}$ [mm]	$D_d$ [mm]	$A_d/A_u$ [-]	$A_{Blende}/A_u$ [-]
① Flächensprung	200	–	106	0.28	–
② Flspr. + Blende I	200	76	106	0.28	0.14
③ Flspr. + Blende II	200	51	106	0.28	0.07

Tabelle 5.1: Geometriedaten Flächensprung mit Blende. Die Tabelle gibt die Querschnitte  $D_u$ ,  $D_{Blende}$  und  $D_d$  an den Positionen  $\mathcal{R}_u$  (upstream), in der Blende und  $\mathcal{R}_d$  (downstream) sowie die Flächenverhältnisse  $A_u/A_d$  und  $A_u/A_{Blende}$  an.

den Einfluss der Blendenquerschnitte auf die effektive Länge des gesamten Testelements.

Element  $T_{11}$  ist in allen Transfermatrizen von Abbildung 5.2 in guter Näherung gleich 1, in Element  $T_{22}$  findet sich in Übereinstimmung mit Gleichung (5.8) das Flächenverhältnis  $A_u/A_d$  wieder. Element  $T_{12}$  zeigt einen linearen Anstieg mit einer Steigung proportional zu  $l_{eff}$ . Ein Vergleich zwischen Element  $T_{21}$  und Element  $T_{12}$  zeigt, dass wie erwartet  $l_{red} \ll l_{eff}$ .

### 5.1.3 Modellierung

Ein Vergleich der experimentell für Geometrie ① aus Abbildung 5.1 ermittelten Transfermatrix des verlustbehafteten Flächensprungs mit einer Modellrechnung nach Gleichung (5.8),(5.9) und (5.12) liefert einen ersten Test für die Theorie des kompakten, durchströmten Elements.

Die gute Übereinstimmung von gerechneter und experimentell bestimmter Transfermatrix ist in Abbildung 5.3 zu erkennen. Die Überhöhung im Amplitudengang von Element  $T_{12}$  im Bereich bis 300 Hz ist bei den experimentellen Daten auf Messungenauigkeiten zurückzuführen.

## 5.2 Transfermatrix der Brennerdüse

### 5.2.1 Geometrie

Bei einem weiteren Experiment wurde die Transfermatrix der Brennerdüse ohne Drallregister und Zentrallanze ermittelt. Dazu wurden der plenumseitig auf den Drallerzeuger aufgeschraubte Deckel mit der daran montierten Lanze entfernt und die Schlitze des Drallerzeugers verschlossen. Abbildung 5.4 zeigt einen Querschnitt dieser Anordnung.

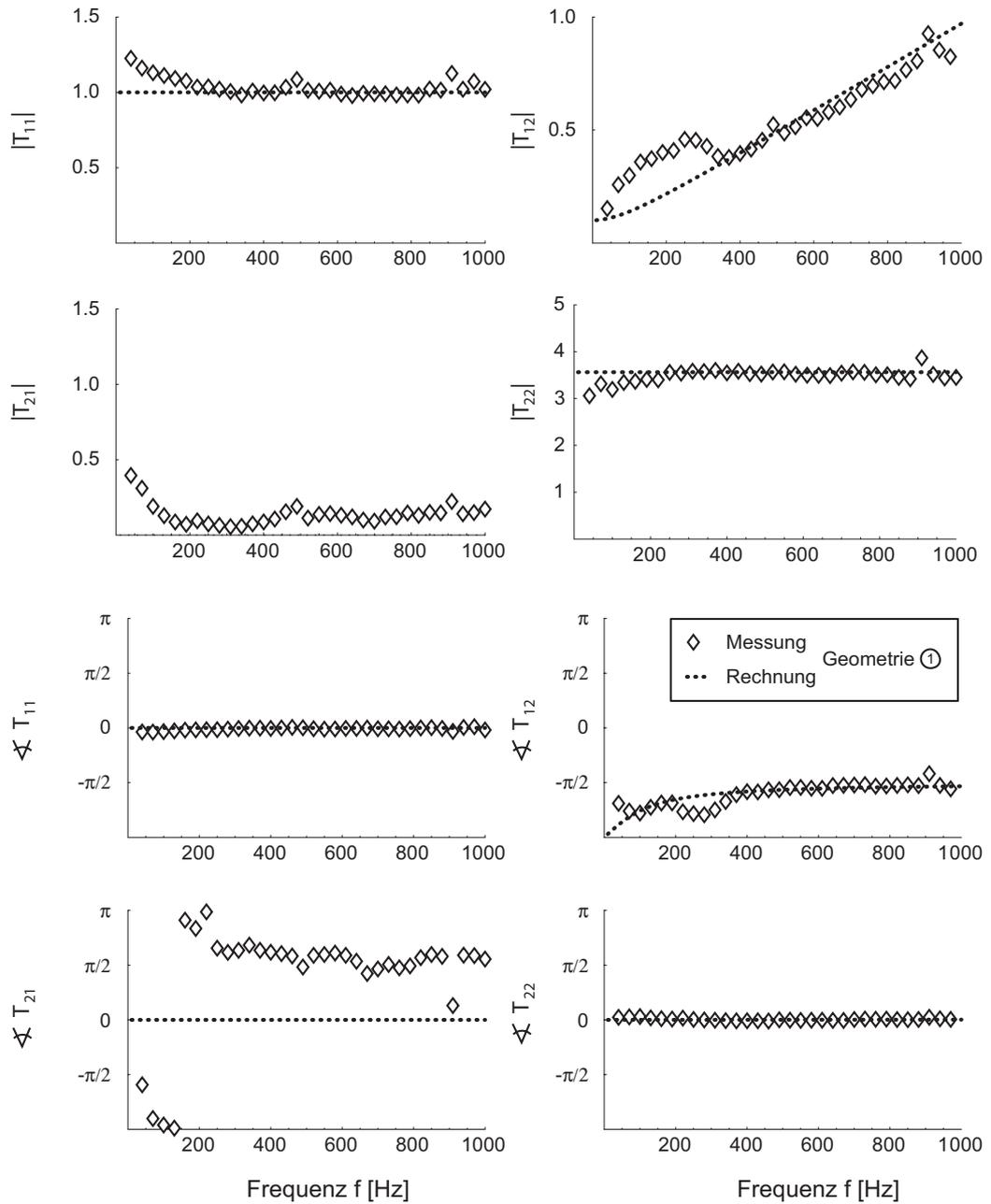


Bild 5.3: Transfermatrix des verlustbehafteten Flächensprunges: Vergleich zwischen Messung und Modellrechnung

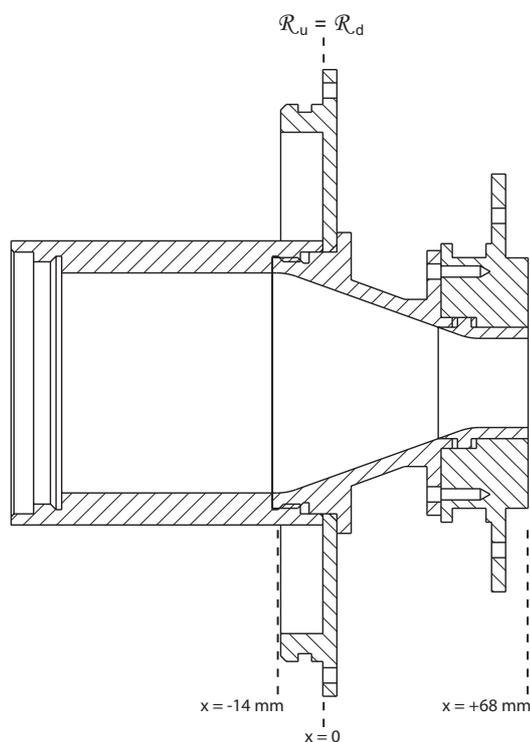


Bild 5.4: Querschnitt der Brennerdüse ohne Drallregister und Lanze

### 5.2.2 Modellierung

Bei der Kombination mehrerer Transfermatrizen werden die Matrixelemente  $T_{ij}$  der Transfermatrizen der einzelnen akustischen Elemente aufgrund der Eigenschaften der Matrixmultiplikation auf komplexe Art und Weise miteinander verknüpft. Die Interpretation von Transfermatrizen von Geometrien aus mehreren Elementen gestaltet sich daher ausgesprochen schwierig.

Um die wesentlichen Einflussgrößen auf die Transfermatrix einer Geometrie isolieren zu können, empfiehlt es sich, aus den Geometriedaten ein akustisches Modell abzuleiten. Die Vorhersagen dieses Modells vergleicht man anschließend mit experimentellen Ergebnissen. Der Einfluss einzelner Modellparameter kann auf diese Weise untersucht werden und eine Interpretation der experimentell bestimmten Transfermatrizen wird in vielen Fällen möglich.

Aufbauend auf ein Modell von Hirsch [Hir03], konnte die Transfermatrix der Brennerdüse mit einem akustischen Netzwerk nachgebildet werden. Die wesentliche Weiterentwicklung des Modells besteht in der Implementierung des kompakten Elements mit Verlust [GFEP03] nach Gleichung (5.8).

Wie Abbildung 5.5 zeigt, besteht das akustische Netzwerkmodell der Brennerdüse nach Gleichung (5.15) aus den Elementen

- verlustfreier Flächensprung Plenum  $\Rightarrow$  Düse am Beginn der keglig zusammenlaufenden Düse<sup>46)</sup>,
- Modell der Düse bestehend aus fünf abgestuften Segmenten Rohrelement und verlustfreier Flächensprung<sup>47)</sup> mit einer Gesamtlänge von 52 mm,
- Rohrstück von 30 mm Länge,
- kompaktes Element mit Verlust für den Flächensprung Brennerdüse  $\Rightarrow$  Brennkammer,
- Kontraktion der resultierenden Transfermatrix auf identische Referenzebenen  $\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_d$  an der Stelle  $x = 0$  durch zwei Rohrelemente von 14 und -68 mm Länge, welche die restlichen Elemente einschließen.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{pu} = & \underbrace{\begin{pmatrix} \cos kl & i \sin kl \\ i \sin kl & \cos kl \end{pmatrix}}_{\text{Kontraktion } l=-68 \text{ mm}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \left[1 - \zeta - \left(\frac{A_u}{A_d}\right)^2\right] M_u - i \frac{\omega}{c} l_{eff} \\ -i \frac{\omega}{c} l_{red} - M_d & \frac{A_u}{A_d} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Flächensprung (Brennerdüse } \Rightarrow \text{ Brennkammer)} \\ \text{kompaktes Element mit Verlust (Anhang E.1.3)}}} \\
 & \underbrace{\begin{pmatrix} \cos kl & i \sin kl \\ i \sin kl & \cos kl \end{pmatrix}}_{\text{Rohrstück } l=-30 \text{ mm}} \cdot \underbrace{\left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos kl & i \sin kl \\ i \sin kl & \cos kl \end{pmatrix} \right]^5}_{\substack{\text{Approximation Brennerdüse} \\ \text{in 5 Schritten}}} \\
 & \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}}_{\substack{\text{verlustfreier Flächensprung} \\ \text{(Plenum } \Rightarrow \text{ Düse)}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \cos kl & i \sin kl \\ i \sin kl & \cos kl \end{pmatrix}}_{\text{Kontraktion } l=14 \text{ mm}} \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

Die geometrischen Längen für das Modell wurden direkt aus der Konstruktionszeichnung des Brenners übernommen. Die einzige Modellannahme besteht

<sup>46)</sup> Eine Berücksichtigung des zylindrischen Einlaufs vor der Düse hatte nur minimale Auswirkungen, da sich die Querschnittsfläche des gesamten Plenums im Bereich des Einlaufs nur unwesentlich verringert.

<sup>47)</sup> Wie sich bei einer Studie mit feinerer Auflösung der Düse in zehn Segmente zeigte sind auch bereits fünf Elemente völlig ausreichend.

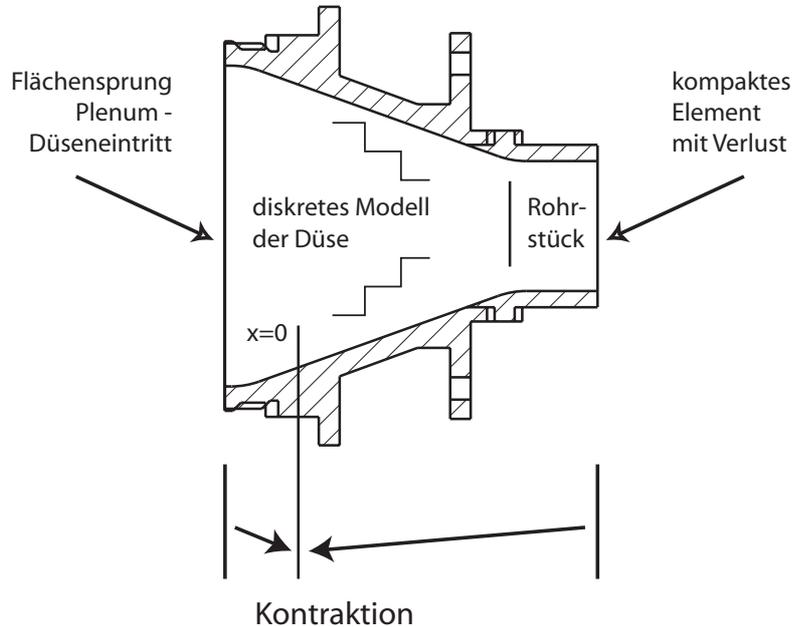


Bild 5.5: Akustisches Netzwerkmodell der Brennerdüse

darin, dass Verluste nur an den engsten Querschnitten der Düse auftreten und alle anderen Querschnittsprünge als verlustfrei angesehen werden können.

Wie sich herausstellte, reagiert das Modell unkritisch gegenüber Änderungen in der Dämpfungskonstante und den zusammenhängenden Größen Temperatur und Schallgeschwindigkeit. Der exakte Flächenverlauf sowie das Strömungsprofil in der Düse spielen nur eine untergeordnete Rolle.

Wie Abbildung 5.6 zeigt, wird der experimentell bestimmte Verlauf der Transfermatrix der Brennerdüse durch das Modell bis zu Frequenzen von etwa 500 Hz sehr gut nachgebildet. Einzig der zunehmende Anstieg der Amplitude in den Elementen  $T_{11}$  und  $T_{12}$  bei Frequenzen über 500 Hz wird durch das Modell nicht korrekt wiedergegeben.

### 5.3 Transfermatrizen des TD<sup>1</sup> Brenners

Die Transfermatrix des TD<sup>1</sup> Brenners wurde für unterschiedliche Konfigurationen experimentell bestimmt. Dabei wurde untersucht, ob die Transfermatrix sich mit dem Massendurchsatz durch den Brenner verändert und welche Auswirkungen das Drallregister und der Durchmesser der Brenneraustrittsdüse haben.

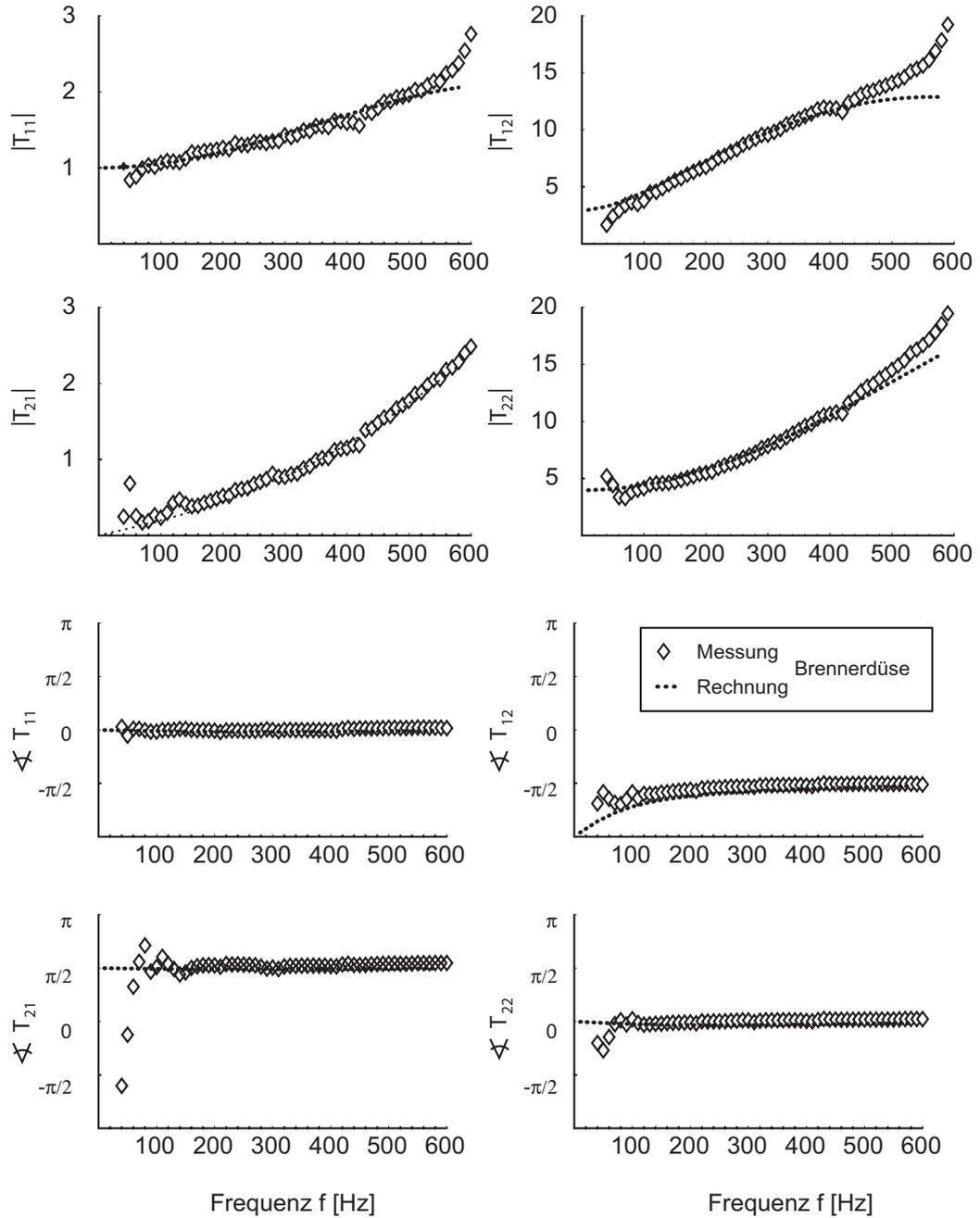


Bild 5.6: Transfermatrix der Brennerdüse: Vergleich zwischen Messung und Modellrechnung.

Wie in den vorherigen Kapiteln werden die experimentell bestimmten Transfermatrizen den Ergebnissen von Modellrechnungen gegenübergestellt.

### 5.3.1 Modellierung

Zur Modellierung des TD<sup>1</sup> Brenners ist zu sagen, dass sich die Modellbildung wesentlich schwieriger gestaltet als bei den weniger komplexen Geometrien des Flächensprunges und der Brennerdüse. Dafür gibt es einige Gründe.

Die Strömung wird beim Durchgang vom Plenum in die Brennkammer mehrfach stark umgelenkt. Insbesondere im Bereich der Schlitze des Drallerzeugers ist das Strömungsfeld in axialer Richtung stark gekrümmt und es kann somit nicht mehr von einer ebenen Wellenausbreitung ausgegangen werden. Dies schlägt sich in der reduzierten Länge der Anordnung nieder. Dieser Effekt wurde im akustischen Modell des Brenners durch eine manuelle Anpassung der Länge des Brennermodells berücksichtigt.

Da die Schlitze des Drallerzeugers sich nicht unmittelbar am Ende des Plenums befinden, bilden sie eine akustische T-Kreuzung. Vergegenwärtigt man sich den Vorgang mit der Zeitbereichsmethode aus Kapitel 3.2.3, wird klar, dass plenumsseitig einlaufende Wellenfronten aufgrund der Flächenverhältnisse nur teilweise in den Drallerzeuger weiterlaufen. Ein nicht zu vernachlässigender Anteil der Welle läuft die Strecke  $x_{SL}$  bis zum Ende des Plenums weiter und wird dort reflektiert. Nach einer Zeit  $2x_{SL}/c$  passiert die reflektierte Wellenfront den Schlitz erneut, ein Teil der Welle wird wieder in den Drallerzeuger gestreut, der Großteil der Welle läuft jedoch bis zu dem Flächensprung am Ende des Drallerzeugers. Dort läuft der Großteil der Welle in das Plenum weiter, ein kleiner Anteil wird reflektiert und passiert den Schlitz erneut. Diese Kaskade lässt sich wie bei der Diskussion der Expansionskammer zu einer geometrischen Reihe zusammenfassen und hat Einfluss auf die Transfermatrix des Brenners. In den besprochenen Modellen wurde der Dreifachstreuprozess an den Schlitzen des Drallerzeugers nicht berücksichtigt.

Wie Tabelle 5.2 zeigt, besitzt der TD<sup>1</sup> Brenner einen wesentlich höheren Druckverlustbeiwert<sup>48)</sup>  $\zeta_p$  als die Brennerdüse<sup>49)</sup>. Dieser Druckverlust muss

<sup>48)</sup> Der Druckverlustbeiwert  $\zeta_p$  ist nach Gleichung (5.16) definiert [Tru89].

$$\zeta_p = \frac{2\Delta p}{\bar{\rho}u_{ax}^2} \quad (5.16)$$

$\Delta p$  gibt den Druckverlust über das Element,  $u_{ax}$  die Axialgeschwindigkeit,  $\bar{\rho}$  die Dichte an. Der Druckverlustbeiwert  $\zeta_p$  repräsentiert Druckverluste über den Brenner. Im Gegensatz dazu steht der akustische Verlustkoeffizient  $\zeta$  aus Gleichung (5.3) für akustische Verluste.

<sup>49)</sup> Für die Brennerdüse kann in guter Näherung  $\zeta_p \approx 1$  angenommen werden.

im akustischen Netzwerkmodell des Brenners berücksichtigt werden.

Schlitzlänge Drallerzeuger [mm]	Druckverlustbeiwert $\zeta_p$			
	Durchmesser Brennerdüse			
	32 mm	34 mm	36 mm	40 mm
8	2.42	2.97	3.62	5.75
16	1.45	1.76	1.99	2.70
32	1.08	1.16	1.30	1.71
48	1.06	1.08	1.12	1.34
64	1.05	1.06	1.12	1.22

Tabelle 5.2: Experimentell bestimmte Druckverlustbeiwerte  $\zeta_p$  für unterschiedliche Geometrien des TD<sup>1</sup> Brenners.

Die gemessenen Transferfunktionen konnten auch beim TD<sup>1</sup> Brenner überzeugend durch akustische Netzwerke reproduziert werden, jedoch mit der Einschränkung, dass aus den genannten Gründen eine direkte Übertragung der Brennergeometrie in ein akustisches Modell bisher nur teilweise erfolgreich war. Für zukünftige Vorhaben erscheint eine Weiterentwicklung der Netzwerkmodelltechnik jedoch sehr lohnend.

Wie sich zeigt, erhält man bei der Modellierung des TD<sup>1</sup> Brenners die besten Resultate, wenn man im Netzwerkmodell den Drallerzeuger durch ein Rohrelement repräsentiert, dessen "Länge 5 mm über der geometrischen Länge des Drallerzeugers liegt. Die benötigte Überlänge des Elements wird akustisch als reduzierte Länge der Drallerzeugerschlitze interpretiert.

Das akustische Netzwerkmodell des TD<sup>1</sup> Brenners besteht aus den Komponenten

- verlustfreier Flächensprung Plenum  $\Rightarrow$  teilversperrtes Plenum,
- Rohrstück mit 116 mm Länge<sup>50)</sup>. Die Länge dieses Rohrstückes ist damit grösser als die tatsächliche Länge des Drallerzeugers von 111 mm,
- Druckverlustelement, in das experimentell bestimmte Druckverlustbeiwerte  $\zeta_p$  aus Tabelle 5.2 eingehen<sup>51)</sup>,
- verlustfreier Flächensprung teilversperrtes Plenum  $\Rightarrow$  Düse,

<sup>50)</sup> Für den vollständig geöffneten Drallerzeuger wurde eine Länge von 121 mm verwendet.

<sup>51)</sup> Dieses Element besitzt mit dem Druckverlustbeiwert  $\zeta_p$ , der Machzahl  $M$  und dem

Die restlichen Elemente wurden direkt aus dem Modell der Brennerdüse in Kapitel 5.2.2 übernommen.

- Modell der Düse, bestehend aus fünf abgestuften Segmenten Rohrelement und verlustfreier Flächensprung mit einer Gesamtlänge von 52 mm,
- Rohrstück von 30 mm Länge,
- kompaktes Element mit Verlust für den Flächensprung Brennerdüse  $\Rightarrow$  Brennkammer,
- Kontraktion der resultierenden Transfermatrix auf identische Referenzebenen  $\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_d$  an der Stelle  $x = 0$  durch zwei Rohrelemente von 111 und -68 mm Länge, welche die restlichen Elemente einschließen.

Abbildung 5.7 vergleicht Resultate des Modells mit experimentell bestimmten Transfermatrizen.

Um ein Modell des Brenners und insbesondere des Drallerzeugers zu entwickeln, das die Brennergeometrie direkt umsetzt, sind weitere Untersuchungen zur Modellierung der T-Kreuzung und der Schlitze des Drallerzeugers notwendig. Aufgrund der hohen Übereinstimmung der modellierten und experimentell bestimmten Transfermatrizen erscheint eine direkte Umsetzung der Brennergeometrie in ein akustisches Modell möglich.

Die erfolgreiche Modellierung der Brennerdüse legt nahe, dass die akustischen Verluste am TD<sup>1</sup> Brenner erfolgreich durch die Methoden der theoretischen Akustik [MI68, Pie81] beschrieben werden. Akustische Verluste durch Turbulenz wurden bei der Modellierung nicht berücksichtigt. Aufgrund der hohen Übereinstimmung der Ergebnisse von Messung und Modellierung, spielen akustische Verluste durch Turbulenz beim TD<sup>1</sup> Brenner im untersuchten Bereich kleiner Machzahlen nur eine untergeordnete Rolle.

Die Beschreibung paralleler akustischer Elemente, wie sie etwa hinter einer T-Kreuzung auftreten, scheint durch eine erweiterte Transfermatrixnotation möglich. Durch ein Teilungselement wird der Zustandsvektor  $(p'/\bar{\rho}c, u)^T$  in einen  $1 \times 2N$  Vektor der  $N$  parallelen Stränge aufgespalten. Die parallelen Stränge werden durch  $2 \times 2N$  Transfermatrizen behandelt und abschließend

hydraulischen Durchmesser  $D_{hyd}$  die Transfermatrix [Hir03].

$$\mathbf{T}_{pu} = \begin{pmatrix} 1 & -\zeta_p M \sqrt{\frac{\omega D_{hyd}}{c}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.17)$$

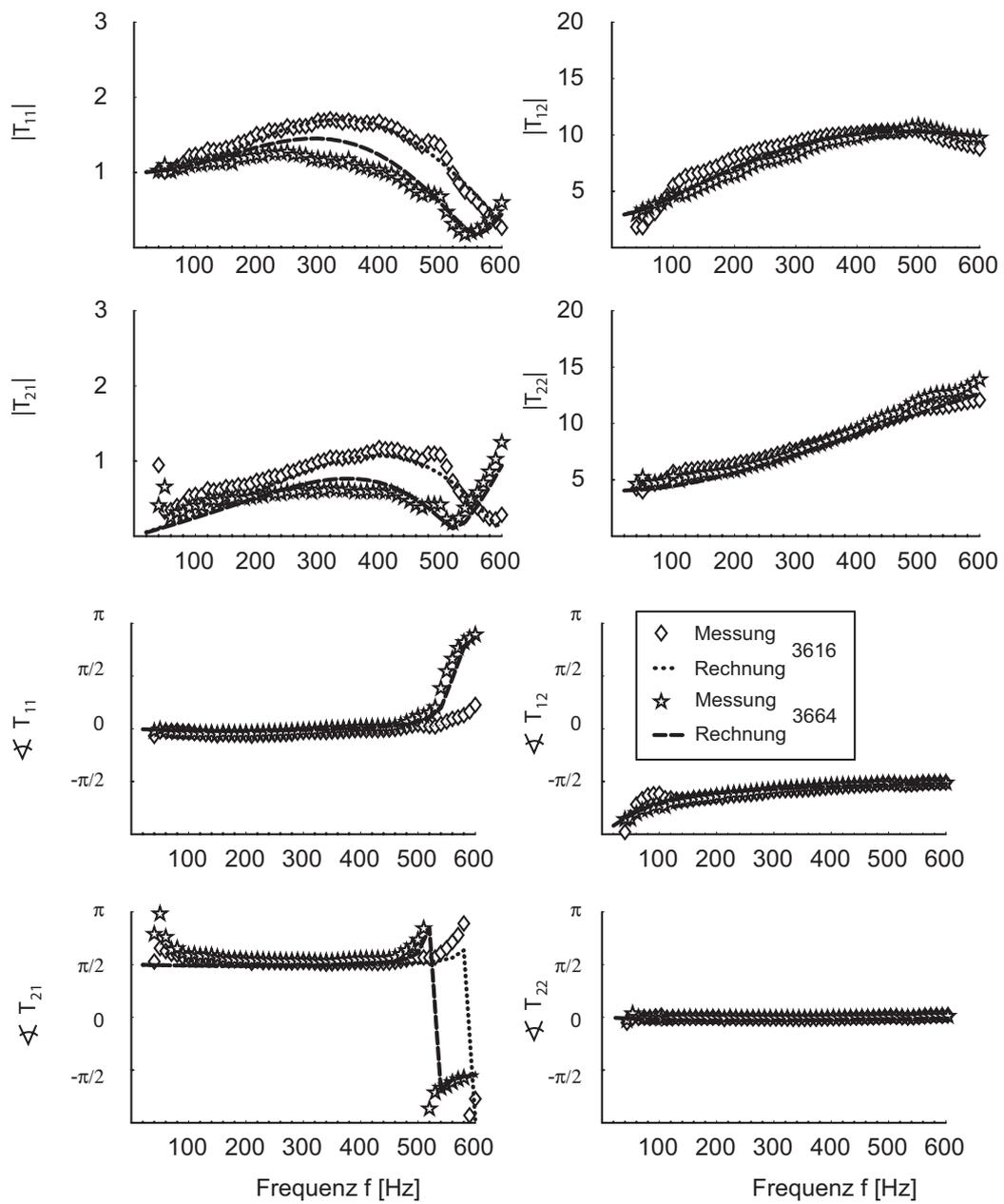


Bild 5.7: Transfermatrix des TD<sup>1</sup> Brenners: Vergleich zwischen Messung und Modellrechnung für die Geometrien 3616 und 3664.

durch ein Zusammenführungselement wieder zu einem Strang vereint. Im Falle der T-Kreuzung liefert die Behandlung als Dreiweg-Streuprozess die Koeffizienten für die Aufspaltung in die beiden Teilstränge. Generell gelten für akustische Kreuzungen, ähnlich den Kirchhoff Gesetzen für die Knoten elektrischer Netzwerke, die Beziehungen [Väl95]

$$p'_1 = p'_2 = \dots = p'_N \quad (5.18)$$

$$\sum_{i=1}^N A_i u'_i = 0 \quad (5.19)$$

Die Analogie zwischen akustischen, mechanischen und elektronischen Netzwerken wird in [Ols58, Len01] ausführlich thematisiert.

Für die exakte Modellierung der Drallerzeugerschlitze müssen passende Ausdrücke für  $L_a$  und  $R_a$  gefunden werden, damit die akustischen Verluste an dieser Stelle korrekt modelliert werden können. Aufgrund der geometrischen Komplexität des Drallerzeugers, scheint nur eine numerische Lösung der Schwarz-Christoffel Transformation mit den Methoden nach Trefethen und Driscoll [Tre80, Dri96, Dri02] aussichtsreich.

### 5.3.2 Durchsatzvariation

An der Konfiguration 3616 des TD<sup>1</sup> Brenners wurden die Transfermatrizen für unterschiedliche Massendurchsätze bestimmt. Die Resultate werden in Abbildung 5.8 dargestellt.

Die Messungen wurden mit Luft bei einer Temperatur von 16 °C durchgeführt. Ausgehend von einem Nenndurchsatz von 29.0 g/sec wurde eine weitere Transfermatrix bei halbem Nenndurchsatz, also 14.5 g/sec, ermittelt. Die höchsten Strömungsgeschwindigkeiten werden beim TD<sup>1</sup> Brenner in der Austrittsdüse erreicht. Die Tabelle 5.3 zeigt berechnete Werte der flächengemittelten Strömungsgeschwindigkeit für unterschiedliche Austrittsdüsen am TD<sup>1</sup> Brenner. Für die vorliegenden Experimente errechnet man in der Düse Geschwindigkeiten von 28 bzw. 14 m/sec. In diesem Bereich kleiner Machzahlen  $M < 0.1$  zeigte sich *keine signifikante Durchsatzabhängigkeit* der Transfermatrix.

### 5.3.3 Brennerdüsendurchmesser

Die Transfermatrizen zweier Brennerkonfigurationen mit identischem Drallregister und unterschiedlichen Brenneraustrittsdüsen werden in Abbildung 5.9 verglichen. Der einzige Unterschied zwischen den beiden untersuchten

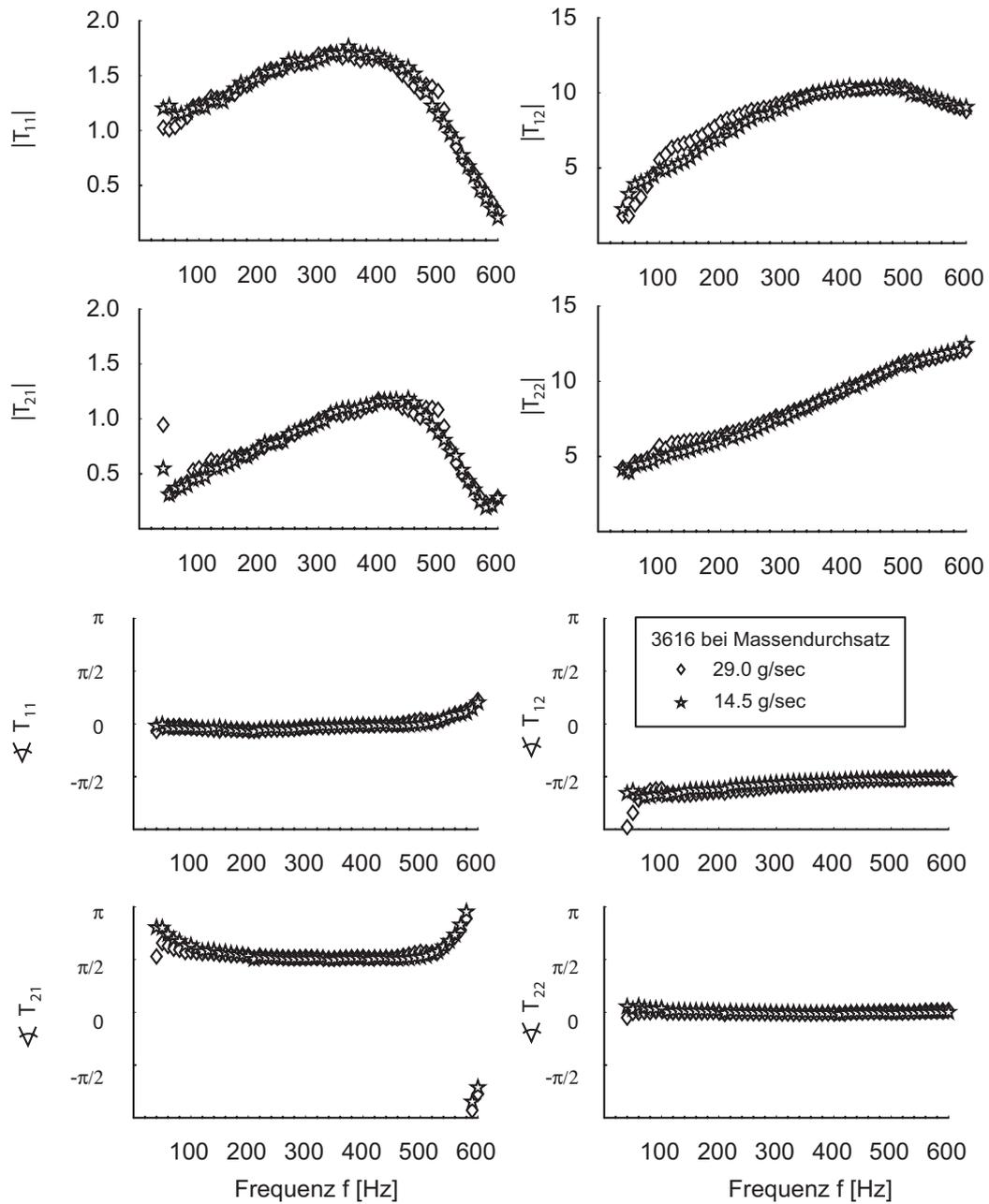


Bild 5.8: Transfermatrizen unter Durchsatzvariation. Vergleich der Transfermatrizen für die Brennerkonfiguration 3616 bei 29 g/sec und 14,5 g/sec Massendurchsatz.

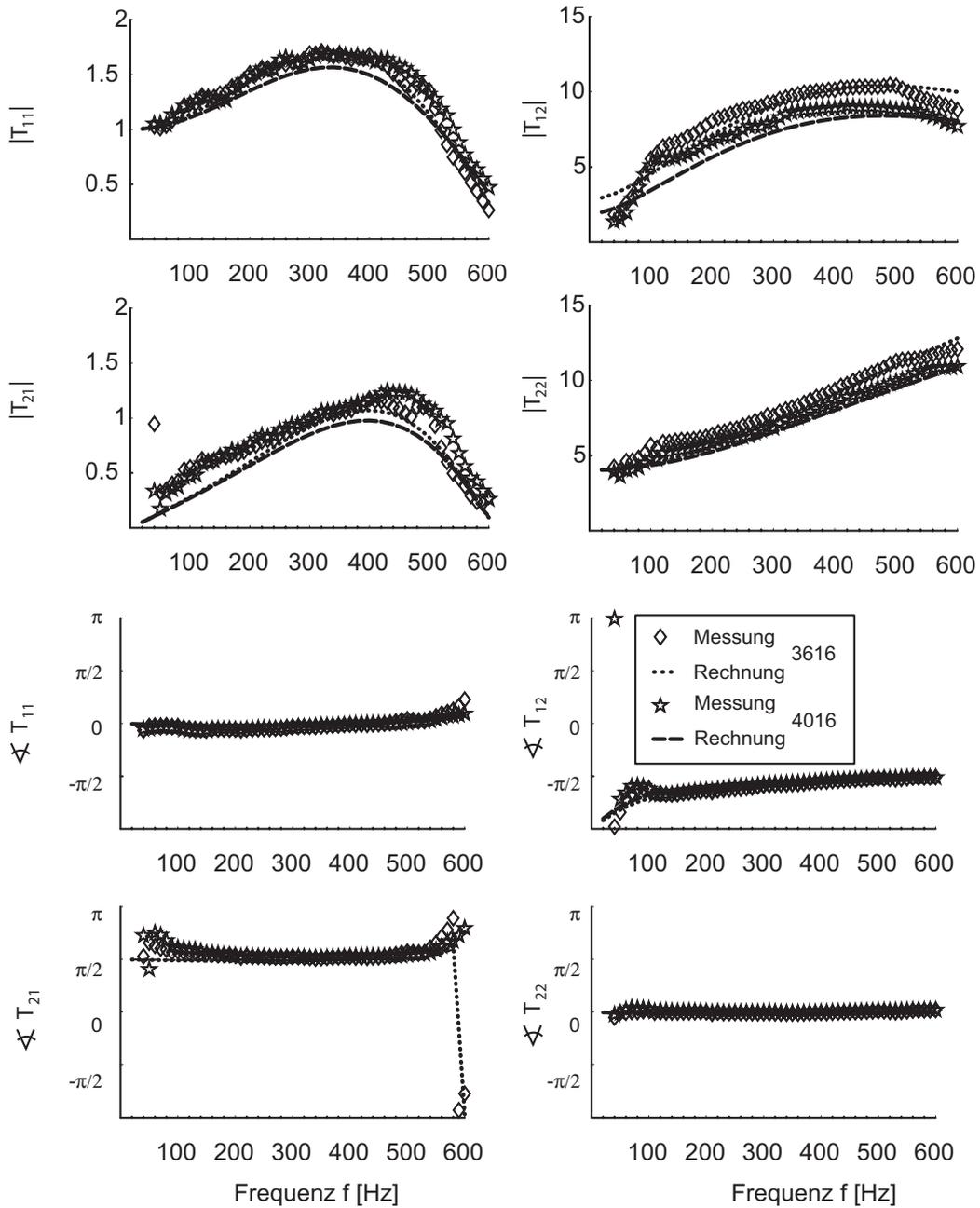


Bild 5.9: Variation der Brennerdüsen bei identischem Drallregister. Experimentell bestimmte (durchgezogen) und modellierte (unterbrochen) Transfermatrizen für die Brennerkonfigurationen 3616 und 4016.

Massenstrom [g/sec]	Strömungsgeschwindigkeit [m/sec] in der Brennerdüse		
	32 mm	36 mm	40 mm
10	12.85	9.49	7.34
15	19.28	14.24	11.02
20	25.70	18.98	14.69
25	32.13	23.73	18.36
30	38.55	28.47	22.03
40	51.41	37.96	29.38
50	64.26	47.45	36.72

Tabelle 5.3: Berechnete flächengemittelte Strömungsgeschwindigkeiten in m/sec in der Austrittsdüse des TD<sup>1</sup> Brenners bei Durchströmung mit Luft bei 20 °C für unterschiedliche Durchmesser der Brenneraustrittsdüse.

Brennerkonfigurationen liegt in den unterschiedlichen Düsenaustrittsdurchmessern. Die Konfiguration 3616 besitzt einen Düsendurchmesser von 36 mm, bei der Konfiguration 4016 sind es 40 mm. Das Drallregister ist in beiden Konfigurationen identisch, durch die erhöhte Axialgeschwindigkeit in der 36 mm Düse verändert sich jedoch die Drallzahl am Brenneraustritt. Wie die Parameterstudie in Kapitel 5.3.4 und der Vergleich mit Modellrechnungen zeigt, hat die Drallzahl jedoch keinen direkten Einfluss auf die Transfermatrix.

Der hauptsächliche Unterschied zwischen den beiden Konfigurationen besteht darin, dass die Strömung in der engeren 36 mm Düse beschleunigt wird, was sich in der Transfermatrix in einer Erhöhung der effektiven Länge  $l_{eff}$  niederschlägt. Nach Gleichung 5.5 erwartet man, dass  $l_{eff}$  für beide Brennergeometrien in erster Näherung proportional zum Flächenverhältnis der Düsen ist. Aufgrund dieser Abschätzung errechnet man in Element  $T_{12}$  ein Amplitudenverhältnis von 1.29, wie Abbildung 5.9 zeigt liegt das gemessene Verhältnis der Amplituden in  $T_{12}$  etwa bei 1.25.

Ein weiterer Unterschied zwischen den beiden Brennergeometrien liegt aufgrund des unterschiedlichen Düsenaustrittsdurchmessers in dem veränderten Flächenverhältnis zwischen Brennerdüse und Brennkammer. Dies schlägt sich in der Transfermatrix im Amplitudengang von Element  $T_{22}$  nieder. Dementsprechend liegt der Amplitudengang für die Konfiguration 4016 in Abbildung 5.9 unter jenem für 3616.

### 5.3.4 Dralleinsätze

In einer weiteren Parameterstudie wurden die Transfermatrizen für Brenner mit 36 mm Austrittsdüse und unterschiedlichen Dralleinsätzen verglichen. Konkret wurden die Konfigurationen 3608, 3616, 3632 und 3664 untersucht. Tabelle 5.4 fasst die wichtigsten Kennwerte der Brennerklasse 36xx zusammen.

Konfiguration 36xx	Düse [mm]	Schlitz [mm]	theoret. Drallzahl $S_{theo}$	Druckverlustbeiwert $\zeta_p$
3664	36	64	0.26	1.12
3632	36	32	0.52	1.30
3616	36	16	1.03	1.99
3608	36	8	2,06	3.62

Tabelle 5.4: Die Tabelle listet einige Kennwerte der Brennerklasse 36xx auf. Dabei handelt es sich um Brenner mit identischer Düse 36mm und unterschiedlichen Drallerzeugereinsätzen.

Vergleicht man die Transfermatrizen der Konfigurationen 36xx, so fällt auf, dass sich die Phasengänge für unterschiedliche Dralleinsätze praktisch nicht verändern, während bei den Amplitudengängen ein klarer Trend zu erkennen ist. Besonders die Amplituden der Elemente  $T_{11}$  und  $T_{21}$  wachsen mit zunehmender Versperrung des Drallregisters an. Im Vergleich zu der Transfermatrix der Konfiguration 3664 erreicht jene von 3608 im Element  $T_{11}$  um etwa 75 Prozent höhere Amplituden. Bei Element  $T_{21}$  steigert sich die Amplitude im Vergleich dieser Brennergeometrien auf den 2.5 fachen Wert.

In Elementen  $T_{12}$  sieht man einen vergleichsweise geringen Anstieg, der als Anwachsen der reduzierten Brennerlänge mit zunehmender Versperrung der Schlitzes am Drallerzeuger interpretiert wird. In Element  $T_{22}$  zeigt sich keine maßgebliche Geometrieabhängigkeit.

Ein Vergleich zwischen experimentell bestimmten Transfermatrizen und Modellrechnungen für die Konfigurationen 3616 und 3664 wurde bereits in Abbildung 5.7 gezeigt.

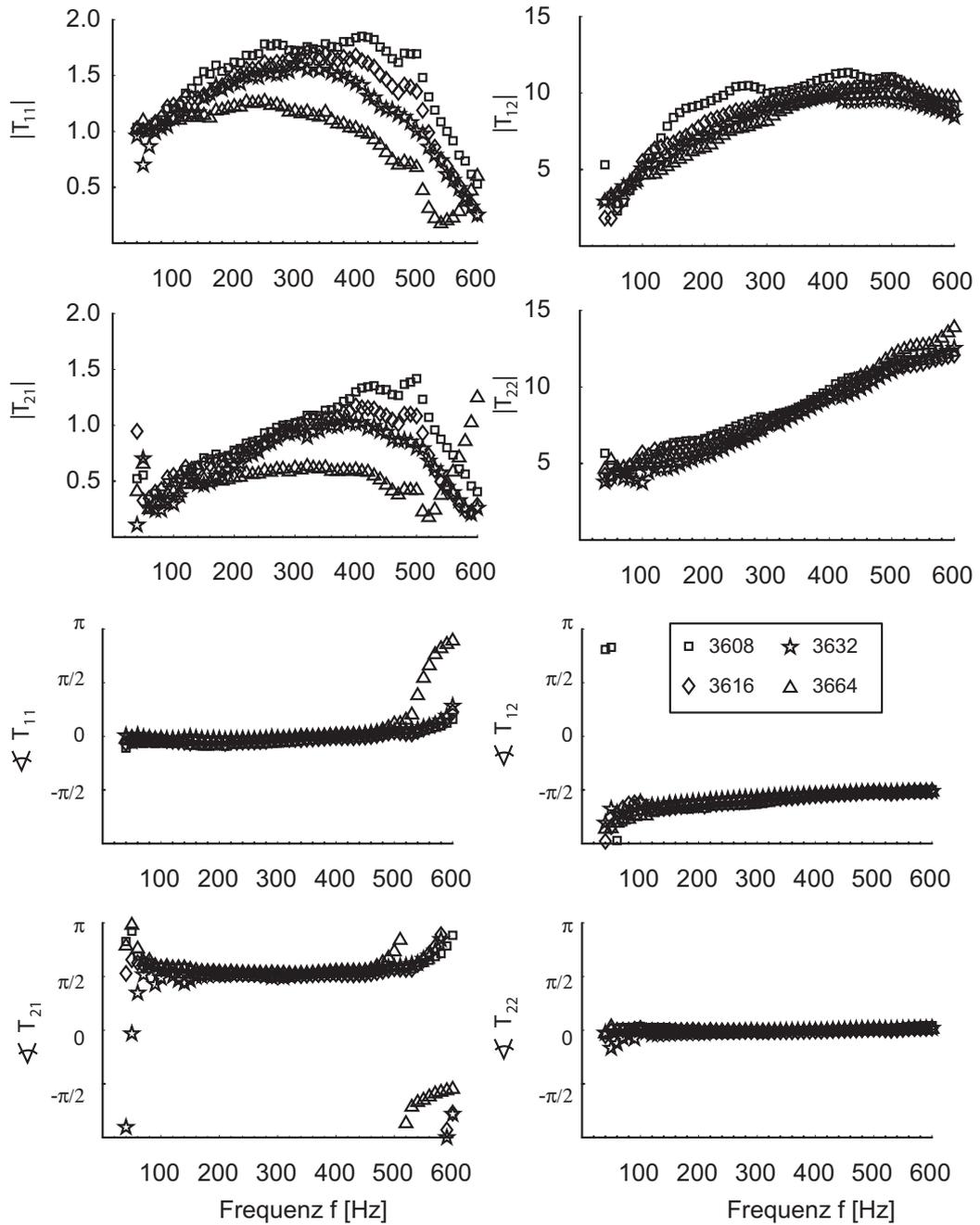


Bild 5.10: Transfermatrizen für unterschiedliche Dralleinsätze bei identischer Brennerdüse für die Brennerkonfigurationen 3608, 3616, 3632 und 3664

## 6 Flammentransferfunktionen des TD<sup>1</sup> Brenners

Zu Beginn des Forschungsprojekts war geplant, Transfermatrizen des TD<sup>1</sup> Brenners mit und ohne Verbrennung direkt experimentell zu bestimmen. Wie in Kapitel 4.4.8 beschrieben, führten Probleme bei der Bestimmung von Transfermatrizen mit Verbrennung dazu, dass von einer direkten experimentellen Bestimmung der Flammentransfermatrix abgesehen wurde.

Stattdessen verlegte man sich auf die wesentlich robustere Bestimmung der Transferfunktion des Brenners. Die Transfermatrix des Brenners mit Flamme lässt sich aus den experimentell bestimmten Transfermatrizen des kalten Brenners und der Transferfunktion der Flamme berechnen. Diese Vorgehensweise wollen wir im Weiteren als *hybride* Bestimmung der Transfermatrix von Brenner und Flamme bezeichnen.

In Kapitel 5 wurden experimentelle Ergebnisse für Transfermatrizen des kalten Brenners diskutiert. Nun soll die experimentelle Bestimmung von Flammentransferfunktionen beschrieben werden. Im Anschluss beschäftigen wir uns mit der soeben skizzierten hybriden Methode zur Berechnung der Transfermatrizen von Brenner und Flamme.

### 6.1 Chemilumineszenz

#### 6.1.1 Chemilumineszenz

Als Chemilumineszenz bezeichnet man die Strahlung, die Moleküle aussenden wenn sie aus angeregten Zuständen in den Grundzustand zurückkehren. Die Wellenlänge der ausgesendeten Strahlung ist charakteristisch für das Molekül und den Übergang. Meist handelt es sich dabei um Licht aus dem sichtbaren oder infraroten Spektralbereich. Chemilumineszenz tritt bei zahlreichen chemischen Prozessen auf, in denen energiereiche instabile Zwischenstufen entstehen und rasch wieder zerfallen. Komplexe Moleküle besitzen eine größere Zahl von Übergängen und haben daher ein komplexeres charakteristisches Spektrum als einfache. Für einfache (zweiatomige) Moleküle zeigt das Spektrum ein Hauptmaximum und einige wenige schwache Nebenmaxima. Die Spektren komplexerer Moleküle erscheinen oft kontinuierlich. OH\*, CH\* und C<sub>2</sub>\* sind Beispiele für Moleküle, die ein einfaches Spektrum mit einem Hauptmaximum bei 308 nm, 431 nm bzw. 513 nm besitzen. Das Spektrum von CO<sub>2</sub> sieht im Gegensatz dazu kontinuierlich aus [Gay74, Neu79, Hab00].

Die Chemilumineszenz von Flammen ist besonders interessant, da die Konzentrationen angeregter Moleküle in Flammen um einige Größenordnungen über den Gleichgewichtskonzentrationen ohne die Verbrennungsreakti-

on liegen. Angeregte Moleküle werden deshalb nicht nur durch thermische Anregung gebildet, sondern entstehen zum überwiegenden Teil als Produkte der chemischen Reaktionen in der Flamme. Da die Stärke der Strahlung bei einer bestimmten Wellenlänge direkt proportional zu der Konzentration des zugehörigen angeregten Moleküls ist, kann man von der Messung der Strahlungsintensität direkte Rückschlüsse auf die Konzentrationen angeregter Moleküle ziehen.

### 6.1.2 Bildung von angeregtem OH\*

Von besonderer Bedeutung für das Verständnis von Chemilumineszenz und deren Anwendung auf die Untersuchung von Flammen ist die chemische Reaktionskinetik, die zur Bildung angeregter, lumineszenter Moleküle führt. Eine experimentelle Bestimmung der für die theoretische Beschreibung benötigten chemischen Reaktionsraten erwies sich lange Zeit als schwierig. Erst durch die Entwicklung der Laserphotolyse können instabile Moleküle, die in Flammen auftreten, im Labor kontrolliert in ausreichender Konzentration erzeugt werden. Dadurch wurde es möglich einzelne Reaktionsraten experimentell direkt und mit deutlich verbesserter Genauigkeit zu bestimmen [DDRH91, Hab00].

Ein vereinfachter Mechanismus für die Bildung von OH\* wurde bereits 1961 von Krishnamahari *et al.* [KB61] vorgeschlagen (6.1).



Spätere Arbeiten von Becker [BKN69] und Dandy und Vosen [DV92] zeigten, dass der vereinfachte Mechanismus (6.1) gute Resultate für die Modellierung der Chemilumineszenz von Flammen komplexer Kohlenwasserstoffmoleküle liefert. Die Reaktionsraten für die Reaktion (6.1) wurden von Berman [BFHL82] experimentell bestimmt.

In Methanflammen spielt der Zerfall des CH<sub>2</sub>OH Radikals eine zentrale Rolle [NMW98, Hab00, HVSK00b]. Najm *et al.* [NMW98] publizierten 1998 ein Reaktionsdiagramm für die Oxidation von Methan, das in Abbildung 6.1 wiedergegeben wird. Auf Najms Arbeit aufbauend modelliert Haber [HVSK00a] die Chemilumineszenz eines mit Methan betriebenen Bunsenbrenners mit einem alternativen OH\* Bildungsmechanismus, der auf der Reaktion (6.2) basiert.



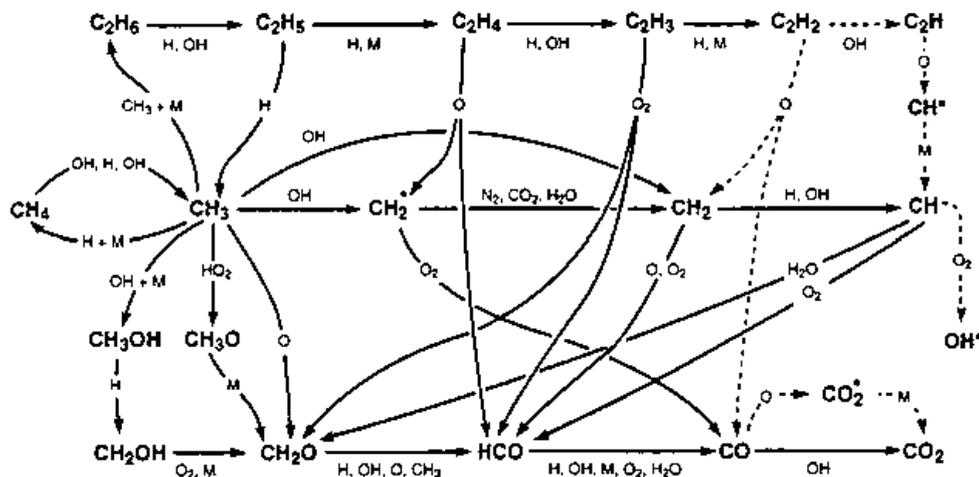


Bild 6.1: Reaktionsdiagramm für die Oxidation von Methan (nach Najm *et al.* [NMW98])

### 6.1.3 Rückkehr von $\text{OH}^*$ in den Grundzustand

Im Wesentlichen existieren drei Mechanismen [Hab00], die es dem angeregten  $\text{OH}^*$  Molekül wieder erlauben in den Grundzustand zurückkehren. Dabei wird nicht immer Strahlung abgegeben. Am häufigsten wird die Energie bei Stößen mit anderen Molekülen abgegeben (6.3).



Bei diesen Kollisionen wird keine elektromagnetische Strahlung emittiert. Diese nichtradiativen Stöße bezeichnet man als *Quenching*. Nicht bei allen Stößen fällt das angeregte Molekül wieder in den Grundzustand zurück. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein angeregtes Molekül durch einen Stoß (Quenching-Wahrscheinlichkeit) in den Grundzustand übergeht hängt stark von der Art der zusammenstoßenden Moleküle und der Temperatur ab<sup>52)</sup>. Aufbauend auf die Arbeiten von Garland und Crosley [GC86] geben Dandy und Vosen die Quenching-Wahrscheinlichkeiten der wichtigsten Kollisionspartner von  $\text{OH}^*$  an [DV92].

Eine weitere Möglichkeit besteht darin, dass das angeregte Molekül spontan unter Aussendung eines Photons mit der Energie  $h\nu$  in den Grundzustand

<sup>52)</sup> In Methanflammen machen die Stöße von  $\text{OH}^*$  mit Wasser-Molekülen 2/3 aller Quenching-Reaktionen aus [WLTS98].

zurückfällt. Dies stellt die spektroskopisch beobachtbare Chemilumineszenzreaktion (6.4) dar. Die Wellenlänge des emittierten Lichtes beträgt 308 nm [Hab00]<sup>53)</sup>.



Der dritte Mechanismus besteht in der Zerstörung des angeregten OH\* durch chemische Reaktionen. Wie Dandy und Vosen zeigten kann dieser Mechanismus für OH\* in Flammen vernachlässigt werden [DV92].

#### 6.1.4 Literatur über Chemilumineszenz von Flammen

Chemilumineszenz wurde bereits 1958 von Clark für die experimentelle Untersuchung von Flammen eingesetzt [Cla58]. Clark untersuchte die Flammen von Bunsenbrennern unterschiedlichen Durchmessers. Ziel der Untersuchung war es, für unterschiedliche Brennstoffe, Massendurchsätze und Luftzahlen einen Zusammenhang zwischen der Chemilumineszenz der angeregten Moleküle OH\*, CH\*, CO<sub>2</sub>\* und C<sub>2</sub>\* und verschiedenen Parametern der Flamme abzuleiten. Clark zeigte, dass sowohl für laminare als auch für turbulente Flammen ein linearer Zusammenhang zwischen der integralen Chemilumineszenz der Flamme und dem Massendurchsatz besteht. Die Steigung der Geraden ist für laminare und turbulente Flammen unterschiedlich, die Proportionalitätskonstante ist von der Luftzahl und der Art der verwendeten Chemilumineszenz abhängig [Hab00].

Langhorne [Lan88] und Cho *et al.* [CKL98] untersuchen die Korrelation zwischen der C<sub>2</sub>\* Chemilumineszenz und der Wärmefreisetzung von Flammen. Beide gehen von einem linearen Zusammenhang zwischen Chemilumineszenz und Wärmefreisetzung aus. Bloxside [BDL88] verwendet in einer theoretischen Arbeit zu einem Modell für die Moden und Frequenzen einer niederfrequenten Verbrennungsinstabilität in Nachbrennern ebenfalls einen linearen Zusammenhang zwischen Chemilumineszenz und Wärmefreisetzung. Büchner [Büc92] und Hermann [Her97] verwendeten Chemilumineszenz für die Untersuchung selbsterregter Verbrennungsschwingungen.

Samaniego *et al.* [SFB95] untersuchen in einer theoretischen Arbeit die Chemilumineszenz von CO<sub>2</sub>\*. Sie kommen zu dem Schluss, dass CO<sub>2</sub>\* einen guten Indikator für Wärmefreisetzung und die Konzentration von Wasserstoff Atomen in stationären und instationären Flammen darstellt.

<sup>53)</sup> Interessanterweise finden sich in der Literatur für die Wellenlänge des emittierten Lichtes abweichende Angaben. Werte um 308 nm sind häufig vertreten ([Gay74, Hab00] mit 308 nm und [WLTS98] mit 307.8 nm). Büchner gibt jedoch 306.7 nm Wellenlänge an mit Verweis auf den Übergang im (0,0) Band des 2Σ – 2Π Übergangs des OH\* Moleküls [Büc92, KB02].

Paschereit und Polifke [PP98] verwendeten räumlich aufgelöste OH\* Chemilumineszenz um das dynamische Verhalten vorgemischter Flammen in Gasturbinen zu untersuchen.

Najm *et al.* [NMW98] untersuchten 1998 in einer experimentellen Studie die Korrelation zwischen OH\* Chemilumineszenz sowie laserinduzierter Lumineszenz von CH\*, CH und HCO und der Wärmefreisetzung in Flammen. Generell zeigt sich, dass das Formyl-Radikal HCO ein ausgezeichneter Indikator für die Wärmefreisetzung in Methanflammen ist. Wie aus der Reaktion (6.2) und dem Reaktionsdiagramm in Abbildung 6.1 hervorgeht, ist HCO direkt an der Bildung von OH\* beteiligt. OH\* ist daher ein guter Indikator für die Konzentration von HCO [HVSK00b]. Wie Najm [NMW98] nachweisen und erklären konnte bricht die Proportionalität der Chemilumineszenz im Fall von CH\* mit der Wärmefreisetzung in Flammen mit starker Krümmung und hohen Scherraten nahe der mageren Löschgrenze zusammen. Im Unterschied dazu ist die Konzentration von OH\* auch unter diesen Bedingungen noch proportional zu der Wärmefreisetzung.

Haber [Hab00, HVSK00b, HVSK00a] diskutiert den Zusammenhang zwischen der Chemilumineszenz von OH\* und CH\* und der Wärmefreisetzung von eingeschlossenen Bunsenbrenner-Flammen. Haber weist für konstante Luftzahlen einen linearen Zusammenhang zwischen der OH\* und CH\* Chemilumineszenz und dem Massendurchsatz nach.

Khanna [Kha01, KVS02] stützt sich bei seinen Untersuchungen zum dynamischen Verhalten laminarer und turbulenter vollständig und teilweise vorgemischter Methanflammen auf Habers Studie [Hab00] und geht ebenfalls von einem linearen Zusammenhang zwischen Chemilumineszenz und Wärmefreisetzung aus.

Für die Anwendung von OH\* Chemilumineszenz auf die Bestimmung von Flammentransferfunktionen kann insbesondere aufgrund der Arbeiten von Najm *et al.* [NMW98] und Haber [Hab00, HVSK00b, HVSK00a] ein linearer Zusammenhang zwischen der OH\* Chemilumineszenz und der Wärmefreisetzung in der Flamme angenommen werden.

## 6.2 Bestimmung von Flammentransferfunktionen

Als Flammentransferfunktion soll im Weiteren das Übertragungsverhalten zwischen der akustischen Schnelle  $u'$  an der Brennerdüse und der aus der Intensität der OH\* Chemilumineszenz Gesamtstrahlung der Flamme ermittelten Wärmefreisetzung  $Q'$  bezeichnet werden.

Um eine dimensionslose Darstellung der Flammentransferfunktion zu erhalten, wurde das Übertragungsverhalten  $Q'/u'$  mit der mittleren Brennerleistung  $\bar{Q}$  und der flächengemittelten mittleren Düsengeschwindigkeit  $\bar{u}$

nach Gleichung (6.5) normiert. Wird der gesamte zugeführte Brennstoff in der Flamme verbrannt, geht der Amplitudengang der Transferfunktion  $T_Q(\omega)$  für den Grenzfall niedriger Frequenzen  $\omega \rightarrow 0$  unter dieser Normierung gegen den Wert Eins [Len80].

$$T_Q(\omega) = \frac{Q'(\omega)}{u'(\omega)} \frac{\bar{u}}{\bar{Q}} \quad (6.5)$$

Bei der experimentellen Bestimmung der  $u'$ - $Q'$  Flammentransferfunktion wurden die Schnelleffluktuation  $u'(\omega)$  am Brennermund mit der daraus resultierenden Schwankung der Wärmefreisetzung  $Q'(\omega)$  bei unterschiedlichen Frequenzen verglichen. Die Bestimmung der Schnelle am Brennermund erfolgte mit einer *Hitzdrahtsonde* (CTA<sup>54</sup>) [Lom86, Bru95, BR02] die, durch einen Kanal eingeschoben, eine direkte Bestimmung der Schnelle in der Brennerdüse an einer Position etwa 10 Millimeter vor der Brennkammerstirnwand ermöglichte.

Eine Hitzdrahtsonde besteht aus einem wenige  $\mu\text{m}$  dünnen Draht. Aufgrund der Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands des Drahtes kann dieser durch eine spezielle Brücke auf einer konstanten Temperatur von einigen hundert Grad Celsius, also deutlich über der Temperatur des vorbeiströmenden Mediums, gehalten werden. Das vorbeiströmende flüssige oder gasförmige Medium wirkt kühlend auf die Sonde. Die Kühlleistung des Mediums ist stark von der Strömungsgeschwindigkeit abhängig. Dadurch ist es möglich, über eine Bestimmung des Heizstromes durch den Draht Rückschlüsse auf die Strömungsgeschwindigkeit in der Umgebung der Sonde zu ziehen. Durch die extreme Dünne des verwendeten Drahtes hat das System eine geringe thermische Trägheit, die es erlaubt dynamische Vorgänge bis zu Frequenzen von mehreren kHz aufzulösen.

Die Wärmefreisetzung konnte durch eine im Frequenzbereich der OH\* Chemilumineszenz der Flamme empfindliche *Diode* ermittelt werden. Die spektrale Empfindlichkeit der Diode vom Typ Infineon SFH 530 wird in Abbildung 6.2 dargestellt. Die Diode SFH 530 wurde speziell für die Flammenüberwachung in Ölbrennern entwickelt und weist daher eine besonders hohe spektrale Empfindlichkeit im Bereich zwischen 290 nm und 350 nm auf.<sup>55</sup> Die OH\* Chemilumineszenz der Flamme liegt in der Mitte dieses Gebiets bei 308 nm. Die Empfindlichkeit der Diode fällt im sichtbaren und infraroten Bereich relativ dazu um einen Faktor  $10^4$  ab.

<sup>54</sup>) kurz für **C**onstant **T**emperatur **A**nemometry

<sup>55</sup>) Das optische Verhalten der Diode SFH 530 wird durch die Kombination aus einer UV-durchlässigen Sammellinse, einem UV-Filterglas und einer Si-Fotodiode mit hoher Empfindlichkeit für UV-Strahlung bestimmt. [Osr00]

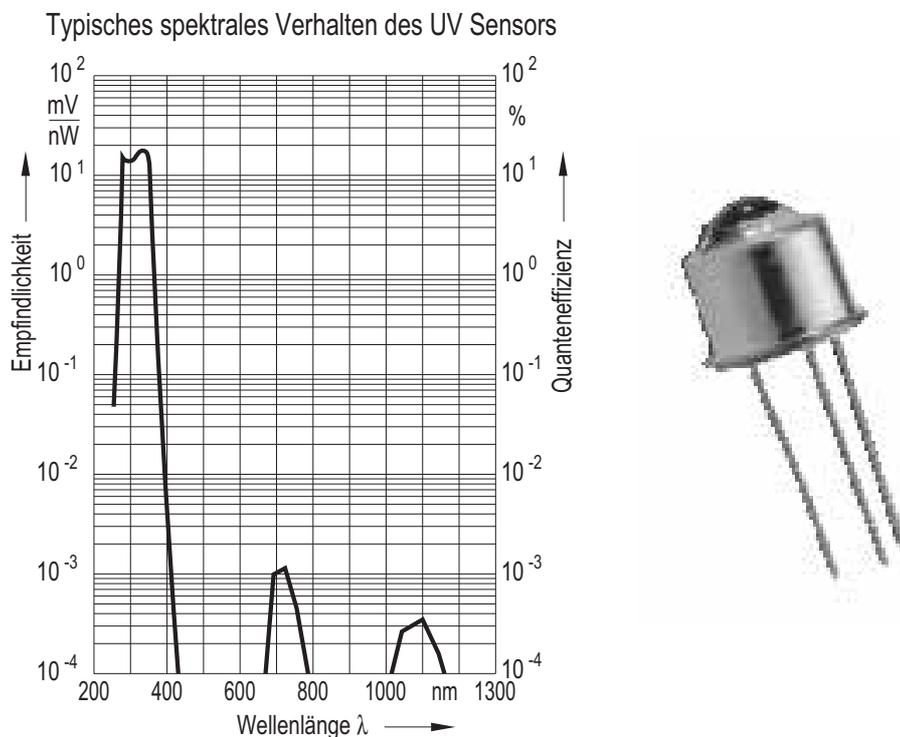


Bild 6.2: Die spektrale Empfindlichkeit der UV-Diode SFH 530 weist bei ungefähr 310 nm ein Maximum im Bereich der OH\* Emission auf.

Die Ergebnisse der Messungen mit der Diode SFH 530 wurden mit jenen eines *Hamamatsu Photomultipliers*, der mit einem ebenfalls auf die OH\* Chemilumineszenz angepassten engbandigen UG11 Filter ausgestattet war, verglichen. Im untersuchten Frequenzbereich konnten keine systematischen Unterschiede festgestellt werden.

Sowohl CTA Sonde als auch UV Diode müssen vor jeder Messung kalibriert werden. Dazu wird die Leistung des Brenners im Bereich zwischen 20 und 100 kW in Schritten von 10 kW variiert. Die Spannungssignale von Hitzdraht und UV Diode werden mit 10 kHz Samplingrate aufgezeichnet und über den Zeitraum von einer Sekunde gemittelt. Die so ermittelten mittleren Signalspannungen werden, wie aus Abbildung 6.3 ersichtlich, gegen die bekannte Brennerleistung und die aus dem Massenstrom errechnete mittlere Strömungsgeschwindigkeit in der Brennerdüse aufgetragen. In Bezug auf die Kalibration der Hitzdrahtsonde musste aufgrund der räumlichen Nähe zur Verbrennungszone vorweg überprüft werden, ob die von der Flamme emittierte Strahlung einen Einfluss auf die Geschwindigkeitsmessung am Hitz-

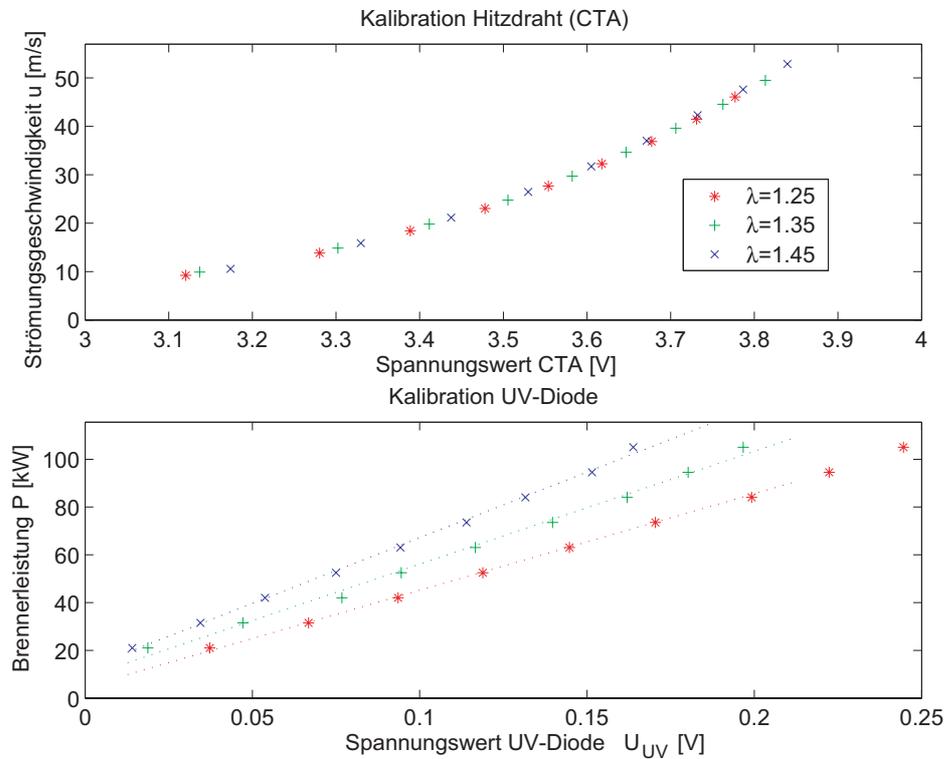


Bild 6.3: Kalibrationskurven von Hitzdraht und UV-Diode.

draht hat. Ein derartiger Einfluss konnte experimentell nicht nachgewiesen werden.

Die Kalibrationskurve der CTA Sonde wird in guter Näherung durch ein Polynom vierten Grades approximiert.<sup>56)</sup> Die Spannungswerte der Hitzdrahtsonde müssen aufgrund des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen Hitzdrahtspannung und Strömungsgeschwindigkeit am Hitzdraht vor der Transformation in den Frequenzbereich in Geschwindigkeiten umgerechnet werden.

Dazu werden zuerst aus einer Kalibrationsmessung die Koeffizienten eines Ausgleichspolynoms vierten Grades bestimmt. Die Koeffizienten müssen tageweise ermittelt werden, da der Draht nach längerem Gebrauch oxidiert. Dieser Alterungsprozess äußert sich in einer Erhöhung des elektrischen Widerstands womit eine Versprödung des Drahtes einhergeht. Durch die Veränderung des Widerstands verschiebt sich die Kalibrationskurve der

<sup>56)</sup> Für die Spannung  $U$  an einem mit der Geschwindigkeit  $u$  umströmten Hitzdraht lässt sich die Beziehung  $U^2 = U_0^2 + Cu^{0.5}$  ableiten.  $U_0$  stellt den Spannungswert bei Strömungsgeschwindigkeit Null dar,  $C$  ist eine Konstante. [BR02, Lom86, Kin14]

CTA Sonde. Hinzu kommt, dass die Einbauposition der Sonde im TD<sup>1</sup> Brenner konstruktiv nicht hinreichend genau festgelegt werden konnte, was sich bei wiederholtem Einbau der Sonde beispielsweise in einem leicht veränderten Anströmwinkel oder einem höheren Abstand zur Düseninnenwand auswirken kann. Sind die Koeffizienten der Kalibration einmal bekannt, können die Spannungswerte der CTA Messung problemlos in Geschwindigkeiten umgerechnet werden.

Die Spannungswerte an der UV Diode skalieren nach Abbildung 6.3 für konstante Luftzahl linear mit der Brennerleistung.<sup>57)</sup> Die Luftzahlabhängigkeit der Kalibrationskurven spiegelt die Temperaturabhängigkeit der OH\* Emissionsraten wieder<sup>58)</sup>. Unter Ausnutzung der Linearitätseigenschaften der Fouriertransformation ist es möglich die Spannungswerte direkt zu transformieren und erst anschließend mit der linear interpolierten Kalibrationskurve der Diode in Leistungsschwankungen umzurechnen. Diese Vorgehensweise wurde gewählt, da dadurch Rechenzeit am Messrechner eingespart werden kann, was wiederum die Messung beschleunigt.

Bei der Messung der Transferfunktion wurde, analog zum Vorgehen bei der Bestimmung von Transfermatrizen, unter Verwendung des Sensorsignals der Sirene ebenfalls über mehrere Messungen pro Anregungsfrequenz gemittelt. Durch die geringere Störanfälligkeit der Auswerterroutine waren bei diesem Verfahren allerdings bereits 20 Einzelmessungen pro Frequenz ausreichend.

### 6.3 Flammentransferfunktionen des TD<sup>1</sup> Brenners

Beim TD<sup>1</sup> Brenner handelt es sich um einen drallstabilisierten Vormischbrenner mit Zentrallanze. Wie bei diesem Brennertyp üblich, bildet das Strömungsfeld in der Brennkammer eine innere Rezirkulationszone um die Mittelachse der Brennkammer und eine äußere Rezirkulationszone in den stirnwandseitigen Ecken der Brennkammer aus. Durch die Ausbildung der Rückströmzonen wird einströmendes Gemisch mit heißen Verbrennungsgasen vermischt und aufgeheizt. Im Normalbetrieb bildet sich eine stabile Flamme in der Scherzone zwischen dem inneren und äußeren Rückströmgebiet aus. Die Drallzahl  $S$ , Leistung  $P$  und Luftzahl  $\lambda$  des Betriebspunktes haben über die Dynamik der Rückströmzone einen wesentlichen Einfluss auf die Einmischung von Heißgas und Zwischenprodukten. Das Strömungsfeld in der Brennkammer und damit die Position und Geometrie der Verbrennungszone

---

<sup>57)</sup> Die hier nicht gezeigte Kalibrationskurve des Photomultipliers weist dieselbe lineare Charakteristik auf.

<sup>58)</sup> vergleiche [Hab00]

reagieren auf Veränderungen dieser Größen.

Die Resultate für das kalte Strömungsfeld aus Abbildung C.1 in Appendix C legen nahe, dass von allen Parametern der Einfluss der Drallzahl am stärksten ist. Deshalb wurde in der vorliegenden Parameterstudie die Drallzahl von allen Größen über den weitesten Bereich variiert. Eine Änderung der Leistung und der Luftzahl hat ebenfalls Auswirkungen, so dass die Variation beider Parameter sinnvoll erscheint.

Ausgehend von der Basiskonfiguration 4016 des Brenners mit der Luftzahl  $\lambda = 1,35$  und der Brennerleistung 60 kW wurden insgesamt 36 Frequenzgänge im Bereich von 10 bis 320 Hz gemessen. Das heißt für vier Schlitzlängen  $S = 8, 12, 16$  und 32 mm jeweils die Luftzahlen  $\lambda = 1,25, 1,35, 1,45$  bei den Verbrennungsleistungen  $P = 50, 60, 70$  kW. Die dabei gewonnenen Ergebnisse der Variation von Drall, Leistung und Luftzahl sollen in den folgenden Abschnitten diskutiert werden.

### 6.3.1 Drallvariation

Die Abbildungen 6.4 bis 6.6 stellen die Flammentransferfunktionen des TD<sup>1</sup> Brenners für unterschiedliche Drallzahlen dar. Die Luftzahl liegt in Abbildung 6.5 für alle Messungen bei  $\lambda = 1,35$ . Abbildungen 6.4 und 6.6 stellen im Vergleich dazu Ergebnisse für die Luftzahlen  $\lambda = 1,25$  und  $\lambda = 1,45$  dar. Nebeneinander liegende Graphen zeigen jeweils Amplituden- und Phasengang bei einer Verbrennungsleistung. Bei den oberen beiden Graphen betrug die Verbrennungsleistung jeweils 50 kW, bei den mittleren 60 kW und bei den unteren 70 kW.

Ausgehend von Abbildung 6.5 fällt bei allen Transferfunktionen ein starker Anstieg des Amplitudengangs im Bereich  $Str_D = 0,1$  auf.<sup>59)</sup> Das Maximum der Überhöhung verschiebt sich bei Konfigurationen mit höherer Drallzahl im Graphen leicht nach rechts, hin zu höheren Strouhalzahlen. Neben dem dominanten Hauptmaximum erkennt man im Bereich  $Str_D = 0,3 - 0,5$  einen zweiten, deutlich schwächer ausgeprägten Anstieg. Auch die Position dieser kleineren Überhöhung verschiebt sich für steigende Drallzahlen hin zu höheren Frequenzen.

Die Phasengänge zeigen insbesondere für höhere Drallzahlen im Bereich der ersten Überhöhung des Amplitudengangs einen deutlichen Phasensprung um  $180^\circ$ , der sich im Bereich der zweiten Überhöhung abgeschwächt wieder findet. Interessant sind die positiven Phasenwinkel bei Konfigurationen mit hohem Drall im Bereich bis etwa  $Str_D = 0,1$ . Approximiert man den Phasengang in erster Näherung durch ein Totzeitverhalten, so ergibt sich

<sup>59)</sup>  $Str_D = 0,1$  entspricht bei den vorliegenden Messungen ungefähr einer Frequenz von 60 Hz.

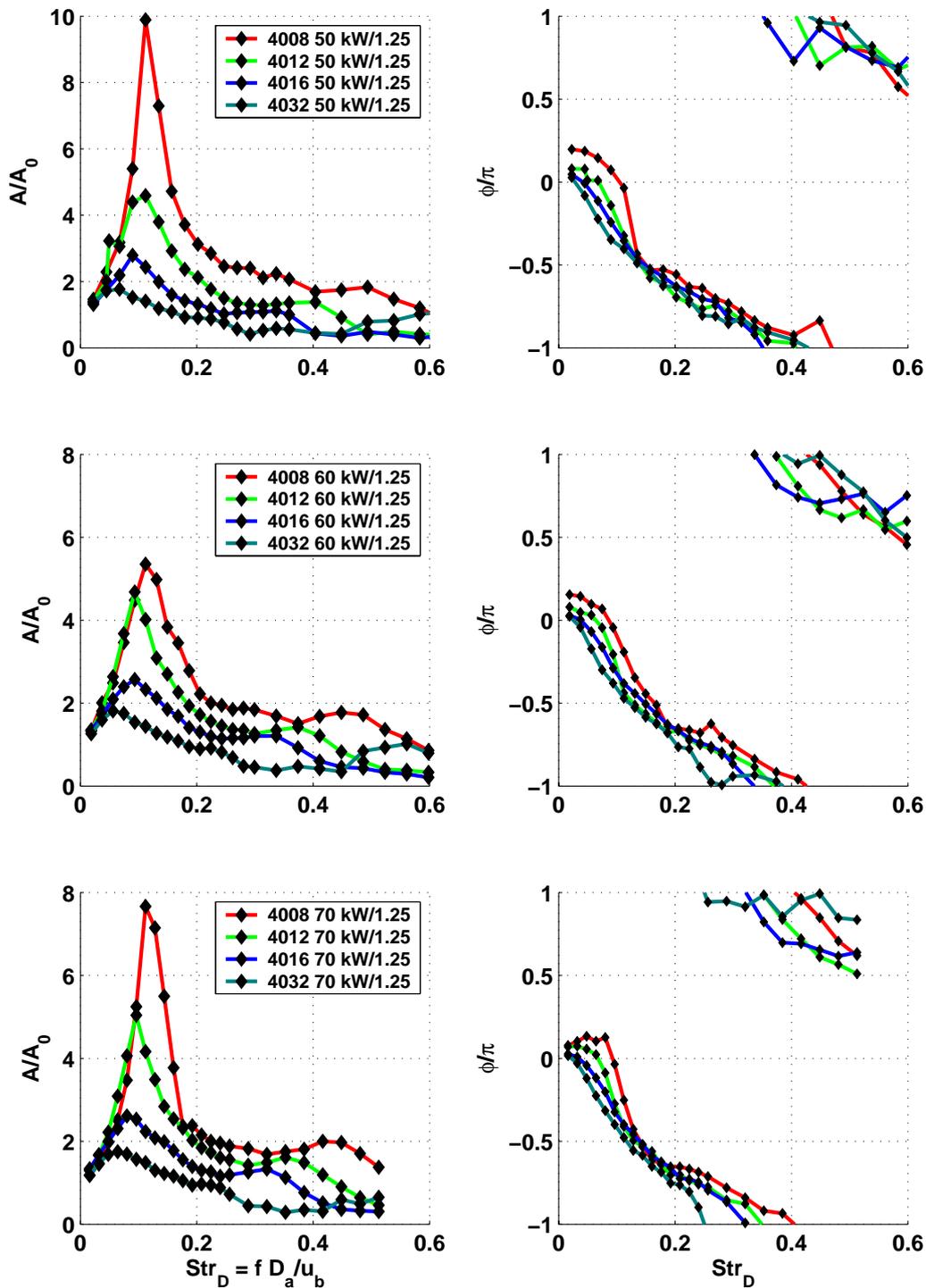


Bild 6.4: Flammentransferfunktionen  $u'-Q'$  des vorgemischten TD<sup>1</sup> Brenners nach Gleichung (6.5) bei Luftzahl  $\lambda = 1,25$  und unterschiedlichen Drallstärken für die Verbrennungsleistungen 50, 60 und 70 kW.

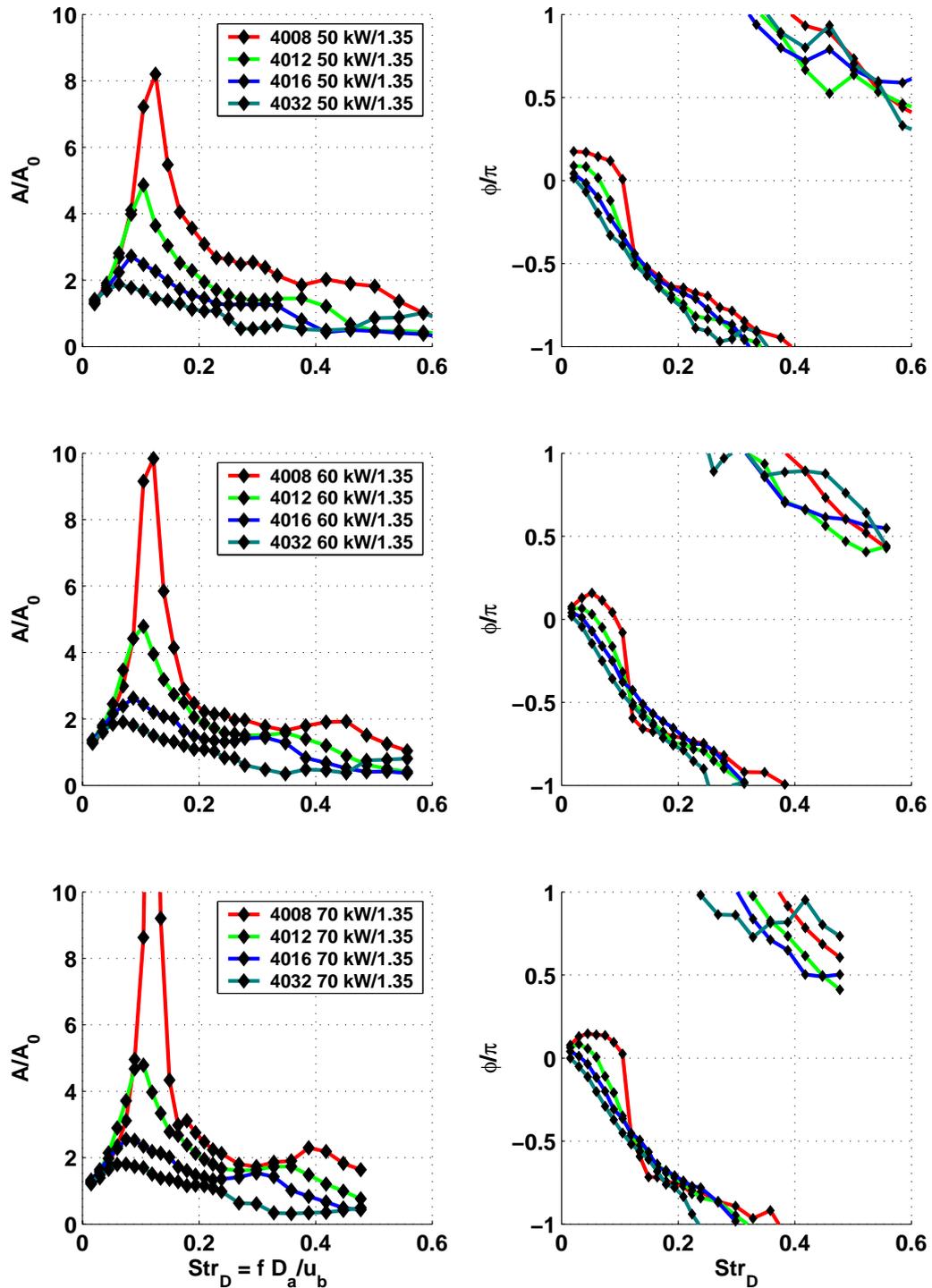


Bild 6.5: Flammentransferfunktionen  $u'-Q'$  des vorgemischten TD<sup>1</sup> Brenners nach Gleichung (6.5) bei Luftzahl  $\lambda = 1,35$  und unterschiedlichen Drallstärken für die Verbrennungsleistungen 50, 60 und 70 kW.

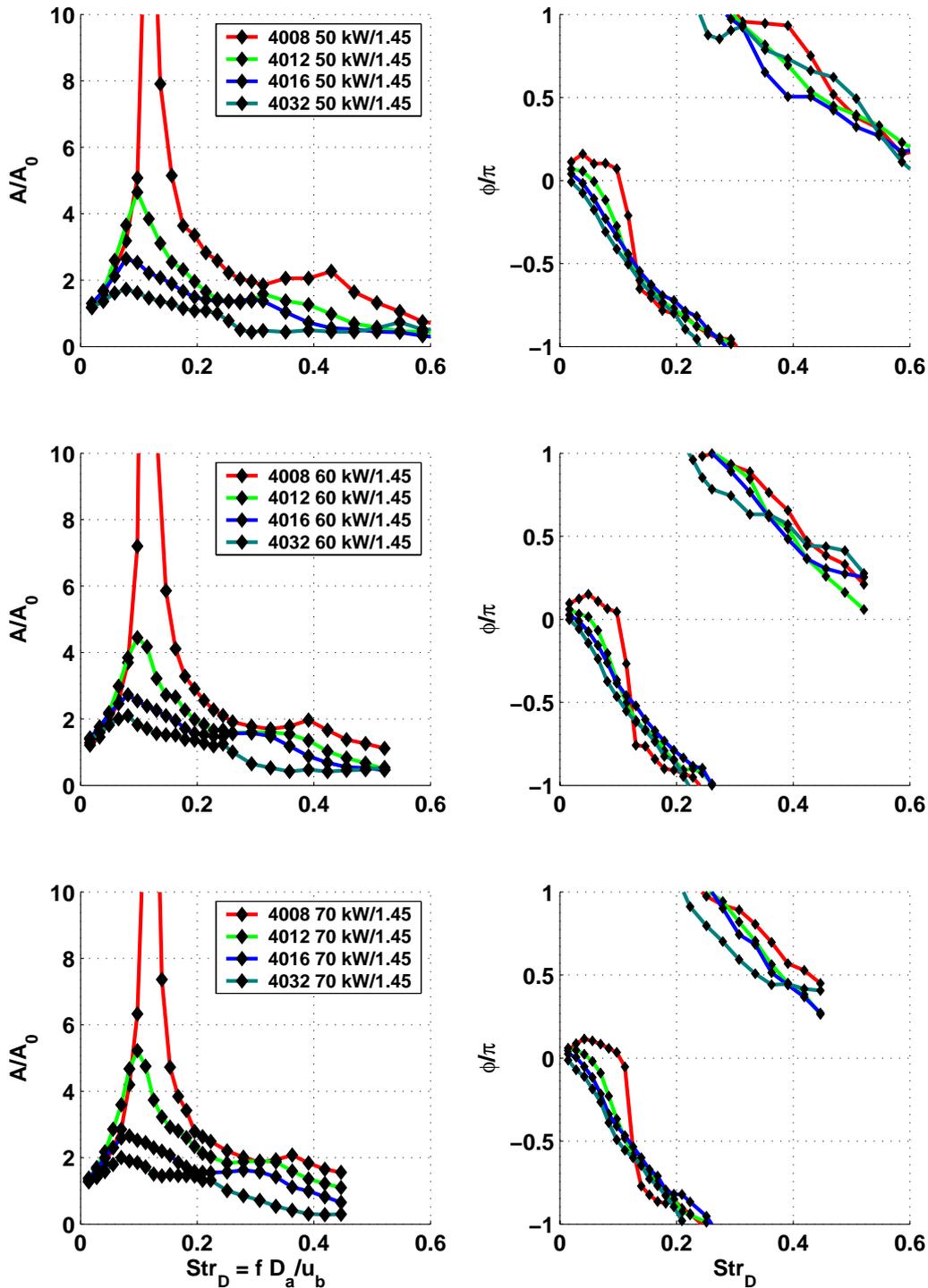


Bild 6.6: Flammentransferfunktionen  $u'-Q'$  des vorgemischten TD<sup>1</sup> Brenners nach Gleichung (6.5) bei Luftzahl  $\lambda = 1,45$  und unterschiedlichen Drallstärken für die Verbrennungsleistungen 50, 60 und 70 kW.

für den Bereich bis etwa  $Str_D = 0.3$  eine globale Totzeit von circa 3 ms, was umgerechnet einer Flammenlänge von ungefähr 1.6 Brennerdurchmessern entspricht.

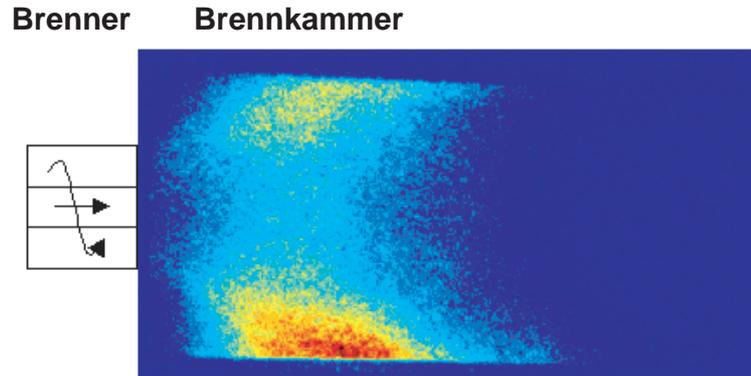


Bild 6.7: Dieses Bild wurde mit einer bildverstärkten Kamera durch einen UG11 Filter aufgenommen. Es zeigt die phasengemittelte OH\* Chemilumineszenz der Drallflamme des TD<sup>1</sup> Brenners. Am linken Bildrand ist die Brennerdüse maßstabsgetreu eingezeichnet.

Abbildung 6.7 zeigt eine phasengemittelte Aufnahme der lokalen OH\* Chemilumineszenz am TD<sup>1</sup> Brenner. Am linken Bildrand wurde die Brennerdüse maßstabsgetreu eingezeichnet. Es ist gut zu erkennen, dass der, durch die gelben und roten Bereiche gekennzeichnete, Schwerpunkt der Strahlungsintensität tatsächlich etwa 1.5 Düsendurchmesser stromab der Brennerdüse liegt.

### 6.3.2 Leistungsvariation

Ein Vergleich der Transferfunktionen für identische Drall- und Luftzahl bei unterschiedlichen Verbrennungsleistungen zeigt wie in Abbildung 6.8 ersichtlich, dass die Verbrennungsleistung auf den Verlauf der Transferfunktion wesentlich schwächer Einfluss nimmt als der Drall. Dennoch lassen sich einige deutliche Trends identifizieren. Auffallend ist eine für hohen Drall stärker ausgeprägte Verschiebung der ersten und zweiten Maxima hin zu höheren Strouhalzahlen für steigende Verbrennungsleistung. Dabei verändern sich die Positionen der Maxima zueinander nicht, das Verhältnis der Zentralfrequenzen der Maxima  $\omega_{1,max}/\omega_{2,max}$  bleibt erhalten.

Im Phasengang ist diese Verschiebung besonders an den Phasensprüngen des ersten Maximums zu erkennen. Weiters zeigt sich eine leichte Abflachung

des Phasengangs für höhere Verbrennungsleistungen, was auf größere Verzugszeiten hindeutet. Dieser Effekt ist allerdings nur sehr schwach ausgeprägt, so dass man davon ausgehen kann, dass der Flammenschwerpunkt sich im untersuchten Leistungsbereich nur unwesentlich verschiebt.

### 6.3.3 Luftzahlvariation

Vergleicht man die Ergebnisse aus Abbildung 6.9 so zeigt sich, dass sich die Transfermatrizen für unterschiedliche Luftzahlen nur sehr wenig unterscheiden. Bei der Konfiguration 4008 mit dem höchsten Drall erkennt man eine deutliche Abhängigkeit der Höhe des ersten Maximums von der Luftzahl. Die Lage des Maximums bleibt unverändert. Bei schwächer verdrallten Flammen zeigt sich diese Systematik bereits nicht mehr. Bei den zweiten Maxima erkennt man für alle Drallzahlen mit steigender Luftzahl einen Anstieg im Amplitudengang.

Die Phasengänge der Übertragungsfunktionen unterscheiden sich bei niedrigen Strouhalzahlen nur geringfügig, im Bereich um das zweite Maximum ist allerdings eine deutliche Aufsteilung des Phasenverlaufs für höhere Luftzahlen erkennbar.

### 6.3.4 Zusammenfassung der Parameterstudie Flammentransferfunktionen

Die Ergebnisse der Parameterstudie für Flammentransferfunktionen am TD<sup>1</sup> Brenner kann man folgendermaßen zusammenfassen:

- Im Amplitudengang aller Flammentransferfunktionen sind ein dominantes Hauptmaximum bei  $Str = 0.1$  sowie Nebenmaxima im Bereich  $Str = 0.3 - 0.5$  zu erkennen. Im Bereich des Hauptmaximums zeigt sich im Phasengang ein Sprung von  $180^\circ$ , der sich bei den Nebenmaxima stark abgeschwächt wieder findet. Die Amplitude und die Zentralfrequenzen der Maxima steigen mit wachsender Drallzahl an.
- Die maßgebliche Größe für den Verlauf der Transferfunktion und hierbei insbesondere für die Höhe des Hauptmaximums stellt die Drallzahl am Brenneraustritt dar. Für hohe Drallzahlen tritt der resonante Charakter des Systems besonders ausgeprägt hervor. Brennerleistung und Luftzahl spielen im untersuchten Bereich im Vergleich zum Drall nur eine untergeordnete Rolle.
- Leitet man aus dem Phasengang der Flammentransferfunktionen ein Totzeitverhalten der Flamme ab, so erhält man eine globale Verzugs-

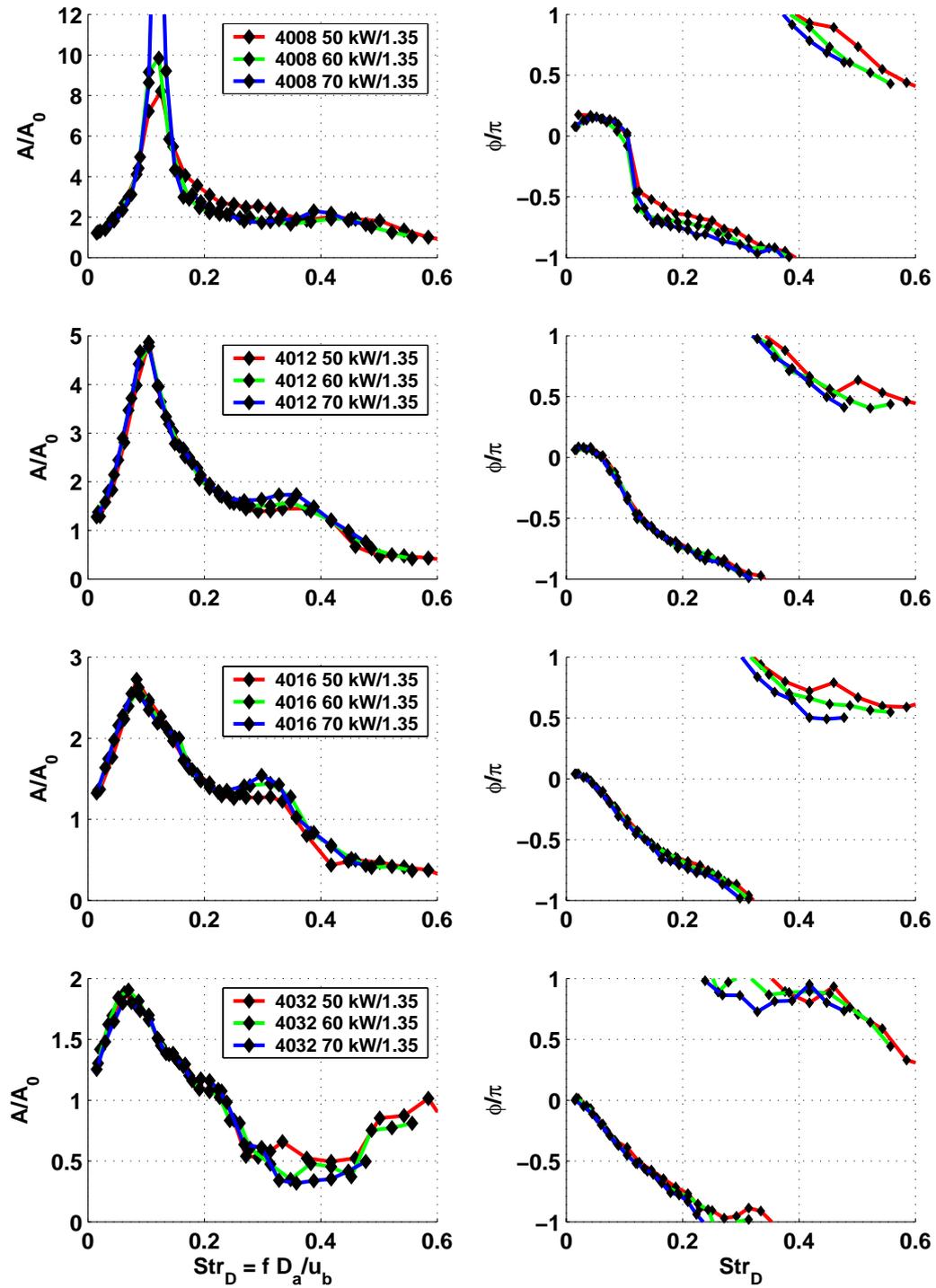


Bild 6.8: Flammentransferfunktionen  $u'-Q'$  des vorgemischten TD<sup>1</sup> Brenners nach Gleichung (6.5) bei Luftzahl  $\lambda = 1,35$  und unterschiedlichen Drallstärken für die Verbrennungsleistungen 50, 60 und 70 kW.

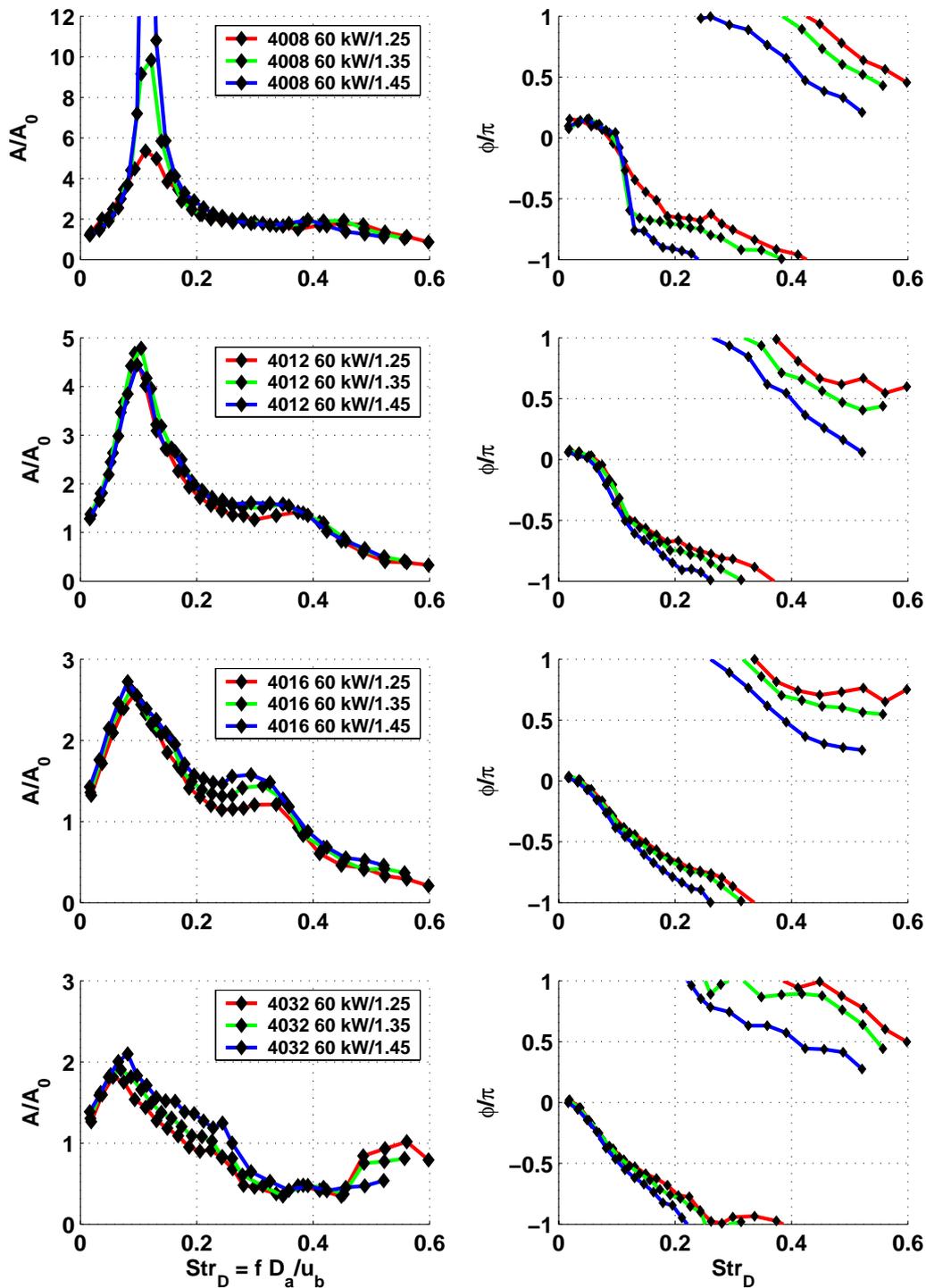


Bild 6.9: Flammentransferfunktionen  $u'-Q'$  des vorgemischten TD<sup>1</sup> Brenners nach Gleichung (6.5) für die Luftzahlen  $\lambda = 1.25, 1.35$  und  $1.45$  bei der Leistung  $P = 60$  kW für unterschiedliche Drallstärken

zeit von etwa 3 ms. Dieser Wert ist realistisch, da er etwa den konvektiven Laufzeiten zwischen Brenneraustritt und Flammenschwerpunkt entspricht.

- Aus den Flammentransferfunktionen lässt sich weiters ableiten, dass die Verbrennungsleistung nur einen geringen Einfluss auf die Flammenlänge besitzt. Die Länge der Flamme vergrößert sich demnach bei steigender Leistung nur unwesentlich. Einen wesentlich stärkeren Einfluss auf die Flammenlänge übt die Drallzahl aus. Bei steigender Drallzahl wird die Flamme kompakter.

In der Literatur finden sich einige theoretische und experimentelle Arbeiten zu laminaren Vormischflammen, die sich nur schlecht mit den Resultaten für den TD<sup>1</sup> Brenner vergleichen lassen. Zu den Untersuchungen über vorgemischte Drallflammen, die vergleichbare Systeme untersuchen, zählen die Arbeiten von Khanna *et al.* [Kha01, KVS02] und Kühlsheimer *et al.* [KB01, KB02]. Khanna und Kühlsheimer untersuchten an ähnlichen Drallbrennern das dynamische Verhalten vorgemischter, drallstabilisierter Flammen. Khannas Arbeiten behandeln hauptsächlich die Unterschiede zwischen den Flammentransferfunktionen vollständig und teilweise vorgemischter Flammen. Kühlsheimer vergleicht Strahl- und Drallflammen und untersucht zudem die Effekte von Ringwirbeln, die bei hohen Pulsationsgraden auftreten. Beide Autoren verwendeten zur Bestimmung der Flammentransferfunktion die Chemilumineszenz von OH\*, die mit Photomultipliern aufgezeichnet wurde. Die Bestimmung der Schnelle erfolgt bei Khanna mit einer Zweimikrofonmethode, während Kühlsheimer eine Hitzdrahtsonde einsetzt. In beiden Arbeiten zeigen sich die für Drallflammen typischen Überhöhungen in den Flammentransferfunktionen, die auch am TD<sup>1</sup> Brenner beobachtet wurden.

Obwohl die Ergebnisse qualitativ übereinstimmen, kommen Khanna und Kühlsheimer zu unterschiedlichen Schlussfolgerungen. Khanna erklärt die Überhöhungen der Flammentransferfunktionen durch eine Wechselwirkung der Flamme mit abklingenden Wellen, die beim Durchgang ebener Wellen durch die Flammenfront entstehen sowie aus Effekten des akustischen Nahfelds. Khanna argumentiert folgendermassen:

Prior research [KS98, LZ98] has shown that the planar waves that are incident on a flame, do not remain planar within the reaction volume, but need to be treated as spherical waves. Interaction of the spherical acoustic wave with the temperature and density gradients present in the reaction volume, and the presence of a sudden area change in the flow direction result in the

generation of evanescent waves in the radial and azimuthal direction. These evanescent waves decay in magnitude along the axial direction of the combustor and are primarily responsible for the generation of a travelling wave effect, as is seen from the images. It should be also noted that they are not present upstream and downstream of the reaction zone due to the absence of temperature gradients. Thus, the  $u'$  measurement technique used in the present research which records the velocity perturbation upstream of the flame, cannot account for the presence of these evanescent waves, although their effect on the heat release rate was measured by the OH\* chemiluminescence. The above discussion leads to the conclusion that near field acoustic effects, which are at least two dimensional in nature, (axi-symmetric), are responsible for the excessive increase in the OH\* chemiluminescence and they need to be accounted for in the systems level description of the combustion process, so as to accurately predict the occurrence of thermo-acoustic instabilities [Kha01].

Kühlsheimer kommt für eingeschlossene Drallflammen zu einem anderen Schluss. Bei gekühlten Brennkammern sinkt durch die Wärmeverluste an den Brennkammerwänden die Temperatur in der äußeren Rezirkulationszone gegenüber jener in der inneren Rückströmzone ab. Die Überhöhung in den Flammentransferfunktionen kommt nach Kühlsheimer dadurch zustande, dass als Folge der Pulsationen ein grösserer Anteil des Brennstoffs in die innere Rezirkulationszone gelangt als unter Gleichgewichtsbedingungen. Dort findet die Verbrennung unter höheren Temperaturen statt, was aufgrund der starken Temperaturabhängigkeit zu einer überproportionalen Verstärkung des Chemilumineszenz Signals führt. Kühlsheimer vergleicht die Resultate für offene und eingeschlossene Flammen und zeigt, dass die Überhöhung nur für eingeschlossene Flammen auftritt. Bei seiner Argumentation stützt er sich auf Untersuchungen von Büchner [BK97], der anhand von Experimenten mit Tracergas in reaktionsfreien Drallströmungen einen derartigen Konzentrationsanstieg in der inneren Rezirkulationszone nachweisen konnte. Die Wärmeverluste im Bereich der äußeren Rezirkulationszone sind beim TD<sup>1</sup> Brenner nicht zu vernachlässigen, da die Brennkammerstirnwand über eine effektive Wasserkühlung verfügt. Der angesprochene Effekt sollte sich bei höheren Drallzahlen verstärken, wodurch sich Anstieg der Amplituden in den Flammentransferfunktionen erklären lässt.

Bei höheren Frequenzen spielen zusätzlich Ringwirbel eine entscheidende Rolle, die durch Wirbelablösungen am Brennermund entstehen. Ringwirbel wurden am TD<sup>1</sup> Brenner bei hohen Pulsationsamplituden zwar beobachtet, es wurde jedoch experimentell nachgewiesen, dass sie bei den geringen Amplituden der Anregung keine Rolle spielen. Dies wird auch durch den Vergleich

mit Untersuchungen zur kritischen Pulsationsamplitude für das Auftreten von Ringwirbeln in Drallbrennern bestätigt [KB02, Leu02].

Eine restlose Klärung der Mechanismen in Drallflammen, die zu der beobachteten Form der Flammentransferfunktionen beitragen ist zum derzeitigen Zeitpunkt nicht möglich. Unveröffentlichte Ergebnisse von instationären Simulationen mit kommerziellen Strömungsmechanikpaketen von Gentemann [Gen03b] zeigen allerdings, dass die gemessenen Flammentransferfunktionen in Rechnungen näherungsweise reproduziert werden können. Da die Details der Brennkammerströmung und Einflüsse der Wandkühlung in den Rechnungen nur grob modelliert werden können, legt dies die Vermutung nahe, dass die beobachtete Form der Flammentransferfunktionen am TD<sup>1</sup> Brenner das grundsätzliche Verhalten von eingeschlossenen, vorgemischten Drallflammen widerspiegelt.

## 6.4 Transfermatrix der kompakten Flamme

In [SPP99] stellen Schuermans *et al.* ein analytisches Modell vor, mit dem die Transfermatrix einer kompakten Flamme unter vereinfachenden Annahmen direkt aus einer experimentell bestimmten Transferfunktion berechnet werden kann [Gen03a].

Das Modell beschreibt vorgemischte Flammen in der eindimensionalen Strömung eines idealen, kompressiblen, isentropen Gases. Die Flammenhaut wird als Diskontinuität von vernachlässigbarer Dicke angesetzt, die Wärme in die Strömung einbringt. Von diesen Annahmen ausgehend, kann man die Rankine-Hugoniot Beziehungen für Druck und Schnelle über die Flamme ableiten [SPP99, Chu53].

Vernachlässigt man Terme von der Ordnung  $M^4$  und höher so erhält man für das Verhältnis des Druckes auf beiden Seiten der Diskontinuität

$$\frac{p_h}{p_c} = 1 - (\gamma - 1) \frac{Q}{p_c u_c} M_c^2 \quad (6.6)$$

Für die Geschwindigkeit leitet man unter Vernachlässigung von Termen der Ordnung  $M^2$  und höher die Beziehung (6.7) ab.

$$\frac{u_h}{u_c} = 1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{Q}{p_c u_c} \quad (6.7)$$

Dabei bezeichnen die Indices  $c$  und  $h$ , die entsprechend den Größen der Kalt- bzw. Heißgasseite. Nun linearisiert man die Gleichungen (6.6) und (6.7), indem man wie in Gleichung (2.1) und (2.1) die absoluten Größen als Summen einer Schwankungsgröße und eines zeitlich konstanten Mittelwerts ansetzt und leitet für die interessierenden Schwankungsgrößen die Beziehungen

$$p'_h = p'_c - \left(\frac{T_h}{T_c} - 1\right) \rho_c u_c^2 \left(\frac{u'_c}{u_c} + \frac{Q'}{Q}\right) \quad (6.8)$$

und

$$u'_h = u'_c - \left(\frac{T_h}{T_c} - 1\right) u_c \left(\frac{Q'}{Q} - \frac{p'_c}{p_c}\right) \quad (6.9)$$

ab. Aus diesen Beziehungen folgt schließlich Gleichung (6.10) als analytisches Modell der Transfermatrix  $\mathbf{T}_{pu}$  der kompakten Flamme [Gen03a]. Neben der Flammentemperatur  $T_h$  werden für die Auswertung von (6.10) nur die relativ einfach bestimmbar Grössen der Kaltgasseite benötigt. Die komplexe Dynamik der Flamme geht in das Modell in Form der experimentell bestimmten Flammentransferfunktion  $T_Q(\omega)$  nach Gleichung (6.5) ein.

$$\mathbf{T}_{pu} = \begin{pmatrix} 1 & -\left(\frac{T_h}{T_c} - 1\right) M_c (1 + T_Q(\omega)) \\ \left(1 - \frac{T_h}{T_c}\right) \frac{u_c \rho_c c_c}{p_c} & 1 + \left(\frac{T_h}{T_c} - 1\right) T_Q(\omega) \end{pmatrix} \quad (6.10)$$

## 6.5 Hybride Charakterisierung von Brenner und Flamme

Durch Kombination der experimentell bestimmten Transfermatrix  $\mathbf{T}_{BR}$  des kalten Brenners mit einer nach Gleichung (6.10) aus der Flammentransferfunktion  $T_Q(\omega)$  modellierten Transfermatrix  $\mathbf{T}_{FL}$ , erhält man in erster Näherung die kombinierte Transfermatrix  $\mathbf{T}_{ges}$  von Brenner und Flamme. Die Transfermatrix  $\mathbf{T}_{ges}$  kann auf direktem Weg nur sehr aufwändig durch Experimente mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden. Für die Bestimmung der kalten Transfermatrix  $\mathbf{T}_{BR}$  und der Transferfunktion  $T_Q(\omega)$  existieren jedoch die in dieser Arbeit besprochenen Methoden, die eine ausreichende Genauigkeit besitzen.

Die Kombination aus gemessener Brennertransfermatrix und umgerechneter Flammentransfermatrix wollen wir in diesem Zusammenhang *hybride* Bestimmung der Transfermatrix von Brenner und Flamme nennen. In diesem Abschnitt sollen nun Ergebnisse einer direkten Messung der Transfermatrix  $\mathbf{T}_{ges}^{exp}$  mit der hybrid bestimmten Transfermatrix  $\mathbf{T}_{ges}^{hyb}$  verglichen werden.

Auf direktem Weg wurde die Transfermatrix  $\mathbf{T}_{ges}^{exp}$  der Brennerkonfiguration 3632 bei einer Verbrennungsleistung von 60 kW bei der Luftzahl 1.4 untersucht. Für die Berechnung der hybrid bestimmten Transfermatrix

$\mathbf{T}_{ges}^{hyb}$  werden die kalte Brennertransfermatrix  $\mathbf{T}_{BR}$  und die Flammentransferfunktion  $T_Q(\omega)$  benötigt. Abbildung 6.10 zeigt die experimentell bestimmten Flammentransferfunktionen der Brennerkonfiguration 3632 für die Luftzahlen 1.25, 1.35 und 1.45. Aufgrund der grossen Ähnlichkeit der Flammentransferfunktionen für die Luftzahlen 1.35 und 1.45 kann die benötigte Flammentransferfunktion für die Luftzahl 1.40 durch Interpolation der Messdaten berechnet werden.

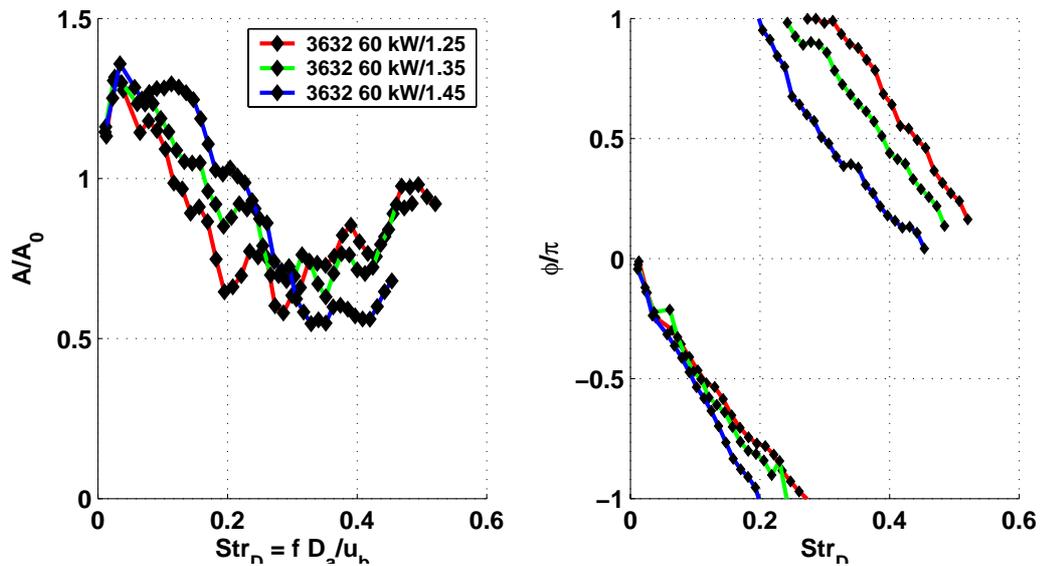


Bild 6.10: Flammentransferfunktion der Konfiguration 3632 für eine Verbrennungsleistung von 60 kW und unterschiedliche Luftzahlen 1.25, 1.35 und 1.45.

Transformiert man diese nach Gleichung (6.10), so erhält man die Flammentransfermatrix aus Abbildung 6.11. Diese Kombiniert man anschließend mit der Transfermatrix des Brenners, und kontrahiert das Ergebnis nach Gleichung (D.23) auf identische Referenzebenen  $\mathcal{R}_u = \mathcal{R}_d$  an der Stelle  $x = 0$ . Abbildung 6.12 zeigt einen Vergleich dieser hybrid bestimmten Transfermatrix mit einem Messergebnis aus einer direkten experimentellen Bestimmung der Transfermatrix von Brenner und Flamme. Leider ist die Streuung bei der Direktmessung der Transfermatrix von Brenner und Flamme sehr hoch und ein Vergleich gestaltet sich daher schwierig.

Die nach den beiden genannten Verfahren ermittelten Transfermatrizen weisen bereichsweise Ähnlichkeiten auf, jedoch nicht in allen Elementen der Transfermatrix. Hauptproblem ist die starke Streuung der Direktmessung, welche auf die in Kapitel 4.4 genannten Ursachen zurückzuführen ist.

Eine weitere Unsicherheit entsteht bei der direkten Umrechnung der integral gemessenen Flammentransferfunktionen. Wie Kunze [Kun04] in einer detaillierten Untersuchung am TD<sup>1</sup> Brenner zeigt, ändern sich Amplituden- und Phasengang der Flammentransferfunktion, wenn man das Sichtfeld des UV-Sensors räumlich begrenzt besonders im Bereich nahe des Brenneraustritts erheblich. Die in der Berechnung verwendeten Flammentransferfunktionen der integralen Wärmefreisetzung findet man in den Bereichen größerer Abstände zum Brennermund wieder. Möglicherweise erhält man eine bessere Übereinstimmung zwischen der Hybridmethode und der Direktmessung, wenn man lokale Flammentransferfunktionen aus Regionen nahe des Brenneraustritts beziehungsweise in der Nähe des Flammenschwerpunktes verwendet.

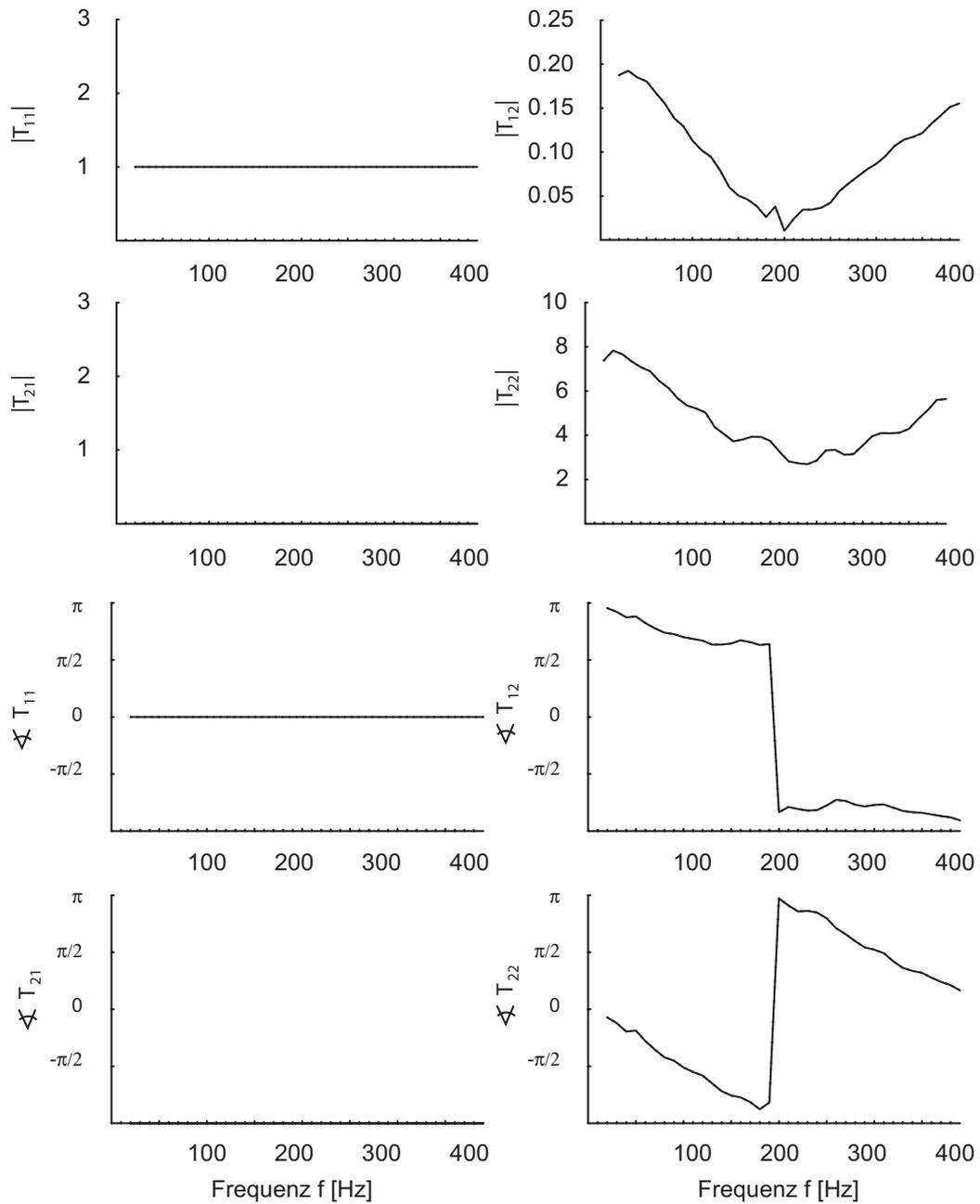


Bild 6.11: Aus der experimentell bestimmten Flammentransferfunktion er-rechnete Flammentransfermatrix der Konfiguration 3632 für eine Verbrennungsleistung von 60 kW und eine Luftzahl 1.40.

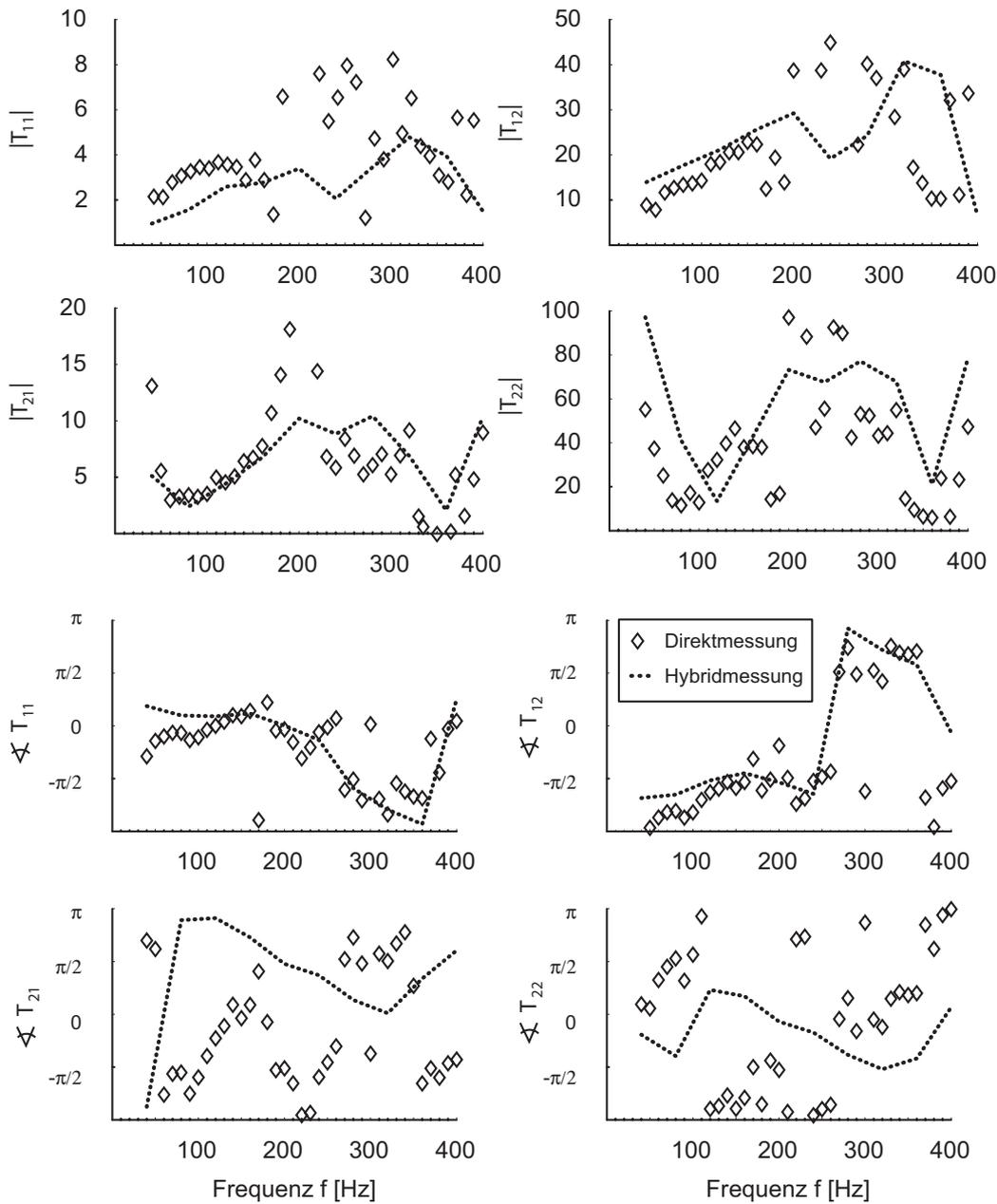


Bild 6.12: Vergleich der Ergebnisse für die Transfermatrix von Brenner und Flamme für die Bestimmung nach der Hybridmethode und aus der Direktmessung.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

Den Ausgangspunkt der Arbeit bildet eine Einführung in die lineare Akustik, wobei insbesondere die Beschreibung ebener Wellen behandelt wird, da diese anschließend den Ausgangspunkt für die Charakterisierung akustischer Elemente mit Hilfe von akustischen Zweipolen bilden. Die Theorie der akustischen Zweipole lehnt sich unter Berücksichtigung der vielfachen Analogien bei der Beschreibung von akustischen und elektronischen Netzwerken an die entsprechende Theorie aus der Elektrotechnik an. Die Wirkung passiver akustischer Systeme auf ebene Wellen kann demnach durch  $2 \times 2$  Matrizen, die so genannten akustischen Vierpole, beschrieben werden. Eine Zeitbereichsanalyse gestattet die anschauliche Charakterisierung einfacher akustischer Systeme durch Herleitung der entsprechenden Vierpole.

Anschließend an die theoretische Beschreibung akustischer Zweipole werden experimentelle Methoden vorgestellt, die eine direkte experimentelle Bestimmung akustischer Vierpolmatrizen ermöglichen. In den darauf folgenden Abschnitten wird das entsprechende experimentelle Verfahren, die Multimikrofonmethode, besprochen und die Stabilität der Methode gegenüber Messfehlern diskutiert. Aus dieser Sensitivitätsanalyse werden Empfehlungen für zukünftige Messungen abgeleitet und es wird aus einer statistischen Analyse von Messdaten auf die Größe des Fehlers bei den experimentell bestimmten Transfermatrizen geschlossen. Im Anschluss daran werden stufenweise die Ergebnisse von experimentell bestimmten Transfermatrizen mit den Vorhersagen akustischer Netzwerkmodelle verglichen. Wie sich zeigt, wird für die Beschreibung der untersuchten Brenner ein Modell für die Transfermatrix des durchströmten Flächensprungs benötigt, in dem akustische Verluste korrekt berücksichtigt werden. Dieses Modell wird anschliessend mit den Messungen an einem durchströmten Flächensprung verglichen und validiert. Danach werden schrittweise komplexere Modelle für die Brennerdüse und den Brenner entwickelt und den Messergebnissen für die entsprechenden Geometrien gegenübergestellt. Ein wesentliches Ergebnis der Arbeit ist die direkte Ableitung des akustischen Übertragungsverhaltens der untersuchten Klasse von TD<sup>1</sup> Dralldüsen aus den Geometriedaten der einzelnen Brennerkonfigurationen. Wie sich zeigte, haben Durchsatz und Drallzahl im vermessenen Bereich nur einen untergeordneten Einfluss auf das akustische Übertragungsverhalten. Das unterschiedliche Übertragungsverhalten der einzelnen Brennerkonfigurationen ist vielmehr auf die konfigurationsabhängige Einschnürung und Beschleunigung der Strömung in Drallerzeuger und Brennerdüse und deren Auswirkungen auf die reduzierte akustische Länge des Brenners zurückzuführen. Durch die Parameterstudie und die akustischen Netzwerkmodelle sind die verschiedenen Konfigurationen des kalt durchströmten Brenners

akustisch ausreichend charakterisiert. Die Erkenntnisse, die bei der Modellierung des Brenners gewonnen wurden, sind allgemein anwendbar. Dennoch haben die Netzwerkmodelle des TD<sup>1</sup> Brenners insbesondere im Bereich des Drallerzeugers noch Verbesserungspotential. In diesem Bereich erscheint die Modellierung mit numerischen Werkzeugen zur Berechnung der Schwarz-Christoffel Transformationen vielversprechend.

Einen weiteren Teil der Arbeit bildet die Beschreibung des dynamischen Verhaltens von vollständig vorgemischten Drallflammen durch Angabe der Flammentransferfunktion. Diese definiert man als das Übertragungsverhalten von Schnelleschwankungen am Brennermund auf die integrale Wärmefreisetzung der Flamme. Um Flammentransferfunktionen experimentell bestimmen zu können, werden Methoden benötigt, mit denen der zeitliche Verlauf der integralen Wärmefreisetzung bis zu Frequenzen von einigen hundert Hertz experimentell bestimmt werden kann. Für diesen Zweck bietet sich die Chemilumineszenz der Flamme an. Diese ist proportional zu der Wärmefreisetzung und kann mit optischen Methoden ohne Beeinflussung der Flamme bestimmt werden. Die Schnelle im Brennermund kann mit Hitzdrahtsonden problemlos bis zu hohen Frequenzen bestimmt werden. Durch Kombination dieser beiden Messverfahren ergibt sich eine bekannte experimentelle Methode zur Bestimmung der Flammentransferfunktion. Diese wird in einer Parameterstudie angewandt, um den Einfluss von Drall, Leistung und Luftzahl auf vorgemischte Drallflammen am TD<sup>1</sup> Brenner zu untersuchen. Wie die Ergebnisse der Parameterstudie zeigen, wird die Dynamik der untersuchten vorgemischten Drallflammen primär durch die Drallzahl bestimmt, Verbrennungsleistung und Gemischzusammensetzung spielen eine untergeordnete Rolle. Die bisherigen Erklärungen für das experimentell bestimmte Übertragungsverhalten von vorgemischten Drallflammen sind für eine Modellbildung noch nicht ausreichend. Um die offenen Fragen zu klären, werden weitere Untersuchungen benötigt.

Abschließend werden die Charakterisierungen des kalten Brenners und der Flamme zusammengefasst, um das akustische Verhalten des kombinierten Systems aus *Brenner und Flamme* zu beschreiben. Dieses wird für ein besseres Verständnis von Verbrennungsschwingungen benötigt. Sind das akustische Verhalten von Brenner und Flamme und der Einfluss einzelner Parameter bekannt, so können diese Informationen in weiterführenden Untersuchungen, etwa für Stabilitätsanalysen, verwendet werden. Dadurch wird es möglich, Verbrennungsschwingungen bereits in der Entwicklungsphase erfolgreich vorherzusagen und in der Folge zu eliminieren. Um das Verhalten von Brenner und Flamme aus einer Kombination von problemlos messbaren Größen abzuleiten, wird die Flammentransferfunktion durch Anwendung eines analytischen Modells in eine Transfermatrix umgerechnet und mit der

Brennertransfermatrix verbunden. Diese Methode wird als *hybride* Bestimmung der Transfermatrix von Brenner und Flamme bezeichnet. Die auf diese Weise hergeleitete Transfermatrix von Brenner und Flamme wird abschließend mit experimentellen Ergebnissen verglichen. Wie sich zeigt, sind die Ergebnisse aufgrund der hohen Streuung der direkt bestimmten Transfermatrix von Flamme und Brenner nur schwer zu vergleichen, dennoch zeigt sich bereichsweise eine hohe Übereinstimmung. Unter anderem durch Anwendung der Erkenntnisse aus der Sensitivitätsanalyse sollte es jedoch möglich sein, bei zukünftigen Messungen die Qualität der Direktmessung so weit zu erhöhen, dass experimentelle Resultate für die Weiterentwicklung von Modellen für vorgemischte Drallflammen verwendet werden können.

---

## A Software

### A.1 Steuersoftware

Die Steuersoftware dient zur Fernsteuerung der Versuchsanlage von der Leitwarte des Labors aus. Es können Massenströme für Luft und Gas, Ventilstellungen und die Sirendrehzahl über eine grafische Oberfläche vorgegeben und der Zündfunke eingeschaltet werden. Weiters erlaubt es die Steuersoftware, Messungen an einem separaten Messrechner zu starten. Dem Messrechner werden dabei in einem Messauftrag vom Steuerrechner alle wesentlichen Parameter für die Messung übergeben. Nach Abschluss der Messung benachrichtigt der Messrechner den Steuerrechner, damit dieser im Steuerprogramm den Button für den Start weiterer Messungen wieder aktiviert.

Die Regelung der Luft- und Gasmassenströme erfolgt durch Massenstromregler der Firma Bronkhorst. Der in der grafischen Oberfläche eingegebene Vorgabewert wird im Steuerrechner in einen Spannungswert umgerechnet und über eine D/A-Karte dem Steuergerät für die Massenstromregler vorgegeben. Eine Kontrolle des Istwerts ist über ein Display am Steuergerät möglich. Schaltet man die so genannte "Lambda Lock" Funktion ein, kann man die Gasmenge unter Beibehaltung einer konstanten Luftzahl in Abhängigkeit von der Luftmenge nachregeln oder umgekehrt.

Zum Start des Brenners wird bei eingeschaltetem Zündfunken und konstanter Luftmenge kontinuierlich die Gasmenge erhöht bis das Gemisch zündet. Der Zündfunke entsteht an einer Champion Gleitfunkenzündkerze vom Typ G54V. Die Zündkerze ist bündig in eine Brennkammerwand eingeschraubt und wird von einem Zündtransformator mit Hochspannung versorgt. Der Transformator ist über ein Relais mit einem digitalen Ausgang des Steuerrechners verbunden, wodurch man den Zündfunken direkt vom Rechner einschalten kann. Die Stabilisierung der Flamme in der Brennkammer gelingt nicht bei jedem Zündvorgang, manchmal schlägt die Flamme direkt ins Plenum zurück und stabilisiert sich im Bereich der Sirenenöffnungen. Die Lage des Zündfunkens spielt für den Zündvorgang eine wesentliche Rolle. Eine Position einen Brennkammerdurchmesser von der Brennerstirnwand entfernt, wo frisches Gemisch direkt aus dem Brenner an die Brennkammerwand strömt, hat sich als vorteilhaft erwiesen.

Eine wichtige Aufgabe der Steuersoftware ist es, die Anregungsfrequenz der Sirene möglichst genau auf den gewünschten Wert einzuregeln. Der Sirenenmotor besitzt einen integrierten Regler, der vom Steuerrechner vorgegebene Spannungswerte in Drehzahlen umsetzt. Die Beziehung zwischen Vorgabespannung und Anregungsfrequenz der Sirene ist wie aus Abbildung A.1 ersichtlich bis etwa 1000 Hz linear. Bei den Experimenten kommen zwei Sirenen

zum Einsatz, deren Motoren leicht unterschiedliche Charakteristiken besitzen. Um die Anregungsfrequenz unabhängig von der konkreten Kennlinie der verwendeten Sirene möglichst genau einzustellen, wurde in der Steuersoftware eine Regelungsschleife implementiert, die den Spannungsvorgabewert mit Hilfe eines PID-Reglers einstellt. Dazu wird die Sirenenfrequenz mit einem optischen Sensor bestimmt, die Vorgabespannung für den Motor wird von dem Regelkreis so lange angeglichen, bis die Frequenz mit der gewünschten Genauigkeit erreicht wurde<sup>60)</sup>. Danach wird der Vorgabewert am Steuerrechner für den Zeitraum der Messung nicht mehr nachgeregelt. Da bei jeder Messung die Istfrequenz bestimmt wird, ist eine leichte Drift der Sirenenfrequenz über mehrere Messungen üblicherweise unproblematisch.

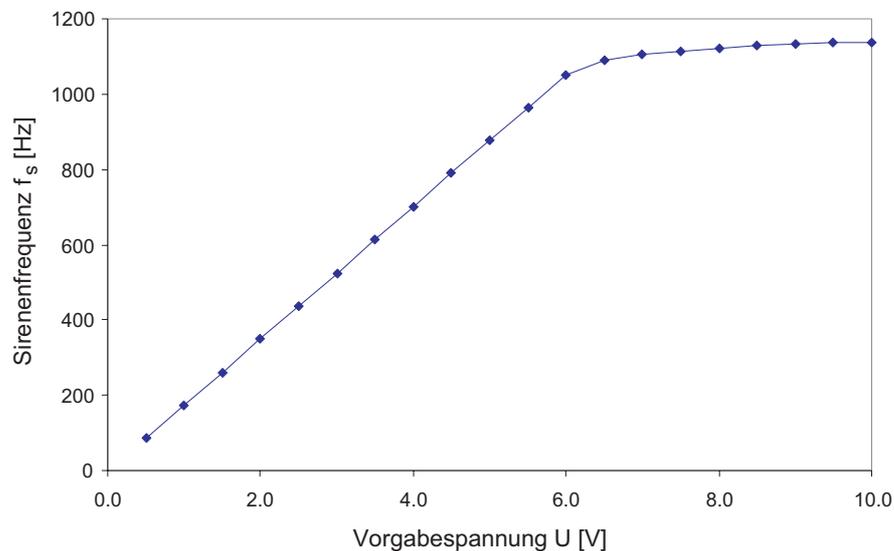


Bild A.1: Sirenenfrequenz in Abhängigkeit von der Vorgabespannung. Die Frequenz wächst zunächst linear mit der Vorgabespannung, ab etwa 1100 Hz dreht die Sirene auch bei höherer Vorgabespannung nicht schneller, die Ursache dafür liegt vermutlich im Strombegrenzer des Sirenenmotors.

Der Messauftrag, der vom Steuerrechner an den Messrechner übergeben wird, beinhaltet die Anzahl der gewünschten Messungen, die Samplingrate, die Anzahl der Samples, einen Filenamen für die Speicherung der Messdaten sowie die ungefähre aktuelle Anregungsfrequenz<sup>61)</sup>. Die Kommunikation der

<sup>60)</sup>üblicherweise auf  $\pm 1$  Hz genau

<sup>61)</sup> Je nach Art der Messung Anregungsfrequenz der Sirene oder Signalfrequenz des Funktionsgenerators bei Kalibrationsmessungen.

Rechner geschieht über ein Verzeichnis, auf das beide Rechner parallel zugreifen. Sämtliche Kommandos und Daten werden mit Hilfe von verschiedenen Files übergeben. Diese Art der Kommunikation ist einfach umzusetzen und hat sich als hinreichend schnell und stabil erwiesen.

## A.2 Messsoftware

Die Messsoftware wartet auf einen Messauftrag des Steuerrechners. Sobald der Auftrag eingeht, beginnt die eigentliche Messung. Es werden drei Arten von Signalen unterschieden. Eine zentrale Bedeutung kommt dem Referenzsignal zu. Dabei handelt es sich bei regulären Messungen um das Signal des optischen Sensors, bei Kalibrationsmessungen um das Signal des Funktionsgenerators, mit dem der Lautsprecher angetrieben wird. Eine weitere Klasse von Signalen stellen die linear umsetzbaren Signale von Mikrofonen und Photomultiplier dar. Diese Signale können direkt mit der Fouriertransformation verarbeitet werden. In die dritte Klasse nicht linear umsetzbarer Signale fallen beispielsweise die Spannungswerte von Hitzdrähten. Diese müssen mit Hilfe einer Kalibrationskurve in Geschwindigkeitswerte umgerechnet werden, erst dann können sie fouriertransformiert werden.

Bei der Messung stellt das Messprogramm die A/D-Karte auf die gewünschte Samplingrate ein und erstellt anschließend parallele Zeitreihen von zehn Kanälen<sup>62)</sup>. Danach werden etwaige Hitzdrahtsignale in Geschwindigkeiten umgerechnet, alle Kanäle werden mit einem Hanning-Fenster belegt und fouriertransformiert. Die Sollfrequenz der Anregung ist aus dem Messauftrag bekannt, die tatsächliche Anregungsfrequenz stimmt in der Regel nicht mit der Sollfrequenz überein, befindet sich aber einige wenige Hz darüber oder darunter. Die wenigsten Störungen weist das Referenzsignal auf, daher wird es für die Bestimmung der tatsächlichen Anregungsfrequenz verwendet. In einem Intervall rund um die Sollfrequenz wird im Amplitudenspektrum des Referenzkanals die dominante Frequenz ermittelt. Diese ist die gesuchte Istfrequenz der Anregung. Da es sich sowohl bei der Sirene als auch bei dem Lautsprechersignal der Kalibrationsmessung idealisiert um eine monofrequente Anregung handelt, werden alle Frequenzen außer der Istfrequenz in der weiteren Auswertung nicht berücksichtigt. Für den weiteren Verlauf interessieren nur Amplitude und Phase der Kanäle an der Istfrequenz. Da die Systemfrequenz für alle Kanäle gleich ist und nur relative Größen interessieren, spielen die Eigenschaften der diskreten Fouriertransformation bei der Bestimmung von Amplitude und Phase von Signalen beliebiger Frequenz

---

<sup>62)</sup> Üblicherweise werden bei der Messung 10 kSamples bei 10 kHz Abtastrate gemessen, was einer Messdauer von einer Sekunde entspricht.

keine Rolle. Um über mehrere Messungen mitteln zu können, wird abschließend bei allen Kanälen die Phase des Referenzsignals abgezogen<sup>63)</sup> und die Amplituden- und Phasenwerte für alle Kanäle werden mit der Soll- und Istfrequenz in dem gewünschten File gespeichert<sup>64)</sup>. Dieser Vorgang wird wiederholt bis die im Messauftrag angegebene Anzahl von Messungen erreicht ist, dann wird der Steuerrechner über den Abschluss der Messung informiert.

### A.3 Auswertesoftware

Die Software zur Bestimmung von Transfermatrizen aus Messreihen besteht aus mehreren Unterprogrammen. Die Details der Dateiformate der verschiedenen, für die Auswertung benötigten Filetypen werden im nächsten Abschnitt beschrieben.

Ein Programm berechnet die Kalibrationskurven der Mikrofone aus dem .fft-File einer Kalibrationsmessung und speichert das Resultat in einem .cal-Kalibrationsfile. Das Referenzmikrofon ist dabei wählbar.

Die zentrale Auswerterroutine verknüpft Informationen zu den Messwerten aus der Protokolldatei und Kalibrationsdaten der Mikrofone mit Strömungseigenschaften des experimentellen Aufbaus und errechnet daraus relative Druckwerte an den Messpositionen. Die Messwerte werden gemittelt und die Koeffizienten für  $\tilde{f}_0$  und  $\tilde{g}_0$  in den Referenzebenen  $\mathcal{R}_u$  und  $\mathcal{R}_d$  aus einem nichtlinearen Fit für die Riemann Invarianten in einem .dat-File abgespeichert.

Ein eigenes Programm verrechnet schließlich die Koeffizienten aus zwei Teilmessungen zu einer Transfermatrix und speichert diese in einem weiteren .dat Datenfile.

Weitere Programme erlauben es, mehrere Transfermatrizen in einem Diagramm darzustellen.

---

<sup>63</sup>die Phase des Referenzsignals ist nur vom Startzeitpunkt der Messung abhängig und interessiert nicht.

<sup>64</sup>Details dazu im Kapitel über Dateiformate

## B Dateiformate

### B.1 Messwerte (.fft)

*Dient zur Speicherung von Messwerten.*

Das Dateiformat ist unabhängig davon, ob eine Messung oder Kalibration aufgezeichnet wird, gleich.

$k$	$f_s$	$f_i$	$A_1 \dots A_{10}$	$k$	$f_s$	$f_i$	$\Phi_1 \dots \Phi_{10}$
-----	-------	-------	--------------------	-----	-------	-------	--------------------------

Tabelle B.1: Dateiformat FFT File

Für jede Messung werden ein Index  $k$ , die Vorgabe- bzw. Sollfrequenz  $f_s$ , die tatsächlich gemessene Anregungs- bzw. Istfrequenz  $f_i$ , sowie die auf dieser Frequenz gemessenen Amplituden  $A_i$  und Phasen  $\Phi_i$  als binäre ANSI Float Variablen gespeichert. Ein Float ist 32 Bit bzw. 4 Byte breit. Eine einzelne Messung beansprucht somit  $4 \times 26 = 104$  Byte Speicherplatz. Eine Messreihe mit 60 Frequenzen à 250 Messungen erzeugt ein File mit  $104 \times 60 \times 250 = 1.560.000$  Byte, das entspricht 1,5 MByte. Im Vergleich dazu benötigt man für die Speicherung einer Zeitreihe von 10.000 Samples auf 10 Kanälen ca. 400 kB. Für die vollständige Speicherung aller Zeitreihen der obigen Messreihe würde man also rund 6 GByte Speicherplatz benötigen.

Der Index  $k$  wird in sämtlichen Auswerteprogrammen ignoriert, daher erlaubt es das beschriebene Dateiformat problemlos mit Hilfe eines einfachen DOS Batch Skripts durch sukzessives Anhängen mehrere kleine Datenfiles in einem großen zu vereinen.

```
type klein1.fft > gross.fft
type klein2.fft >> gross.fft
...
```

Tabelle B.2: Batch Skript zum Zusammenhängen von FFT Files

### B.2 Protokollfile (.txt)

*Dient zur Speicherung von Mikrofonpositionen und Verstärkungsfaktoren an den Verstärkern.*

Das Protokollfile ist ein Textfile. Die Spaltentrennung erfolgt durch Tabulatoren. Die Positionen der Mikrofone werden in codierter Form angegeben.

Code	Bedeutung
10xx	Mikrofon im Plenum
20xx	Mikrofon in alter Brennkammer
30xx	Mikrofon in runder Brennkammer
40xx	Hitzdraht
50xx	Mikrofon in neuer Brennkammer
900x	Mikrofon in Plenum der Ringbrennkammer
901x	Mikrofon in Brennkammer der Ringbrennkammer

Tabelle B.3: Positionscodes für Mikrofonpositionen

Die letzten beiden Stellen des Positionscodes geben die Nummer des Mikrostudzens an der Anlage an. Erhöht man den Code um Hundert (51xx statt 50xx) setzt man ein Flag, das anzeigt, dass dieses Mikrofon bei der Auswertung der Frequenz nicht berücksichtigt werden soll. Die Positionscodes werden für jede Anregungsfrequenz gesondert eingelesen und verarbeitet.

$Str$	$f$	$N_{Samp}$	$P_{M1} \dots P_{M8}$	$P_{CTA}$	$F_{M1} \dots F_{M8}$	$F_{CTA}$	$F_{REF}$
-------	-----	------------	-----------------------	-----------	-----------------------	-----------	-----------

Tabelle B.4: Dateiformat Protokollfile

Auf den String<sup>65)</sup>  $Str$  folgen die nominale Anregungsfrequenz  $f$ , die Anzahl der Samples  $N_{Samp}$  sowie die Positionscodes  $P_{M1}$  bis  $P_{M8}$  für die Mikrofone 1 bis 8 und  $P_{CTA}$  für die CTA. Eine Positionsangabe für den Referenzkanal ist nicht notwendig, daher folgen die Verstärkungsfaktoren  $F_{M1}$  bis  $F_{M8}$  für die Mikrofone 1 bis 8 (Angabe in mV/Pa wie am Display des Nexus-Verstärkers angegeben), sowie die Verstärkungsfaktoren  $F_{CTA}$  für CTA und  $F_{REF}$  für das Referenzsignal (beide Werte üblicherweise 1000, was in der Auswerteprozedur einem Korrekturfaktor von 1 entspricht).

### B.3 Kalibrationsfile (.cal)

*Dient zur Speicherung von Kalibrationskurven.*

$f$	$\text{abs}(C_1(f))$	$\text{arg}(C_1(f))$	$\text{abs}(C_2(f))$	$\text{arg}(C_2(f))$	$\dots$
-----	----------------------	----------------------	----------------------	----------------------	---------

Tabelle B.5: Dateiformat Kalibrationsfile

<sup>65)</sup>  $Str$  hat in neueren Versionen der Auswertesoftware keine Funktion mehr.

Die Kalibrationskurven werden in einem Textfile mit dem Format aus Tabelle B.5 gespeichert. Auf die Frequenz  $f$  folgen alternierend die Amplituden  $\text{abs}(C_i(f))$  und Phasen  $\text{arg}(C_i(f))$  der Kalibrationskoeffizienten der einzelnen Mikrofone. Spaltentrennung erfolgt durch Tabulatoren, Phasen werden in Radiant dargestellt. Die Auswertesoftware ermittelt den Wert der Kalibrationskoeffizienten für Frequenzen zwischen den Stützpunkten durch lineare Interpolation.

#### B.4 Transfermatrizen, f-g Werte (.dat)

Dient zur Speicherung von Transfermatrizen und Werten für  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  aus dem nichtlinearen Fit.

$f$	$\text{abs}(T_{11})$	$\text{arg}(T_{11})$	$\text{abs}(T_{12})$	$\text{arg}(T_{12})$
	$\text{abs}(T_{21})$	$\text{arg}(T_{21})$	$\text{abs}(T_{22})$	$\text{arg}(T_{22})$

Tabelle B.6: Dateiformat Transfermatrizen

Die Werte werden zeilenweise in Textform durch Tabulatoren getrennt abgespeichert. Auf die Frequenz  $f$  folgen alternierend die Amplituden  $\text{abs}(T_{ij})$  und Phasen  $\text{arg}(T_{ij})$  der Transfermatrizelemente bzw. die Amplituden und Phasen für  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  in den Referenzebenen  $\mathcal{R}_u$  und  $\mathcal{R}_d$  der Auswertung. Phasen werden in Radiant angegeben.

$f$	$\text{abs}(\tilde{f}_u)$	$\text{arg}(\tilde{f}_u)$	$\text{abs}(\tilde{g}_u)$	$\text{arg}(\tilde{g}_u)$
	$\text{abs}(\tilde{f}_d)$	$\text{arg}(\tilde{f}_d)$	$\text{abs}(\tilde{g}_d)$	$\text{arg}(\tilde{g}_d)$

Tabelle B.7: Dateiformat für Riemann Invariante  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$

Die Auswertung von Transfermatrixmessungen erfordert für die beiden Teilmessungen die Speicherung von Koeffizienten der Riemann Invarianten  $\tilde{f}$  und  $\tilde{g}$  in den Auswerteebenen. Die Koeffizienten werden ebenfalls in Files mit der Endung .dat abgespeichert. Auf die Frequenz  $f$  folgen in der angegebenen Reihenfolge alternierend die Amplituden  $\text{abs}(\tilde{f}_u)$  und Phasen  $\text{arg}(\tilde{f}_u)$  der Koeffizienten. Phasen werden in Radiant angegeben.

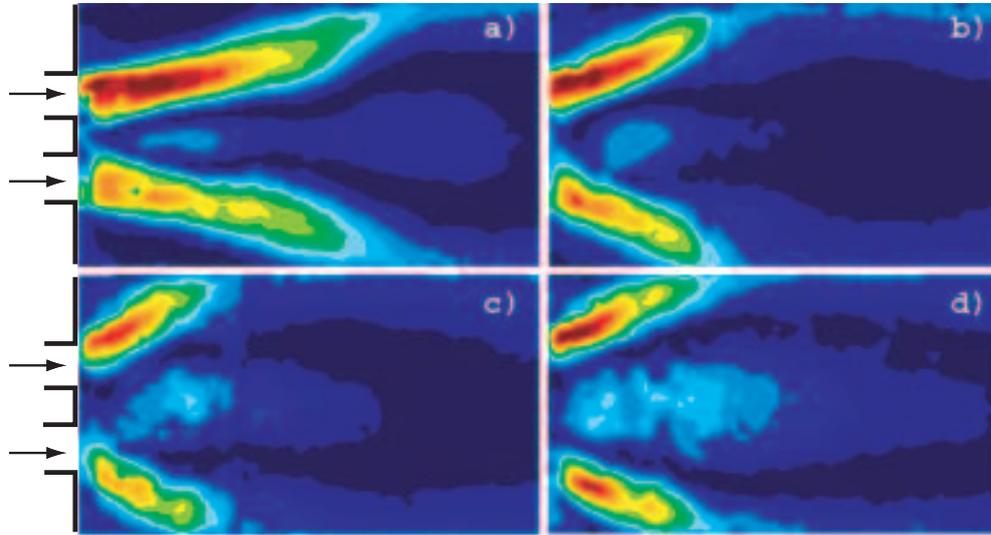


Bild C.1: Mittels PIV visualisierte Brennkammerströmung am TD<sup>1</sup> Brenner für Brennergeometrien mit unterschiedlicher Drallzahl für die Brennerkonfigurationen a) 4064 (niedrigster Drall), b) 4032 , c) 4016, d) 4008 (höchster Drall)

## C Strömungsfeld in der Brennkammer

Das Strömungsfeld in der Brennkammer stromab des Brenners wurde für unterschiedliche Drallstärken mit PIV<sup>66)</sup> vermessen [RWK98, Dan00]. Die Messungen wurden ohne Verbrennung mit kalter Luft durchgeführt. Als Seeding-Partikel kamen Öltröpfchen zum Einsatz. Statt der Brennkammer wurde aus Gründen der besseren optischen Zugänglichkeit ein Plexiglasaufsatz mit quadratischem Innenquerschnitt an den Brenner montiert.<sup>67)</sup> Diese Modifikation hat nur insofern einen verändernden Einfluss auf das Strömungsfeld stromab des Brenners, als die Länge des Plexiglasaufsatzes geringer ist als jener von Brennkammer und Verlängerung wie sie in den restlichen Versuchen verwendet wurde. Dennoch dürften sich daraus, insbesondere für das Strömungsbild in unmittelbarer Nähe des Brenners, keine maßgeblichen Veränderungen ergeben.

Abbildung C.1 zeigt das mit PIV ermittelte Strömungsfeld<sup>68)</sup> in der

<sup>66)</sup> Particle Image Velocimetry.

<sup>67)</sup> Die Innenabmaße von Plexiglasaufsatz und Brennkammer sind identisch.

<sup>68)</sup> Da diese Untersuchung eine der ersten PIV Messungen am TD<sup>1</sup> Brenner war, haben die Ergebnisse eher qualitativen Charakter und es wurde in Abbildung C.1 auf die Angabe einer Geschwindigkeitsskala verzichtet.

Brennkammer für Brennerkonfigurationen mit unterschiedlicher Drallzahl. Farblich dargestellt wird der Absolutbetrag der Strömungsgeschwindigkeit. Bereiche hoher Strömungsgeschwindigkeit sind rot dargestellt, die blauen Bereiche stellen niedrige Geschwindigkeiten dar. Die Messungen wurden bei einem Massenstrom von  $29 \text{ g/sec}$  durchgeführt, dementsprechend lag die flächengemittelte Geschwindigkeit am Düsenaustritt<sup>69)</sup> bei etwa  $22 \text{ m/sec}$ . Der Bildausschnitt zeigt die gesamte Höhe der quadratischen Brennkammer ( $a_{BK} = 90 \text{ mm}$ ) und erstreckt sich horizontal über eine Länge von etwa zwei  $a_{BK}$ . Für die Grafiken in Abbildung C.1 wurde über jeweils 150 Einzelmessungen gemittelt. Aus diesem Grund sind in diesen Aufnahmen die in den Einzelbildern deutlich hervortretenden Wirbel, welche sich an der Kante der Brennerdüse zur Brennkammer hin ablösen, nicht zu erkennen.

Gut kann man bei einem Vergleich der Aufnahmen für steigende Drallzahlen die Veränderung des Ausströmwinkels, das raschere Anlegen der Drallströmung an die Brennkammerwände und die verstärkte zentrale Rückströmung erkennen.

---

<sup>69)</sup> vergleiche Tabelle 5.3.

## D Transformationseigenschaften von Transformmatrizen

Oftmals ist es zum Vergleich verschiedener Transformmatrizen notwendig, deren Definitionsebenen entlang der  $x$ -Achse zu verschieben. Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der Frage, ob bei dieser Verschiebung und einer Kontraktion auf identische Definitionsebenen Invariante existieren, deren Wert unter diesen Operationen unverändert bleibt.

### D.1 Allgemeine Eigenschaften von Spur und Determinante

#### D.1.1 Spur

Die Spur der Matrix  $\mathbf{A} = a_{ij}$  ist definiert durch  $\text{tr } \mathbf{A} = \sum a_{ii}$ . Für die Spur des Matrixproduktes  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$  gilt Kommutativität [Ras86, BW90b, BW90a, BS96]

$$\text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \quad (\text{D.1})$$

Daraus leitet man für das Matrixprodukt  $\tilde{\mathbf{A}} = (\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P})$  folgende nützliche Eigenschaft ab

$$\text{tr } \tilde{\mathbf{A}} = \text{tr}(\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}) = \text{tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{P}) = \text{tr } \mathbf{A} \quad (\text{D.2})$$

Die quadratische  $2 \times 2$  Matrix  $\mathbf{A}$  lässt sich mittels einer Matrix  $\mathbf{C}$  in die Jordan'sche Normalform

$$\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & 0 \\ 0 & J_2(\lambda_2) \end{pmatrix} \quad (\text{D.3})$$

überführen. Die Größen  $J_i(\lambda_i)$  bezeichnet man als Jordankästchen. Mit Rückgriff auf die Beziehung (D.2) zeigt man,

$$\text{tr } \mathbf{A} = \sum_i \lambda_i \quad (\text{D.4})$$

dass die Spur mit der Summe der Eigenwerte der Matrix  $\mathbf{A}$  übereinstimmt<sup>70)71)</sup>.

---

<sup>70)</sup> Spursatz, [BS96]

<sup>71)</sup> Eigenwerte gezählt entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit.

### D.1.2 Determinante

Für die Determinante von Matrixprodukten gilt ganz ähnlich

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B} \quad (\text{D.5})$$

woraus man wegen

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}) = \det \mathbf{1} = 1 = \det \mathbf{A} \det \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{D.6})$$

zu der Beziehung (D.7) gelangt.

$$\det \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \quad (\text{D.7})$$

Für die Determinante des Produkts  $\tilde{\mathbf{A}}$  leitet man nun wegen (D.7) ähnlich zu (D.2) ab

$$\det \tilde{\mathbf{A}} = \det(\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}) = \det \mathbf{P}^{-1} \det \mathbf{A} \det \mathbf{P} = \det \mathbf{A} \quad (\text{D.8})$$

Die Determinante der quadratischen Matrix  $\mathbf{A}$  ist wegen (D.8) und (D.3) gleich dem Produkt der Eigenwerte<sup>72)73)</sup>

$$\det \mathbf{A} = \prod_i \lambda_i \quad (\text{D.9})$$

## D.2 Translationen und Kontraktionen

**Definition der Transfermatrix** Definitionsgleichungen der Transfermatrix  $\mathbf{A}$  in den Grenzen  $x_1$  und  $x_2$  in  $pu$  und  $fg$  Darstellung (Abb. D.1)

$$\begin{pmatrix} p'_2 \\ u'_2 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A}_{pu} \cdot \begin{pmatrix} p'_1 \\ p'_1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.10})$$

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_2 \\ \tilde{g}_2 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A}_{fg} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{g}_1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.11})$$

Diese beiden Darstellungen lassen sich mittels der Koordinatentransformationen

$$\mathbf{A}_{fg} = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{A}_{pu} \cdot \mathbf{\Omega}^{-1} \quad (\text{D.12})$$

<sup>72)</sup> Determinantensatz, [BS96]

<sup>73)</sup> Eigenwerte gezählt entsprechend ihrer algebraischen Vielfachheit.

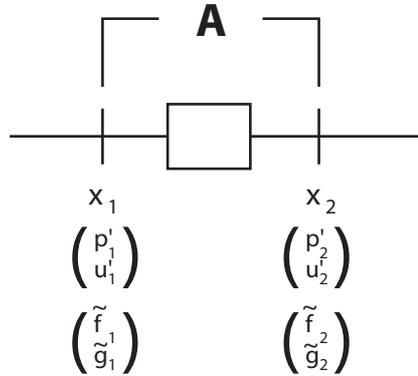


Bild D.1: Definition der Transfermatrix

$$\mathbf{A}_{pu} = \mathbf{\Omega}^{-1} \cdot \mathbf{A}_{fg} \cdot \mathbf{\Omega} \quad (\text{D.13})$$

ineinander überführen, wobei

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \mathbf{\Omega}^{-1} \quad (\text{D.14})$$

Im Vergleich mit den Gleichungen (D.2) und (D.8) wird klar, dass Spur und Determinante von Transfermatrizen unabhängig von der gewählten Darstellung im  $pu$  oder  $fg$  Raum sind.

**Verschiebung einer Definitionsebene** Bei Verschiebung der rechten Definitionsebene von  $x_2$  nach  $x_3$  (Abb. D.2) erhält man eine neue Transfermatrix **B**

$$\begin{pmatrix} \tilde{f}_3 \\ \tilde{g}_3 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{23} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{f}_2 \\ \tilde{g}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{P}_{23} \cdot \mathbf{A}_{fg} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{g}_1 \end{pmatrix} \quad (\text{D.15})$$

$$\mathbf{B}_{fg} = \mathbf{P}_{23} \cdot \mathbf{A}_{fg} \quad (\text{D.16})$$

Die Überlegungen sind von der Wahl einer konkreten Darstellung von **A** unabhängig

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}_{23} \cdot \mathbf{A} \quad (\text{D.17})$$

analog errechnet man eine neue Matrix **B** bei Verschiebung der linken Definitionsebene von  $x_1$  nach  $x_0$  (Abb. D.3)

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{01} \quad (\text{D.18})$$

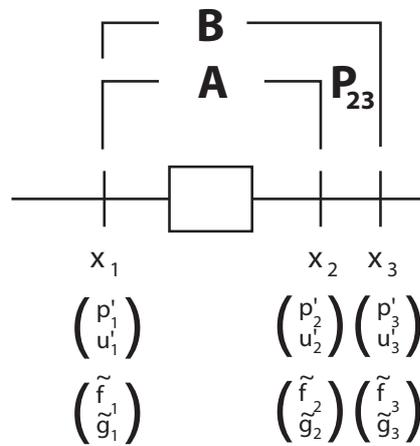


Bild D.2: Verschiebung der rechten Definitionsebene

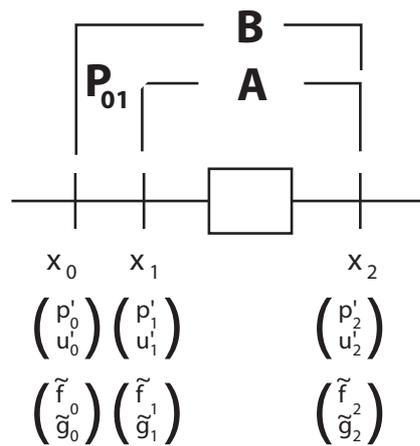


Bild D.3: Verschiebung der linken Definitionsebene

**Verschiebung beider Definitionsebenen** Bei simultaner Verschiebung der rechten Definitionsebene von  $x_2$  nach  $x_3$  und der linken von  $x_1$  nach  $x_0$  (Abb. D.4) erhält man die neue Transfermatrix **B**

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}_{23} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}_{01} \tag{D.19}$$

**Translation der Definitionsebenen** Verschiebung nach Links (Abb. D.5)

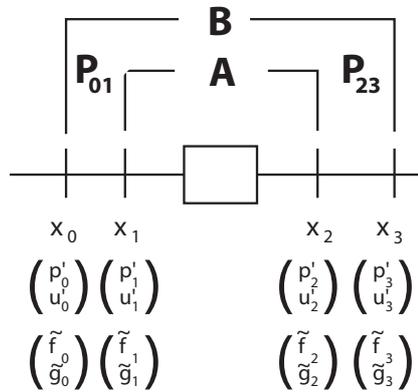


Bild D.4: Verschiebung beider Definitionsebenen

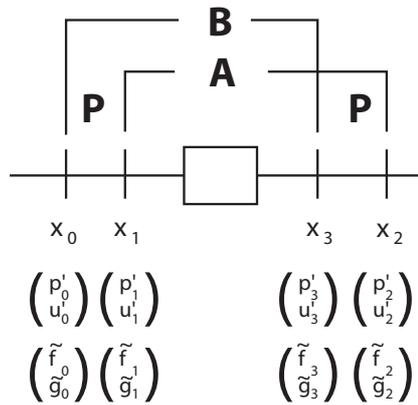


Bild D.5: Verschiebung nach Links

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \tag{D.20}$$

Verschiebung nach Rechts

$$\mathbf{B} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}^{-1} \tag{D.21}$$

Da die verschobenen Transfermatrizen vom Typ  $\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$  sind, gelten wieder die Gleichungen (D.2) und (D.8). Spur und Determinante der Transfermatrix bleiben somit invariant unter symmetrischen Verschiebungen der Referenzebenen  $\mathcal{R}_u$  und  $\mathcal{R}_d$ .

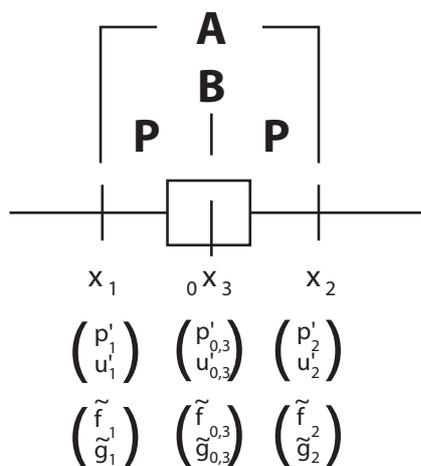


Bild D.6: Symmetrische Kontraktion

### Symmetrische Kontraktion auf identische Ebenen

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}^{-1} \quad (\text{D.22})$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P} \quad (\text{D.23})$$

Bei der symmetrischen Kontraktion (Abb. D.6) werden die Definitionsebenen eines ausgedehnten Transfermatrixelements in die Symmetrieebene aus linker und rechter Definitionsebene verschoben. Dadurch erhält man eine Transfermatrix für ein kompaktes Element ohne jede räumliche Ausdehnung. Die Matrix  $\mathbf{B}$  ist wieder vom Typ  $\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$ , daher bleiben Spur und Determinante bei der Kontraktion erhalten.

**Schlussfolgerung** Bei der Verschiebung der Definitionsebenen einer Transfermatrix existieren Invariante, nämlich Spur und Determinante der Transfermatrix. Diese Größen bleiben nach Gleichung (D.20) und (D.21) bei symmetrischer Kontraktion der Definitionsebenen und anschließender Translation aus der Mittellage erhalten.

*Daher besitzen alle kompakten Transfermatrizen unabhängig von ihrer Lage identische Spur und Determinante.*

## E Tabellen

### E.1 Analytische Ansätze für Transfermatrizen

#### E.1.1 Rohrstück

Variablen  $l$  Länge des Rohrstücks

$\mathbf{T}_{\text{pu}}$	$\begin{pmatrix} \cos kl & i \sin kl \\ i \sin kl & \cos kl \end{pmatrix}$	$\mathbf{S}_{\text{fg}}$	$\begin{pmatrix} e^{-ikl} & 0 \\ 0 & e^{-ikl} \end{pmatrix}$
$\mathbf{T}_{\text{fg}}$	$\begin{pmatrix} e^{ikl} & 0 \\ 0 & e^{-ikl} \end{pmatrix}$	$\mathbf{M}_{\text{pu}}$	$\frac{i}{\sin kl} \begin{pmatrix} \cos kl & -1 \\ 1 & -\cos kl \end{pmatrix}$

#### E.1.2 Flächensprung verlustfrei

Variablen  $A_u$  Querschnittsfläche upstream  
 $A_d$  Querschnittsfläche downstream  
 $\alpha = A_d/A_u$

$\mathbf{T}_{\text{pu}}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$
$\mathbf{T}_{\text{fg}}$	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + \alpha & 1 - \alpha \\ 1 - \alpha & 1 + \alpha \end{pmatrix}$
$\mathbf{S}_{\text{fg}}$	$\frac{1}{1 + \alpha} \begin{pmatrix} 2\alpha & 1 - \alpha \\ \alpha - 1 & 2 \end{pmatrix}$

## E.1.3 kompaktes Element mit Verlust

<i>Variablen</i>	$M$	Machzahl	
	$A_u$	Querschnittsfläche upstream	
	$A_d$	Querschnittsfläche downstream	
	$D_B$	Durchmesser Blende	
	$D_u$	Durchmesser upstream	
	$D_d$	Durchmesser downstream	
	$l_{red}$	reduzierte Länge	Gleichung (5.4)
	$l_{eff}$	effektive Länge	Gleichung (5.5)
	$\zeta$	akustischer Verlustbeiwert	Gleichung (5.14)

$\mathbf{T}_{pu}$	$\begin{pmatrix} 1 & \left[1 - \zeta - \left(\frac{A_u}{A_d}\right)^2\right] M_u - i \frac{\omega}{c} l_{eff} \\ -i \frac{\omega}{c} l_{red} - M_d & \frac{A_u}{A_d} \end{pmatrix}$ $\zeta = \frac{R_a A_u}{\bar{\rho} c} \quad d_v = \sqrt{\frac{2\mu}{\bar{\rho}\omega}}$ $l_{eff} = \frac{L_a A_u}{\bar{\rho}} \quad l_{red} = -\frac{\bar{\rho}}{L_a c}$
<i>Flächensprung</i>	
$R_a$	$\frac{\bar{\rho}\omega d_v}{2D_d z} \frac{ D_d - D_u }{D_u} \left(1 + \frac{ D_d^2 - D_u^2 }{\pi D_d D_u} \ln \frac{D_d + D_u}{ D_d - D_u }\right)$
$L_a$	$\frac{\bar{\rho}}{\pi z} \left[ \frac{(D_d - D_u)^2}{2D_d D_u} \ln \frac{D_d + D_u}{ D_d - D_u } + \ln \frac{(D_d + D_u)^2}{4D_d D_u} \right]$
<i>Lochblende</i>	
$R_a$	$\frac{\bar{\rho}\omega d_v}{2\pi D_u z} \left(\frac{1}{\alpha} - \alpha\right) \ln \left\{ \frac{D_u}{\pi d_v} \frac{(1/\alpha) - \alpha}{[(1/\alpha) - \alpha]^2} \right\}$
$L_a$	$\frac{2\bar{\rho}}{\pi z} \ln \left\{ \frac{1}{2} \left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) \right\} \quad \text{mit } \alpha = \tan \left(\frac{\pi D_B}{4D_u}\right)$

**E.1.4 Druckverlust**

<i>Variablen</i>	$M$	Machzahl	
	$D_{hyd}$	hydraulischer Durchmesser	
	$\zeta_p$	Druckverlustbeiwert	Gleichung (5.16)

$\mathbf{T}_{pu}$	$\begin{pmatrix} 1 & -\zeta_p M \sqrt{\frac{\omega D_{hyd}}{c}} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
-------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------

**E.1.5 kompakte Flamme**

<i>Variablen</i>	$M_c$	Machzahl Kaltgas	
	$p_c$	Druck Kaltgas	
	$T_c$	Temperatur Kaltgas	
	$T_h$	Temperatur Heißgas	
	$u_c$	Geschwindigkeit Kaltgas	
	$T_Q(\omega)$	Flammentransferfunktion	Gleichung (6.5)

$\mathbf{T}_{pu}$	$\begin{pmatrix} 1 & -\left(\frac{T_h}{T_c} - 1\right) M_c (1 + T_Q(\omega)) \\ \left(1 - \frac{T_h}{T_c}\right) \frac{u_c \rho_c c_c}{p_c} & 1 + \left(\frac{T_h}{T_c} - 1\right) T_Q(\omega) \end{pmatrix}$
-------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

## E.2 Eigenschaften des verwendeten Erdgases

Erdgasanalyse der Stadtwerke München<sup>1)</sup>

### Zusammensetzung

Kohlendioxid	CO <sub>2</sub>	0.06	[Vol. %]
Stickstoff	N <sub>2</sub>	0.82	[Vol. %]
Methan	CH <sub>4</sub>	98.38	[Vol. %]
Ethan	C <sub>2</sub> H <sub>8</sub>	0.43	[Vol. %]
Propan	C <sub>3</sub> H <sub>8</sub>	0.19	[Vol. %]
Butan	C <sub>4</sub> H <sub>10</sub>	0.09	[Vol. %]
Pentan	C <sub>5</sub> H <sub>12</sub>	0.02	[Vol. %]
Hexan	C <sub>6</sub> H <sub>14</sub>	0.01	[Vol. %]

[kWh/m <sup>3</sup> ]	[KJ/m <sup>3</sup> ]	[kcal/m <sup>3</sup> ]
-----------------------	----------------------	------------------------

### Brennwert *Ho*

11.066	39845	9515 <sup>†)</sup>
10.130	36474	8710 <sup>‡)</sup>

### Heizwert *Hu*

9.978	35927	8580 <sup>†)</sup>
9.134	32888	7854 <sup>‡)</sup>

### Wobbezahl

14.734	53051	12669
--------	-------	-------

Dichteverhältnis: d (Luft=1): 0.564

Normdichte [kg/m<sup>3</sup>]: 0.731

Laminare Flammgeschwindigkeit [cm/s]: 30

Zündgrenzen [Vol. %]: 4.4 untere und 16.5 obere

### Methanzahl

min. 90, max. 95, mittel 93

<sup>1)</sup> Quelle: <http://www.swm.de/swm/faq/faq1.cfm> vom 14. Feb. 2000

Die angegebenen Werte sind nach Angabe der Stadtwerke München Durchschnittswerte, die Schwankungen unterliegen.

<sup>†)</sup> 1013 mbar 0 °C Normbedingungen

<sup>‡)</sup> 954 mbar 15 °C 24 mbar trocken

*Abgas Kennzahlen (für Luftzahl=1)*

Luftbedarf	[m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> ]	9.52
Abgas feucht	[m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> ]	10.53
Abgas trocken	[m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> ]	8.53
Kohlendioxid	[Vol. %]	max. 11.76

*Schwefelgehalte*

Schwefelwasserstoff	[mg/m <sup>3</sup> ]	0-1
Gesamtschwefel	[mg/m <sup>3</sup> ]	1-2

*Wasserdampftau punkt*

19 bis -34 °C , Durchschn. 20 bar

### E.3 Eckdaten des Sirenenmotors

#### *Motor Kennzahlen*

Nennspannung	$U_N$	24	[V]
Abgabeleistung	$P_2^{max}$	70	[W]
Wirkungsgrad	$\eta_{max}$	80	[-]
Leerlaufdrehzahl	$n_o$	9 000	[rpm]
Leerlaufstrom	$I_o$	0.38	[A]
Spitzendrehmoment bei 8 A	$M_P$	160	[mNm]

Betriebstemperaturbereich		-5 bis 85	[°C]
---------------------------	--	-----------	------

#### *Empfohlene Werte*

Drehzahlbereich	$n_e$	10 - 10 000	[rpm]
Dauerdrehmoment bis	$M_e^{max}$	50	[mNm]
Thermisch zulässiger Dauerstrom	$I_e^{max}$	2.80	[A]

#### *Elektronik*

Drehzahlsollwert analog Spannungssignal		$\pm 10$	[V]
Steigung der Kennlinie		1 000	[rpm/V]

Tabelle E.1: Eckdaten Elektromotor Faulhaber 3564 K024BC, Bürstenloser 44 Watt DC-Servomotor mit integrierter Steuerung [Fri01].

## Literatur

- [ÅB88] ÅBOM, M. ; BODÉN, H.: Error analysis of two-microphone measurements in ducts with flow. In: *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 83(6) (1988), S. 2429–2438
- [Åbo86] ÅBOM, M.: A note on random errors in frequency response estimators. In: *Journal of Sound and Vibration* Vol. 107(2) (1986), S. 355–358
- [Åbo91] ÅBOM, M.: Measurement of the scattering-matrix of acoustical two-ports. In: *Mechanical Systems and Signal Processing* Vol. 5 (1991), S. 89–104
- [Åbo92] ÅBOM, M.: A note on the experimental determination of acoustical two-port matrices. In: *Journal of Sound and Vibration* Vol. 155(1) (1992), S. 185–188
- [ASU99] ASUE: *Turbo KWK 1999, Kraftwärmekopplung mit Gasturbinen - internationale ASUE (Arbeitsgemeinschaft für sparsamen und umweltfreundlichen Energieverbrauch) Fachtagung, 24. und 25. März, Köln.* Vulkan Verlag, 1999. – ISBN 3–8027–5247–3
- [BÅ86] BODÉN, H. ; ÅBOM, M.: Influence of errors on the two-microphone method for measuring acoustic properties in ducts. In: *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 79(2) (1986), S. 541–549
- [BB69] BALABIAN, N. ; BICKART, T.A.: *Electric Network Theory.* New York : John Wiley and Sons, 1969
- [BB91] BENSON, F.A. ; BENSON, T.M.: *Fields, waves and transmission lines.* 1<sup>st</sup> ed. London : Chapman and Hall, 1991
- [BC78] BLASER, D.A. ; CHUNG, J.Y: A transfer function technique for determining the acoustic characteristics of duct systems with flow. In: *Proceedings of Internoise 1978, San Francisco* (1978)
- [BDL88] BLOXSIDGE, G.J. ; DOWLING, A.P. ; LANGHORNE, P.J.: Reheat buzz: An acoustically coupled combustion instability - Part 2, Theory. In: *Journal of Fluid Mechanics* Vol. 193 (1988), S. 445–473
- [Ben68] BENADE, A.H.: On the propagation of sound waves in a cylindrical conduit. In: *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 44(2) (1968), S. 616–623

- [Ber99a] BERNERS, David P.: *Acoustics and Signal Processing Techniques for Physical Modelling of Brass Instruments*, Stanford University, Diss., 1999
- [Ber99b] BERNERS, David P.: *Acoustics and Signal Processing Techniques for Physical Modelling of Brass Instruments*. <http://ccrma-www.stanford.edu/~dpberner/Defense/pres.html>. April 1999. – Thesis Defence Presentation
- [BFHL82] BERMAN, M.R. ; FLEMING, J.W. ; HARVEY, A.B. ; LIN, M.C.: In: *Nineteenth International Symposium on Combustion* (1982), S. 73–80
- [BJ74] BENADE, A.H. ; JANSSON, E.V.: On Plane and Spherical Waves in Tubes with Nonuniform Flare I. Theory of Radiation, Resonance Frequencies and Mode Conversion. In: *Acustica* Vol. 31 (1974), S. 80–98
- [BK97] BÜCHNER, H. ; KÜLSHEIMER, C.: Untersuchungen zum frequenzabhängigen Mischungs- und Reaktionsverhalten pulsierender, vorgemischter Drallflammen. In: *Gaswärme International* Vol. 46(2) (1997), S. 122–129
- [BKN69] BECKER, K. ; KLEY, D. ; NORSTROM, R.: OH\* chemiluminescence in hydrocarbon atom flames. In: *Twelfth International Symposium on Combustion* (1969), S. 405–413
- [BKS<sup>+</sup>02] BUICK, J.M. ; KEMP, J. ; SHARP, D.B. ; VAN WALSTIJN, M. ; CAMPBELL, D.M. ; SMITH, R.A.: Distinguishing between similar tubular objects using pulse reflectometry: a study of trumpet and cornet leadpipes. In: *Meas. Sci. Technol.* Vol. 13 (2002), S. 750–757
- [Bod91] BODÉN, H.: The multiple load method for measuring the source characteristics of time-invariant sources. In: *Journal of Sound and Vibration* Vol. 148(3) (1991), S. 437–453
- [BR02] BENJAMIN, S.F. ; ROBERTS, C.A.: Measuring flow velocity at elevated temperature with hot wire anemometry calibrated in cold flow. In: *Int'l Journal of Heat and Mass Transfer* Vol. 45 (2002), S. 703–706
- [Bro57] BROUWER, Willem: *The use of matrix algebra in geometrical optics*, TH Delft, Diss., 1957

- [Bro64] BROUWER, Willem: *Matrix Methods in Optical Instrument Design*. Benjamin, New York, 1964
- [Bro78] BROCKMEYER, Heinz: *Akustik für den Lüftungs- und Klimaingenieur*. 2. Aufl. Karlsruhe : Verlag C.F. Müller, 1978. – ISBN 3-7880-7102-8
- [Bru95] BRUUN, H.H.: *Hot Wire Anemometry Principles and Signal Analysis*. Oxford : Oxford University Press, 1995
- [BS74] BERGMANN ; SCHÄFER: *Lehrbuch der Experimentalphysik*. Bd. Band 1 - Mechanik, Akustik und Wärme. 9. Auflage. Berlin : De Gruyter, 1974. – ISBN 3-11-004861-2
- [BS94] BERNERS, D.P. ; SMITH, J.O.: On the Use of Schrödinger's Equation in the Analytic Determination of Horn Reflectance. In: *Proc. ICMC* (1994), S. 419-422
- [BS95] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAJEW, K.A.: *Teubner-Taschenbuch der Mathematik, Teil II*. 7. Aufl. Leipzig : Teubner Verlagsgesellschaft, 1995. – ISBN 3-8154-2100-4
- [BS96] BRONSTEIN, I.N. ; SEMENDJAJEW, K.A.: *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. Leipzig : Teubner Verlagsgesellschaft, 1996. – ISBN 3-8154-2001-6
- [Büc92] BÜCHNER, H.: *Experimentelle und theoretische Untersuchungen der Entstehungsmechanismen selbsterregter Druckschwingungen in technischen Vormisch-Verbrennungssystemen*. Verlag Shaker, Aachen, Universität Fridericiana Karlsruhe (T.H.), Diss., 1992
- [BW90a] BERENDT, Gerhard ; WEIMAR, Evelyn: *Mathematik für Physiker*. Bd. 2. 2. Aufl. Weinheim : VCH, 1990. – ISBN 3-527-28078-2
- [BW90b] BERENDT, Gerhard ; WEIMAR, Evelyn: *Mathematik für Physiker*. Bd. 1. 2. Aufl. Weinheim : VCH, 1990. – ISBN 3-527-28077-4
- [Car95] CARLSON, Gordon E.: *Signal and Linear System Analysis*. New York : John Wiley & Sons, 1995. – ISBN 0-471-12499-0
- [CB80a] CHUNG, J.Y. ; BLASER, D.A.: Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. I. Theory. In: *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 68(3) (1980), S. 907-913

- [CB80b] CHUNG, J.Y. ; BLASER, D.A.: Transfer function method of measuring in-duct acoustic properties. II. Experiment. In: *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 68(3) (1980), S. 914–921
- [Chu53] CHU, B.T.: On the generation of pressure waves at a plane flame front. In: *Fourth Int'l Symposium on Combustion* (1953), S. 603–612
- [CKL98] CHO, S. ; KIM, J. ; LEE, S.: Characteristics of thermoacoustic oscillation in a ducted flame burner. In: *Proceedings of the 36th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit AIAA 98-0473* (1998)
- [Cla58] CLARK, T.: Studies of OH, CO, CH and C<sub>2</sub> radiation from laminar and turbulent propane-air and ethylene-air flames. In: *NACA Technical Note 4266* (1958)
- [Coe83] COELHO, J.L. B.: *Acoustic characteristics of perforated liners in expansion chambers*, University of Southampton, Diss., 1983
- [Col66] COLLIN, R.E.: *Foundations for microwave engineering*. New York : McGraw-Hill, 1966
- [Czi96] CZICHOS, Horst: *Hütte: Grundlagen der Ingenieurwissenschaften*. 30. neu bearbeitete und erweiterte Auflage. Berlin : Akademischer Verein Hütte e.V., Springer Verlag, 1996. – ISBN 3-540-58740-3
- [Dan00] Dantec Measurement Technology: *FlowMap - Particle Imager Velocimetry Instrumentation*. 2000
- [Dav88] DAVIES, P.O.A.L.: Practical flow duct acoustics. In: *Journal of Sound and Vibration* Vol. 124 (1988), S. 91–115
- [DDRH91] DAVIDSON, D. ; DEAN, A. ; R., M. D. ; HANSON: Shock tube measurements of the reactions of CN with O and O<sub>2</sub>. In: *International Journal of Chemical Kinetics* Vol. 23(11) (1991), S. 1035–1050
- [DF83] DOWLING, A.P. ; FLOWCS, Williams J.: *Sound and Sources of Sound*. Chichester, West Sussex, England : Ellis Horwood Limited, 1983. – ISBN 0-85312-400-0
- [DMA88] DOIGE, A.G. ; MUNJAL, M.L. ; ALVES, H.S.: An improved experimental method for determining transfer matrices of pipeline

- elements with flow. In: *Proceedings of Noise-Con 88* (1988), S. 481–485
- [Dok98a] DOKUMACI, E.: An approximate analytic solution for plane sound wave transmission in inhomogeneous ducts. In: *Journal of Sound and Vibration* Vol. 217(5) (1998), S. 853–867
- [Dok98b] DOKUMACI, E.: An exact transfer matrix formulation of plane sound wave transmission in inhomogeneous ducts. In: *Journal of Sound and Vibration* Vol. 217(5) (1998), S. 868–882
- [Dol01] DOLEŽAL, R.: *Kombinierte Gas- und Dampfkraftwerke*. Berlin : Springer Verlag, 2001. – ISBN 3–540–67526–4
- [Dri96] DRISCOLL, T.A.: A MATLAB toolbox for Schwarz-Christoffel mapping. In: *ACM Trans. Math. Soft.* Vol. 22 (1996), S. 168–186
- [Dri02] DRISCOLL, T.A.: *Schwarz-Christoffel Toolbox Users Guide*. Version 2.2. Ewing Hall, University of Delaware, Newark: Department of Mathematical Sciences, 2002. – <http://www.math.udel.edu/~driscoll/SC>
- [DV92] DANDY, D. ; VOSEN, S.: Numerical and experimental studies of hydroxyl radical chemiluminescence in methane-air flames. In: *Combustion Science and Technology* Vol. 82 (1992), S. 131–150
- [Fel99] FELLEBERG, Günter: *Umweltbelastungen*. Stuttgart : Teubner, 1999. – ISBN 3–519–00267–1
- [Fen03] FENT, Karl: *Ökotoxikologie*. 2. Auflage. Stuttgart : Georg Thieme Verlag, 2003. – ISBN 3–13–109992–5
- [FHN97] FÜHRER, A. ; HEIDEMANN, K. ; NERETTER, W.: *Grundgebiete der Elektrotechnik*. Bd. Band 1 - stationäre Vorgänge. 6. Auflage. München : Hanser Verlag, 1997. – ISBN 3–446–19067–8
- [FLM85] FUMOUX, C. ; LEDUCQ, D. ; MARGUETTE, G.: Transfer-matrix measurement of hydraulic piping system elements. In: *Proceedings of Inter-Noise 85* (1985), S. 1239–1242
- [FPRS01] FLOHR, P. ; PASCHEREIT, C.O. ; VAN ROON, B. ; SCHUERMANS, B.B.H.: Using CFD time-delay modeling of premixed flames. In: *Proceedings of the IGTI 2001 ASME TURBO EXPO, New Orleans, Louisiana, USA* paper 2001-GT-0376 (2001)

- [Fri01] Fritz Faulhaber GmbH: *Datenblatt Bürstenloser DC-Servomotor Type 3564 K024BC*. Jul. 2001
- [Gay74] GAYDON, A.: *Spectroscopy of Flames*. 2<sup>nd</sup> ed. London : Chapman and Hall, 1974
- [GB75] GERRARD, Anthony ; BURCH, James M.: *Introduction to Matrix Methods in Optics*. Wiley, London, 1975. – ISBN 0–471–29685–6
- [GC86] GARLAND, N. ; CROSLEY, D.: On the collisional quenching of electronically excited OH, NH and CH in flames. In: *Twenty-First International Symposium on Combustion* (1986), S. 1693–1702
- [Gen03a] GENTEMANN, A.M.G. *Transfermatrix einer kompakten Flamme*. persönliche Kommunikation. 2003
- [Gen03b] GENTEMANN, A.M.G. *Vorläufige Resultate von CFD-Rechnungen zu Transfermatrizen des TD<sup>1</sup> Brenners*. persönliche Kommunikation. 2003
- [GFEP03] GENTEMANN, A.M.G. ; FISCHER, A. ; EVESQUE, S. ; POLIFKE, W.: Acoustic Transfer Matrix Reconstruction and Analysis for Ducts with Sudden Change of Area. In: *9th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference and Exhibit, Hilton Head* (2003)
- [Gup91] GUPTA, V.H.: *On the flow-acoustic modelling of the exhaust system of a reciprocating internal combustion engine*, Indian Institute of Science, Diss., 1991
- [Hab00] HABER, Ludwig C.: *An investigation into the origin, measurement and application of chemiluminescent light emissions from premixed flames*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Diplomarbeit, 2000
- [HB97] HAMILTON, Mark F. ; BLACKSTOCK, David T.: *Nonlinear Acoustics*. San Diego, CA : Academic Press, 1997. – ISBN 0–12–321860–8
- [HD02] HEUCK, Klaus ; DETTMANN, Klaus D.: *Elektrische Energieerzeugung*. 5. Auflage. Braunschweig : Vieweg Verlag, 2002. – ISBN 3–528–48547–7
- [Hec89] HECHT, Eugene: *Optik*. Addison Wesley, Reading/Mass., 1989

- [Her97] HERMANN, J.: *Anregungsmechanismen und aktive Dämpfung (AIC) selbsterregter Verbrennungsschwingungen in Flüssigkraftstoffsystemen*. VDI Verlag, Düsseldorf, Technische Universität München, Diss., 1997
- [Hir03] HIRSCH, C. *Low-Order Modell des  $TD^t$  Brenners*. persönliche Kommunikation. 2003
- [HVSK00a] HABER, L.C. ; VANDSBURGER, U. ; SAUNDERS, W.R. ; KHANNA, V.K.: An examination of the relationship between chemiluminescent light emissions and heat release rate under non-adiabatic conditions. In: *Proceedings of the IGTI 2000 ASME TURBO EXPO* paper 2000-GT-0121 (2000)
- [HVSK00b] HABER, L.C. ; VANDSBURGER, U. ; SAUNDERS, W.R. ; KHANNA, V.K.: An Experimental Examination of the Relationship between Chemiluminescent Light Emissions and Heat-release Rate Under Non-Adiabatic Conditions. In: *Symposium on Active Control Technology for Enhanced Performance Operational Capabilities of Military Aircraft, Land Vehicles and Sea Vehicles, Braunschweig, Germany May 2000* Paper 20 (2000)
- [IEA02] IEA: *Key World Energy Statistics from the IEA*. Paris : IEA International Energy Agency, 2002
- [Ise91] ISERMANN, R.: *Identifikation dynamischer Systeme 1, Grundlegende Methoden*. 2. Aufl. Springer Verlag, 1991. – ISBN 3–540–54924–2
- [Kay98] KAY, Stephen M.: *Fundamentals of statistical signal processing: Detection theory*. Bd. 2. Upper Saddle River, New Jersey : PTR Prentice Hall, 1998. – ISBN 0–13–504135–X
- [KB61] KRISHNAMACHARI, S.L.N.G. ; BROIDA, H.: Effect of molecular oxygen on the emission spectra of atomic oxygen-acetylene flames. In: *Journal of Chemical Physics* Vol. 34(5) (1961), S. 1709–11
- [KB02] KÜLSHEIMER, C. ; BÜCHNER, H.: Combustion Dynamics of Turbulent Swirling Flames. In: *Combustion and Flame* Vol. 131 (2002), S. 70–84

- [KBBL01] KÜLSHEIMER, C. ; BÜCHNER, H. ; BOCKHORN, H. ; LAUER, G.: Untersuchungen zum periodisch-instationären Reaktionsverhalten vorgemischter Drallflammen mittels OH-LIPF und Rayleigh-Streuung. In: *VDI-Berichte, 20. Deutscher Flammentag* Nr. 1629 (2001)
- [Kee84] KEEFE, D.H.: Acoustical wave propagation in cylindrical ducts: transmission line parameter approximations for isothermal and nonisothermal boundary conditions. In: *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 75 (1984), S. 58–62
- [Kha01] KHANNA, Vivek K.: *A Study of the Dynamics of Laminar and Turbulent Fully and Partially Premixed Flames*, Virginia Polytechnic Institute and State University, Diss., 2001
- [Kin14] KING, L.V.: On the convection of heat from small cylinders in a stream of fluid: determination of the convection constants of small platinum wires with applications to hot wire anemometry. In: *Philosophical Transactions of Royal Society A* 214 (1914), S. 373–432
- [Kir68] KIRCHHOFF, G.: Über den Einfluss der Wärmeleitung in einem Gase auf die Schallbewegung. In: *Pogg. Ann.* Vol. 134(6) (1868), S. 177–193
- [KL62] KELLY, J.L.Jr. ; LOCHBAUM, C.C.: Speech synthesis. In: *Proc. Fourth Int. Congr. Acoust., Copenhagen, Denmark* Paper G42 (1962), S. 1–4
- [KM77] KATHURIYA, M.L ; MUNJAL, M.L.: Measurement of the acoustic impedance of a black box at low frequencies using a shorter impedance tube. In: *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 62 (1977), S. 751–754
- [KS98] KUMAR, B.M. ; SUJITH, R.I.: Exact solution for one-dimensional acoustic fields in ducts with polynomial temperature profiles. In: *Journal of Vibrations and Acoustics* Vol. 120 (1998), S. 965–969
- [Kun04] KUNZE, K.: *Untersuchung des thermoakustischen Flammenübertragungsverhaltens in einer Ringbrennkammer*, Technische Universität München, Diss., 2004
- [KVSB02] KHANNA, V. ; VANDSBURGER, U. ; SAUNDERS, W. ; BAUMANN, W.: Dynamic Analysis of Swirl Stabilized Turbulent Gaseous

- Flames. In: *Proceedings of the IGTI 2002 ASME TURBO EX-PO, Amsterdam, Netherlands* paper GT-2002-30061 (2002)
- [LAB95] LAVRENTJEV, J. ; ABOM, M. ; BODÉN, H.: A measurement method for determining the source data of acoustic two-port sources. In: *Journal of Sound and Vibration* Vol. 183(3) (1995), S. 517–531
- [Lan88] LANGHORNE, P.J.: Reheat buzz: An acoustically coupled combustion instability - Part 1, Experiment. In: *Journal of Fluid Mechanics* Vol. 193 (1988), S. 417–443
- [LBÅ92] LAVRENTJEV, J. ; BODÉN, H. ; ÅBOM, M.: A linearity test for acoustic one-port systems. In: *Journal of Sound and Vibration* Vol. 155 (1992), S. 534–539
- [LD83] LUNG, T.Y. ; DOIGE, A.G.: A time-averaging transient testing method for acoustic properties of piping systems and mufflers with flow. In: *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 73(3) (1983), S. 867–876
- [Len80] LENZ, W.: *Die dynamischen Eigenschaften von Flammen und ihr Einfluss auf die Entstehung selbsterregter Brennkammerschwingungen*, Technische Hochschule Karlsruhe, Diss., 1980
- [Len01] LENK, A.: *Elektromechanische Systeme - mechanische und akustische Netzwerke, deren Wechselwirkungen und Anwendungen*. Berlin : Springer Verlag, 2001
- [Leu02] LEUCKEL, W.: *Selbsterregte Gasschwingungen in industriellen Verbrennungssystemen - Mechanismen, Einflussgrößen, Berechnung*. Vortrag Thermodynamik Seminar, 21. Juni 2002, Technische Universität München, 2002
- [Lig78] LIGHTHILL, James: *Waves in Fluids*. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 1978. – ISBN 0–521–01045–4
- [Lom86] LOMAS, C.G.: *Fundamentals of Hot Wire Anemometry*. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 1986
- [LS03] LECHNER, Christof ; SEUME, Jörg: *Stationäre Gasturbinen*. 1. Auflage. Berlin : Springer Verlag, 2003. – ISBN 3–540–42831–3

- [LZ98] LIEUWEN, T. ; ZINN, B.T.: Application of boundary element methods in modeling multidimensional flame-acoustic interactions. In: *20<sup>th</sup> International Conference on the Boundary Element Method, August 1998* (1998), S. 541–551. ISBN 1–85312–592–X
- [Mar63] MARQUARDT, D.W.: An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. In: *J. Soc. Ind. Appl. Math.* Vol. 11 (1963), S. 431–441
- [MCL88] MARR, Iain L. ; CRESSER, Malcolm S. ; LAMBERT, J.: *Umweltanalytik*. 1. Auflage. Stuttgart : Georg Thieme Verlag, 1988. – ISBN 3–13–672101–2
- [MD90] MUNJAL, M.L. ; DOIGE, A.G.: Theory of a Two Source-Location Method for Direct Experimental Evaluation of the Four-Pole Parameters of an Aeroacoustic Element. In: *Journal of Sound and Vibration* Vol. 141(2) (1990), S. 323–333
- [Mes91] MESSIAH, Albert: *Quantenmechanik*. 2. Auflage. Berlin : de Gruyter, 1991 ( Band 1). – ISBN 3–11–011452–6
- [MG99] MACGILLIVRAY, T.J. ; GREATED, C.A.: Acoustic pulse reflectometry for the measurement of tubular structures. In: *Acustica* Vol 85 (1999), S. 217
- [MI68] MORSE, Philip M. ; INGARD, K. U.: *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, Princeton/NJ, 1968. – ISBN 0–691–02401–4
- [Mun75] MUNJAL, M.L.: Velocity ratio-cum-transfer matrix method for the evaluation of a muffler with mean flow. In: *Journal of Sound and Vibration* Vol. 39 (1975), S. 105–119
- [Mun87] MUNJAL, M.L.: *Acoustics of Ducts and Mufflers*. Wiley, 1987
- [Neu79] NEUMÜLLER, Otto-Albrecht: *Römpps Chemie-Lexikon*. Bd. Band 1. 8. Auflage. Stuttgart : Franckh, 1979. – ISBN 3–440–04511–0
- [NFA83] NISHIMURA, N. ; FUKATSU, S. ; AKUMATSU, K.: Measurements of transfer matrices of duct elements and source impedances, using the pair-microphone method. In: *Proceedings of Inter-Noise 83* (1983), S. 395–398

- [NMW98] NAJM, H.P.P. ; MUELLER, C. ; WYCKOFF, P.: On the adequacy of certain experimental observables as measurements of flame burning rate. In: *Combustion and Flame* Vol. 113 (1998), S. 312–332
- [OEC02] OECD: *OECD Environmental Data Compendium 2002*. Paris : Organisation for Economic Cooperation and Development, 2002
- [Ols58] OLSON, Harry F.: *Dynamical analogies*. Princeton, New Jersey : Van Nostrand, 1958
- [O'N63] O'NEILL, Edward L.: *Introduction to Statistical Optics*. Addison-Wesley, Reading/Mass., 1963
- [Osr00] Osram Opto Semiconductors: *Datenblatt Infineon SFH 530 Ultraviolet Selective Sensor*. Dez. 2000
- [Par91] PARLAR, Haram: *Chemische Ökotoxikologie*. Berlin : Springer Verlag, 1991. – ISBN 3–540–53625–6
- [Pet93] PETERS, M.C.A.M.: *Aeroacoustic sources in internal flow*, Technische Universiteit Eindhoven, Eindhoven, NL, Diss., 1993
- [Phi00] PHILIPPOW, E.: *Grundlagen der Elektrotechnik*. 10. Auflage. Berlin : Verlag Technik, 2000. – ISBN 3–341–01241–9
- [PHRW93] PETERS, M.C.A.M. ; HIRSCHBERG, A. ; REIJNEN, A.J. ; WIJNANDS, A.P.J: Damping and reflection coefficient measurement for an open pipe at low Mach and Helmholtz numbers. In: *J. Fluid Mech.* Vol. 256 (1993), S. 499–534
- [Pie81] PIERCE, Allan D.: *Acoustics - An introduction to its physical principles and applications*. Boston : McGraw-Hill, 1981. – ISBN 0–07–049961–6
- [Pol02] POLIFKE, W. *Transfer Matrix of a Compact Contraction with Loss*. persönliche Kommunikation. Dez. 2002
- [Pop00] POPE, Stephen B.: *Turbulent flows*. 1<sup>st</sup> edition. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 2000. – ISBN 0–521–59886–9
- [PP98] PASCHEREIT, C.O. ; POLIFKE, W.: Investigation of the thermoacoustic characteristics of a lean premixed gas turbine burner. In: *Proceedings of the IGTI 1998 ASME TURBO EXPO* paper 98-GT-582 (1998)

- [PPS97] POLIFKE, W. ; PASCHEREIT, C.O. ; SATTELMAYER, T.: A universally applicable stability criterion for complex thermoacoustic systems. In: *18. Deutsch-Niederländischer Flammentag, Delft, NL, 1997* (1997), S. 455–460
- [Pre86] PRESS, William H.: *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing*. Cambridge, UK : Cambridge University Press, 1986. – ISBN 0–521–30811–9
- [PSPM99] PASCHEREIT, C.O. ; SCHUERMANS, B.B.H. ; POLIFKE, W. ; MATTSON, O.: Measurement of transfer matrices and source terms of premixed flames. In: *Proceedings of the IGTI 1999 ASME TURBO EXPO, Indianapolis, Indiana, USA* paper 99-GT-133 (1999)
- [Put93] PUTLAND, G.: Every one-parameter acoustic field obeys Webster's horn equation. In: *The Journal of the Audio Engineering Society* Vol. 41(6) (1993), S. 435–451
- [Put94] PUTLAND, G.R.: *Modeling of Horns and Enclosures for Loudspeakers*, University of Queensland, Diss., 1994
- [RA77] RONNEBERGER, D. ; AHRENS, C.: Wall shear stress caused by small amplitude perturbations of turbulent boundary layer flow: an experimental investigation. In: *J. Fluid Mech.* Vol. 83 (3) (1977), S. 433–464
- [Ras86] RAST, J.: *Formeln der Mathematik, Netz.* 6. Aufl. München : Carl Hanser Verlag, 1986. – ISBN 3–446–14610–5
- [RAS95a] ROSENHOUSE, G. ; AMIR, N. ; SHIMONY, U.: A discrete model for tubular acoustic systems with varying cross section-the direct and inverse problems. Part 1: theory. In: *Acustica* Vol. 81 (1995), S. 450–62
- [RAS95b] ROSENHOUSE, G. ; AMIR, N. ; SHIMONY, U.: A discrete model for tubular acoustic systems with varying cross section-the direct and inverse problems. Part 2: experiments. In: *Acustica* Vol. 81 (1995), S. 463–74
- [Ray78] RAYLEIGH, Lord: The explanation of certain acoustic phenomena. In: *Nature* Vol. 18 (1878), S. 319–321

- [Ray45] RAYLEIGH, Lord: *The theory of sound*. 2<sup>nd</sup> ed. New York : Dover Publications, 1945
- [RF94] ROSSING, T.D. ; FLETCHER, N.H.: *Principles of sound and vibration*. New York : Springer Verlag, 1994. – ISBN 0–387–94304–8
- [RG75] RABINER, L.R. ; GOLD, B.: *Theory and application of digital signal processing*. Eaglewood Cliffs, NJ : Prentice-Hall, 1975. – ISBN 0–13–914101–4
- [RH03] RIENSTRA, S.W. ; HIRSCHBERG, A.: *An Introduction to Acoustics*. extended and revised edition of IWDE 92-06. Eindhoven University of Technology, 2003
- [Rie02] RIENSTRA, S.W.: Websters Equation Revisited. In: *8<sup>th</sup> AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Breckenridge, CO, 17-19 June* paper AIAA 2002-2520 (2002)
- [RWK98] RAFFEL, M. ; WILLERT, C. E. ; KOMPENHANS, J.: *Particle image velocimetry: a practical guide*. Springer-Verlag, 1998
- [Sch91] SCHÜSLER, H.W.: *Netzwerke, Signale und Systeme*. Bd. Band 1 - Systemtheorie linearer Netzwerke. 3. Auflage. Berlin : Springer Verlag, 1991. – ISBN 3–540–53791–0
- [Sch92] SCHRÜFER, E.: *Signalverarbeitung*. 2. Aufl. München : Carl Hanser Verlag, 1992. – ISBN 3–446–16563–0
- [Ses02] SESTERHENN, J.: *Skriptum zur Vorlesung Numerische Akustik*. Technische Universität München, 2002
- [SFB95] SAMANIEGO, J.M. ; F.N.EGOLFOPOULOS ; BOWMAN, C.T.: CO<sub>2</sub>\* Chemiluminescence in Premixed Flames. In: *Combust. Sci. and Tech.* Vol. 109 (1995), S. 183–203
- [Sha96] SHARP, David B.: *Acoustic pulse reflectometry for the measurement of musical wind instruments*, University of Edinburgh, Diss., 1996
- [Sie95] Siemens Semiconductor Group: *Datenblatt Miniatur-Reflexlichtschranke Siemens SFH 900*. Okt. 1995
- [SL91] SCHINZINGER, R. ; LAURA, P.A.A.: *Conformal Mapping: Methods and Applications*. Amsterdam : Elsevier Science Publishers B.V., 1991. – ISBN 0–444–88806–3

- [SPP99] SCHUERMANS, B.B.H. ; POLIFKE, W. ; PASCHEREIT, C.O.: Modeling Transfer Matrices of Premixed Flames and Comparison with Experimental Result. In: *Proceedings of the IGTI 1999 ASME TURBO EXPO, Indianapolis, Indiana, USA* paper 99-GT-132 (1999)
- [SR77] SEYBERT, A.F. ; ROSS, D.F.: Experimental Determination of Acoustic Properties Using a Two-Microphone Random Excitation Technique. In: *J. Acoust. Soc. Am.* Vol. 61 (1977), S. 1362–1370
- [TD79a] TO, C.W.S. ; DOIGE, A.G.: A transient testing technique for the determination of matrix parameters of acoustic systems, I: theory and principles. In: *Journal of Sound and Vibration* Vol. 62(2) (1979), S. 207–222
- [TD79b] TO, C.W.S. ; DOIGE, A.G.: A transient testing technique for the determination of matrix parameters of acoustic systems, II: Experimental procedures and results. In: *Journal of Sound and Vibration* Vol. 62(2) (1979), S. 223–233
- [Tij75] TIJDEMAN, H.: On the propagation of sound in cylindrical tubes. In: *Journal of Sound and Vibration* Vol. 39(1) (1975), S. 1–33
- [To75] TO, C.W.S.: *A transient testing technique for matrix parameters of acoustic systems*, University of Calgary, Canada, Diplomarbeit, 1975
- [To83] TO, C.W.S.: A note on various formulations for four-pole parameters of a pipe with mean flow. In: *Journal of Sound and Vibration* Vol. 88(2) (1983), S. 207–211
- [Tre80] TREFETHEN, L.N.: Numerical computation of the Schwarz-Christoffel transformation. In: *SIAM J. Sci. Stat. Comput.* Vol. 1(1) (1980), S. 82–102
- [Tru89] TRUCKENBRODT, E.: *Fluidmechanik*. Bd. 1. 3. Aufl. Berlin : Springer, Berlin, 1989. – 226 S
- [Tur00] TURNS, Stephen R.: *An Introduction to Combustion*. 2<sup>nd</sup> ed. Boston : McGraw-Hill, 2000. – ISBN 0-07-235044-X
- [Väl95] VÄLIMÄKI, Vesa: *Discrete-Time Modeling of Acoustic Tubes Using Fractional Delay Filters*, Helsinki University of Technology, Diss., 1995

- [Ves93] VESELY, Franz J.: *Computational Physics - Einführung in die Computative Physik*. Wien : WUV Universitätsverlag, 1993. – ISBN 3–85114–122–9
- [Web19] WEBSTER, A.G.: Acoustical impedance, and the theory of horns and of the phonograph. In: *Proc. Natl. Acad. Sci. (U.S.)* Vol. 5 (1919), S. 275–282. – Abdruck in: *Journal of Audio Engineering Society*, 1977, 25 (1-2), S. 24-28
- [Whi74] WHITHAM, G.B.: *Linear and Nonlinear Waves*. 17<sup>th</sup> ed. New York : Wiley Interscience Series of Texts, 1974. – ISBN 0–471–94090–9
- [WLTS98] WALSH, K.T. ; LONG, M.B. ; TANOFF, M.A. ; SMOOKE, M.D.: Experimental and computational study of CH, CH\* and OH\* in an axisymmetric laminar diffusion flame. In: *Twenty-Seventh International Symposium on Combustion* (1998), S. 615–623
- [Wol99] WOLFRAM, Stephen: *The Mathematica book [Mathematica version 4]*. 2<sup>nd</sup> ed. Champaign, Illinois : Wolfram Media, 1999. – ISBN 0–521–64314–7
- [WV97] WALSTIJN, M.van ; V.VÄLIMÄKI: Digital waveguide modeling of flared acoustical tubes. In: *Proceedings of the 1997 International Computer Music Conference, Greece* (1997)
- [Yue03] YUEN, Shao W.: *Theoretical Studies to the Identification of Thermoacoustic Systems*, Technische Universität München, Diplomarbeit, 2003
- [Zau89] ZAUDERER, E.: *Partial Differential Equations of Applied Mathematics*. 2<sup>nd</sup> ed. New York : Wiley, 1989

## Lebenslauf

### Persönliche Daten:

Name: Andreas Fischer  
Geburtsdatum: 2. Okt. 1971  
Geburtsort: Mödling (A)  
Eltern: Eva Fischer, geb. Berl und Günther Fischer  
Familienstand: verheiratet mit Elena Kalambokis  
Nationalität: Österreich

### Schulbildung:

1976 - 1980 Volksschule Theresiengasse, Mödling (A)  
1980 - 1989 Bundesrealgymnasium Franz Keimgasse, Mödling (A)  
Abschluss: Matura

### Studium:

1989 - 1996 Universität Wien, Wien (A)  
Studium der Physik  
Abschluss: Magister rer. nat.

### Beruflicher Werdegang:

1996 - 1997 Weizmann Institute, Rehovot (IL)  
1997 - 1998 Zivildienst, Geriatriezentrum am Wienerwald, Wien (A)  
1998 - 2003 Technische Universität München  
Lehrstuhl für Thermodynamik  
Wissenschaftlicher Mitarbeiter