

TECHNISCHE UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Institut für Energietechnik

Lehrstuhl für Thermodynamik

Verlustmechanismen in Raketenbrennkammern

Robert Kathan

Vollständiger Abdruck der von der Fakultät für Maschinenwesen der
Technischen Universität München zur Erlangung des akademischen Grades
eines

DOKTOR – INGENIEURS

genehmigten Dissertation.

Vorsitzender:

Univ.-Prof. dr. ir. Daniel Rixen

Prüfer der Dissertation:

1. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattelmayer
2. Univ.-Prof. Dr.-Ing. Oskar J. Haidn

Die Dissertation wurde am 13.2.2013 bei der Technischen Universität München eingereicht
und durch die Fakultät für Maschinenwesen am 6.5.2013 angenommen.

Danksagung

Die vorliegende Arbeit entstand während meiner Tätigkeit am Lehrstuhl für Thermodynamik an der Technischen Universität in München von Oktober 2004 bis Februar 2012. Sie wurde von der Firma EADS Astrium GmbH und der Bayerischen Forschungstiftung (BFS) im Rahmen von unterschiedlichen Forschungsprojekten gefördert.

Mein ganz besonderer Dank gilt meinem Doktorvater Herrn Prof. Dr.-Ing. Thomas Sattelmayer für die Betreuung meiner Arbeit und das mir entgegengebrachte Vertrauen. Seine Unterstützung sowie die von ihm gewährten Freiräume waren für das Gelingen meiner wissenschaftlichen Arbeiten besonders hilfreich.

Herrn Prof. Dr.-Ing. Oskar J. Haidn danke ich für die freundliche Übernahme des Koreferates und Herrn Prof. Dr. Ir. Daniel Rixen für den Vorsitz bei der mündlichen Prüfung.

Mein Dank geht auch an meine Kolleginnen und Kollegen, zum einen für die fachliche Unterstützung, zum anderen aber auch für die freundschaftliche Atmosphäre am Lehrstuhl. Insbesondere möchte ich hier meinen langjährigen Bürokollegen Martin Hauser erwähnen. Besonders danke ich meinen Kollegen aus der Raumfahrtgruppe, Daniel Morgenweck, Martin Schmid und Moritz Schulze für ihre Unterstützung und die vielen wertvollen Diskussionen. Martin Schmid und Wolfgang Teuchner haben diese Arbeit in ihrer Freizeit Korrektur gelesen. Vielen Dank!

Zum Gelingen dieser Arbeit hat eine ganze Reihe von Studenten im Rahmen von Hiwitätigkeiten, Semester- und Diplomarbeiten beigetragen, denen ich für ihren Einsatz und die tatkräftige Unterstützung danken möchte. Ganz besonders hervorheben möchte ich dabei Thomas Fiala. Durch sein überdurchschnittliches Engagement und seine hervorragenden Fachkenntnisse hat er einen sehr wesentlichen Beitrag dazu geleistet.

Beim Industriepartner Astrium GmbH (TP-24) möchte ich mich an dieser Stelle für die Unterstützung bedanken. Herrn Dr.-Ing. Michael Oschwald vom DLR in Lampoldshausen danke ich für die Integration meiner Arbeit in die von ihm geleitete internationale Forschungsgruppe REST (**R**ocket **E**ngine **S**tability **T**echnique).

Abschließend möchte ich mich bei meiner Mutter für die große Unterstützung während meiner gesamten Ausbildungszeit bedanken.

München, im Juni 2013

Robert Kathan

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	xiii
Tabellenverzeichnis	xvi
Nomenklatur	xx
1. Einleitung	1
1.1. Überblick	1
1.2. Zielsetzung der Arbeit	5
1.3. Gliederung	6
2. Theoretische Grundlagen	9
2.1. Grundgleichungen	9
2.2. Modale Zerlegung für zylinderförmige Rohre	11
2.2.1. Radiale Richtung	14
2.2.2. Umfangsrichtung	16
2.2.3. Axiale Richtung	16
2.3. Ausbreitungsfähigkeit von Eigenmoden	21
2.4. Gruppengeschwindigkeit	24
2.5. Reflektionsfaktoren und Admittanzen	26
2.6. Bilanzierung der akustischen Energie	27
2.6.1. Zusammenhang zwischen Intensität und Admittanz . . .	31
2.6.2. Zusammenhang zwischen Dämpfung, akustischer Energie und Intensität	33
3. Experimentelle Methoden und Analyseverfahren	35
3.1. Messwerterfassung und Datenaufbereitung	35
3.2. Die Multimikrofonmethode	38
3.3. Validierung der modalen Zerlegung und Feldrekonstruktion . .	41
3.4. Admittanzen	49
3.5. Transfermatrizen	50

3.6.	Bilanzierung der akustischen Energie in einem kompakten Element	52
3.7.	Eigenfrequenzen und Dämpfung	53
3.7.1.	Abklingendes Drucksignal im Zeitbereich	54
3.7.2.	Frequenzantwort des Drucks	55
3.7.3.	Frequenzantwort der akustischen Energie	57
3.7.4.	Low-Order Methode	58
4.	Versuchsanlage	65
4.1.	Komponenten	65
4.1.1.	Luftversorgung	66
4.1.2.	Sirene	66
4.1.3.	Einströmkopf	68
4.1.4.	Absorbermodul	69
4.1.5.	Messmodule	70
4.1.6.	Düsenmodule	70
4.1.7.	Mess-, Regeleinrichtung und Steuerungselektronik	71
4.2.	Konfigurationen	73
4.2.1.	Düsenadmittanzen	74
4.2.2.	Faceplateadmittanzen	75
4.2.3.	Absorbertransfermatrizen	75
4.2.4.	Abklingverhalten	76
5.	Akustische Eigenschaften der Komponenten der Versuchsanlage	79
5.1.	Sirenenanregung	79
5.2.	Düse	81
5.2.1.	Numerische Methoden zur Bestimmung von Düsenadmittanzen	81
5.2.2.	Experimentell bestimmte Düsenadmittanzen und Vergleich mit numerischen Ergebnissen	82
5.2.3.	Einfluss der Düsengeometrie auf den akustischen Fluss	86
5.3.	Absorberring	89
5.3.1.	Absorbertransfermatrizen	89
5.3.2.	Energiebilanz von Absorberringen	93
5.4.	Faceplate	93
6.	Integraler Energiehaushalt	95
6.1.	Experimentelle Ergebnisse	96
6.1.1.	Breitbandige Anregung	96

6.1.2. Sirenenanregung	100
6.2. Vergleich mit numerischen Ergebnissen	106
6.2.1. Ohne Absorber	106
6.2.2. Absorbereinfluss	107
6.3. Ergebnisübersicht für Modenklasse 10	109
7. Zusammenfassung	113
A. Anhang: Auslegungsberechnung und Geometrie	117
A.1. Düsenauslegung	117
A.1.1. Düse A	118
A.1.2. Düse B	119
A.1.3. Berechnung von Machzahl und Druckverlust am Lochblech	120
B. Anhang: Herleitungen	125
B.1. Eigenwerte der Besselfunktion	125
B.2. Voraussetzungen für die Existenz einer reinen T1-Mode	126
B.3. Bestimmung von Eigenfrequenz und Dämpfungswert aus der Halbwertsbreite	127
B.4. Berechnung der Hilfsvariablen κ^{\pm}	128
B.5. Zusammenhang zwischen Admittanz und Reflektionsfaktor . . .	129
B.6. Berechnung des zeitlichen Mittels	131
B.7. Herleitung der akustischen Energie einer zylindrischen Geometrie	132
B.8. Energiebilanz an einem kompakten akustischen Element auf Basis von Transfermatrizen	136
C. Anhang: Versuchsstand und Messtechnik	141
C.1. Admittanz, Düse A	142
C.2. Admittanz, Düse B	144
C.3. Admittanz, Faceplate	146
C.4. Dämpfung	148
C.5. Transfermatrix Absorber, Anregung von stromauf, ohne Durch- strömung	150
C.6. Verwendete Messtechnik	152
D. Anhang: Weitere Ergebnisse	153
D.1. Einfluss der Düsengeometrie auf den akustischen Fluss	154
D.2. Faceplateadmittanzen	157

D.3. Reflektionsfaktoren von Faceplate und Düse A	158
D.4. Abklingendes Drucksignal	159
D.5. Absorbertransfermatrizen	161
D.6. Energiebilanz an Absorbern	168
E. Anhang: Verzeichnis betreuter Studienarbeiten	169
Literaturverzeichnis	171

Abbildungsverzeichnis

1.1. Schnitt durch ein Raketentriebwerk. Bei dem dargestellten Triebwerk handelt es um das Vulcain II -Triebwerk von Astrium (eigene Aufnahme vom 9.11.2005)	2
2.1. Druck- und Geschwindigkeitsverteilung verschiedener Modenformen (nach NASA SP-194 [31], S. 391) in Kreisquerschnitten	13
2.2. Klassifizierung der Moden nach m und n	14
2.3. Räumliche Verteilung der radialen Ansatzfunktion R_{mn} aufgetragen über der radialen Richtung in einem Zylinder mit schallharter Mantelfläche für verschiedene Moden (L = Longitudinal, R = Radial, T = Transversal)	15
2.4. Zusammenhang zwischen verschiedenen Wellenzahlen k (k^I , k^{II} , k^{III}), der radialen k_{mn}^r und der axialen Wellenzahl k_{mn}^{x+} für $k > k_{mn}^r$ bei $M = 0$ (oben) und $M > 0$ (unten) mit Durchströmung in positiver Richtung.	18
2.5. Axiale Wellenzahlen für $m = 0$ und $n = 0$, $R = 0.046$ m, für verschiedene Machzahlen	20
2.6. Axiale Wellenzahlen für $m = 1$ und $n = 0$, $R = 0.046$ m, für verschiedene Machzahlen	20
2.7. Stromab (f_{10}) und stromauf (g_{10}) laufende Wellen in einem Rohr mit einem Radius von $R = 0.046$ m, transversale Ordnung $m = 1$, radiale Ordnung $n = 0$, mit $\hat{f}_{10}(x = 0.1) = \hat{g}_{10}(x = 0.1) = 1$ und $M = 0.24$, Durchströmung in positiver Koordinatenrichtung für verschiedene Frequenzen	23
2.8. Gruppengeschwindigkeit in x-Richtung für $m = 1 / n = 0$	25
2.9. Lokale Energiedichte E , lokale Intensität \vec{I} , Flüsse \mathcal{I}_{S_k} über die Kontrollflächen S_k und akustische Energie \mathcal{E} am Beispiel eines Zylinders	28
2.10. Grenzlinien an denen die Intensität ihr Vorzeichen wechselt in Abhängigkeit der Machzahl	33

3.1. Kalibrationseinrichtung mit 4 PCBs, davon dient einer als Referenzsensor	36
3.2. Darstellung der Druckvektoren zur Datenaufbereitung	36
3.3. Kalibrationskurve eines Sensors im Vergleich zum Referenzsensor (PCB 9507)	37
3.4. Messwerte bei 2100 Hz und Mittelwert (Versuchsaufbau siehe C.1)	38
3.5. Schema der Multimikrofonmethode zur Bestimmung der akustischen Wellen in einem verlustfreien Rohrstück	39
3.6. Sensor Reproduzierbarkeit bei 1000 Hz in axialer Richtung, Mode $m = 0 / n = 0$	43
3.7. Sensor Reproduzierbarkeit bei 1000 Hz in Umfangsrichtung, Mode $m = 0 / n = 0$	44
3.8. Sensor Reproduzierbarkeit bei 2100 Hz in axialer Richtung, Moden $m = 0 / n = 0$ und $m = 1 / n = 0$	45
3.9. Sensor Reproduzierbarkeit bei 2100 Hz in Umfangsrichtung, Moden $m = 0 / n = 0$ und $m = 1 / n = 0$	46
3.10. Sensor Reproduzierbarkeit bei 3800 Hz in axialer Richtung, Moden $m = 0 / n = 0$, $m = 1 / n = 0$ und $m = 2 / n = 0$	47
3.11. Sensor Reproduzierbarkeit bei 3800 Hz in Umfangsrichtung, Moden $m = 0 / n = 0$, $m = 1 / n = 0$ und $m = 2 / n = 0$	48
3.12. Vergleich gemessener und rekonstruierter Druck, jeweils ein Sensor, mit Düse A (links, Aufbau: C.1) und Düse B (rechts, Aufbau: C.2)	49
3.13. Eintrittsebenen von Brennkammer und Düse	50
3.14. Schematischer Aufbau zur Bestimmung von Transfermatrizen	51
3.15. Akustische Flüsse an einem kompakten Element	53
3.16. Dämpfungswerte aus Drucksignalen im Zeitbereich mit Sirenenanregung	55
3.17. Schema zum Bestimmen von Eigenfrequenzen und Dämpfungswerten mit Hilfe der Übertragungsfunktion des Drucks bei Anregung durch die Sirene	56
3.18. Schema zum Bestimmen von Eigenfrequenzen und Dämpfungswerten mit Hilfe der Übertragungsfunktion des Drucks bei Anregung durch Strömungsrauschen	56
3.19. Schema zum Bestimmen von Eigenfrequenzen und Dämpfungswerten mit Hilfe der Übertragungsfunktion der akustischen Energie bei Anregung durch die Sirene	57

3.20. Netzwerkmodell, bestehend aus j Transfermatrizen	58
3.21. Geschlossener Regelkreis	61
3.22. Transformation der reellen Achse der Frequenz in die OLG-Ebene	62
3.23. Netzwerkmodell OLG aufgeschnitten	63
4.1. Schematischer Aufbau der Versuchsanlage, T = Thermoelement, p = statischer Drucksensor, \dot{V} = Volumenstrommesser	66
4.2. Ausbruchsansicht der Sirene mit zwei verschiedenen Rotorschei- ben für kontinuierliche und gepulste Anregung für Abklingversuche	67
4.3. Austrittsöffnung der Sirene, als Doppelsinusblende ausgeführt .	67
4.4. Einströmkopf	68
4.5. Einströmkopf mit eingebautem Lochblech	69
4.6. Absorbermodul mit 20 Absorbern	69
4.7. Sensormodul mit 3 Messebenen mit jeweils 6 Anschlussmöglich- keiten in Umfangsrichtung	70
4.8. Düsenkontur	71
4.9. Dynamischer Drucksensor, Modell PCB M106B	72
4.10. Steuerungsprogramm (links), Messprogramm (rechts)	73
4.11. Versuchsaufbauten zur Bestimmung der Düsenadmittanzen. Dü- se A (links): Anregung seitlich; Düse B (rechts): Anregung koaxial	74
4.12. Versuchsaufbau zur Bestimmung der Faceplateadmittanzen . .	76
4.13. Versuchsaufbau zur Messung von Transfermatrizen, links: Anre- gung von stromauf (a), rechts: Anregung von stromab (b)	77
4.14. Versuchsaufbau Gesamtsystem, schattierter umrahmter Bereich: zylindrische Brennkammer	78
5.1. Zeitlicher Verlauf der Frequenzantwort auf die Sirenenanregung	80
5.2. Druckamplituden in der Brennkammer bei Verwendung von Dü- se A (links) und Düse B (rechts) in Abhängigkeit der Anregungs- frequenz der Sirene	83
5.3. Düsenadmittanzen Düse A	84
5.4. Düsenadmittanzen Düse B	84
5.5. Trajektorien der Düsenadmittanz von Düse A für unterschied- liche Düsenhalsdurchmesser D_H , Indikatoren alle 500 Hz. Die Größen für D_{BK} , R_{ein} , R_{aus} und α_{konv} können Tabelle 4.3 entnom- men werden	88
5.6. $m = 1 / n = 0$, Absorberlänge 0 mm mit Durchströmung	91
5.7. $m = 1 / n = 0$, Absorberlänge 30 mm mit Durchströmung	92

5.8. Verlauf der Dissipation (negative Werte bedeuten Abfluss an akustischer Energie), 30 mm Absorberelement, $m = 1 / n = 0$. . .	93
5.9. Faceplateadmittanzen	94
6.1. Einfluss der Absorber auf die Eigenfrequenzen, vertikale durchgezogene Linie: $\lambda/4$ -Frequenz der Absorber, vertikale unterbrochene Linien: cut-on Frequenzen von Modenklasse 1 und 2 . . .	97
6.2. Schematische Darstellung des Einflusses von einem Absorbern auf Modenklasse 10 nach Oschwald et al. [45]. Diese Verhalten gilt auch für T1L2, T1L3, usw.	98
6.3. Spektren ohne (oben) und mit 40 mm-Absorber (unten) mit angenäherten Lorentzkurven und den Amplitudenhalbbreiten I und II	99
6.4. Frequenz des abklingenden Drucksignals in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz ohne (oben) und mit 40 mm-Absorber (unten), Mittelwert (Punkte) und Schwankungsbreite (Balken) der Ergebnisse	100
6.5. Näherung einer Exponentialfunktion an das Drucksignal, ohne (oben) und mit 40 mm - Absorber (unten) bei einer Anregungsfrequenz von 2160 Hz und 2250 Hz (Sensoren 7)	101
6.6. Schema zur Bilanzierung der akustischen Energie im Zeitbereich für abklingende Signale	103
6.7. Verlauf der Energien und der Intensitäten durch Faceplate und Düse	104
6.8. Darstellung der Ausflüsse aus der Brennkammer zu bestimmten Zeitpunkten	105
6.9. Aufbau der Netzwerkmodelle, (A) ohne Absorber, (B) mit Absorber	107
6.10. Übersicht gefundene Eigenfrequenzen ($T1^-$, $T1$, $T1^+$, $T1L$ und $T2$) mit den cut-on Frequenzen für die Eigenmoden mit $m = 1 / n = 0$ und $m = 2 / n = 0$, OLG = Netzwerkmethod Open Loop Gain, Rauschen = Anregung durch Strömungsrauschen	109
A.1. Verlauf des statischen Drucks und der Stromlinien	121
B.1. Die Lorentzkurve	127
B.2. Stromabseitige Reflektion	129

D.1. Trajektorien der Düsenadmittanz von Düse A für unterschiedliche Eingangsradien R_{ein} , Indikatoren alle 500 Hz. Die Größen für D_{BK} , D_{H} , R_{aus} , und α_{konv} und können aus Tabelle 4.3 entnommen werden.	154
D.2. Trajektorien der Düsenadmittanz von Düse A für Ausgangsradien R_{aus} , Indikatoren alle 500 Hz. Die Größen für D_{BK} , D_{H} , R_{ein} , und α_{konv} und können aus Tabelle 4.3 entnommen werden.	155
D.3. Trajektorien der Düsenadmittanz von Düse A für unterschiedliche Kegelwinkel α_{konv} , Indikatoren alle 500 Hz. Die Größen für D_{BK} , D_{H} , R_{ein} , und R_{aus} und können aus Tabelle 4.3 entnommen werden.	156
D.4. Reflektionsfaktoren Faceplate	158
D.5. Reflektionsfaktoren Düse A	158
D.6. Drucksignal, ohne Absorber bei 2160 Hz	159
D.7. Drucksignal, mit Absorber bei 2230 Hz	160
D.8. $m = 1 / n = 0$, Absorberlänge 0 mm	162
D.9. $m = 1 / n = 0$, Absorberlänge 25 mm	163
D.10. $m = 1 / n = 0$, Absorberlänge 30 mm	164
D.11. $m = 1 / n = 0$, Absorberlänge 35 mm	165
D.12. $m = 1 / n = 0$, Absorberlänge 40 mm	166
D.13. $m = 1 / n = 0$, Absorberlänge 45 mm	167
D.14. $m = 1 / n = 0$, Verlauf der Dissipation im Absorberelement, bezogen auf stromauf (Fall I)	168

Tabellenverzeichnis

1.1. Klassifizierung der Instabilitäten in einem typischen Raketentriebwerk	5
2.1. Häufig verwendete akustische Randbedingungen	32
3.1. Erforderliche Sensorenanzahl	40
4.1. Geometriedaten Lochblech	69
4.2. Statische Größen in der Brennkammer	71
4.3. Geometriegrößen der verwendeten Düsen	72
4.4. Kenndaten dynamischer Drucksensoren [48]	72
5.1. Vergleich der Düsenadmittanz bei ca. 2080 Hz von $m = 1 / n = 0$, Düse A	85
5.2. Variation von Geometriegrößen von Düse A zur Bestimmung ihres Einflusses auf den akustischen Fluss	87
6.1. Eigenfrequenzen von Modenklasse 10 bei Anregung mit Strömungsrauschen (oben) und Sirenenanregung (unten) für verschiedene Absorberlängen	99
6.2. Eigenfrequenzen von Modenklasse 10 bei Anregung mit Strömungsrauschen (oben) und Sirenenanregung (unten) für verschiedene Absorberlängen	102
6.3. Zusammenstellung der Ergebnisse für Modenklasse 10 und 20 .	110
A.1. Geometriegrößen der beiden verwendeten Düsen und Zustandsgrößen am Düseneintritt	117
A.2. Geometriegrößen des Lochblechs und Zustandsgrößen	120
B.1. Eigenwerte der Besselfunktion und Eigenfrequenzen für $R = 0.046$ m	125
C.1. Verwendete Messwerterfassungshardware	152

C.2. Verwendete Messhardware	152
D.1. Parameter des Polynoms der Faceplateadmittanzen für Moden- klasse 00 und 10	157

Nomenklatur

Lateinische Buchstaben

c	[m/s]	Schallgeschwindigkeit
D	[m]	Durchmesser
E	[J/m ³]	Akustische Energiedichte
\mathcal{E}	[J]	Akustische Energie
f	[1/s]	Frequenz
f	[m/s]	Stromab laufende Welle
F	[m/s]	Stromab laufende Welle bei $x = 0$
g	[m/s]	Stromauf laufende Welle
G	[m/s]	Stromauf laufende Welle bei $x = 0$
\vec{I}	[W/m ²]	Akustische Intensität (Leistungsstromdichte) ($\vec{I} = (I_x, I_r, I_\theta)^T$)
\mathcal{I}	[W]	Akustischer Fluß (Schalleistung)
k	[1/m]	Wellenzahl
L	[m]	Länge
\dot{m}	[kg/s]	Massenstrom
p	[Pa]	Druck
P	[Pa]	Ansatzfunktion der Druckverteilung in axialer Richtung
\dot{Q}	[J/m ³]	Akustische Quellendichte
\mathcal{Q}	[J]	Akustische Quellstärke
r	[m]	Radiale Koordinate
R	[–]	Ansatzfunktion der Druckverteilung in radialer Richtung
R	[m]	Radius
s	[–]	Eigenwert der Besselfunktion für die harte Wand
S	[m ²]	Fläche
t	[s]	Zeit
T	[s]	Periodendauer
\vec{u}	[m]	Geschwindigkeitsvektor ($\vec{u} = (u, v, w)^T$)
u	[m]	Axiale Geschwindigkeit

U	[m/s]	Ansatzfunktion der Geschwindigkeit in axialer Richtung
v	[m]	Radiale Geschwindigkeit
V	[Pa]	Ansatzfunktion der Druckverteilung in radialer Richtung
w	[m]	Azimutale Geschwindigkeit
W	[Pa]	Ansatzfunktion der Druckverteilung in azimutale Richtung
x	[m]	Axiale Koordinate
\vec{Y}	[m ² s/kg]	Admittanz ($\vec{Y} = (Y, Y_r, Y_\theta)^T$)
\mathcal{Y}	[–]	Dimensionslose Admittanz

Griechische Buchstaben

α	[1/s]	Dämpfungskoeffizient des Drucksignals
δ	[°]	Winkel
ρ	[kg/m ³]	Dichte
ω	[1/s]	Kreisfrequenz
Π	[–]	Transfermatrix
θ	[°]	Umfangskoordinate
η	[–]	Eigenwert der Besselfunktion für die weiche Wand
γ	[–]	Isentropenexponent ($\gamma = c_p/c_v$)
κ	[–]	Wellenzahlenverhältnis axial
μ	[–]	Wellenzahlenverhältnis radial
Θ	[–]	Ansatzfunktion der Druckverteilung in azimutaler Richtung
Ψ	[Pa]	Ansatzfunktion der Druckverteilung
Γ^\pm	[Pa]	Stetig differenzierbare Funktionen

Kopfzeiger

–	Mittelwert
^	Komplexe Amplitude
~	Komplexe Größe
'	Schwankungsgröße erster Ordnung
"	Schwankungsgröße zweiter Ordnung
*	Konjugiert komplex

T	Transponiert
\rightarrow	Vektor

Indices

a	Anregung von stromauf
A	Düsenaustritt
b	Anregung von stromab
BK	Brennkammer
co	Cut-on Frequenz
d	Position und Richtung stromab (d=downstream)
$D\ddot{U}_A$	Düse A
$D\ddot{U}_B$	Düse B
FP	Faceplate (Einspritzkopf)
H	Düsenhals
k	Zähler
m	azimutale Ordnung
n	n-te Nullstelle von $\frac{dJ_m(s)}{ds} = 0$, radiale Ordnung
r	Radiale Koordinatenrichtung
Ref	Referenzebene
u	Position und Richtung stromauf (u=upstream)
W	Wand
x	Axiale Koordinatenrichtung
+	Positive Koordinatenrichtung
-	Negative Koordinatenrichtung
θ	Azimutale Koordinatenrichtung

Operanden und Funktionen

$\langle \rangle$	Zeitliches Mittel
\times	Kreuzprodukt
\mathcal{F}	Fouriertransformierte
i	Imaginäre Einheit ($i^2 = -1$)

J_m	Besselfunktion erster Ordnung vom Grad m
∇	Differentialoperator $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
e	Exponentialfunktion
\Re	Realteil
\Im	Imaginärteil
$ $	Betrag
\sphericalangle	Winkel

Kennzahlen

M	Machzahl ($M = u/c$)
-----	------------------------

Abkürzungen

OLG	Open Loop Gain
TM	TransferMatrix
SM	StreuMatrix

1 Einleitung

1.1. Überblick

Die Triebwerkentwicklung in der Raumfahrt ist seit jeher eng verknüpft mit dem Phänomen der Verbrennungsinstabilität. Bereits die allerersten Experimente zu Flüssigkeitstriebwerken in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts scheiterten nicht zuletzt daran. Verbrennungsinstabilitäten beschränken sich nicht nur auf Raketentriebwerke; sie treten in vielen modernen technischen Anwendungen, wie beispielsweise in Gasturbinen, Heizungsanlagen oder anderen industriellen Feuerungen auf. Die Größen der Anlagen erstrecken sich dabei von Kleingeräten, wie zum Beispiel Heizungen in Wohnmobilen [44], Fluggasturbinen [16], bis hin zu Großkraftwerken [46]. Im Gegensatz zu diesen bodengebundenen Anwendungsgebieten sind die Folgen von Verbrennungsinstabilitäten im Raumfahrtbereich oft gravierender, führt deren Auftreten im günstigsten Fall zu einer Abschaltung des Triebwerkes, im ungünstigsten Fall zu einer Zerstörung. Das Resultat ist dabei der Totalverlust des Fluggerätes. Dies führte in der Vergangenheit bereits zu zahlreichen Verlusten von Raketen, sowohl auf amerikanischer [11], europäischer [3], als auch auf russischer Seite [54]. Die Folgen von Totalausfällen können dabei für die beteiligten Unternehmen und Institutionen weitreichend sein, da die Raumfahrt sehr kostspielig ist und oft nationale sowie politische Interessen damit in unmittelbarem Zusammenhang stehen.

Verbrennungsinstabilitäten treten häufig bei Flüssigkeitstriebwerken auf. Wegen ihrer, verglichen mit Feststofftriebwerken, kurzen Brennkammer und aufgrund der verwendeten Treibstoffe sind sie für Instabilitäten sehr anfällig. Im Bereich der Flüssigkeitstriebwerke gibt es eine große Zahl unterschiedlicher Konzepte. Am grundsätzlichen Aussehen hat sich jedoch, mit Ausnahme einiger exotischer Designs (z. B. Ringhalsdüse [61]), seit Anbeginn der Triebwerkentwicklung in den frühen 1930er Jahren bis heute nicht viel geändert. Ein typisches Flüssigkeitstriebwerk, wie Abbildung 1.1 zeigt, besteht aus einer zylinderförmigen Brennkammer mit angeschlossenen Einspritzkopf stromauf und

einer Lavaldüse stromab. Der Schub wird durch den Ausstoß der heißen Abgase erzeugt. Die Lavaldüse beschleunigt diese Gase auf Überschallgeschwindigkeit. Je nach Konzept ist die Brennkammerwand gekühlt und es sind im Bereich des Einspritzkopfes Absorber eingebaut. Die Einspritzelemente können, abhängig von den verwendeten Treibstoffen, in den verschiedensten Varianten, als Koaxial-, Parallel-, Prall- oder Drallelement aufgebaut sein. Die Kraftübertragung aus der Triebwerks- in die Raketensstruktur erfolgt über eine bewegliche mechanische Kopplung (z. B. mit einem Kardangelenk).

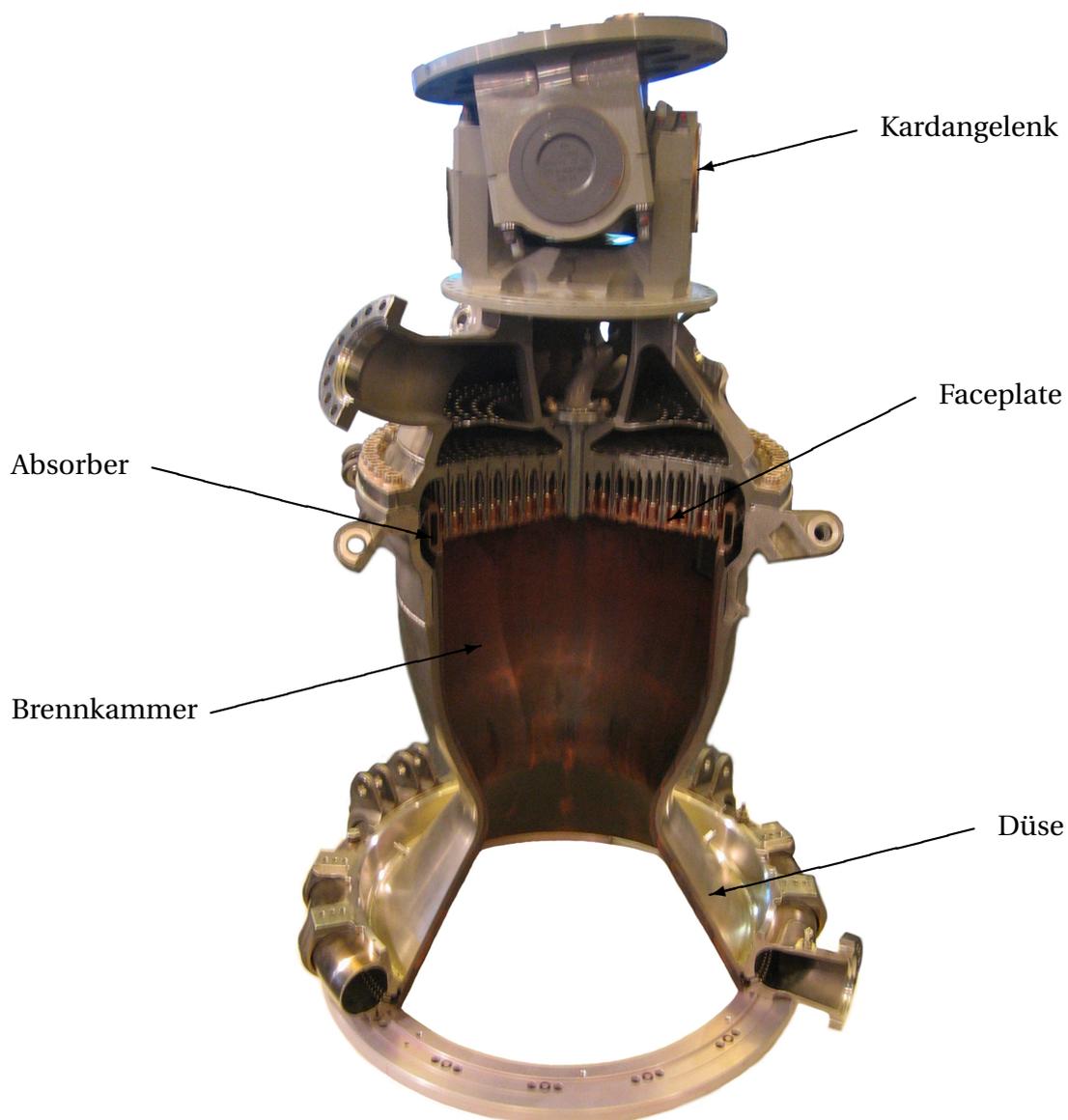


Abbildung 1.1.: Schnitt durch ein Raketentriebwerk. Bei dem dargestellten Triebwerk handelt es um das Vulcain II -Triebwerk von Astrium (eigene Aufnahme vom 9.11.2005)

Die wesentlichen Vorteile von Flüssigkeitstriebwerken gegenüber Feststofftrieb-

werken sind ihre Regel- und Wiederzündbarkeit. Die Schubregelung erfolgt über die Variation der Drehzahl von Treibstoffpumpen, die Wiederzündbarkeit kann pyrotechnisch oder durch die Verwendung von hypergolen Treibstoffen realisiert werden.

Probleme mit Verbrennungsinstabilitäten in Flüssigkeitstriebwerken traten bereits bei den ersten Triebwerksentwicklungen in den 1930er Jahren in Deutschland [14] auf. Schon damals ließen sich viele Fehlschüsse auf Verbrennungsinstabilitäten zurückführen. Nach dem Zweiten Weltkrieg wurden die Forschungsaktivitäten im Bereich der Großraketen intensiviert. In der Blütezeit der Raumfahrt, als sich vor allem die USA und die UDSSR große kostspielige Programme leisteten, entstanden die ersten umfassenden Arbeiten zu Hochfrequenz-Instabilitäten (HF-Instabilitäten). So wurde eine Vielzahl von grundlegenden Arbeiten zur Thermoakustik erstellt. Trotzdem gab es, sowohl auf amerikanischer als auch auf russischer Seite, große Probleme in diesem Bereich. Beispielsweise konnte während des Apolloprogrammes das F1-Triebwerk der Saturn-V Rakete nur durch den immens hohen Aufwand von 2000 Heißversuchen so modifiziert werden, dass es über die gesamte Brenndauer stabil blieb. Auf Grund der im Vergleich zu heute sehr geringen Rechenkapazität von damals waren die verwendeten Modelle und Ansätze sehr stark vereinfacht und die experimentellen Methoden äußerst rudimentär. Dass das Triebwerk schlussendlich während des gesamten Programmes keine Ausfälle aufgewiesen hat, ist weniger das Ergebnis von fundierten Vorhersagen als vielmehr das Resultat von Experimentieren und Ausprobieren.

Die Instabilitäten lassen sich in verschiedene Bereiche einteilen (siehe Tabelle 1.1). Die niederfrequente **Pogo-Schwingung**¹ betrifft hauptsächlich das Treibstoffsystem. Druckfluktuationen in der Brennkammer führen zu einem schwankenden Treibstoffdurchsatz, der wiederum zu einem schwankenden Druck in der Brennkammer führt. Ist diese Schwingung in Resonanz mit dem Gesamtsystem, kann die Rakete durch die hohen Kräfte zerstört werden. In den 1950er und 1960er Jahre ließen sich einige Totalverluste auf Pogo-Schwingungen zurückführen. Bei Apollo 13 wurde die zweite Stufe (Mitteltriebwerk) vorzeitig wegen Auftretens einer Pogo-Schwingung abgeschaltet. Pogo-Schwingungen sind mittlerweile sehr gut erforscht. So kommen bei modernen Triebwerken

¹ Abgeleitet von *Pogo Stick*, zu Deutsch Springstock, ist ein Sportgerät, das aus zwei ineinander verschieblichen Stöcken besteht, die über eine Feder miteinander verbunden sind. Der Anwender steht unter Benutzung von Fußplatten auf dem oberen Stock und versucht das Gleichgewicht zu halten. Durch wippende Bewegungen und unter Ausnutzung der Federkraft kann eine Sprungbewegung erzeugt werden.

Pogo-Suppressoren zum Einsatz. Dabei handelt es sich um eine mit Gas gefüllte Kammer, in der die Druckwellen des flüssigen Sauerstoffes² dissipiert werden [42]. Das Zufuhrsystem wird dadurch akustisch verstimmt, wodurch dessen Schwingungsanfälligkeit reduziert wird.

Chugging-Schwingungen³ treten im Bereich einiger hundert Hertz auf. Im Gegensatz zu Pogo-Schwingungen werden diese stark von den hydrodynamischen Eigenschaften des Fluides in den Zufuhrleitungen dominiert. Die Schwingungen sind das Resultat von hydraulischen Störungen im Fluid und deren Auswirkungen auf den Zündverzug in der Brennkammer. Das Auftreten von Chugging kann durch die Entkopplung der Verbrennung vom Zufuhrsystem vermindert werden. Dies erfolgt üblicherweise durch einen hohen Druckverlust über die Einspritzelemente. Chugging ist so gut wie möglich zu vermeiden, da dadurch hochfrequente Schwingungen getriggert werden können.

Buzzing⁴ betrifft vor allem Schwankungen im Treibstoffverhältnis und tritt bei ähnlichen Frequenzen wie Chugging auf. Die direkten Auswirkungen auf die Rakete sind weniger gravierend als bei anderen Schwingungsarten, Buzzing kann jedoch hochfrequente Schwingungen hervorrufen.

HF-Schwingungen⁵ treten bei den akustischen Eigenfrequenzen der Raketebrennkammer auf und stehen in Wechselwirkung mit dem Verbrennungsprozess. Auf Grund der typischen geometrischen Abmessungen von einigen Zentimetern bis Dezimetern und der hohen Temperaturen des schwingenden Fluides liegen die Frequenzen meist jenseits der 1000 Hz. Je nach Form der Schwingung werden longitudinale, radiale und transversale Moden sowie deren Mischformen (z. B. T1L1, T2R2L4, usw.) unterschieden, die verschieden stark gedämpft sein können. Vor allem Moden mit transversalen Anteilen bergen aufgrund ihrer geringen Dämpfung ein hohes Gefahrenpotential [31]. Im ungünstigen Fall⁶ können sich die Schwingungen aufschaukeln, was zu einem fast instantanen Anstieg der Druckamplitude in der Raketebrennkammer führen kann. Dabei wächst die Druckamplitude des dynamischen Druckes unter Umständen bis auf den mittleren Brennkammerdruck an. Die Folgen können

² Pogo-Schwingungen treten hauptsächlich in der Sauerstoffleitung auf, da der Sauerstoff im Vergleich zum Brennstoff eine wesentlich höhere Dichte aufweist.

³ Zu Deutsch: Dampfblasenbildung

⁴ Zu Deutsch: Summen

⁵ HF: High Frequency

⁶ Dieser liegt dann vor, wenn bei einem Verbrennungsvorgang Wärmefreisetzung und Druck in Phase schwingen und wird durch das Rayleigh-Kriterium [52] beschrieben.

verheerend sein und münden meist in einem Totalverlust des Triebwerkes. HF-Schwingungen stellen somit eine sehr große Gefahr für Raketentriebwerke dar.

Tabelle 1.1.: Klassifizierung der Instabilitäten in einem typischen Raketentriebwerk

Bezeichnung	Frequenzbereich	Betroffene Komponenten
Pogo	1 - 20 Hz	Triebwerk, Struktur, Treibstofftanks
Chugging	100 - 1000 Hz	Treibstoffe, Zufuhrsystem
Buzzing	400 - 1000 Hz	Treibstoffe, Zufuhrsystem
HF	> 1000 Hz	Volumen innerhalb Brennkammer, Einspritzsystem

1.2. Zielsetzung der Arbeit

Zuverlässige Vorhersagen von Instabilitäten in Raketenbrennkammern stellen nach wie vor ein sehr großes Problem dar. Auf der einen Seite ist der Verbrennungsprozess der maßgebliche Treiber, auf der anderen Seite existiert eine Vielzahl von Verlustmechanismen, deren Kenntnis für eine detaillierte Stabilitätsanalyse sehr wichtig ist. Oft ist der physikalische Hintergrund dieser Vorgänge noch nicht ausreichend gut verstanden. Die heutzutage verwendeten Modelle bilden deshalb die Zusammenhänge häufig nur a posteriori ab.

Ziel dieser Arbeit ist die Identifikation dieser Verlustmechanismen bei HF-Schwingungen. Dabei werden verschiedene analytische, numerische und hybride Verfahren vorgestellt, die anhand von Experimenten validiert werden. Das Hauptaugenmerk der Arbeit liegt dabei auf der Entwicklung einer Methode zur Separation der Eigenmoden und der Identifikation der Beiträge von verschiedenen Brennkammerkomponenten auf die Gesamtstabilität. Im Rahmen einer integralen Betrachtung der Brennkammer können deren Einflüsse bestimmt werden.

Einen großen Beitrag zu den Verlusten leistet die Schubdüse. Ihr Einfluss auf die Stabilität wird im Rahmen dieser Arbeit im Detail untersucht. Der Ausstoß von beschleunigten Verbrennungsgasen geht einher mit einem Abtransport von akustischer Energie, und ist damit ein Maß für die Stabilität. Dabei spielt

die Geometrie des konvergenten Düsentails und der sich daraus ergebende Reflektionsfaktor eine wichtige Rolle. Es wird ein Verfahren vorgestellt, das aus der alleinigen Kenntnis dieses Parameters eine qualitative Klassifizierung von Düsen hinsichtlich ihres Stabilitätsverhaltens erlaubt. Dieses Verfahren wird erweitert und ermöglicht es, anhand einer Energiebilanz über die Brennkammer den quantitativen Beitrag von Düse und Faceplate auf die Gesamtstabilität zu bestimmen. Die Reflektionseigenschaften der Faceplate werden dazu experimentell ermittelt. Basierend auf der linearisierten Wellengleichung können mit diesem Verfahren innerhalb sehr kurzer Rechenzeiten aussagekräftige Ergebnisse generiert werden.

Der Einfluss von Dämpfern mit verschiedenen Längen auf die Gesamtstabilität wird ebenfalls untersucht. Deren experimentell bestimmtes Übertragungsverhalten wird in die integrale Betrachtung der Brennkammer eingebunden.

Aus den in dieser Arbeit entwickelten Verfahren können Designregeln abgeleitet werden, welche die zukünftige Entwicklung von Raketentriebwerken bei der Vorhersage von Verbrennungsinstabilitäten maßgeblich erleichtern.

1.3. Gliederung

Kapitel 2 beschäftigt sich mit den theoretischen Grundlagen der Akustik in Raketentriebkammern. Der Fokus liegt dabei auf der mathematischen Beschreibung der Schwankungsgrößen von Druck und Geschwindigkeit in zylinderförmigen Geometrien. Es wird eine Methode vorgestellt, mit der das Druck- und Geschwindigkeitsfeld in die Eigenmoden der Brennkammer aufgeteilt werden kann. Darauf aufbauend werden die elementaren Beziehungen zwischen der akustischen Energie und der Dämpfung vorgestellt. Es werden Verfahren vorgestellt, mit denen eine detaillierte Stabilitätsbetrachtung durchgeführt werden kann.

In *Kapitel 3* werden experimentelle Auswertemethoden erklärt und hinsichtlich ihrer Gültigkeit überprüft und bewertet. Zum Einsatz kommt dabei eine weiterentwickelte Form der Multimikrofonmethode, die basierend auf den theoretischen Grundlagen aus *Kapitel 2* mehrere gleichzeitig auftretende Eigenmoden voneinander separieren kann.

Die verwendete Versuchsanlage wird in *Kapitel 4* beschrieben. Bei dieser Anla-

ge handelt es sich um einen vielseitig verwendbaren Aufbau, mit dem sowohl Randbedingungen, als auch das Übertragungsverhalten von Komponenten in Form von akustischen Transfermatrizen ermittelt werden können. Die Charakterisierung der Systemakustik der gesamten Raketenbrennkammer ist ebenfalls möglich.

Die experimentellen Ergebnisse der einzeln untersuchten Komponenten der Raketenbrennkammer sind in *Kapitel 5* gezeigt und werden mit Daten aus der Literatur verglichen. Daraus werden Designregeln abgeleitet, die zukünftige Entwicklungen unterstützen können.

Kapitel 6 befasst sich mit einer integralen Betrachtung der Brennkammer und präsentiert den Einfluss von Einzelkomponenten auf das Gesamtverhalten. Es werden dabei die experimentell ermittelten Daten in das Gesamtsystem integriert. Die so ermittelten Stabilitätswerte werden mit den experimentell gewonnenen Daten der Raketenbrennkammer validiert.

In der Zusammenfassung von *Kapitel 7* werden die Vorteile der vorgestellten Verfahren analysiert und notwendige Weiterentwicklungen für eine Verbesserung der Genauigkeit der Vorhersage von Instabilitäten vorgeschlagen.

2 Theoretische Grundlagen

Eine Vielzahl von Autoren hat sich bereits mit den Grundlagen der linearen Akustik beschäftigt (z. B. [17, 36, 39, 59]). Für viele Probleme existieren Lösungsansätze, die bereits mehrheitlich validiert wurden. Da keine einheitliche Nomenklatur existiert, werden die für diese Arbeit notwendigen Gleichungen hier in kompakter Form hergeleitet.

Die linearisierten Grundgleichungen bilden die Basis für die theoretische Betrachtung der Wellenausbreitung. Sie werden überführt in die harmonische Lösung im Frequenzbereich für verschiedene Eigenmoden. Im Weiteren werden unterschiedliche Darstellungsformen von Randbedingungen, wie beispielsweise die Admittanz und deren Verknüpfungen mit den akustischen Größen, betrachtet.

Abschließend werden die formelmäßigen Zusammenhänge auf verschiedene Komponenten des Raketentriebwerkes, wie beispielsweise auf die zylindrische Brennkammer oder die Düse, angewandt. Deren Kombination erlaubt es, das Verhalten des Gesamtsystems zu untersuchen.

2.1. Grundgleichungen

Raketenbrennkammern weisen hinsichtlich ihrer Geometrie untereinander eine große Ähnlichkeit auf. Klassischerweise bestehen sie aus einem Zylinder mit angeschlossener Düse. Die Länge des zylindrischen Teils beträgt oft nur wenige Vielfache des Durchmessers, was dazu führt, dass eine rein eindimensionale Betrachtung der akustischen Vorgänge nicht ausreichend ist. Die spezielle Einschränkung auf zylinderförmige Geometrien führt jedoch zu einer wesentlichen Vereinfachung in den verwendeten Gleichungen. Da dazu bereits zahlreiche Veröffentlichungen [26, 58] existieren, werden die folgenden Herleitungen kompakt und nur auszugsweise beschrieben.

Die strömungsmechanischen Feldgrößen Druck, Dichte und Geschwindigkeit

können in einen Gleichanteil und einen akustischen Schwankungsanteil zerlegt werden:

$$p(\vec{x}, t) = \bar{p}(\vec{x}) + p'(\vec{x}, t) \quad (2.1)$$

$$\rho(\vec{x}, t) = \bar{\rho}(\vec{x}) + \rho'(\vec{x}, t) \quad (2.2)$$

$$u(\vec{x}, t) = \bar{u}(\vec{x}) + u'(\vec{x}, t) \quad (2.3)$$

$$v(\vec{x}, t) = \bar{v}(\vec{x}) + v'(\vec{x}, t) \quad (2.4)$$

$$w(\vec{x}, t) = \bar{w}(\vec{x}) + w'(\vec{x}, t) \quad (2.5)$$

Dadurch können quadratische und höhere Terme der Schwankungsgrößen (z. B. p'^2 und p'^3) vernachlässigt werden, was nach Ehrenfried [17] zu einer deutlichen Vereinfachung führt. Die Separationen (2.1) - (2.5) sind zulässig, solange der Schwankungsanteil viel kleiner als der mittlere Anteil ist (z. B.: $|p'| \ll \bar{p}$)¹.

Im allgemeinen Fall sind die mittleren Größen eine Funktion des Ortes. Für spezielle Geometrien, wie zum Beispiel konstante Querschnitte ohne Wärmezufuhr oder -abfuhr, verschwindet die örtliche Abhängigkeit.

Ausgehend von den Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie lässt sich die Ausbreitung von Wellen in einem Medium in Form der Wellengleichung [17]

$$\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} - \nabla^2 p' = 0 \quad (2.6)$$

angeben. Die Schallgeschwindigkeit

$$c^2 = \frac{p'}{\rho'} = \gamma \cdot R \cdot T \quad (2.7)$$

beschreibt die Ausbreitung von Druckstörungen, welche für ideale Gase nach Laplace [25, 55] isentrop erfolgt.

Die in Gleichung (2.6) angegebene Form der Wellenausbreitung ist nur für ein ruhendes Medium gültig. Bewegt es sich relativ zu einem ortsfesten Beobachter, so hat eine Umformulierung von Gleichung (2.6) vom bewegten in das ortsfeste Koordinatensystem zu erfolgen. Dies lässt sich sehr einfach durch die Transformation

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \nabla \quad (2.8)$$

¹ Für die Geschwindigkeit gilt: $|u'| \ll c, |v'| \ll c, |w'| \ll c$

realisieren, welche die partielle zeitliche Ableitung durch die totale Differentiation [57] (bekannt auch unter den Bezeichnungen materielle, substantielle oder konvektive Ableitung) ersetzt. Dadurch lässt sich Gleichung (2.6) zur konvektiven Wellengleichung:

$$\frac{1}{c^2} \frac{D^2 p'}{Dt^2} - \nabla^2 p' = 0 \quad (2.9)$$

umschreiben.

2.2. Modale Zerlegung für zylinderförmige Rohre

Raketenbrennkammern bestehen häufig aus einem in axialer Richtung durchströmten Zylinder. Für eine detaillierte Untersuchung der Akustik ist deshalb die Betrachtung der Wellenausbreitung in durchströmten zylinderförmigen Rohren zweckmäßig. Die Annahme einer rein axialen Grundströmung

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

führt zu einer weiteren Vereinfachung. Die allgemein gültige Wellengleichung (2.9), in Zylinderkoordinaten überführt, lautet somit nach Schönwald [58]:

$$\frac{1}{c^2} \frac{D_x^2 p'}{D_x t^2} - \frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial p'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.11)$$

Darin stellt

$$\frac{D_x}{D_x t} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \quad (2.12)$$

die konvektive Ableitung (2.8) ausgeschrieben in axialer Richtung dar.

Unter der Annahme von rein harmonischen Schwingungen mit der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ lässt sich die zeitliche Ausbreitung von der räumlichen entkoppeln. Der Schwankungsanteil von Druck und Geschwindigkeit kann zu

$$p'(x, r, \theta, t) = \Re(\hat{p}(x, r, \theta) \cdot e^{i\omega t}) \quad (2.13)$$

$$\vec{u}'(x, r, \theta, t) = \Re \left[\begin{pmatrix} \hat{u}(x, r, \theta) \\ \hat{v}(x, r, \theta) \\ \hat{w}(x, r, \theta) \end{pmatrix} \cdot e^{i\omega t} \right] \quad (2.14)$$

umgeschrieben werden.

Unter Einbeziehung von (2.13) existiert für Gleichung (2.11) nach Ehrenfried [17] eine Lösung in der Form

$$\hat{p}(x, r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{mn}(x) \cdot R_{mn}(r) \cdot \Theta_{mn}(\theta) . \quad (2.15)$$

Die Amplitude der Druckschwankung lässt sich durch zwei unendliche Summen, die sich aus den Eigenformen (Eigenmoden) zusammensetzen, darstellen. Die Summen werden über die azimutale (m) und radiale (n) Ordnung gebildet. In Abbildung 2.1 sind verschiedene Modenformen dargestellt.

Die Ausdrücke $P_{mn}(x)$, $R_{mn}(r)$ und $\Theta_{mn}(\theta)$ stellen die Ansatzfunktionen der jeweiligen Eigenmode in der entsprechende Koordinatenrichtung dar. Auf sie wird in den folgenden Unterkapiteln genauer eingegangen.

Die Herleitung der Geschwindigkeitskomponenten kann über die Impulsgleichung [50]

$$\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + (\vec{u} \nabla) \vec{u}' = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' , \quad (2.16)$$

in der Druck und Geschwindigkeit miteinander in Beziehung stehen, erfolgen. Dadurch ergibt sich für die Komponenten des Geschwindigkeitsvektors eine ähnliche Art der Formulierung analog zum Druck (2.15):

$$\hat{u}(x, r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} U_{mn}(x) \cdot R_{mn}(r) \cdot \Theta_{mn}(\theta) \quad (2.17)$$

$$\hat{v}(x, r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} V_{mn}(x) \cdot \frac{dR_{mn}(r)}{dr} \cdot \Theta_{mn}(\theta) \quad (2.18)$$

$$\hat{w}(x, r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} W_{mn}(x) \cdot \frac{R_{mn}(r)}{r} \cdot \frac{d\Theta_{mn}(\theta)}{d\theta} . \quad (2.19)$$

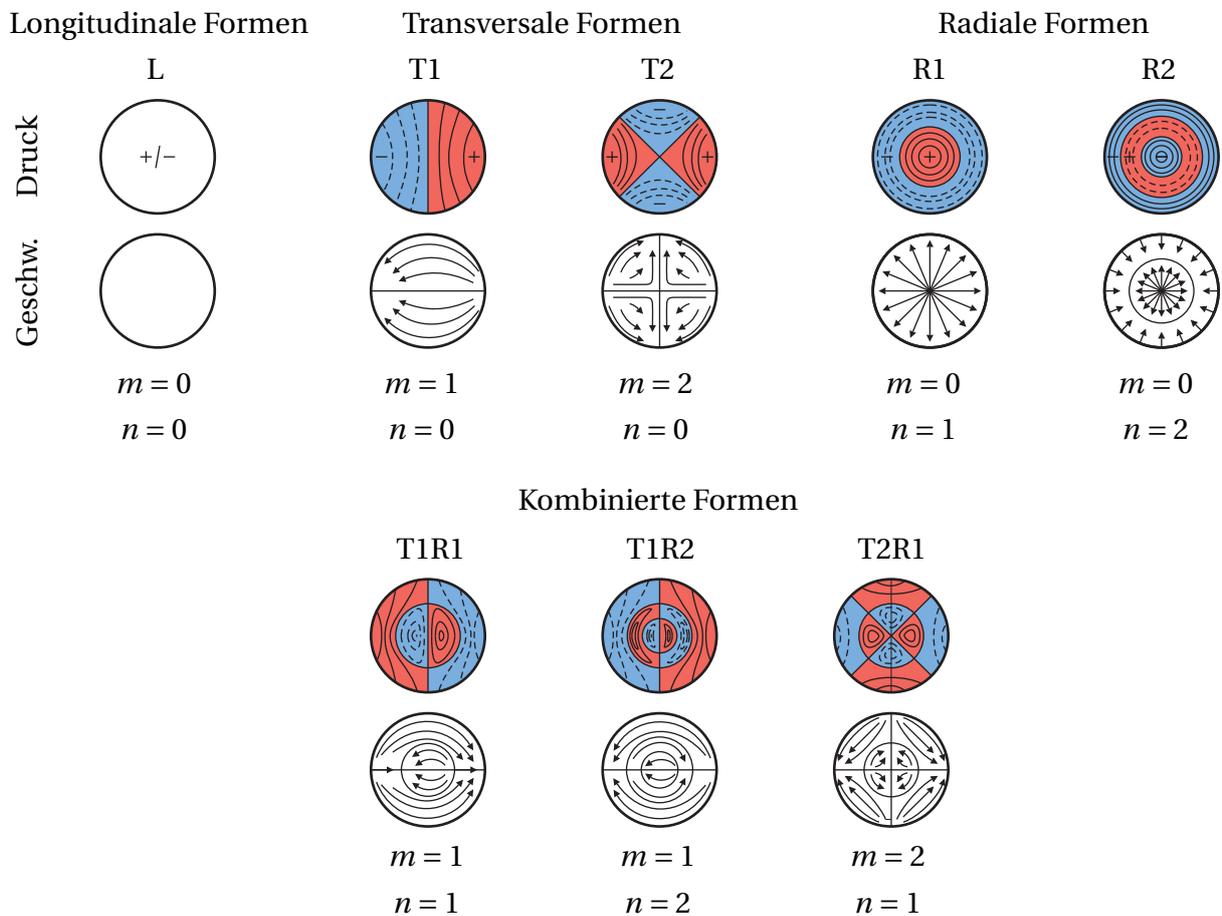


Abbildung 2.1.: Druck- und Geschwindigkeitsverteilung verschiedener Modenformen (nach NASA SP-194 [31], S. 391) in Kreisquerschnitten

Die in Abbildung 2.1 dargestellten Modenformen lassen sich sehr komfortabel in Modenklassen einteilen, wie sie in Abbildung 2.2 dargestellt sind. So beinhaltet beispielsweise die Modenklasse 00 alle reinen longitudinalen Eigenmoden, die Modenklasse 10 die reine T1-Eigenmode und alle möglichen Kombinationen von T1 mit Längseinfluss und Modenklasse 01 die reine R1-Eigenmode und alle möglichen Kombinationen von R1 mit Längseinfluss. Der Bereich $m \geq 1$ und $n = 0$ kann somit als transversale Modenklasse definiert werden und der Bereich $m = 0$ und $n \geq 1$ als radiale Modenklasse. $m = 0$ und $n = 0$ wäre demzufolge die longitudinale Modenklasse, und der Bereich $m \geq 1$ und $n \geq 1$ die radial-transversalen. In den folgenden Abschnitten wird als Bezeichnung die Formulierung Modenklasse mn verwendet.

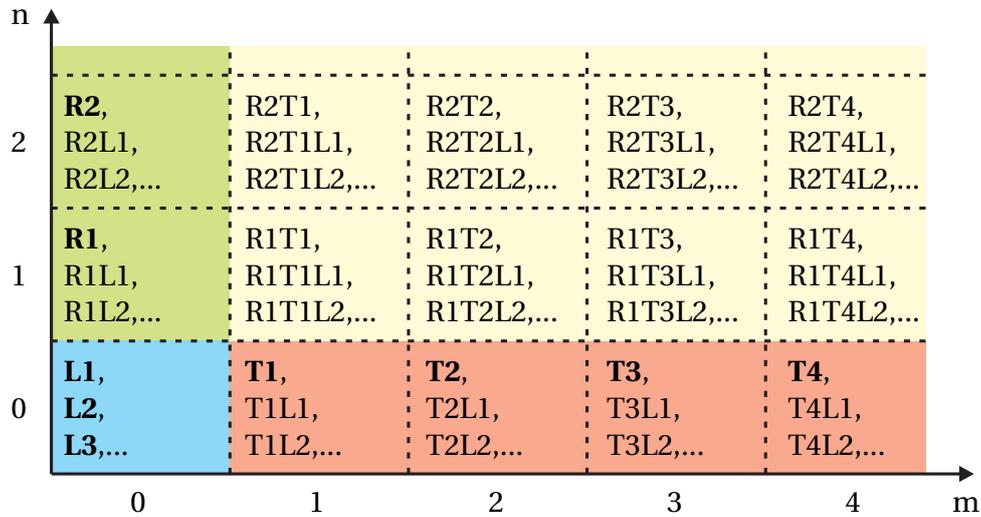


Abbildung 2.2.: Klassifizierung der Moden nach m und n

2.2.1. Radiale Richtung

In radialer Richtung bilden die Bessel- und Neumannfunktionen² J_m bzw. N_m [6] die allgemeine Lösung für Gleichung (2.11) [39]. Sie lautet:

$$R_{mn}(r) = J_m(k_{mn}^r r) + A_{mn} \cdot N_m(k_{mn}^r r) \quad (2.20)$$

Beschränkt man sich auf kreisförmige Querschnitte, so wird der Anteil A_{mn} an der Neumannfunktion zu null [58], wodurch sich Gleichung (2.20) auf die sehr einfache Form

$$R_{mn}(r) = J_m(k_{mn}^r r) \quad (2.21)$$

mit der radialen Wellenzahl

$$k_{mn}^r = \frac{s_{mn}}{R} \quad (2.22)$$

reduziert. Die Eigenwerte s_{mn} lassen sich über die Formulierung der Randbedingungen an den Rohrwänden bestimmen. Für schallharte Wände gilt:

$$\left. \frac{\partial \hat{p}}{\partial r} \right|_{r=R} = 0, \quad (2.23)$$

² Auch bekannt unter der Bezeichnung *Weber-Funktion* bzw. *Bessel-Funktion zweiter Gattung*.

was angewandt auf (2.15) mit (2.21) und unter Einbeziehung von (2.22) zu

$$\left. \frac{\partial J_m(s_{mn})}{\partial r} \right|_{r=R} = 0 \quad (2.24)$$

führt. Die Eigenwerte s_{mn} stellen somit die abhängigen Variablen der Besselfunktion J_m dar, an dem die Randbedingung (2.23) erfüllt ist. In Anhang B.1 sind die Eigenwerte s_{mn} für einige Moden angegeben.

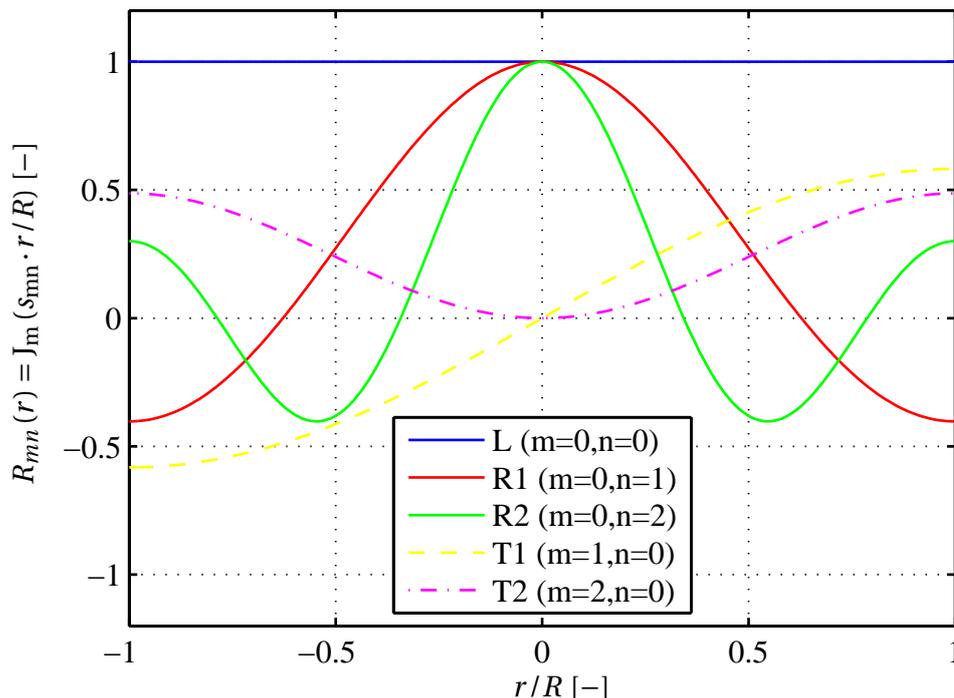


Abbildung 2.3.: Räumliche Verteilung der radialen Ansatzfunktion R_{mn} aufgetragen über der radialen Richtung in einem Zylinder mit schallharter Mantelfläche für verschiedene Moden (L = Longitudinal, R = Radial, T = Transversal)

Abbildung 2.3 zeigt den Verlauf der Ansatzfunktion (2.21) für verschiedene transversale (m) und radiale (n) Ordnungszahlen in Abhängigkeit des Radius unter Verwendung der Randbedingung 2.23.

2.2.2. Umfangsrichtung

Der Druckverlauf in Umfangsrichtung folgt einer harmonischen Funktion, die nur von der azimutalen Ordnung m abhängt [39]:

$$\Theta_{mn}(m\theta) = \Theta_m(m\theta). \quad (2.25)$$

Da die Schließungsbedingung

$$\Theta_m(m\theta) = \Theta_m(m\theta + 2\pi) \quad (2.26)$$

stets erfüllt sein muss, lauten die Lösungen

$$\Theta_m = \sin(m\theta + \delta_m) \quad (2.27)$$

$$\Theta_m = \cos(m\theta + \delta_m). \quad (2.28)$$

Darin enthalten ist der Winkel δ_m , der die relative Abweichung der Druckknotenlinie zum inertial festen Koordinatensystem beschreibt. Da sich beide Lösungen (2.27) und (2.28) nur durch eine Drehung um 90° unterscheiden und ansonsten völlig identisch sind, wird im Folgenden nur (2.28) verwendet.

2.2.3. Axiale Richtung

Die Lösung der Wellengleichung ohne Konvektion (2.6) in axialer Richtung kann mit der Methode von d'Alembert [32] gefunden werden. Durch Einführung neuer Variablen $x^+ = x - ct$ und $x^- = x + ct$ [4, 63] in Gleichung (2.6) sowie Ableitung nach dem Ort $\frac{\partial}{\partial x}(\cdot)$ und nach der Zeit $\frac{\partial}{\partial t}(\cdot)$ nimmt die Wellengleichung (2.6) die besonders einfache Form

$$\frac{\partial^2 p'(x^+, x^-)}{\partial x^+ \partial x^-} = 0 \quad (2.29)$$

an. Für Gleichung (2.29) lässt sich nach Fischer [26] eine allgemeine Lösung finden:

$$p'(x) = \Gamma^+(x^+) + \Gamma^-(x^-) = \bar{\rho}c (f(x - ct) + g(x + ct)) \quad (2.30)$$

Die Funktionen $\Gamma^+(x^+)$ und $\Gamma^-(x^-)$ sind dabei beliebige zweifach differenzierbare Funktionen, die durch die Randbedingungen festgelegt werden. Sie beschreiben die verlustfreie Ausbreitung einer Druckstörung unter Beibehaltung

ihrer Form in positiver und negativer Koordinatenrichtung. In beide Richtungen breiten sich die Störungen mit der Schallgeschwindigkeit c aus, die bereits durch Gleichung (2.7) beschrieben wurde. In der Akustik üblich ist die mit dem Faktor $\bar{\rho}c$ normierte Notation der Funktionen $f(x^+)$ und $g(x^-)$, die als *Riemann Invarianten*³ bezeichnet werden.

Setzt man harmonische Schwingungen voraus, wie dies bereits in (2.13) und (2.14) gemacht wurde, kann für den Druck und die axiale Geschwindigkeit für den Ort x in Bezug zu einem Referenzort bei $x = 0$ die spezielle Lösung der Wellengleichung zum Zeitpunkt t gefunden werden:

$$p'(x, t) = \Re \left[\overbrace{\bar{\rho} c \cdot \left(\underbrace{\hat{F} \cdot e^{-ik^{x^+}x}}_{\hat{f}=\text{stromab}} + \underbrace{\hat{G} \cdot e^{-ik^{x^-}x}}_{\hat{g}=\text{stromauf}} \right)}^{\hat{p}(x)} \cdot e^{i\omega t} \right]. \quad (2.31)$$

Aus Gleichung (2.31) lässt sich sehr einfach die Amplitude der Druckschwankung $\hat{p}(x)$ identifizieren, die verglichen mit Gleichung (2.15) dem Ausdruck $P_{mn}(x)$ entspricht:

$$P_{mn}(x) = \bar{\rho} c \cdot \left(\hat{F}_{mn} \cdot e^{-ik_{mn}^{x^+}x} + \hat{G}_{mn} \cdot e^{-ik_{mn}^{x^-}x} \right). \quad (2.32)$$

Die Größen \hat{F}_{mn} und \hat{G}_{mn} sind dabei die komplexen Amplituden der stromab und stromauf laufenden Wellen am Ort $x = 0$ und stellen die Schwingungsamplitude und Phasenlage dar. Die Exponentialterme führen zu einer Phasendrehung der Wellen bei Änderung der Orte. Die Phasengeschwindigkeiten ergeben sich aus den axialen Wellenzahlen $k_{mn}^{x\pm}$, die eine Funktion der Gesamtwellenzahl $k = \omega/c$ sind. Für ein ruhendes Medium sind die Phasengeschwindigkeiten gleich, was dazu führt, dass die Ausbreitung der stromab und stromauf laufenden Wellen symmetrisch ist.

Die Wellenzahlen in axialer Richtung sind nach Ehrenfried [17] mit der in radialer Richtung verknüpft und lassen sich mit den Beziehungen

$$k_{mn}^{x^+} = +\sqrt{1 - \left(\frac{k_{mn}^r}{k}\right)^2} \quad (2.33)$$

$$k_{mn}^{x^-} = -\sqrt{1 - \left(\frac{k_{mn}^r}{k}\right)^2} \quad (2.34)$$

³Die Bezeichnung stammt vom deutschen Mathematiker Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866), der die Grundlagen für die Lösung von partiellen Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typ formulierte [30].

berechnen. Gut zu erkennen ist in den Gleichungen (2.33) und (2.34), dass die Frequenz ω über k nichtlinear in die axialen Wellenzahlen eingeht. Zur besseren Veranschaulichung ist der Zusammenhang (2.33) in Abbildung 2.4 für ein Rohr mit gleichbleibendem Radius in x-Richtung schematisch gezeigt. Für einen gegebenen Radius ist die radiale Wellenzahl für feste m und n eine Konstante.

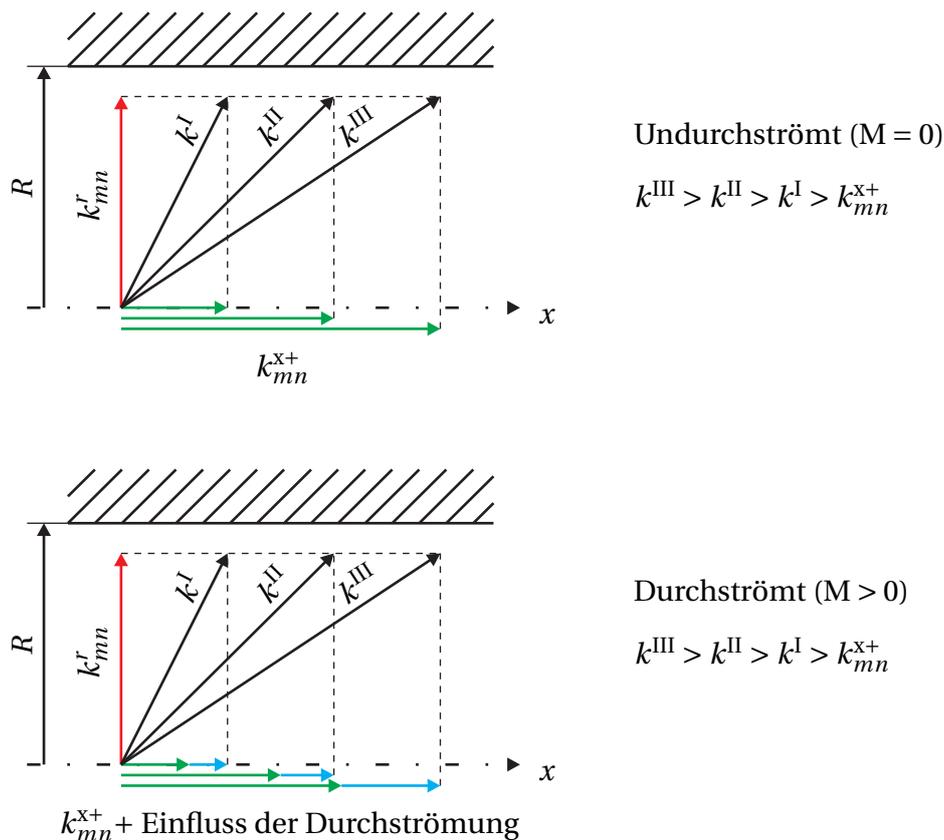


Abbildung 2.4.: Zusammenhang zwischen verschiedenen Wellenzahlen k (k^I , k^{II} , k^{III}), der radialen k_{mn}^r und der axialen Wellenzahl k_{mn}^{x+} für $k > k_{mn}^r$ bei $M = 0$ (oben) und $M > 0$ (unten) mit Durchströmung in positiver Richtung.

Bewegt sich das Medium wie in (2.10) angegeben, so ist die axiale Ausbreitung unsymmetrisch, was zu unterschiedlichen axialen Wellenzahlen in positiver und negativer Richtung führt ($|k_{mn}^{x+}| \neq |k_{mn}^{x-}|$). Dies hat nach Fischer [26] allerdings keine Auswirkung auf die Formulierung des Druckverlaufs, wie es in Gleichung (2.31) angegeben ist, und erfüllt nach wie vor sowohl die einfache Form der Wellengleichung (2.6) als auch die konvektive in ihrer allgemeinen (2.9) und speziellen Form für durchströmte Zylinder (2.11).

Die Wellenzahlen in axialer Richtung unter Berücksichtigung der Machzahl $M = \bar{u}/c$ lauten nach [17]:

$$k_{mn}^{x+} = \frac{k}{1-M^2} \left(-M + \sqrt{1 - \left(\frac{k_{mn}^r}{k} \right)^2 \cdot (1-M^2)} \right) \quad (2.35)$$

$$k_{mn}^{x-} = \frac{k}{1-M^2} \left(-M - \sqrt{1 - \left(\frac{k_{mn}^r}{k} \right)^2 \cdot (1-M^2)} \right). \quad (2.36)$$

Sehr gut ist dabei zu erkennen, dass für $k < k_{mn}^r \cdot \sqrt{1-M^2}$ der Ausdruck unter der Wurzel in den Gleichungen (2.35) und (2.36) negativ werden kann, was zu komplexen axialen Wellenzahlen führt. Wird die Machzahl in (2.35) und (2.36) zu null gesetzt, ergeben sich die Beziehungen für den undurchströmten Fall (2.33) und (2.34).

Eine Sonderstellung nehmen ebene Wellen ein ($m = 0, n = 0$), wie beispielsweise alle rein longitudinalen Eigenmoden. Dabei ist $s_{00} = 0$ und folglich unter Verwendung von Gleichung (2.22) auch $k_{00}^r = 0$. Dadurch vereinfachen sich die Ausdrücke der axialen Wellenzahlen (2.35) und (2.36) zu

$$k_{00}^{x+} = + \frac{k}{1+M} \quad (2.37)$$

$$k_{00}^{x-} = - \frac{k}{1-M}. \quad (2.38)$$

Für diesen Fall sind bei reellen Frequenzen ω die Wellenzahlen $k_{00}^{x\pm}$ ebenfalls reell. In den Abbildungen 2.5 und 2.6 sind die Verläufe der axialen Wellenzahlen für $m = 0$ und $n = 0$ sowie $m = 1$ und $n = 0$ in Abhängigkeit der Frequenz für verschiedene Machzahlen dargestellt. Dabei entspricht der Radius des zylindrischen Rohres, mit dem die radiale Wellenzahlen k_{00}^r und k_{10}^r nach Gleichung (2.22) gebildet werden, der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Raketendruckkammer von $R = 0.046$ m. Ohne Durchströmung sind die Wellenzahlen an der x-Achse gespiegelt. Mit steigender Machzahl nimmt die stromab laufende Wellenzahl ab und die stromauf laufende zu. Dies liegt daran, dass die mit der Strömung mitlaufende Welle stromab für einen ortsfesten Beobachter gestreckt wird, wohingegen die stromauf laufende Welle gestaucht wird. Dieser Zusammenhang ist für stromab laufende Wellen schematisch in Abbildung 2.4 dargestellt.

Der Verlauf der Geschwindigkeitskomponenten in axialer Richtung lässt sich nach [24] und [26] ebenso wie der Druck (2.31) als Funktion der *Riemann*

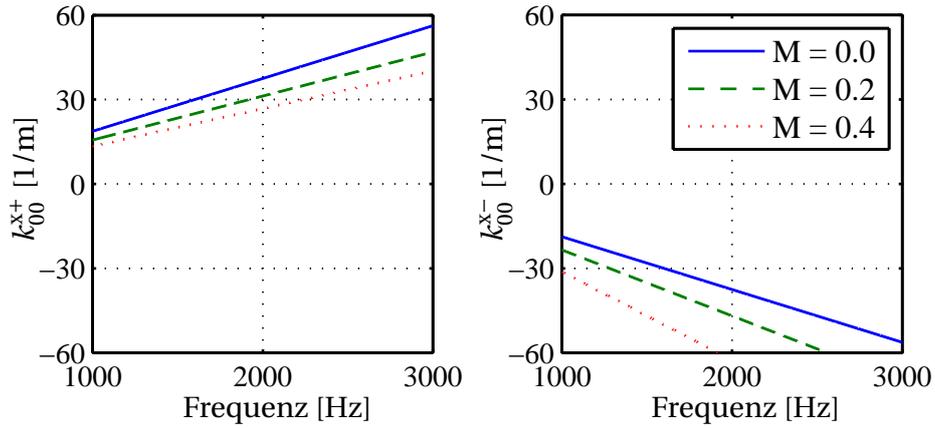


Abbildung 2.5.: Axiale Wellenzahlen für $m = 0$ und $n = 0$, $R = 0.046$ m, für verschiedene Machzahlen

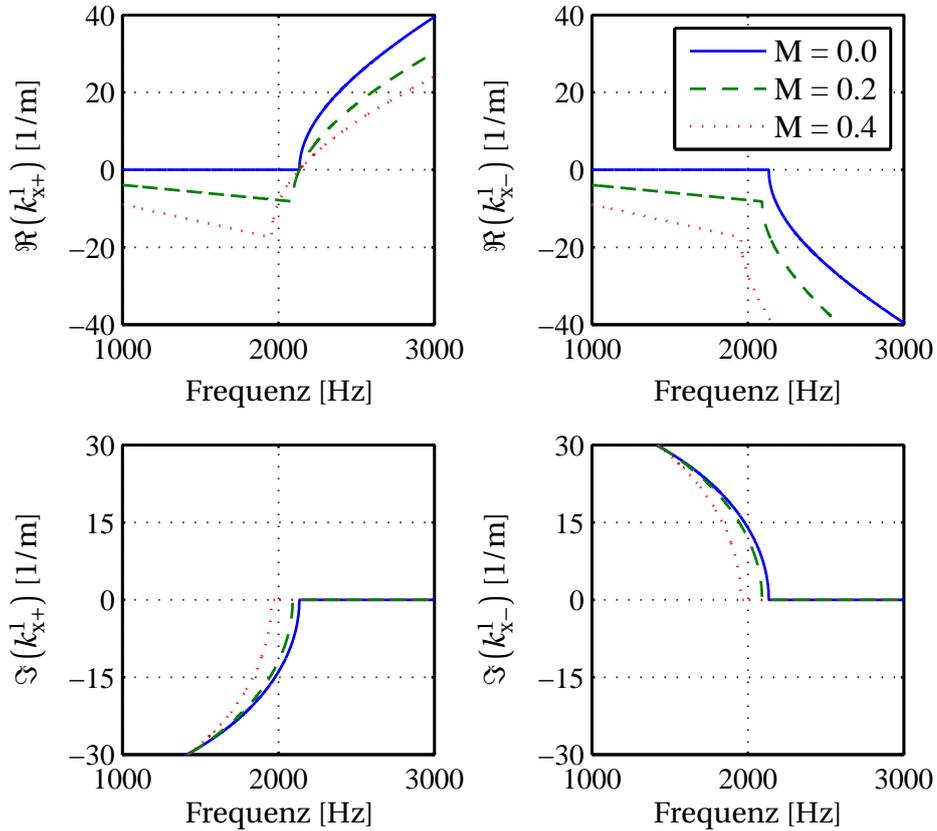


Abbildung 2.6.: Axiale Wellenzahlen für $m = 1$ und $n = 0$, $R = 0.046$ m, für verschiedene Machzahlen

Invarianten schreiben

$$u'_x(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{2.39}$$

$$v'_x(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{2.40}$$

$$w'_x(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{2.41}$$

und führt zu

$$U_{mn}(x) = \kappa_{mn}^+ \hat{F}_{mn} \cdot e^{-ik^{x+}x} + \kappa_{mn}^- \hat{G}_{mn} \cdot e^{-ik^{x-}x} \quad (2.42)$$

$$V_{mn}(x) = \mu_{mn}^+ \hat{F}_{mn} \cdot e^{-ik^{x+}x} + \mu_{mn}^- \hat{G}_{mn} \cdot e^{-ik^{x-}x} \quad (2.43)$$

$$W_{mn}(x) = \mu_{mn}^+ \hat{F}_{mn} \cdot e^{-ik^{x+}x} + \mu_{mn}^- \hat{G}_{mn} \cdot e^{-ik^{x-}x}. \quad (2.44)$$

Die Funktionen κ_{mn}^\pm in (2.42) und μ_{mn}^\pm in (2.43) und (2.44) dienen der Projektion der Wellen in die axiale Richtung und werden nach [51] aus dem Verhältnis der Gesamtwellenzahl k und den axialen Wellenzahlen $k_{mn}^{x\pm}$ gebildet:

$$\kappa_{mn}^\pm = \frac{k_{mn}^{x\pm}}{k - Mk_{mn}^{x\pm}} \quad (2.45)$$

$$\mu_{mn}^\pm = \frac{\pm i}{k - Mk_{mn}^{x\pm}} \quad (2.46)$$

Ihre Herleitung ist in Anhang (B.4) ausführlich beschrieben.

2.3. Ausbreitungsfähigkeit von Eigenmoden

Im Gegensatz zur Wellenausbreitung im freien Feld unterliegt das Ausbreitungsverhalten in zylinderförmigen Rohren starken Restriktionen [17]. Nicht jede Mode ist bei einer vorgegebenen Frequenz ausbreitungsfähig. Ist deren Wellenlänge größer als die räumliche Ausdehnung des schwingungsfähigen Volumens, so ist sie in ihrer Ausbreitung gehemmt. Dies geht vor allem aus den axialen Wellenzahlen hervor, die über ihre Bestimmungsgleichungen (2.35) und (2.36) über die radiale Wellenzahl $k_{mn}^r = \frac{s_{mn}}{R}$ (Gleichung (2.22)) an die Geometrie gekoppelt sind. Wie bereits im vorherigen Abschnitt 2.2.3 festgestellt wurde, kann der Ausdruck unter der Wurzel der Wellenzahlen $k_{mn}^{x\pm}$ für $k < k_{mn}^r$ negativ werden, was zu komplexen axialen Wellenzahlen führen kann. In weiterer Folge führt dies in der Gleichung für die axiale Druckausbreitung (2.31) zu einem Exponentialterm der Form $e^{\Im(k_{mn}^{x\pm})x}$, der die Wellen \hat{f}_{mn} und \hat{g}_{mn} in ihrer Ausbreitungsrichtung abschwächt.

Betrachtet man den Wurzelausdruck von (2.35) und (2.36) im Detail, so kann eine Grenzfrequenz, die als cut-on Frequenz⁴ bezeichnet wird, ermittelt werden, was der Fall für $k = k_{mn}^r$ ist, und schlussendlich zu

$$\omega_{mn}^{\text{co}} = c \cdot \frac{s_{mn}}{R} \cdot \sqrt{1 - M^2} \quad (2.47)$$

⁴ Oft findet sich in der Literatur auch die umgekehrte Bezeichnung cut-off Frequenz.

führt [17].

Ab Erreichen dieser Frequenz wird der Imaginärteil der Wellenzahlen zu null und die Wellen können sich ungehemmt ausbreiten. Die cut-on Frequenz hat sehr große Bedeutung in technischen Anwendungen, kennzeichnet sie die Grenze von ausbreitungsfähigen und nicht ausbreitungsfähigen Moden. Nicht ausbreitungsfähige Moden sind auf Grund ihrer starken Dämpfung meist nicht von Bedeutung und können deshalb vernachlässigt werden, da ihre örtlichen Amplituden schnell sehr klein werden [58]. Für $m = 0$ nehmen die axialen Wellenzahlen, wie im vorherigen Abschnitt bereits erläutert, nur rein reelle Werte an (siehe (2.37) und (2.38)), wodurch sich keine cut-on Frequenz bestimmen lässt. Im Gegensatz dazu können für alle anderen Moden mit $m > 0$ cut-on Frequenzen angegeben werden.

Zur Veranschaulichung, wie stark die stromauf und stromab laufenden Wellen bei Frequenzen unterhalb der cut-on Frequenzen in ihrer örtlichen Ausbreitung gedämpft werden, sind deren Verläufe in Abbildung 2.7 als Funktion der Frequenz, beispielhaft für $m = 1 / n = 0$ Eigenmoden gezeigt. Der Radius des Rohres und die Machzahl entsprechen dabei den Größen der im Rahmen dieser Arbeit untersuchten Raketenbrennkammer ($R = 0.046$ m und $M = 0.24$).

Dabei zeigt sich für $\omega = 0.9 \cdot \omega_{10}^{\text{co}}$ eine deutliche Abnahme der Amplituden in Ausbreitungsrichtung um ca. 80% auf einer Länge von 0.1 m und eine gleichlaufende Phasendrehung für beide Wellen. Nähert sich die Frequenz der cut-on Frequenz an ($\omega = 0.99 \cdot \omega_{10}^{\text{co}}$), so beträgt die Reduzierung der Amplitude über die selbe Länge noch 50%. Ab der cut-on Frequenz ($\omega \geq \omega_{10}^{\text{co}}$), tritt keine Dämpfung der Amplitude mehr auf. Für Frequenzen, die wesentlich höher als die cut-on Frequenz ($\omega = 1.5 \cdot \omega_{10}^{\text{co}}$) sind, zeigen sich gegenläufige Phasengänge mit einer starken Unsymmetrie, die auf die Durchströmung des Rohres zurückzuführen ist. Auf diesen Effekt wurde bereits in Abschnitt 2.2.3 eingegangen. Tritt keine Durchströmung auf, so bleiben die Phasenverläufe gegenläufig, die Phasengeschwindigkeiten sind jedoch gleich groß. Eine Besonderheit ergibt sich nach Rienstra und Hirschberg [53] für den Bereich $\omega_{mn}(M \neq 0) < \omega < \omega_{mn}(M = 0)$. Die Wellen sind bei Frequenzen ausbreitungsfähig, an denen sie es ohne Durchströmung nicht sind. Die Drehrichtungen der Phasen sind gleich, was daran liegt, dass die Realteile von $k_{mn}^{\text{x}\pm}$ das selbe Vorzeichen besitzen (siehe Abbildung 2.6). Die beiden Wellen breiten sich dadurch scheinbar entgegen der Strömungsrichtung aus. Ohne Durchströmung tritt dieses Phänomen nicht auf.

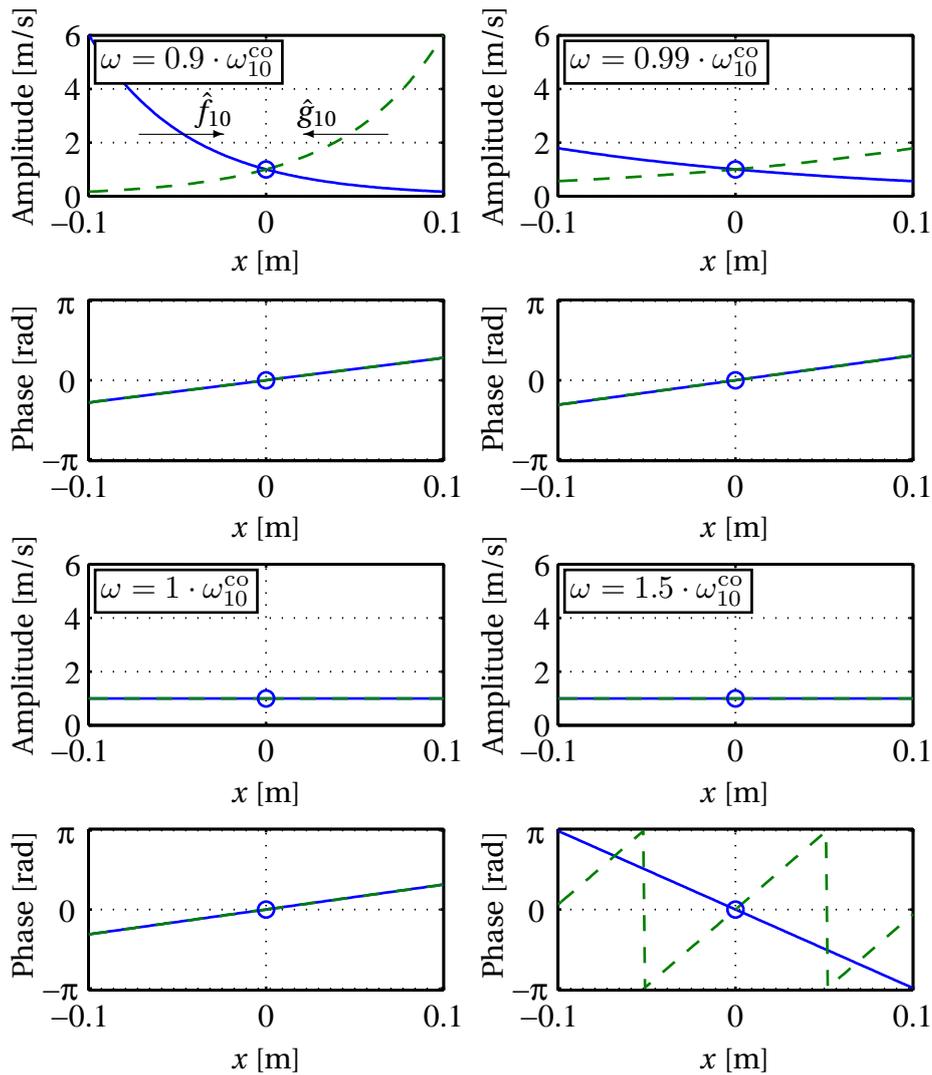


Abbildung 2.7.: Stromab (f_{10}) und stromauf (g_{10}) laufende Wellen in einem Rohr mit einem Radius von $R = 0.046$ m, transversale Ordnung $m = 1$, radiale Ordnung $n = 0$, mit $\hat{f}_{10}(x = 0.1) = \hat{g}_{10}(x = 0.1) = 1$ und $M = 0.24$, Durchströmung in positiver Koordinatenrichtung für verschiedene Frequenzen

In der Literatur wird die Gleichung (2.47) sehr oft zur Berechnung von Eigenmoden mit $m > 0$ und $n > 0$ für Raketenbrennkammern verwendet. Es muss dabei berücksichtigt werden, dass diese Formulierung nur eine grobe Abschätzung darstellt, da Gleichung (2.47) nur den durchströmten Kreisquerschnitt, nicht aber die axiale Ausdehnung der Kammer berücksichtigt. Die Brennkammerlänge sowie die stromab- und stromaufseitigen Randbedingungen haben maßgeblichen Einfluss auf die tatsächliche Ausbreitungsfähigkeit und die Modenform und führen stets dazu, dass die erste schwingungsfähige Eigenmode oberhalb der cut-on Frequenz liegt. Die Übertragbarkeit auf reale

Raketenbrennkammern ist somit nur bedingt gültig. Die Voraussetzungen für die Existenz einer rein transversal schwingenden Eigenmode sind im Anhang B.2 angegeben und treffen nicht auf eine Raketenbrennkammer zu. Für die Modenklasse 10 ist die erste schwingungsfähige Eigenmode die T1L1, welche oft fälschlicherweise als T1 bezeichnet wird. Um konsistent mit der Literatur zu sein, wird die unpräzise Nomenklatur in den folgenden Kapiteln fortgeführt, die Bezeichnung T1 ist equivalent zu T1L1. Die nächste mögliche Eigenmode von Modenklasse 10 wird mit T1L2 bezeichnet.

Die Eigenfrequenzen für eine reale Raketenbrennkammer mit komplexen frequenzabhängigen Randbedingungen lassen sich nur mit deren Kenntnis und unter Zuhilfenahme von numerischen Tools berechnen. Darauf wird im später folgenden Kapitel 6 im Detail eingegangen.

2.4. Gruppengeschwindigkeit

Die Gruppengeschwindigkeit beschreibt die Geschwindigkeit, mit der sich Information ausbreitet. Sie wird deshalb oft auch Signalgeschwindigkeit genannt [64] und entspricht der Schallgeschwindigkeit in Ausbreitungsrichtung der signaltragenden Welle. In einem zylinderförmigen Rohr ist die Ausbreitung in Achsrichtung von Bedeutung und kann für einfache Modenformen (z. B. reine Längsmoden mit $m = 0 / n = 0$) und ein ruhendes Medium mit

$$c_{00}^{\text{Gr}\pm} = c \quad (2.48)$$

angegeben werden. Dabei ist der Wellenvektor \vec{k} parallel zur Achsrichtung. Wird jedoch eine höhere Mode mit $m > 0$ oder $n > 0$ zur Signalübertragung verwendet, sind Wellenvektor und Achsrichtung nicht mehr parallel und die Formulierung der Gruppengeschwindigkeit (2.48) ändert sich zu

$$c_{00}^{\text{Gr}\pm} = c \cdot \cos \theta. \quad (2.49)$$

Dabei ist θ der Winkel zwischen \vec{k} und der x-Achse. Für durchströmte Zylinder muss die Beziehung (2.49) erweitert werden und lautet nach Ehrenfried [17]:

$$c_{mn}^{\text{Gr}\pm} = c \cdot \frac{(1 - M^2) \cdot S_{mn}^{\pm}}{1 - M \cdot S_{mn}^{\pm}} \quad (2.50)$$

S_{mn}^{\pm} ist dabei der Wurzelterm aus den Gleichungen (2.35) und (2.36):

$$S_{mn}^{+} = +\sqrt{1 - \left(\frac{k_{mn}^x}{k}\right)^2 \cdot (1 - M^2)} \quad (2.51)$$

$$S_{mn}^{-} = -\sqrt{1 - \left(\frac{k_{mn}^x}{k}\right)^2 \cdot (1 - M^2)} \quad (2.52)$$

Die Gruppengeschwindigkeit (2.50) ist in Abbildung 2.8 für beide Koordinatenrichtungen grafisch ausgewertet. Die dabei verwendeten Größen entsprechen jenen der Versuchseinrichtung, die in dieser Arbeit verwendet wurde.

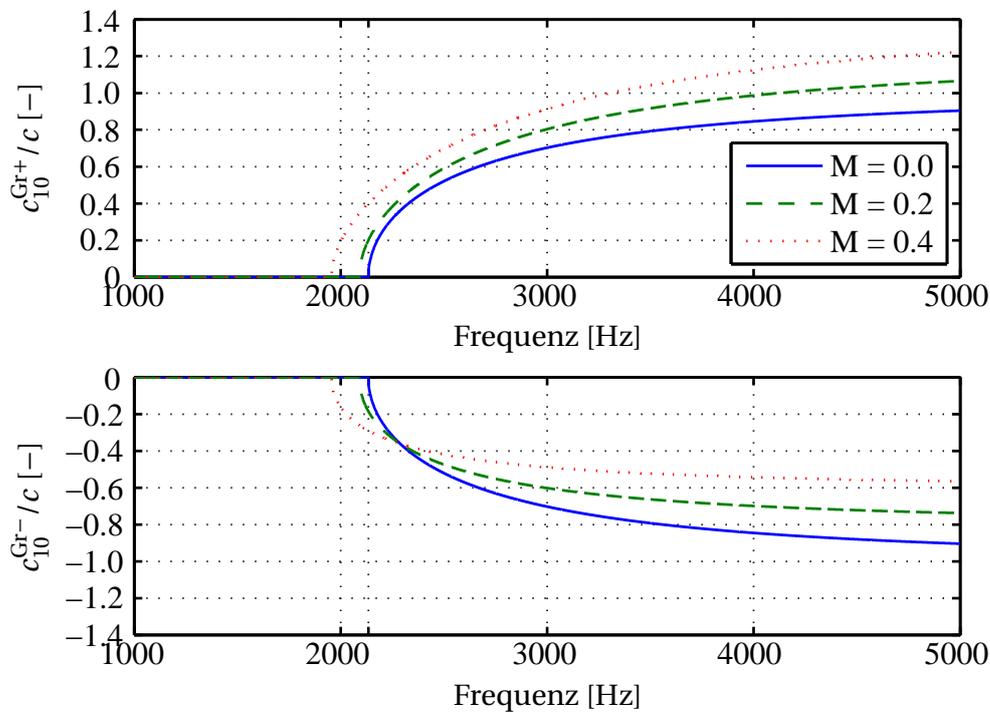


Abbildung 2.8.: Gruppengeschwindigkeit in x-Richtung für $m = 1 / n = 0$

Die Gruppengeschwindigkeit beträgt sowohl in positiver als auch negativer Richtung an der cut-on Frequenz null. Das bedeutet, dass in diesem Fall kein Informationsaustausch in Achsrichtung stattfinden kann, was sowohl für den durchströmten als auch für den undurchströmten Fall gilt. Da allerdings im Rahmen der vorliegenden Arbeiten keine Eigenmoden direkt an der cut-on Frequenz auftreten (siehe dazu Abschnitt B.2), kann dieser Sonderfall vernachlässigt werden. Ab der cut-on Frequenz beginnt die Gruppengeschwindigkeit stark anzusteigen und konvergiert für unendlich große Frequenzen zu einem

endlichen Grenzwert:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} c_{mn}^{\text{Gr}\pm} = c \cdot (1 \pm M) \quad (2.53)$$

Bereits bei Frequenzen oberhalb von 2200 Hz nimmt die Gruppengeschwindigkeit hohe Werte an (z. B. bei $M = 0.25$ wird $c_{mn}^{\text{Gr}+}$ 200 m/s).

2.5. Reflektionsfaktoren und Admittanzen

Je nach Beschaffenheit einer Berandung oder einer Grenzfläche zu einem anderen Medium wird eine eintreffende Welle mehr oder weniger reflektiert. Dies kann in Form des frequenz- und modenabhängigen Reflexionsfaktors angegeben werden, der das Verhältnis von reflektierter zu einlaufender Welle beschreibt.

Stromab:  $R_{mn}^u = \left(\frac{\hat{g}_{mn}}{\hat{f}_{mn}} \right)^{\text{Ref}} \quad (2.54)$

Stromauf:  $R_{mn}^d = \left(\frac{\hat{f}_{mn}}{\hat{g}_{mn}} \right)^{\text{Ref}} \quad (2.55)$

Dabei sind f_{mn}^{Ref} und g_{mn}^{Ref} die Wellen an der jeweiligen Referenzposition.

Zweckmäßiger und in der Raketentechnologie deutlich weiter verbreitet ist die Verwendung der Admittanz, angeschrieben in Zylinderkoordinaten

$$\vec{Y}_{mn} = \begin{pmatrix} Y \\ Y^r \\ Y^\theta \end{pmatrix}_{mn} \quad (2.56)$$

Dies ist der Quotient aus der lokalen Geschwindigkeitsschwankung zur lokalen Druckschwankung, der ebenso wie die Geschwindigkeit eine vektorielle Größe ist, deren Kenntnis für die Bilanzierung der akustischen Energie verwendet werden kann. Sie lautet in axialer Koordinatenrichtung

$$Y_{mn} = \frac{\hat{u}_{mn}}{\hat{p}_{mn}} \quad (2.57)$$

Oftmals ist auch die normierte Form der Admittanz und Impedanz zu finden [50]

$$\mathcal{Y}_{mn} = Y_{mn} \cdot \bar{\rho} c. \quad (2.58)$$

Genauso wie Druck und Geschwindigkeit ist auch die Admittanz eine modenabhängige Größe und ist deshalb von m und n abhängig.

Reflektionsfaktor und Admittanz können sehr einfach ineinander überführt werden. Je nach Blickrichtung, stromauf oder stromab, lautet der Zusammenhang wie folgt:

$$\text{Stromauf} \quad R_{mn}^u = \frac{\kappa_{mn}^- - \mathcal{Y}_{mn}}{\mathcal{Y}_{mn} - \kappa_{mn}^+} \quad (2.59)$$

$$\text{Stromab} \quad R_{mn}^d = \frac{\kappa_{mn}^+ - \mathcal{Y}_{mn}}{\mathcal{Y}_{mn} - \kappa_{mn}^-} \quad (2.60)$$

2.6. Bilanzierung der akustischen Energie

Für ein System mit dem Volumen V kann die akustische Energie bilanziert werden. Dabei ist es unerheblich, ob das System offen oder geschlossen ist. Die akustische Energie und der akustische Fluss bestehen beide, wie schon zuvor der Druck (Gleichung (2.15)) und die Geschwindigkeitskomponenten (Gleichungen (2.17) bis (2.19)), aus den Summen der auftretenden Eigenmoden, deren Teilbeträge für verschiedene m und n voneinander unabhängig betrachtet werden können. Der Übersichtlichkeit halber sind die im Folgenden präsentierten Beziehungen ohne die Indices m und n angeschrieben.

Die zeitliche Änderung der akustischen Energie \mathcal{E} in einem Volumen V kann unter Berücksichtigung der Flüsse \mathcal{I} über die Berandungsflächen und der Quellterme \mathcal{Q} mit

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} + \mathcal{I} = \mathcal{Q} \quad (2.61)$$

angegeben werden.

Die akustische Energie wird über die räumliche Integration der lokalen Energiedichte E

$$\mathcal{E} = \iiint_V E \, dV \quad (2.62)$$

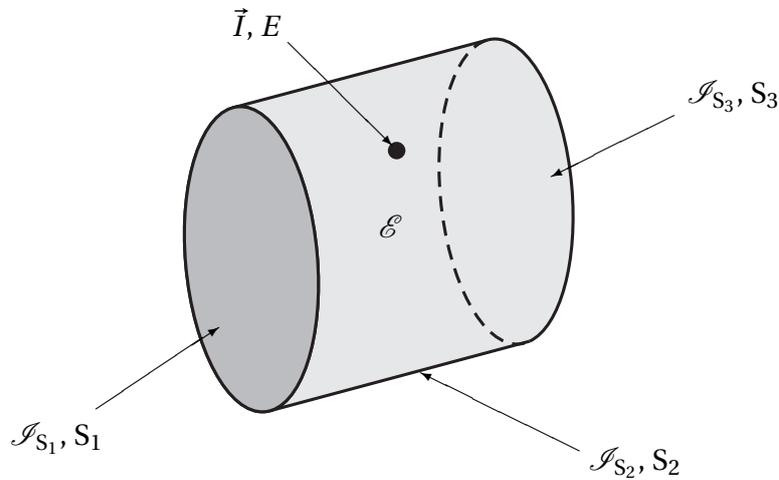


Abbildung 2.9.: Lokale Energiedichte E , lokale Intensität \vec{I} , Flüsse \mathcal{I}_{S_k} über die Kontrollflächen S_k und akustische Energie \mathcal{E} am Beispiel eines Zylinders

berechnet, welche für ein ruhendes Fluid einen kinetischen und potentiellen Anteil aufweist:

$$E = \underbrace{\frac{1}{2} \bar{\rho} u'^2}_{\text{kinetisch}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{p'^2}{\bar{\rho} c^2}}_{\text{potentiell}} \quad (2.63)$$

Unter Berücksichtigung einer mittleren Strömung (isentropes Feld) wird die Energiedichte in Gleichung (2.63) nach Morfey [38] um einen dritten Term erweitert, wodurch sich eine für Raketentriebwerke gültige Formulierung ergibt.

$$E = \frac{1}{2} \bar{\rho} \vec{u}'^2 + \frac{1}{2} \frac{p'^2}{\bar{\rho} c^2} + \underbrace{\frac{p'}{c^2} (\bar{\vec{u}} \cdot \vec{u}')}_{\text{3. Term}} \quad (2.64)$$

Der Gesamtfluss kann durch Integration über die Berandungsflächen berechnet werden:

$$\mathcal{I} = \oint_S \vec{I} d\vec{S} \quad (2.65)$$

Dabei ist

$$\vec{I} = p' \vec{u}' + \frac{\bar{\vec{u}}}{\bar{\rho} c^2} p'^2 + \bar{\rho} (\bar{\vec{u}} \cdot \vec{u}') \vec{u}' + \frac{\bar{\vec{u}}}{c^2} (\bar{\vec{u}} \cdot \vec{u}') p' \quad (2.66)$$

die lokale akustische Intensität in der allgemeinen Form. Bei konstanter mittlerer Strömungsgeschwindigkeit in x-Richtung vereinfacht sich diese Formulierung zu

$$I^x = p' u' + \frac{1}{\bar{\rho} c} M p'^2 + \bar{\rho} c M u'^2 + M^2 u' p' \quad (2.67)$$

und wird für ein ruhendes Fluid zu $I = p' \vec{u}'$.

Der Quellterm berechnet sich analog zur akustischen Energie über die räumliche Integration

$$\mathcal{Q} = \iiint_V \dot{Q} dV \quad (2.68)$$

der lokalen Quellendichte

$$\dot{Q} = \bar{\rho} \vec{u}' \cdot ((\nabla \times \vec{u}') \times \vec{u}') + \rho' \vec{u}' \cdot ((\nabla \times \vec{u}) \times \vec{u}). \quad (2.69)$$

Für ein drehungsfreies Feld ($\nabla \times \vec{u}' = 0$) wird dieser Ausdruck zu null und die Bilanz lautet somit

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} + \sum_k \mathcal{I}_{S_k} = 0 \quad (2.70)$$

mit dem akustischen Fluss \mathcal{I}_{S_k} über die zugehörige Fläche S_k . Für eine zylinderförmige Geometrie ist dies schematisch in Abbildung 2.9 dargestellt. Liegt ein stationäres Feld vor, in dem die Schwankungsgrößen periodisch sind, so kann das zeitliche Mittel für Terme der Form $p' u'$ [19] mit

$$\langle p' u' \rangle = \frac{1}{2} \Re(\hat{p} \hat{u}^*) = \frac{1}{2} \Re(\hat{u} \hat{p}^*) \quad (2.71)$$

angegeben werden. Die detaillierte Herleitung dazu kann dem Anhang B.6 entnommen werden.

Angewandt auf die Formulierungen (2.64) und (2.67) lauten die zeitlich gemitt-

telte akustische Energiedichte und Intensität nun

$$\begin{aligned} \langle E \rangle = & \\ & \frac{1}{2} \Re \left(\frac{\bar{\rho}}{2} (\hat{u} \hat{u}^* + \hat{v} \hat{v}^* + \hat{w} \hat{w}^*) + \frac{1}{2 \bar{\rho} c^2} \hat{p} \hat{p}^* \right. \\ & \left. + \frac{\bar{u}}{c^2} (\hat{p} \hat{u}^*) + \frac{\bar{v}}{c^2} (\hat{p} \hat{v}^*) + \frac{\bar{w}}{c^2} (\hat{p} \hat{w}^*) \right) \end{aligned} \quad (2.72)$$

$$\begin{aligned} \langle I^x \rangle = & \\ & \frac{1}{2} \Re \left(\hat{p} \hat{u}^* + \frac{\bar{u}}{\bar{\rho} c^2} \hat{p} \hat{p}^* + \bar{\rho} (\bar{u} \hat{u} \hat{u}^* + \bar{v} \hat{v} \hat{v}^* + \bar{w} \hat{w} \hat{w}^*) \right. \\ & \left. + \frac{\bar{u}^2}{c^2} \hat{p} \hat{u}^* + \frac{\bar{u} \bar{v}}{c^2} \hat{p} \hat{v}^* + \frac{\bar{u} \bar{w}}{c^2} \hat{p} \hat{w}^* \right), \end{aligned} \quad (2.73)$$

was dazu führt, dass zeitliche Ableitungen zu null werden:

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathcal{E} \rangle = 0 = \sum_k \langle \mathcal{I}_{S_k} \rangle \quad (2.74)$$

Betrachtet man jedoch ein zeitlich instationäres Feld mit der Einschränkung, dass die Ausbreitung der Wellen in axialer Richtung, ausgedrückt durch ihre Gruppengeschwindigkeit (siehe dazu Abschnitt 2.4), groß ist, ergibt sich nach Fiala [23] die folgende Beziehung:

$$\langle p' u' \rangle (t) = \frac{1}{2} \Re (\hat{p} \hat{u}^*) \cdot e^{2\alpha t} \quad (2.75)$$

Die akustische Energiedichte und Intensität lauten in diesem Fall:

$$\begin{aligned} \langle E \rangle (t) = & \\ & \frac{1}{2} \Re \left(\frac{\bar{\rho}}{2} (\hat{u} \hat{u}^* + \hat{v} \hat{v}^* + \hat{w} \hat{w}^*) + \frac{1}{2 \bar{\rho} c^2} \hat{p} \hat{p}^* \right. \\ & \left. + \frac{\bar{u}}{c^2} (\hat{p} \hat{u}^*) + \frac{\bar{v}}{c^2} (\hat{p} \hat{v}^*) + \frac{\bar{w}}{c^2} (\hat{p} \hat{w}^*) \right) \cdot e^{2\alpha t} \end{aligned} \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \langle I^x \rangle (t) = & \\ & \frac{1}{2} \Re \left(\hat{p} \hat{u}^* + \frac{\bar{u}}{\bar{\rho} c^2} \hat{p} \hat{p}^* + \bar{\rho} (\bar{u} \hat{u} \hat{u}^* + \bar{v} \hat{v} \hat{v}^* + \bar{w} \hat{w} \hat{w}^*) \right. \\ & \left. + \frac{\bar{u}^2}{c^2} \hat{p} \hat{u}^* + \frac{\bar{u} \bar{v}}{c^2} \hat{p} \hat{v}^* + \frac{\bar{u} \bar{w}}{c^2} \hat{p} \hat{w}^* \right) \cdot e^{2\alpha t} \end{aligned} \quad (2.77)$$

Die Herleitung hierzu ist in Anhang B.7 angegeben. Für $\alpha = 0$ in den Gleichungen (2.76) und (2.77) ergeben sich die Formulierungen für die gemittelte akustische Energiedichte (2.72) und Intensität (2.73).

Tabelle 2.1.: Häufig verwendete akustische Randbedingungen. Imaginärteil von Admittanz und Impedanz sind jeweils zu null gesetzt, Quelle: Fiala [23]

	$M = 0$			$M \neq 0$		
	\mathcal{Y}_{mn}	R_{mn}^d	$\langle I_{mn}^x \rangle$	\mathcal{Y}_{mn}	R_{mn}^d	$\langle I_{mn}^x \rangle$
Schallhart $u'_{mn} = 0$	0	1	0	0	$-\kappa_{mn}^+ / \kappa_{mn}^-$	$\neq 0$
Schallweich $p'_{mn} = 0$	∞	-1	0	∞	-1	$\neq 0$
Massenstromflukt. 0 $\langle \bar{\rho} u_{mn} \rangle = 0$	0	1	0	$-M$	$\frac{-\kappa_{mn}^+ - M}{\kappa_{mn}^- + M}$	0
Impulsstromflukt. 0 $\langle u_{mn}^2 + p_{mn} / \bar{\rho} \rangle = 0$	$-\infty$	-1	0	$-1/M$	$-\frac{1 + \kappa_{mn}^+ M}{1 + \kappa_{mn}^- M}$	0
Nicht-reflektierendes Ende (Einlass)	-1	∞	< 0	$1/\kappa_{mn}^-$	∞	< 0
Nicht-reflektierendes Ende (Auslass)	1	0	> 0	κ_{mn}^+	0	> 0

2.6.1. Zusammenhang zwischen Intensität und Admittanz

Die Intensität ist eng mit der Admittanz verknüpft. Dies wird ersichtlich durch Ersetzen des Terms $\hat{u}_{mn} / (\hat{p}_{mn} \cdot \bar{\rho} \bar{c})$ durch \mathcal{Y}_{mn} in Gleichung (2.73). Nach Candel [9] und Zinn [66, 67] lautet diese Beziehung:

$$\langle I_{mn}^x \rangle = \frac{1}{2} \frac{|\hat{p}_{mn}|^2}{\bar{\rho} c} \underbrace{[(1 + M^2) \Re(\mathcal{Y}_{mn}) + M |\mathcal{Y}_{mn}|^2 + M]}_{(*)} \quad (2.78)$$

Diese Art der Formulierung erlaubt es, verschiedene Arten von Randbedingungen sehr einfach und anschaulich darzustellen. Setzt man beispielsweise die Intensität in Gleichung (2.78) zu null, kann eine energieneutrale Randbedingung definiert werden. Dies kann sowohl durch eine verschwindende Massenstromfluktuation ($\langle \bar{\rho} c \rangle = 0$) als auch durch eine verschwindende Impulsstromfluktuation ($\langle u_{mn}^2 + p'_{mn} / \bar{\rho} \rangle = 0$) realisiert werden [23]. Tabelle 2.1 gibt verschiedene Randbedingungen und deren Werte an.

Besondere Bedeutung kommt dabei der Admittanz zu, die den akustischen Fluss maßgeblich beeinflusst. Sie kann zu einer Änderung des Vorzeichens führen, was mit einer Umkehrung der Flussrichtung gleichzusetzen ist. Dies lässt

sich durch Aufspaltung von Gleichung (2.78) in zwei Teile zeigen. Der Ausdruck vor der Klammer $\frac{1}{2} |\hat{p}_{mn}|^2 / (\bar{\rho}c)$ ist stets positiv. Er kann keine Umkehrung des Vorzeichens von $\langle I_{mn}^x \rangle$ herbeiführen. Jedoch kann der Klammersausdruck (*) sowohl positiv als auch negativ sein. In Abbildung 2.10 ist dieser Ausdruck für verschiedene Real- und Imaginärteile der Admittanz in Abhängigkeit der Machzahl ausgewertet⁵. Es ist jeweils die Grenze dargestellt, an der der Klammersausdruck sein Vorzeichen wechselt. Im Fall ohne Durchströmung ($M = 0$) ist dies eine senkrechte Gerade durch den Nullpunkt. Unabhängig vom Imaginärteil der Admittanz führt ein negativer Realteil zu negativer Intensität, wohingegen ein positiver Realteil zu positiver Intensität führt. Der Fall einer Durchströmung mit Schallgeschwindigkeit ($M = 1$) stellt eine Singularität dar. Hier ergibt sich kein Vorzeichenwechsel, da sich die Grenzlinie auf einen Punkt bei $\mathcal{Y}_{mn} = -1 + 0i$ reduziert.

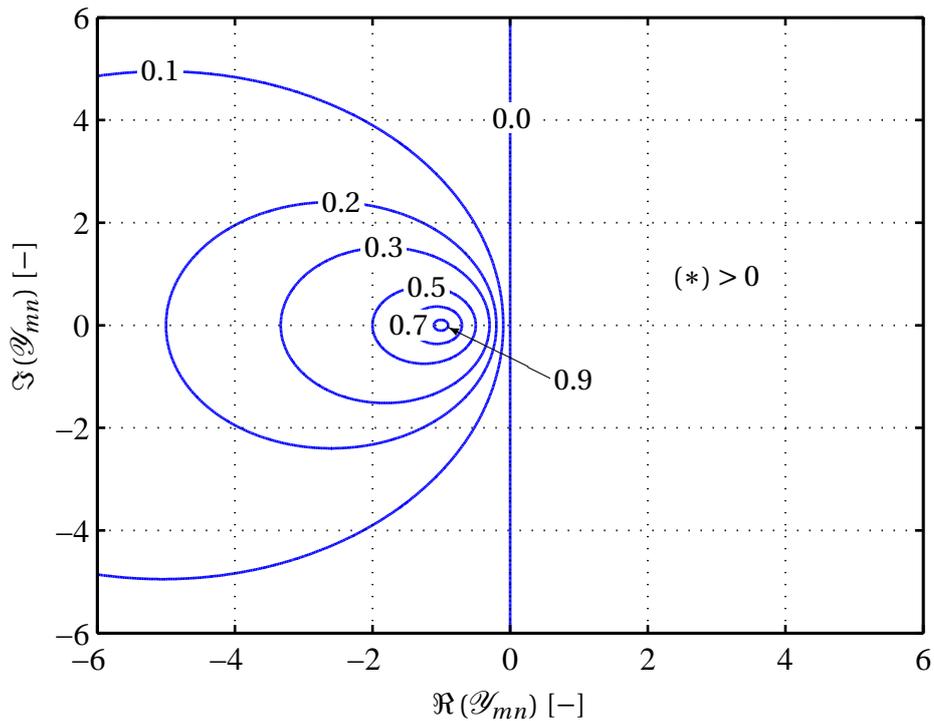


Abbildung 2.10.: Grenzlinien an denen die Intensität ihr Vorzeichen wechselt in Abhängigkeit der Machzahl

Hervorzuheben ist, dass (*) nur ein qualitatives Maß für den Fluss ist und dessen Richtung angibt. Der senkrechte Abstand eines Punktes (bzw. einer Admittanz) zur Grenzlinie legt fest, wie groß der Einfluss auf den Fluss ist. Das

⁵ Betrachtet wird dabei der Fall, dass das System in positiver Koordinatenrichtung durchströmt ist. Bei Durchströmung in die entgegengesetzte Richtung ist Abbildung 2.10 um die senkrechte Achse gespiegelt

Quadrat des Betrages der komplexen Druckamplitude ist jedoch der eigentliche Treiber, welcher vom Gesamtsystem abhängig ist. Die alleinige Kenntnis der Randbedingung (bzw. der Admittanz) reicht somit nicht aus, um den Fluss zu bestimmen. Düse und Durchströmung können sich nur günstig oder weniger günstig auf den Fluss auswirken.

2.6.2. Zusammenhang zwischen Dämpfung, akustischer Energie und Intensität

Die Gleichungen (2.62) und (2.76), beschreiben den zeitlichen Verlauf der Energie in einem Zylinder und gelten für alle Modenklassen. Sie können in die einfache Form

$$\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cdot e^{2\alpha t} \quad (2.79)$$

überführt werden. Die Energie \mathcal{E}_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Brennkammer klingt mit dem doppelten Abklingkoeffizienten α des Drucks ab, was in der Herleitung aus Abschnitt 2.6 folgt. Umgeformt lässt sich daraus der Dämpfungswert berechnen:

$$\frac{\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\mathcal{E}(t)}{\mathcal{E}_0} \right)}{t} = \alpha \quad (2.80)$$

Folgt das Abklingen nicht exakt einer e-Funktion, so lässt sich Gleichung (2.80) zu

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial \mathcal{E}(t)}{\partial t}}{\mathcal{E}(t)} \quad (2.81)$$

umschreiben. Unter Einbeziehung der Energiebilanz (2.70) kann die Ableitung von $\partial \mathcal{E}(t) / \partial t$ durch die Flüsse \mathcal{I}_{S_k} ersetzt, und der Dämpfungswert wie folgt aufgespalten werden, wie dies von Pieringer [50] und Fiala [23] gemacht wurde:

$$\alpha(t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t) + \dots = \frac{1}{2} \frac{\sum_k \mathcal{I}_{S_k}(t)}{\mathcal{E}(t)} \quad (2.82)$$

Für die Dämpfungswerte von Faceplate und Düse ergeben sich die Beziehungen

$$\alpha(t)_{DÜ} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{I}_{DÜ}(t)}{\mathcal{E}(t)} \quad (2.83)$$

$$\alpha(t)_{FP} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{I}_{FP}(t)}{\mathcal{E}(t)}, \quad (2.84)$$

wodurch sich deren Einfluss auf die Dämpfung der Raketenbrennkammer ermitteln lässt.

3 Experimentelle Methoden und Analyseverfahren

Im folgenden Kapitel werden verschiedene experimentelle Methoden vorgestellt, um die akustischen Eigenschaften der im darauf folgenden Kapitel 4 beschriebenen Versuchsanlage bestimmen zu können. Der Fokus liegt dabei auf der ersten transversalen Modenklasse 10 mit $m = 1$ und $n = 0$. Da die Versuchsanlage speziell auf die experimentellen Methoden angepasst ist, ergibt sich eine sehr enge Verknüpfung zwischen beiden Kapiteln. Die physikalischen Grundlagen für die experimentellen Methoden bilden die theoretischen Abhandlungen aus Kapitel 2, die hier anwendungsbezogen aufbereitet werden.

3.1. Messwerterfassung und Datenaufbereitung

Aus den theoretischen Beschreibungen in Kapitel 2 geht hervor, dass Druck p und Geschwindigkeit u die zu bestimmenden Größen sind. Beide können in einen mittleren und einen Schwankungsteil separiert werden (siehe Gleichungen 2.1 - 2.5). Die Schwankungsanteile sind über die hergeleiteten Beziehungen in Abschnitt 2.2 aneinander gekoppelt und können so ineinander überführt werden. Es ist somit ausreichend, nur eine der beiden Größen zu messen.

Die Messung von Geschwindigkeiten, zum Beispiel mit Hilfe von Hitzdrahsonden und optischen Verfahren, ist äußerst aufwändig [26] und nur mit einem sehr hohen Aufwand an Messtechnik zu realisieren. Viel zweckmäßiger und einfacher ist die Messung des Druckes mit piezoelektrischen Sensoren. Diese sind weit verbreitet und es gibt zahlreiche Hersteller, welche ein sehr breites Spektrum an verschiedenen Sensortypen anbieten. Im Rahmen dieser Arbeit wurden für die mittleren Drücke Sensoren der Firma *JUMO* und für den Schwankungsanteil Sensoren der Firma *PCB Piezotronics* verwendet. Auf die technischen Details der verwendeten Messtechnik wird in Abschnitt 4.1.7 gesondert eingegangen.

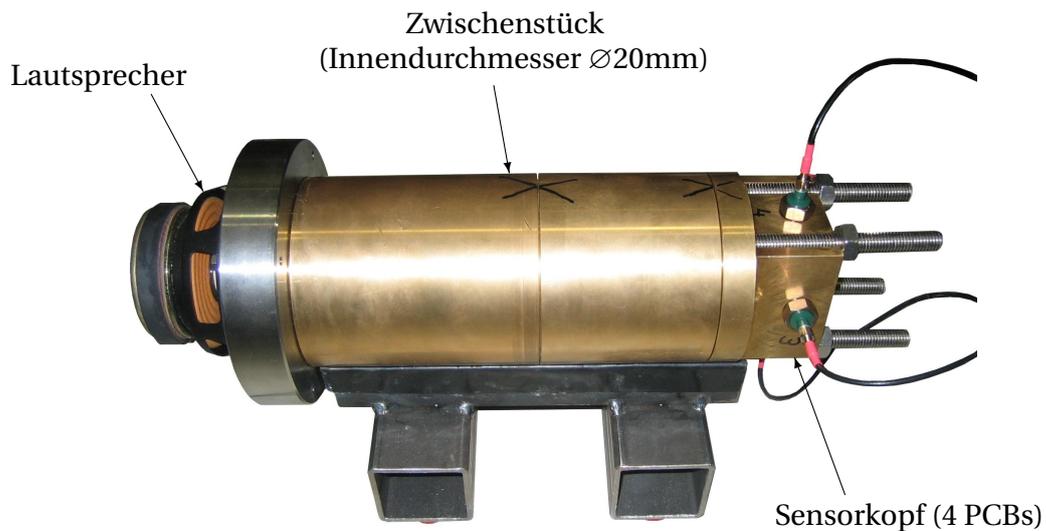


Abbildung 3.1.: Kalibrationseinrichtung mit 4 PCBs, davon dient einer als Referenzsensor

Der Schwankungsanteil des Drucks wird in Form von Zeitreihen von bis zu einer Sekunde aufgezeichnet und anschließend zur Ermittlung des Spektrums unter Verwendung einer Fensterfunktion¹ fouriertransformiert (FFT²). Weitere Details und Parameter dazu sind in den folgenden Abschnitten angegeben.

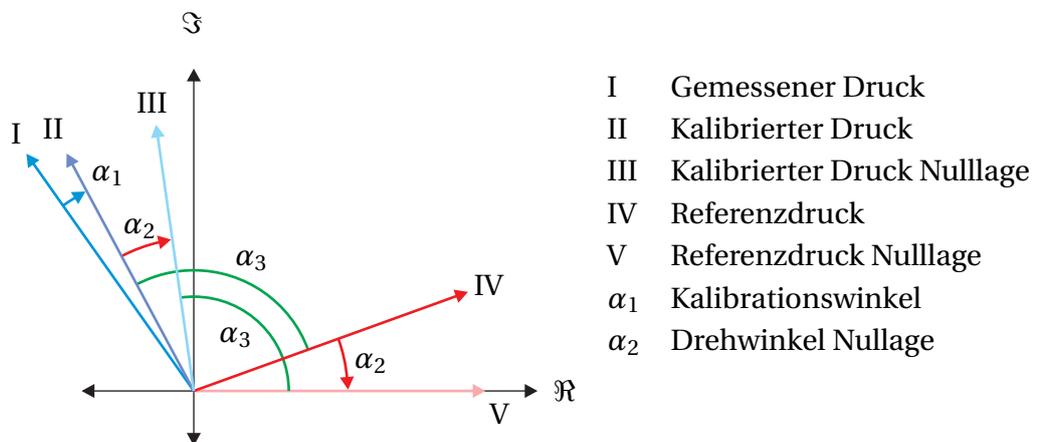


Abbildung 3.2.: Darstellung der Druckvektoren zur Datenaufbereitung

Die Sensoren sind vor der Verwendung zu kalibrieren, um fertigungsbedingte Abweichungen zu kompensieren. Dazu wird eine eigens am Lehrstuhl für Thermodynamik entwickelte Kalibrationseinrichtung verwendet, mit deren Hilfe eine frequenzabhängige Kalibrationskurve für jeden Sensor in Bezug zu

¹ Von Hann bei Abklingversuchen, ansonsten Flattop.

² FFT = Fast Fourier Transformation [37]

einem Referenzsensor erstellt werden kann. Sie ist in [1] ausführlich beschrieben und in Abbildung 3.1 dargestellt. In Abbildung 3.3 ist die Kalibrationskurve eines Sensors in Form des Amplitudenkoeffizienten und der Phasendifferenz gegenüber dem Referenzsensor dargestellt.

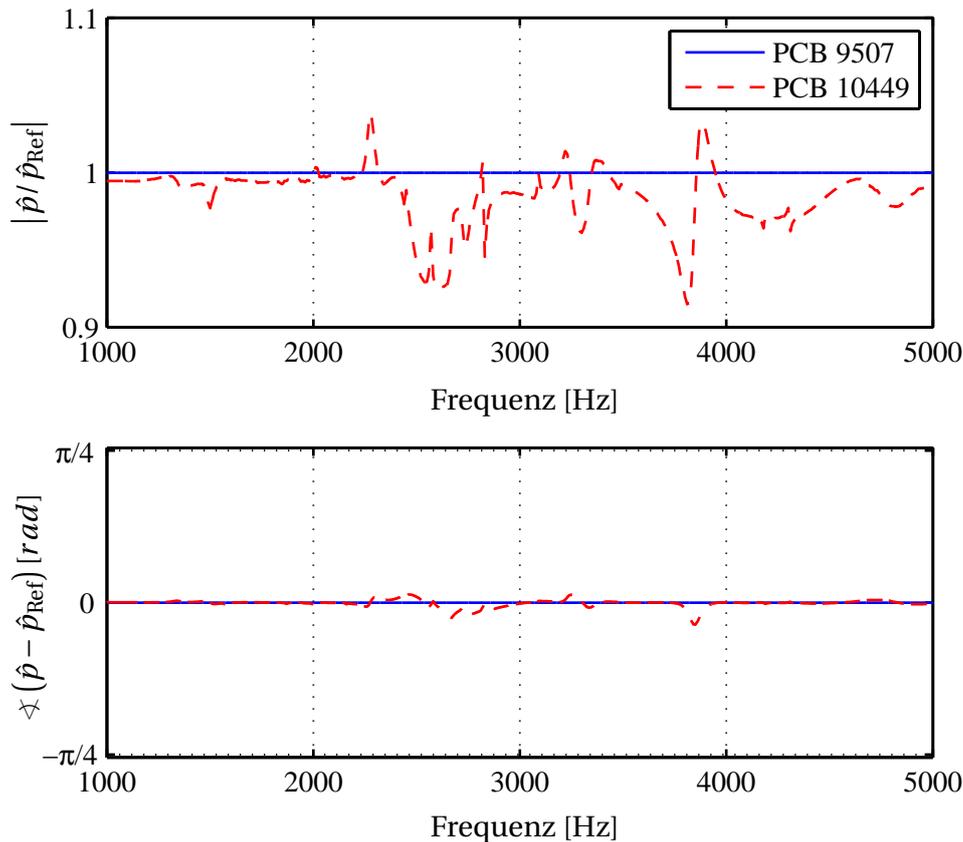


Abbildung 3.3.: Kalibrationskurve eines Sensors im Vergleich zum Referenzsensor (PCB 9507)

Die weitere Datenaufbereitung erfolgt gemäß dem Schema in Abbildung 3.2. Dargestellt sind die Druckvektoren eines beliebigen Sensors (I bis III) und des Referenzsensors (IV und V). Dabei entspricht I dem unkorrigierten Druck \hat{p} , welcher durch Anwendung der Kalibration (Korrektur der Amplitude um $|\hat{p}/\hat{p}_{\text{Ref}}|$ und Drehung um den Winkel $\alpha_1 = \sphericalangle(\hat{p} - \hat{p}_{\text{Ref}})$ in II überführt wird. Für eine einfachere spätere Mittelung über mehrere Versuchsdurchgänge werden II und IV unter Beibehaltung des von ihnen eingeschlossenen Winkels α_3 um α_2 gedreht, bis die Phasenlage von IV null entspricht, was zu V führt.

Es hat sich im Laufe der Versuchsdurchführung gezeigt, dass eine Mittelung³

³Wichtig bei der Mittelung zu beachten ist, dass die Drücke vektoriell gemittelt werden.

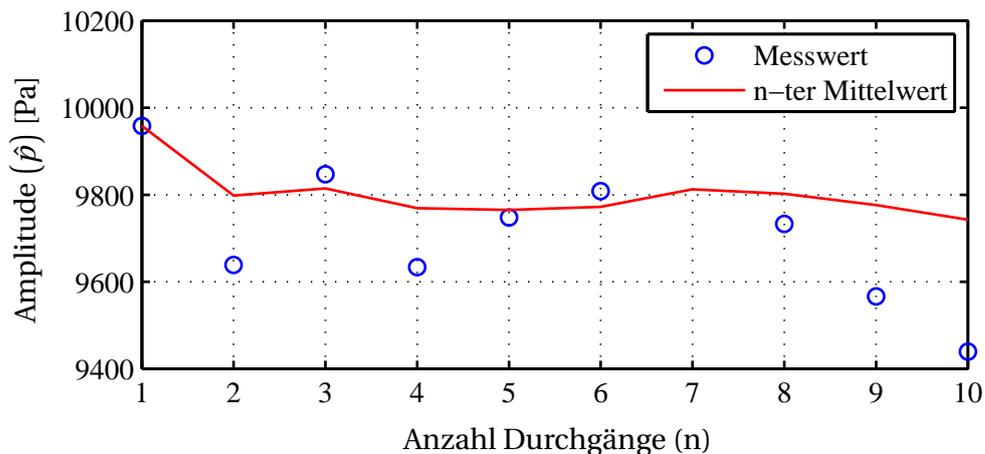


Abbildung 3.4.: Messwerte bei 2100 Hz und Mittelwert (Versuchsaufbau siehe C.1)

über wenige Versuchsdurchgänge ausreichend ist und die Werte sehr gut reproduzierbar sind. Dies liegt vor allem daran, dass die Messdauer (eine Sekunde) im Verhältnis zur Periodendauer (1/1000 bis 1/4000 Sekunde) der untersuchten Frequenzen sehr groß ist und die Fouriertransformation zur Ermittlung der spektralen Druckverteilung bereits eine hinreichend gute Mittelung darstellt. In Abbildung 3.4 sind die gemessenen Drücke eines Sensors über die Anzahl an Versuchsdurchgängen aufgetragen. Es zeigt sich, dass die Streuung der Werte gering ist, und der Mittelwert bereits nach zwei Durchgängen konvergiert. Aus diesem Grund wurde die maximale Anzahl an Wiederholungen auf zehn Durchgänge limitiert.

3.2. Die Multimikrofonmethode

Die Multimikrofonmethode ist ein experimentelles Verfahren und dient der Identifizierung von akustischen Wellen, basierend auf der *two-source-location Methode* von Munjal und Doige [41]. Ausgehend von gemessenen Drücken an verschiedenen räumlichen Positionen können damit die *Riemann Invarianten* an einer Referenzebene bestimmt werden, sofern die Wellenausbreitung verlustfrei und beschreibbar ist [26]. Die klassische Methode, wie sie beispielsweise von Paschereit et al. [47], Fischer [26] und Neunert [44] angewandt wurde, beschränkt sich auf reine longitudinale Schwingungsformen. Verschiedene Autoren, wie Evesque und Polifke [20], Fanaca [21] oder Ettner [18], verwenden bei

der Untersuchung von ringförmigen Gasturbinenbrennkammern mit geringen Spalthöhen bereits eine erweiterte Form dieser Methodik, um Umfangsmoden quantifizieren zu können. Für Raketentriebwerke mit zylinderförmigen Brenn-

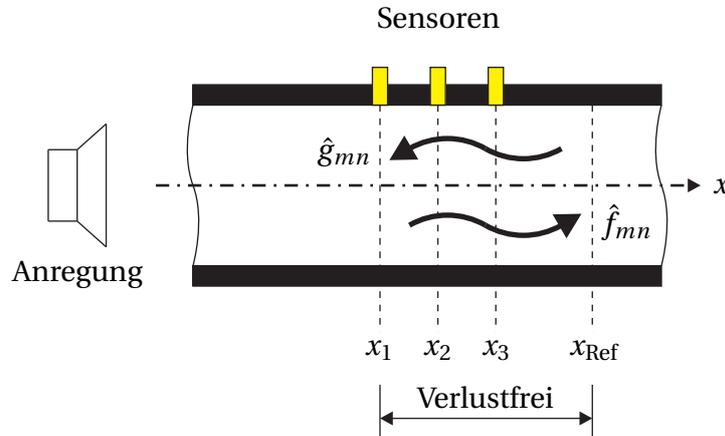


Abbildung 3.5.: Schema der Multimikrofonmethode zur Bestimmung der akustischen Wellen in einem verlustfreien Rohrstück

kammern kann die selbe Methode unter gewissen Voraussetzungen verwendet werden. Dabei ist zu beachten, dass die formelmäßigen Beschreibungen von Druck und Geschwindigkeit für zylinderförmige Geometrien Gültigkeit haben. Abbildung 3.5 zeigt schematisch den Aufbau für die Charakterisierung der Wellen in einem Rohrstück. Dabei wird das Volumen im Rohr von einer Anregungseinheit bei festen Frequenzen in Schwingung versetzt. Als Anregungseinheiten eignen sich Lautsprecher [44] bei atmosphärischen und Lochblechsirenen [28] bei Untersuchungen mit erhöhtem mittleren Druck [28].

Die Basis für die hier verwendete Form der Multimikrofonmethode bildet Gleichung (2.15):

$$\hat{p}(x, r, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \hat{p}_{mn}(x, r, \theta) \quad (3.1)$$

mit

$$\hat{p}_{mn}(x, r, \theta) = P_{mn}(x) \cdot R_{mn}(r) \cdot \Theta_{mn}(\theta) , \quad (3.2)$$

welche den Druck zwischen $x_1 \leftrightarrow x_{\text{Ref}}$ beschreibt. Wird der Druck \hat{p}_{S_k} innerhalb dieses Bereichs durch Sensoren gemessen, können mit Hilfe von Gleichung (3.1) die Amplituden der Wellen bei $x = 0$, \hat{F}_{mn} und \hat{G}_{mn} für jede Modenform

m / n bestimmt werden. Für alle Sensor S_k kann eine Gleichung formuliert werden

$$\hat{p}_{S_k}(x_k, R, \theta_k) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} P_{mn}(x_k) \cdot R_{mn}(R_k) \cdot \Theta_{mn}(\theta_k), \quad (3.3)$$

wodurch sich ein einfach zu lösendes Gleichungssystem ergibt. Als Löser wird ein nichtlinearer *Levenberg-Marquardt*⁴ Fit verwendet, wie er bereits von anderen Autoren verwendet wird [1, 44]. Dadurch sind die Eigenmoden eindeutig definiert, wodurch wiederum Druck und Geschwindigkeit an jeder beliebigen Position innerhalb des Bereichs von x_1 bis x_{Ref} dargestellt werden können. Je

Tabelle 3.1.: Erforderliche Sensorenanzahl

Moden	m	n	Bestimmungsgrößen			Anzahl Sensoren	Cut-on Frequenz ($R = 0.046 \text{ mm}$, $M = 0.25$)
L1, L2,...	0	0	\hat{F}_{00}	\hat{G}_{00}		2	
T1, T1L1,...	1	0	\hat{F}_{10}	\hat{G}_{10}	δ_{10}	3	2060 Hz
T2, T2L1,...	2	0	\hat{F}_{20}	\hat{G}_{20}	δ_{20}	3	3417 Hz
R1L1, R1L2,...	0	1	\hat{F}_{01}	\hat{G}_{01}		2	4287 Hz
T3L1, T3L2,...	3	0	\hat{F}_{30}	\hat{G}_{30}	δ_{30}	3	4701 Hz
T1R1, T1R1L1,...	1	1	\hat{F}_{11}	\hat{G}_{11}	δ_{11}	3	4756 Hz
T4, T4L1,...	4	0	\hat{F}_{40}	\hat{G}_{40}	δ_{40}	3	5950 Hz

nach Eigenmode ist eine unterschiedliche Anzahl an Sensoren erforderlich, um die Bestimmungsgrößen auflösen zu können. In Tabelle 3.1 ist die Mindestanzahl an Sensoren für einige Eigenmoden aufgeführt. Beachtet werden muss dabei, dass die Sensoren speziell bei transversalen Moden sowohl in axialer als auch in Umfangsrichtung angeordnet sind, um die Moden auflösen zu können. So ist es beispielsweise nicht möglich, aus nur zwei Sensoren, die in der selben Querschnittsebene positioniert sind, die Moden mit $m = 0 / n = 0$ aufzulösen. Ebenso wenig ist es nicht möglich, aus drei Sensoren, die sich an unterschiedlichen axialen Positionen, jedoch an der selben Umfangsposition befinden, die Moden mit $m = 1 / n = 0$ eindeutig zu bestimmen.

Aus Tabelle 3.1 ist abzulesen, dass mit steigender Frequenz bzw. Anzahl an aufzulösenden Eigenmoden die Anzahl an erforderlichen Sensoren ansteigt. Ist die

⁴ Die Levenberg-Marquardt Algorithmus ist ein nichtlineares Optimierungsverfahren auf Basis der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Nähere Informationen sind in [12] angegeben.

zu untersuchende Maximalfrequenz limitiert, so sind die Anzahl an Eigenmoden und Bestimmungsgrößen ebenfalls limitiert, da höhere Eigenmoden nicht relevant sind (siehe Kapitel 5.2.1). Im Rahmen dieser Arbeit werden Frequenzen bis maximal 4000 Hz betrachtet, was in Summe mindestens 8 Sensoren erfordert. Jeder zusätzliche Sensor erhöht die Genauigkeit der gefundenen Lösung, was sich dadurch günstig auf die Stabilität des Lösungsalgorithmus auswirkt. Eine Auflistung der Anzahl und Position der verwendeten Sensoren ist in Anhang C angegeben.

3.3. Validierung der modalen Zerlegung und Feldrekonstruktion

Mit Hilfe der Multimikrofonmethode aus dem vorherigen Abschnitt 3.2 lassen sich die modenabhängigen Größen \hat{F}_{mn} und \hat{G}_{mn} der *Riemann Invarianten* bestimmen. Um die Qualität der modalen Zerlegung zu überprüfen, ist es naheliegend, dies in Form eines direkten Vergleichs zwischen den gemessenen Drücken und dem daraus gefitteten Druckfeld zu tun. Die Basis dafür bilden wiederum die Herleitungen in Kapitel 2 und im Speziellen Gleichung (2.15). Auf die verwendete Versuchseinrichtung wird in Kapitel 4 noch gesondert eingegangen. Die Konfiguration und der messtechnische Aufbau sind in Anhang C.1 dargestellt.

Das Ergebnis dieser Gegenüberstellung ist exemplarisch in den folgenden Abbildungen 3.6 bis 3.11 jeweils für Längs- und Querschnitte der verwendeten zylinderförmigen Brennkammer bei unterschiedlichen Frequenzen dargestellt. Die Kreise in den Diagrammen entsprechen dabei den gemessenen Drücken an den unterschiedlichen Sensorpositionen, die durchgezogenen Linien sind der berechnete, rekonstruierte Druckverlauf.

Gezeigt sind drei Frequenzen, bei denen jeweils verschiedene transversale Moden mit unterschiedlicher Ordnung m auftreten. Bei 1000 Hz (Abbildungen 3.6 und 3.7) tritt nur eine rein longitudinale Mode ($m = 0 / n = 0$) auf, andere Moden sind nicht ausbreitungsfähig und treten deshalb nicht in Erscheinung (siehe Abschnitt 5.2.1). Bei 2100 Hz (Abbildungen 3.8 und 3.9) kommt die erste transversale Mode ($m = 1 / n = 0$) hinzu, und bei 3800 Hz (Abbildungen 3.10 und 3.11) zusätzlich noch die zweite ($m = 2 / n = 0$).

Bei allen drei Frequenzen zeigt sich eine hervorragende Übereinstimmung zwischen den gemessenen und rekonstruierten Drücken, sowohl in Amplitude als auch in Phasenlage. Für andere Frequenzen gilt dies genauso, wie in Abbildung 3.12 links gezeigt. Auch hier decken sich der Verlauf des gemessenen Drucks mit dem rekonstruierten vollkommen. In Abbildung 3.12 rechts ist zusätzlich dazu noch die Anzahl an verwendeten Drucksensoren als Stützstellen für die Multimikrofonmethode bei Verwendung einer unterschiedlichen Versuchskonfiguration reduziert (Aufbau siehe C.2). Auch in diesem Fall ist die Übereinstimmung hervorragend.

Es zeigt sich somit, dass die Multimikrofonmethode (Abschnitt 3.2) auf Basis der modalen Zerlegung eine sehr gute und exakte Möglichkeit darstellt, das Druckfeld von verschiedenen Moden in einem durchströmten zylinderförmigen Rohr zu beschreiben.

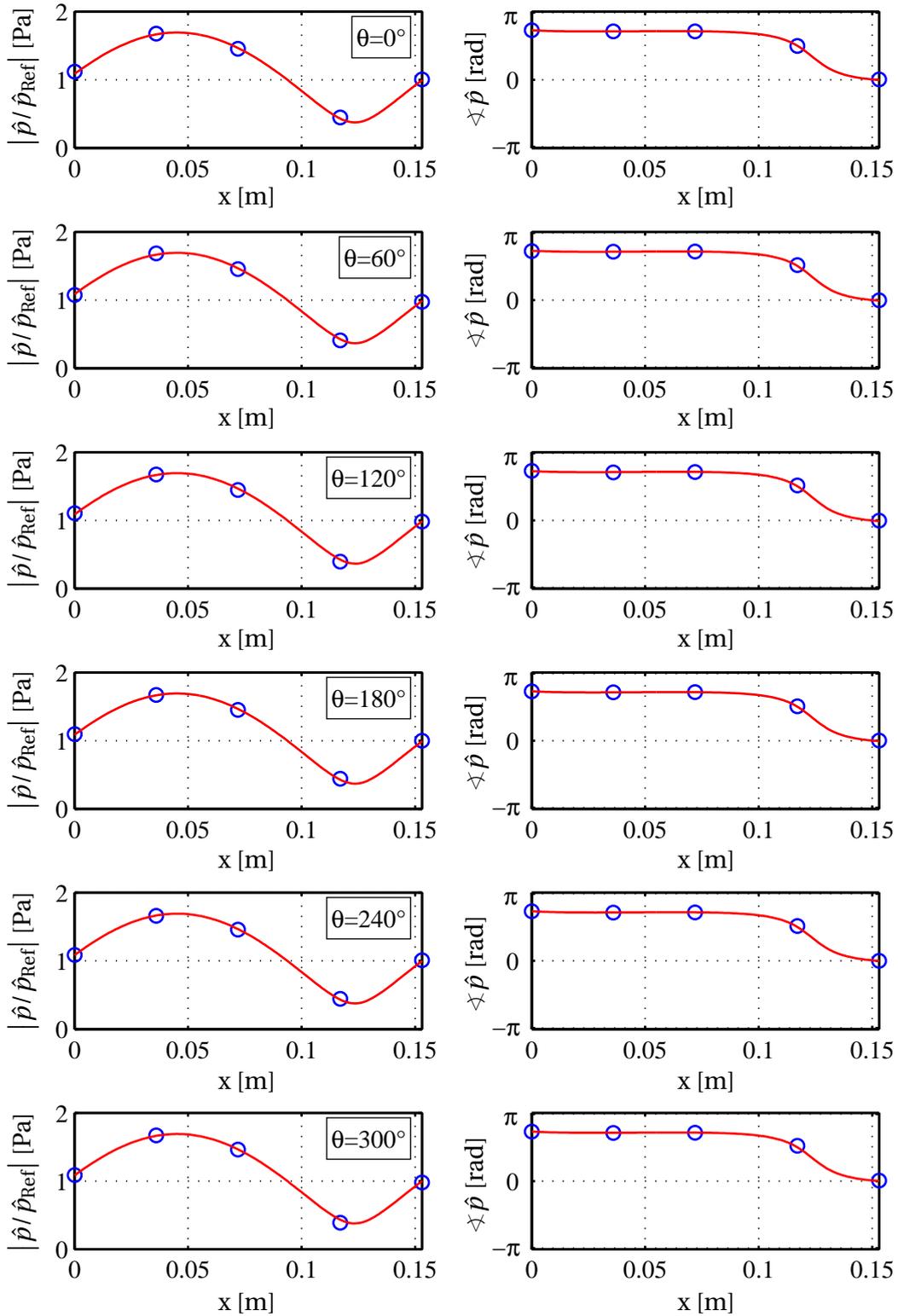


Abbildung 3.6.: Sensor Reproduzierbarkeit bei 1000 Hz in axialer Richtung, Mode $m = 0 / n = 0$

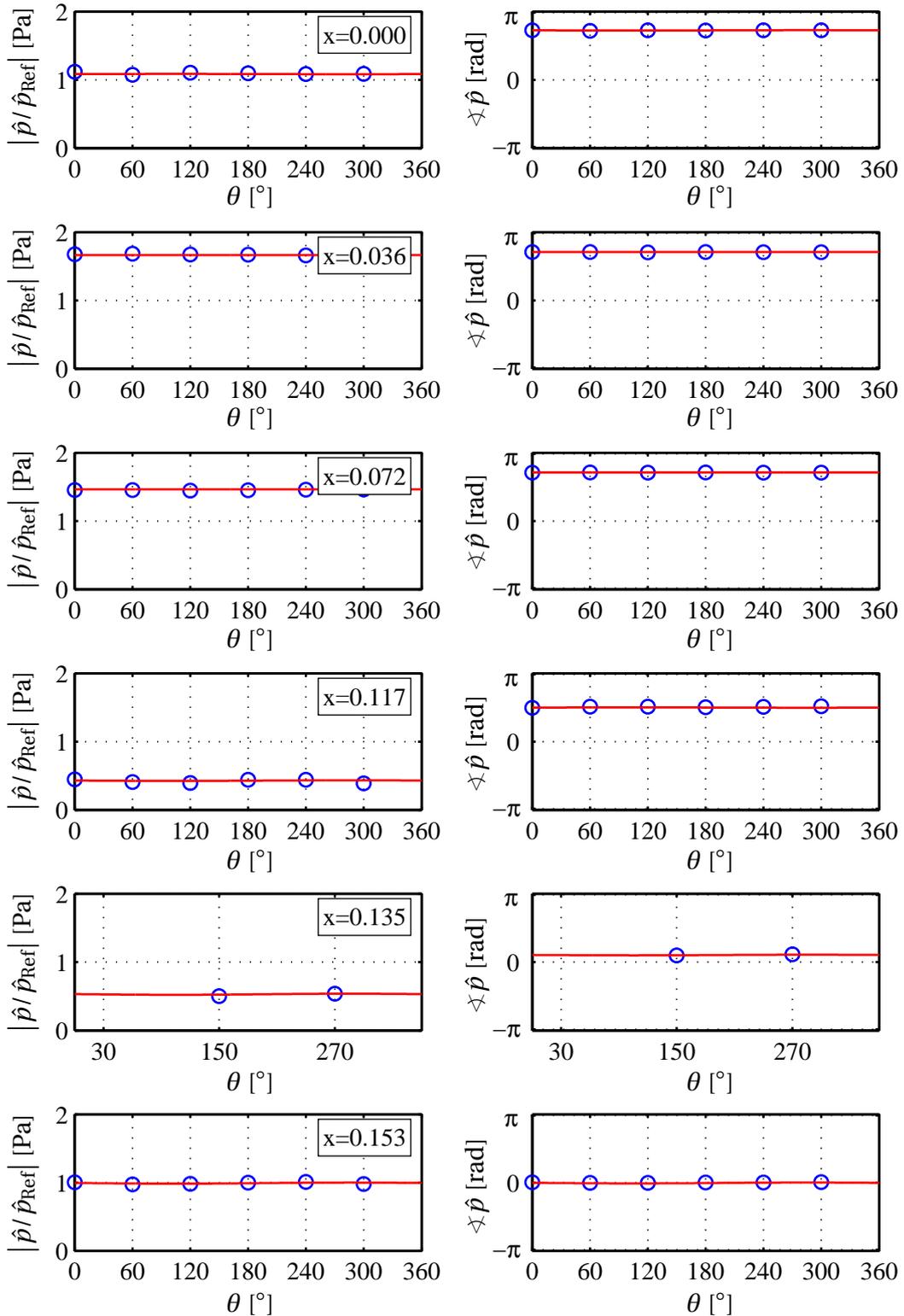


Abbildung 3.7.: Sensor Reproduzierbarkeit bei 1000 Hz in Umfangsrichtung, Mode $m = 0 / n = 0$

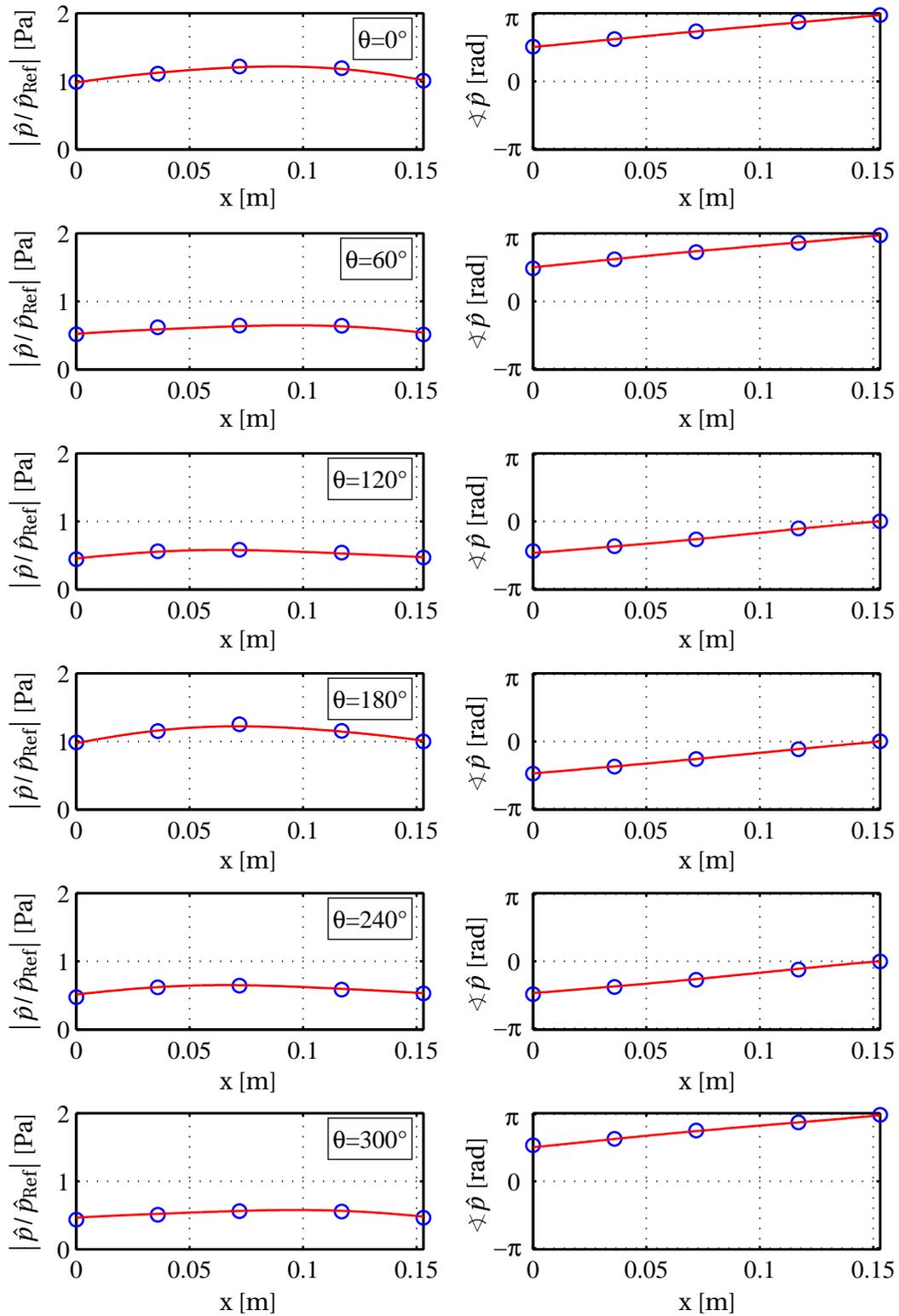


Abbildung 3.8.: Sensor Reproduzierbarkeit bei 2100 Hz in axialer Richtung, Moden $m = 0 / n = 0$ und $m = 1 / n = 0$

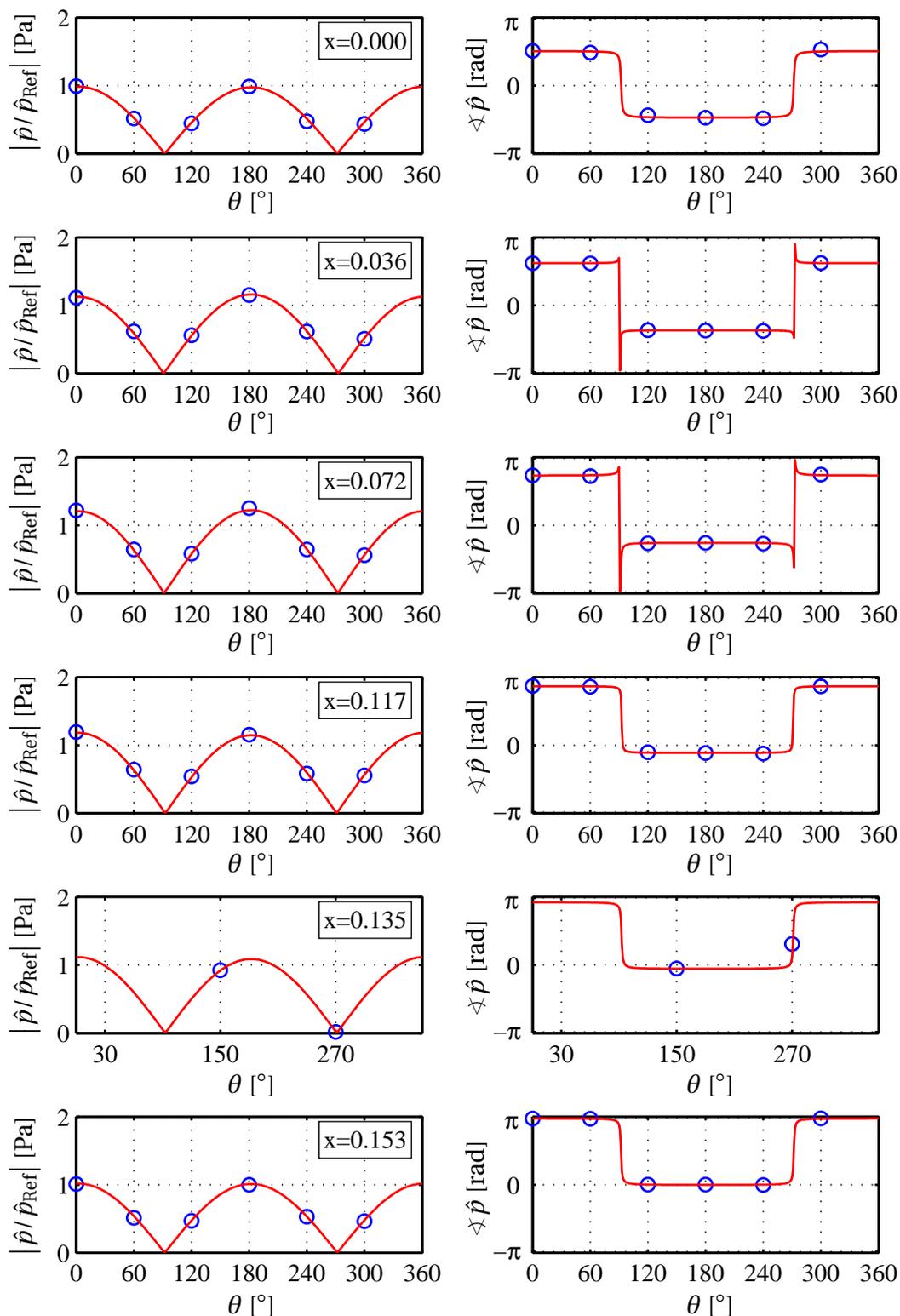


Abbildung 3.9.: Sensor Reproduzierbarkeit bei 2100 Hz in Umfangsrichtung,
Moden $m = 0 / n = 0$ und $m = 1 / n = 0$

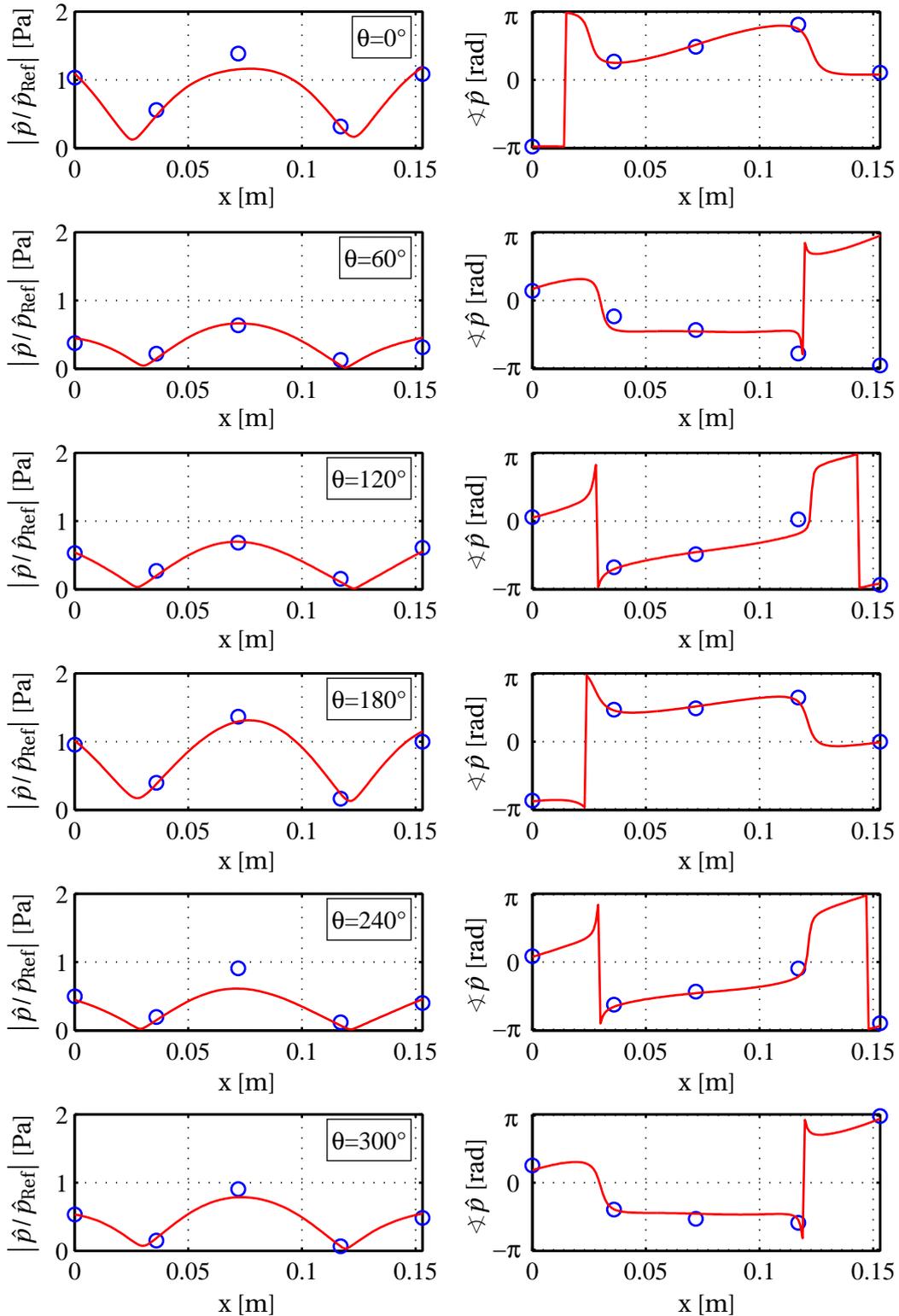


Abbildung 3.10.: Sensor Reproduzierbarkeit bei 3800 Hz in axialer Richtung, Moden $m = 0 / n = 0$, $m = 1 / n = 0$ und $m = 2 / n = 0$

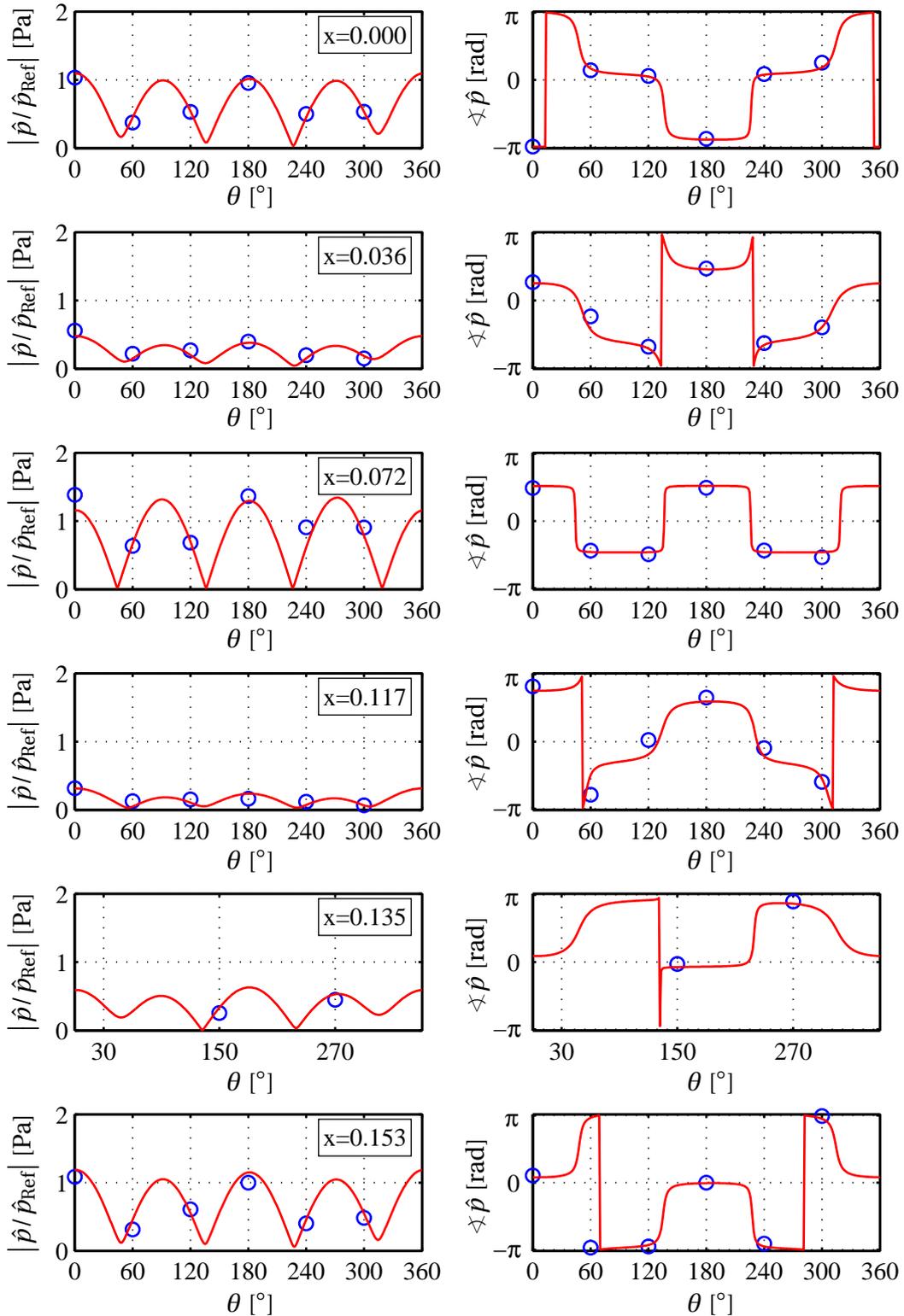


Abbildung 3.11.: Sensor Reproduzierbarkeit bei 3800 Hz in Umfangsrichtung, Moden $m = 0 / n = 0$, $m = 1 / n = 0$ und $m = 2 / n = 0$

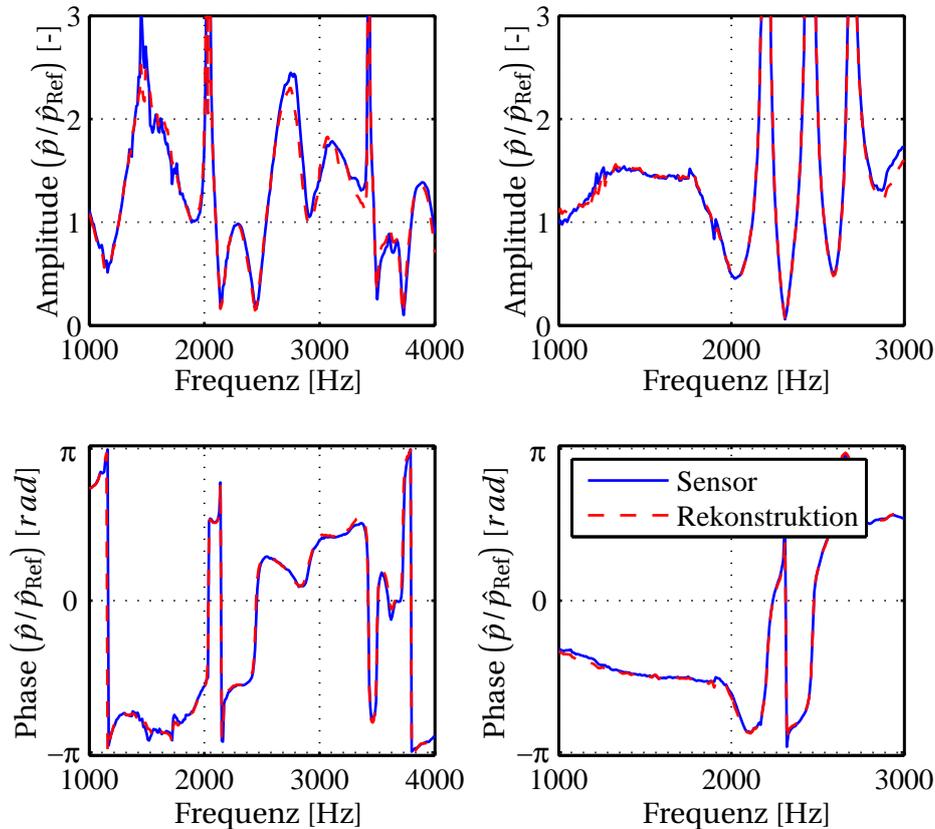


Abbildung 3.12.: Vergleich gemessener und rekonstruierter Druck, jeweils ein Sensor, mit Düse A (links, Aufbau: C.1) und Düse B (rechts, Aufbau: C.2)

3.4. Admittanzen

Die Methode zur Bestimmung von Admittanzen in zylinderförmigen Geometrien wurde bereits in zahlreichen Veröffentlichungen beschrieben [34, 35]. Admittanzen können nach Gleichung (2.57) bzw. (2.58) für jede Modenform gesondert berechnet werden. Die Größen \hat{F}_{mn} und \hat{G}_{mn} (2.32) lassen sich sehr komfortabel mit Hilfe der Multimikrofonmethode (siehe Abschnitt 3.2) bestimmen. Sind \hat{F}_{mn} und \hat{G}_{mn} (2.32) bekannt, so können aus diesen unter Verwendung der Gleichungen (2.32) und (2.42), eingesetzt in die Gleichungen (2.15) und (2.19), Druck \hat{p}_{mn} und Geschwindigkeit \hat{u}_{mn} an verschiedenen Positionen berechnet werden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden Admittanzen für die Eintrittsebenen von Düsen und Brennkammer bestimmt, wie in Abbildung 3.13 dargestellt ist.

Für diese Art der Auswertung ist es wichtig, dass die Admittanzen speziell für transversale Eigenmoden über den gesamten Querschnitt konstant sind. Pieringer konnte dies in ihrer Arbeit [50] nachweisen.

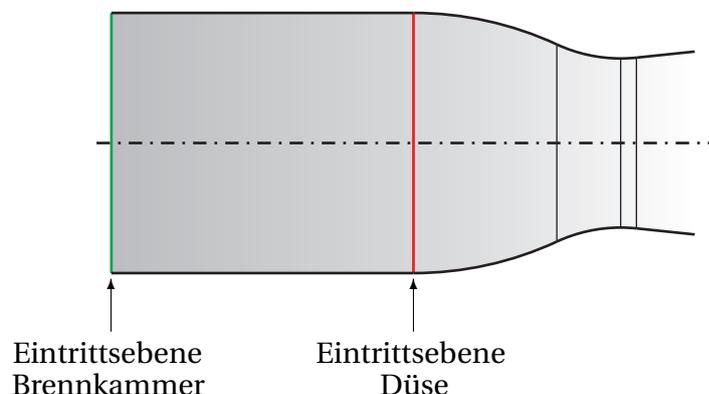


Abbildung 3.13.: Eintrittsebenen von Brennkammer und Düse

3.5. Transfermatrizen

Akustische Transfermatrizen bilden das Verhalten eines kompakten akustischen Elements in Form einer 2x2 - Matrix ab. Sie verknüpfen den Zustand stromab ($d = \text{down}$) eines Elements mit jenem stromauf ($u = \text{up}$) in der Form:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix}_d}_{\text{down=stromab}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \text{TM11} & \text{TM12} \\ \text{TM21} & \text{TM22} \end{bmatrix}}_{\text{Transfermatrix}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix}_u}_{\text{up=stromauf}} \quad (3.4)$$

Durch sie können Reflektions- und Transmissionseigenschaften in einfacher Form angegeben werden. Die experimentelle Methode zur Bestimmung solcher Transfermatrizen basiert, wie schon die Multimikrofonmethode (Abschnitt 3.2), auf der *two-source-location Methode* von Munjal und Doige [41]. Der schematische Aufbau dazu ist in Abbildung 3.14 dargestellt. An den Ein- und Austrittsebenen des zu untersuchenden Elements werden mit der Multimikrofonmethode jeweils die ein- und auslaufenden Wellen \hat{f} und \hat{g} einer Modenklasse bestimmt. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird auf die Indizierung der Größen mit m und n in diesem Abschnitt verzichtet.

Dadurch ergeben sich zwei Bestimmungsgleichungen für die Transfermatrix TM. Zur Berechnung aller vier Elemente TM11, TM12, TM21 und TM22 sind

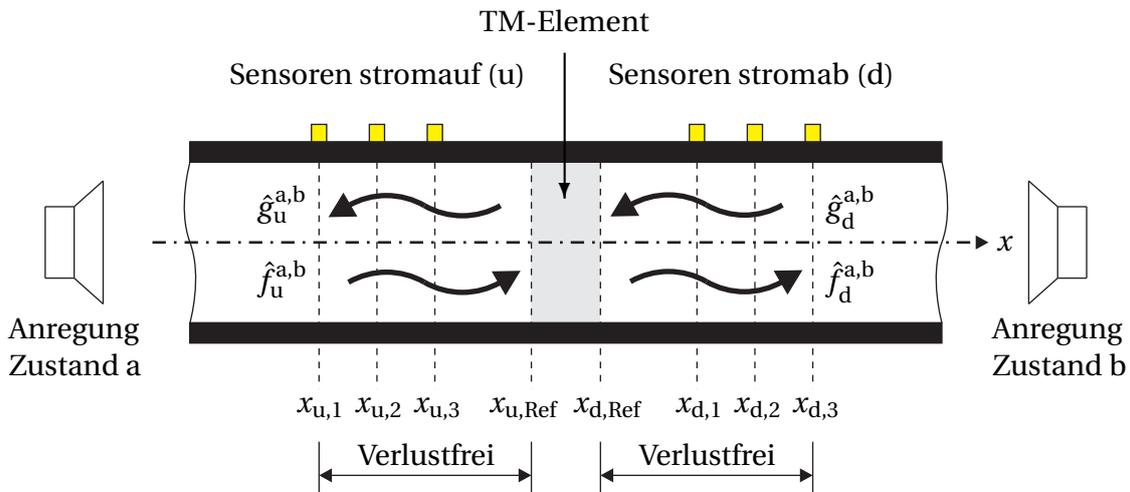


Abbildung 3.14.: Schematischer Aufbau zur Bestimmung von Transfermatrizen

jedoch vier Gleichungen erforderlich, was sich durch zwei verschiedene Anregungszustände realisieren lässt: einmal von stromauf (Anregungszustand a) und einmal von stromab (Anregungszustand b), wodurch sich das folgende Gleichungssystem formulieren lässt:

$$\begin{bmatrix} \hat{f}^a & \hat{g}^a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{f}^a & \hat{g}^a \\ \hat{f}^b & \hat{g}^b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{f}^b & \hat{g}^b \end{bmatrix}_u \cdot \begin{pmatrix} \text{TM11} \\ \text{TM12} \\ \text{TM21} \\ \text{TM22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{f}^a \\ \hat{g}^a \\ \hat{f}^b \\ \hat{g}^b \end{pmatrix}_d. \quad (3.5)$$

Mit einem einfachen Gleichungslöser für lineare Gleichungssysteme der Form $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ können somit alle vier Matrixelemente bestimmt werden.

Neben der Transfermatrix ist die Streumatrix eine weitere gebräuchliche Darstellung für das akustische Übertragungsverhalten. Dabei werden die in das Element ein- und auslaufenden Wellen miteinander verknüpft. Nach Fischer [26] liegt der Vorteil von Streumatrizen gegenüber Transfermatrizen vor allem darin, dass die Kausalität des Problems erhalten bleibt und eine klare Trennung zwischen ein- und auslaufenden Wellen existiert. Aus ihnen können direkt Transmission und Reflektion abgelesen werden:

$$\text{SM} = \begin{bmatrix} T_{ud} & R_{du} \\ R_{ud} & T_{du} \end{bmatrix}$$

T_{ud} = Transmission up \rightarrow down

R_{ud} = Reflektion up

R_{du} = Reflektion down

T_{du} = Transmission down \rightarrow up

Transfermatrizen können nach [26] sehr einfach in Streumatrizen überführt werden (Details dazu siehe Anhang B.8):

$$SM = \frac{1}{TM22} \begin{bmatrix} TM11 \cdot TM22 - TM12 \cdot TM21 & TM12 \\ -TM21 & 1 \end{bmatrix}$$

Streumatrizen bilden die Grundlage für die Bilanzierung der akustischen Energie in einem akustischen Element, wie sie in Abschnitt 3.6 vorgestellt und in Abschnitt 5.3.2 für den Absorberring angewandt wird.

3.6. Bilanzierung der akustischen Energie in einem kompakten Element

An einem kompakten akustischen Element kann die Energiebilanz anhand der Flüsse, die in das Element hinein und hinaus gehen, wie in Abbildung 3.15 dargestellt, formuliert werden:

$$0 = -\langle I \rangle^{-u} + \langle I \rangle^{+u} + \langle I \rangle^{-d} - \langle I \rangle^{+d} + \langle I \rangle^A \quad (3.6)$$

Dabei sind jeweils die Beträge der Flüsse anzusetzen, da die Bilanz bereits deren Richtung beinhaltet. $\langle I \rangle^A$ ist der akustische Fluss, der im Element dissipiert wird. Mit Hilfe der Streumatrix [26], die Transmission und Reflektion des Elementes beschreibt, kann die Bilanz (3.6) in zwei voneinander unabhängige Zustände⁵ überführt werden:

$$\frac{\langle I \rangle^A}{\langle I \rangle^{+u}} = K^I \cdot |SM21|^2 + |SM11|^2 - 1 \quad (3.7)$$

$$\frac{\langle I \rangle^A}{\langle I \rangle^{-d}} = K^{II} \cdot |SM12|^2 + |SM22|^2 - 1 \quad (3.8)$$

Die Faktoren K^I und K^{II} berücksichtigen konvektive Effekte und sind über die Wellenzahlverhältnisse κ^\pm mit der Modenklasse verknüpft. Die Herleitung dazu ist in Anhang B.8 angegeben.

⁵Die Streumatrix bildet die Vorgänge innerhalb und an den Referenzebenen des Elements ab. Sie gibt jedoch keine Auskunft über die physikalischen Zusammenhänge der einlaufenden Wellen bzw. Flüsse $\langle I \rangle^{+u}$ und $\langle I \rangle^{-d}$.

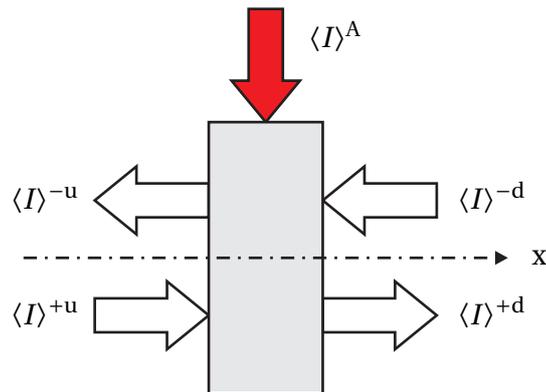


Abbildung 3.15.: Akustische Flüsse an einem kompakten Element

3.7. Eigenfrequenzen und Dämpfung

Die Eigenfrequenzen und die zugehörige Dämpfung lassen sich über unterschiedliche experimentelle Methoden bestimmen. Eine ausführlich beschriebene Übersicht dazu gibt Fiala [23] in seiner Arbeit an.

An dieser Stelle wird eine Auswahl der wichtigsten Methoden in kompakter Form vorgestellt:

1. Abklingendes Drucksignal im Zeitbereich
2. Frequenzantwort des Drucks
3. Frequenzantwort der akustischen Energie
4. Low-Order Methode

In Kapitel 2 wurde bereits auf die physikalischen Grundlagen und die Definition des Dämpfungskoeffizienten eingegangen. Schon jetzt sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass große Vorsicht bei einem Vergleich der Dämpfungseigenschaften von verschiedenen Versuchsstandskonfigurationen geboten ist. Eine Änderung von Geometrie und Strömungsparametern hat immer einen Einfluss auf die gesamte Akustik des Systems und führt folglich zu einer Änderung der Eigenfrequenzen und der Stabilität. Dies lässt sich sehr anschaulich mit Hilfe von Gleichung (2.78), die den akustischen Fluss über einen Querschnitt beschreibt, erklären. Neben der Randbedingung in Form der Admittanz oder des Reflektionsfaktors fließt die Druckamplitude quadratisch ein. Der Druck steht maßgeblich mit den Eigenschaften des Gesamtsystems in Zusam-

menhang (siehe dazu Abschnitt 2.6.2) und stellt den eigentlichen Treiber für den Fluss dar.

3.7.1. Abklingendes Drucksignal im Zeitbereich

Aus dem zeitlichen Druckverlauf kann über mehrere Varianten die Dämpfung bestimmt werden (siehe Abbildung 3.16). Zur Signalerzeugung wird die Brennkammer mit einer Reihe von wenigen Pulsen durch die Sirene bei konstanten Frequenzen angeregt (siehe dazu Abbildung 4.2). Der Druck wird mit Sensoren aufgezeichnet und bandpass gefiltert⁶, um hoch- und niederfrequente Störeinflüsse zu entfernen. Anschließend werden die aufgezeichneten Signale über mehrere Durchgänge gemittelt, um statistisch repräsentative Größen zu erhalten.

Eine weitverbreitete Methode, die Signale weiter zu verarbeiten, ist die Bildung der Einhüllenden der abklingenden Druckamplitude mit Hilfe der Hilberttransformation [62]. Der Vorteil davon liegt vor allem in der Einfachheit der Methode, so kann fast direkt aus dem Verlauf des Drucksignals der Dämpfungswert abgelesen werden. Durch Fitten einer Exponentialfunktion der Form $\hat{p}(t) = \hat{p}_0 e^{\alpha t}$ lässt sich sehr einfach die Dämpfung α bestimmen.

Aus dem Spektrum, gebildet mit der diskreten Fourier Transformation (FFT) der abklingenden Drucksignale, kann die Eigenfrequenz⁷ ermittelt werden. Die Halbwertsbreite (siehe Anhang B.3) des zugehörigen Druckmaximums korreliert direkt mit dem Dämpfungswert.

Beide Methoden erfreuen sich großer Beliebtheit, sie eignen sich jedoch nur unter bestimmten Voraussetzungen, um aufschlussreiche Ergebnisse zu generieren. So muss beachtet werden, dass mehrere gleichzeitig auftretende Modenformen nicht separiert werden können, was dazu führt, dass die Identifikation von modenabhängigen Dämpfungskoeffizienten nicht möglich ist. Bestehen allerdings große Unterschiede im Abklingverhalten und weichen die Maximalamplituden der Eigenmoden stark voneinander ab (z. B. $\alpha^0 \gg \alpha^1$ sowie $\hat{p}_{\max}^0 \ll \hat{p}_{\max}^1$), können mit guter Näherung Abklingkoeffizienten für die dominierende Eigenmode bestimmt werden. Es ist jedoch zu beachten, dass die Position des aufzeichnenden Drucksensors entscheidend für die Qualität

⁶ FIR Tschebyscheff-Filter 201. Ordnung mit $f_{\text{Start}} = 0.98 f_{\text{Anregung}}$ und $f_{\text{End}} = 1.02 f_{\text{Anregung}}$ [23]

⁷ Wird ein System mit einer Frequenz nahe einer Eigenfrequenz angeregt, schwingt es nach Entfernung der Anregungsquelle mit dieser Eigenfrequenz weiter.

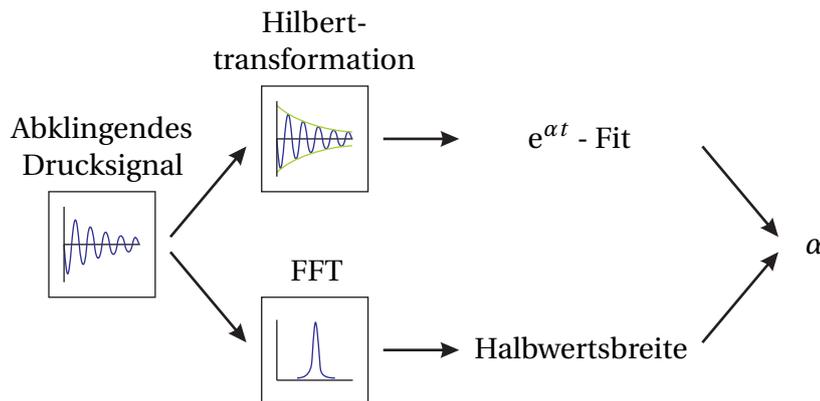


Abbildung 3.16.: Dämpfungswerte aus Drucksignalen im Zeitbereich mit Sirenenanregung

der Ergebnisse ist. Beispielsweise liefert ein ungünstig positionierter Sensor, der sich nahe an einem Druckknoten ($p' = 0$) befindet, sehr geringe Druckamplituden, die nur schwer vom Störungsrauschen zu isolieren sind.

3.7.2. Frequenzantwort des Drucks

Auch diese Methode zeichnet sich durch ihre Einfachheit aus. Sie basiert auf der Analyse der Frequenzantwort des kontinuierlich angeregten Systems. Die Amplitude der Systemausgänge, was in diesem Fall dem gemessenen Drucksignal entspricht, bestimmt sich aus der Anregungsamplitude und der Übertragungsfunktion. Im Resonanzfall sind bei gleichbleibender Anregungsamplitude sowohl Ausgangsamplitude als auch die Übertragungsfunktion maximal. Die Übertragungsfunktion nimmt dabei die Form einer Lorentzkurve an (siehe Anhang B.3). Aus ihr können die Eigenfrequenzen und Dämpfungswerte ermittelt werden.

Die Brennkammer wird mit der Sirene kontinuierlich bei festen Frequenzen angeregt (siehe Abbildung 3.19). Anhand der Spektren der aufgezeichneten Drucksignale wird die Amplitude bei der Anregungsfrequenz ermittelt. Aufgetragen über die Anregungsfrequenzen kann so die Systemantwort auf die Anregung, die dessen Übertragsungsverhalten entspricht, dargestellt werden.

Der große Nachteil dieser Methode ist die fehlende Möglichkeit, ein modenabhängiges Dämpfungsverhalten bestimmen zu können, sobald mehrere Modenklassen gleichzeitig auftreten. Hinzu kommt ein großer Einfluss durch die Anregung selbst. Erfolgt diese durch eine kontinuierlich anregende Sirene bei festen

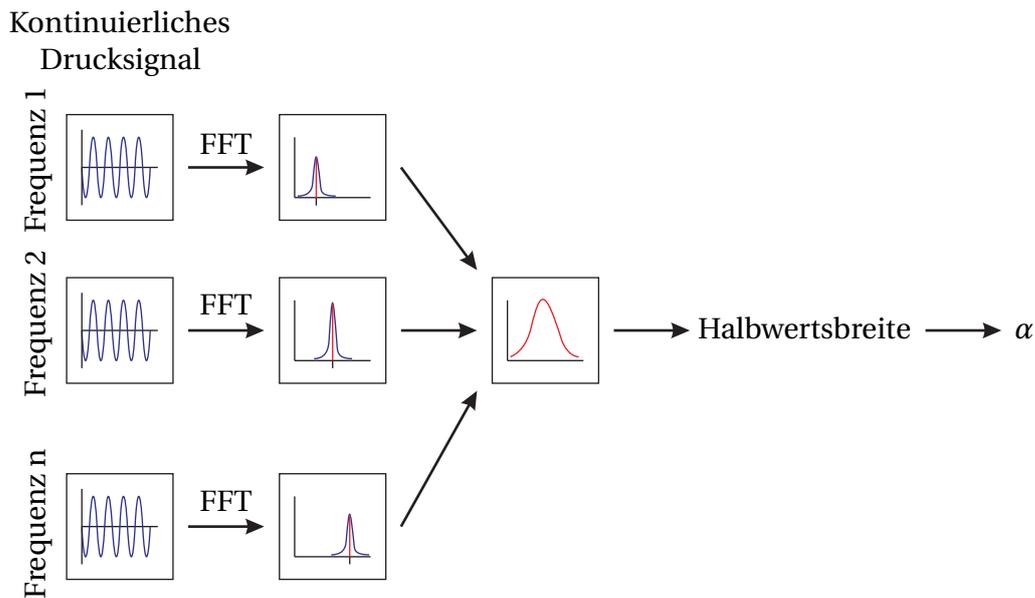


Abbildung 3.17.: Schema zum Bestimmen von Eigenfrequenzen und Dämpfungswerten mit Hilfe der Übertragungsfunktion des Drucks bei Anregung durch die Sirene

Frequenzen, so kann technisch nicht sichergestellt werden, dass die Anregungsamplitude bei jeder Frequenz gleich groß ist. Weiter erschwerend kommt hinzu, dass sich die lokalen Druckminima- und maxima innerhalb der Brennkammer bei unterschiedlichen Anregungsfrequenzen⁸ verschieben, wodurch sich für ortsfeste Sensoren unabhängig von der Dämpfung die Systemantwort ändert. Aus diesen Gründen ist diese Art der Dämpfungsbestimmung nur bedingt anwendbar.

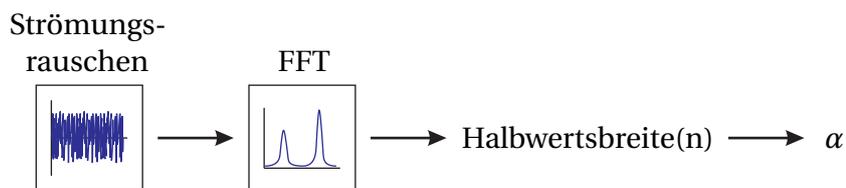


Abbildung 3.18.: Schema zum Bestimmen von Eigenfrequenzen und Dämpfungswerten mit Hilfe der Übertragungsfunktion des Drucks bei Anregung durch Strömungsrauschen

Wesentlich besser geeignet ist die Anregung durch Strömungsrauschen, wie es in Abbildung 3.18 dargestellt ist. Dieses ist breitbandig und regt somit alle Fre-

⁸Die Änderung der Anregungsfrequenz geht mit einer Änderung der Wellenlänge einher. Dadurch kommt es zu einer Verschiebung der lokalen Druckknoten und Druckmaxima.

quenzen gleichzeitig an. Zu beachten ist dabei, dass die Messstellen möglichst im Nahbereich von Druckmaxima liegen, um verwertbare Ergebnisse zu erhalten. Die Verwendung von mehreren Sensoren an unterschiedlichen Positionen hat sich dafür als zweckmäßig erwiesen. Für eine einfache Abschätzung der Eigenfrequenzen und der Dämpfungswerte ist diese Methode gut geeignet. Sie zeichnet sich vor allem durch einen geringen Messaufwand aus.

3.7.3. Frequenzantwort der akustischen Energie

Diese Methode ist sehr ähnlich zu der im vorherigen Abschnitt 3.7.2 beschriebenen, jedoch mit dem Unterschied, dass hier nicht die Übertragungsfunktion für den Druck, sondern für die akustische Energie gebildet wird. Aus mehreren Drucksignalen wird das gesamte akustische Feld mit Hilfe der bereits vorgestellten Multimikrofonmethode (siehe Abschnitte 3.2 und 3.3) für jede Anregungsfrequenz rekonstruiert, was sehr hohe Anforderungen an die verwendete Messtechnik und das Auswertungsverfahren stellt.

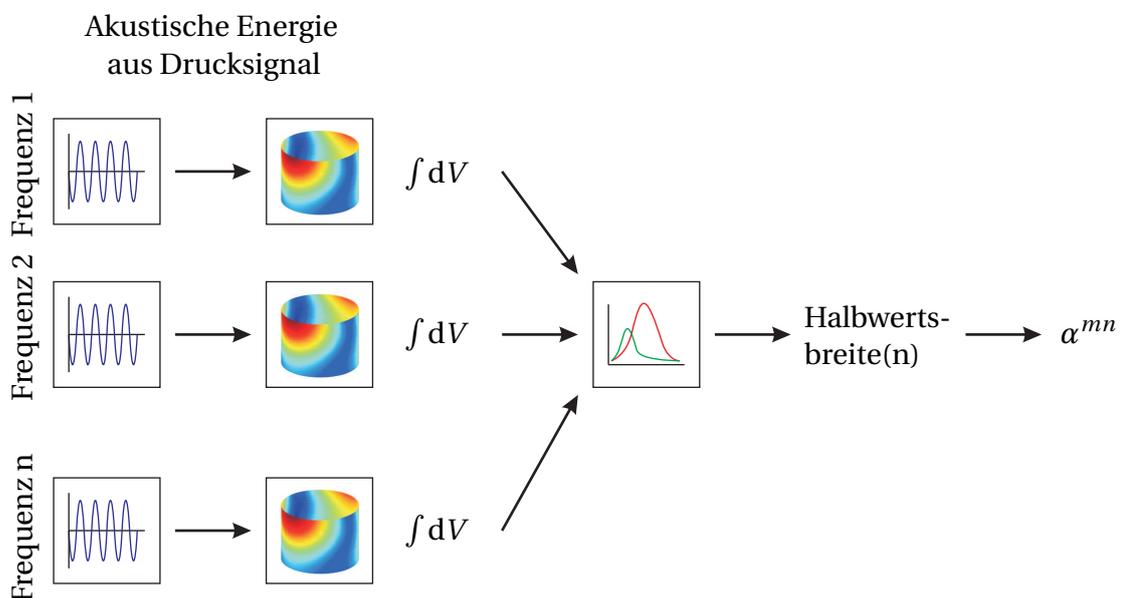


Abbildung 3.19.: Schema zum Bestimmen von Eigenfrequenzen und Dämpfungswerten mit Hilfe der Übertragungsfunktion der akustischen Energie bei Anregung durch die Sirene

Durch die Feldrekonstruktion ist es möglich, die Eigenmoden zu separieren, wodurch sich schon der wesentliche Vorteil gegenüber den anderen Methoden

zeigt. Dadurch kann für jede Eigenmode gesondert eine Übertragungsfunktion angegeben werden und folgedessen modenabhängige Dämpfungswerte.

Diese Methode ist sehr robust und weniger störanfällig gegenüber ungünstig positionierten Sensoren, erfordert jedoch einen erhöhten Rechenaufwand und die Kenntnis des Wellenfeldes innerhalb des betrachteten Volumens. Vor allem Letzteres beschränkt die Anwendung dieser Methode auf sehr einfache Geometrien (z. B. eine zylinderförmige Brennkammer ohne Absorber).

3.7.4. Low-Order Methode

Low-Order Methoden finden in vielen Bereichen der Entwicklung und Auslegung von technischen Anlagen Anwendung. Sie eignen sich auf Grund ihres geringen Rechenaufwandes sehr gut, komplexe Systeme zu analysieren. Speziell im Bereich der Thermoakustik nehmen sie einen hohen Stellenwert ein, da sie ein geeignetes Werkzeug darstellen, akustische Stabilitätsanalysen durchzuführen. Die im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Methoden basieren auf der Unterteilung des Gesamtsystems in Teilsysteme, wie es in Abbildung 3.20 gezeigt ist. Zusammengefügt ergibt sich dadurch die abstrahierte Abbildung des Systems als Netzwerkmodell, das sich sehr einfach analysieren lässt. Das Resultat dieser Analyse in Form von Eigenfrequenzen und Verstärkungsfaktoren stellt das Verhalten des Gesamtsystems dar und wird in den folgenden Kapiteln den Messgrößen aus den experimentellen Untersuchungen gegenübergestellt.

Ursprünglich stammen die dazugehörigen Theorien aus der Elektrotechnik, mit deren Hilfe komplexe Schaltungen auf eine einfache Art und Weise modelliert werden konnten. Auf Grund der Ähnlichkeit der mathematischen Verfahren, wurden diese für die Beschreibung akustischer Systeme verwendet [40] und stetig weiterentwickelt (z. B. [5], [15], [51]).

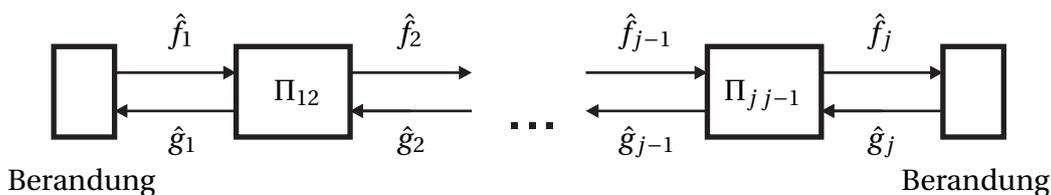


Abbildung 3.20.: Netzwerkmodell, bestehend aus j Transfermatrizen

Die hier vorgestellten Methoden basieren auf der eindimensionalen Akustik, wie sie in Kapitel 2 vorgestellt wurde. Die Teilsysteme können in Form von Transfermatrizen Π angegeben werden, welche die Verknüpfung eines Ausgangszustandes mit einem Eingangszustand darstellen (vergleiche dazu Abschnitt 3.5). Im Bereich der Akustik können sie den Zusammenhang der Größen an einer Position stromauf ($u = \text{upstream}$) zu einer stromab ($d = \text{downstream}$) beschreiben. Für viele Elemente (z. B. Rohre, Flächensprünge, Verzweigungen, usw.) existieren analytische Lösungen und Theorien, für die eine Vielzahl von Veröffentlichungen verfügbar sind.

Nach Fischer [26] gibt es für Transfermatrizen mehrere gängige Formen der Darstellung. So kann beispielsweise sowohl das Verhalten von Druck und Geschwindigkeit abgebildet werden als auch jenes von \hat{f} und \hat{g} . Beide Formen können durch einfache mathematische Operationen ineinander überführt werden. Für den vorliegenden Fall wird die Darstellung in f und g - Schreibweise verwendet, da diese Größen durch Verwendung der Multimikrofonmethode (siehe Abschnitt 3.2) ohnehin zur Verfügung stehen. Der Zusammenhang lautet:

$$\begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix}_d = \Pi \cdot \begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix}_u \quad (3.9)$$

Eine Transfermatrix besteht aus 2x2 Koeffizienten (TM12, ..., TM22), die analytisch oder experimentell bestimmt werden können. Verbindet sie die Orte 1 und 2, so kann geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} \text{TM11} & \text{TM12} \\ \text{TM21} & \text{TM22} \end{bmatrix}}_{\Pi_{12}} \cdot \begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix}_1 \quad (3.10)$$

Da \hat{f} und \hat{g} modenabhängig sind, existiert für jede Kombination von m und n eine eigene Transfermatrix mit den zugehörigen Koeffizienten⁹.

Transfermatrizen können miteinander kombiniert werden, wodurch es möglich ist, große Systeme in einer Gesamtmatrix abzubilden. Damit kann dessen Gesamtverhalten [44] bestimmt werden:

$$\Pi_{\text{ges}} = \Pi_{12} \cdot \Pi_{23} \cdot \Pi_{34} \cdot \dots \cdot \Pi_{j j+1} \quad (3.11)$$

⁹In weiterer Folge wird auf eine Indizierung mit der Mode verzichtet, da die vorgestellte Methode für alle m und n Gültigkeit hat.

Im Folgenden wird auf die für diese Arbeit relevanten Teilsysteme genauer eingegangen.

Zylinder

Die Transfermatrix eines zylinderförmigen Rohres lautet:

$$\begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix}_2 = \begin{bmatrix} e^{-ik^{x^+}L_{12}} & 0 \\ 0 & e^{-ik^{x^-}L_{12}} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix}_1 \quad (3.12)$$

Das Übertragungsverhalten von einer axialen Position 1 zu einer um L_{12} entfernten anderen axialen Position 2 ist im Wesentlichen durch eine Exponentialfunktion, die eine Phasendrehung in \hat{f} und \hat{g} bewirkt, gekennzeichnet und folgt aus Beziehung (2.31). Die Wellenzahlen für die stromauf und stromablaufenden Wellen geben die Geschwindigkeit der Phasendrehung vor.

Berandungen

Akustische Ränder werden in Netzwerkmodellen üblicherweise über ihren Reflektionsfaktor modelliert. Dabei wird nur das Verhältnis von f zu g angegeben, nicht aber deren absolute Größe. Unter Verwendung der Beziehungen (2.59) und (2.60) kann die Admittanz in einen Reflektionsfaktor überführt werden.

Gesamtsystem

Durch Umschreiben und Kombinieren der Transfermatrizen der Elemente lässt sich die Systemmatrix des Gesamtsystems erstellen. Für jede Mode existiert eine eigene Systemmatrix. Diese weisen untereinander starke Ähnlichkeiten auf. So ist die Belegung der Einträge in allen Matrizen gleich. Die Gleichungssysteme lauten:

$$\text{Sys} \cdot \vec{x} = 0 \quad (3.13)$$

Dabei ist

$$\text{Sys} = \begin{bmatrix} 1 & -R_u & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{TM11}^1 & \text{TM12}^1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{TM21}^1 & \text{TM22}^1 & 0 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \text{TM11}^j & \text{TM12}^j & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \text{TM21}^j & \text{TM22}^j & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -R_d & 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

die Systemmatrix, die das Verhalten des Systems, bestehend aus j Elementen für die jeweilige Mode, abbildet und

$$\vec{x} = \left(\hat{f}_1 \quad \hat{g}_1 \quad \hat{f}_2 \quad \hat{g}_2 \quad \dots \quad \hat{f}_{j-1} \quad \hat{g}_{j-1} \quad \hat{f}_j \quad \hat{g}_j \right)^T \quad (3.15)$$

ein Vektor mit den stromauf und stromab laufenden Wellen an den Schnittstellen der einzelnen Elemente, ebenfalls für diese Mode. Das Gleichungssystem (3.14) kann mit Hilfe der OLG-Methode (Open Loop Gain) gelöst werden, auf die im Folgenden näher eingegangen wird.

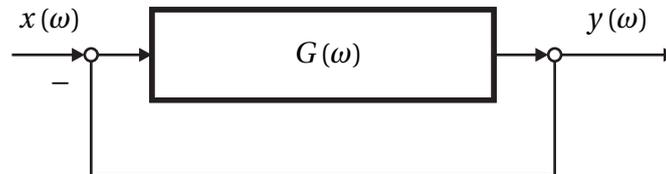


Abbildung 3.21.: Geschlossener Regelkreis

Sie bedient sich wesentlicher Elemente aus der Regelungstechnik, welche von Kaess [33] genauer beschrieben werden. Das thermoakustische Verhalten des Gesamtmodells wird dazu in einen geschlossenen Regelkreis überführt, dessen Übertragungsverhalten mit

$$\text{OLG}(\omega) = \frac{y(\omega)}{x(\omega)} = \frac{G(\omega)}{G(\omega) + 1} \quad (3.16)$$

angegeben werden kann (Abbildung 3.21). Es beschreibt den Zusammenhang eines Eingangssignales $x(\omega)$ mit einem Ausgangssignal $y(\omega)$, welches wiederum Auswirkungen auf die Eingangsgröße hat. Wird die Eingangsgröße $x(\omega)$ zu

Null gesetzt, lautet die charakteristische Gleichung nach Polifke et al. [51]:

$$\text{OLG}(\omega) = -1 \quad (3.17)$$

Jene Frequenzen, die dies erfüllen, sind die Eigenfrequenzen des Systems, welche sowohl reell als auch komplex sein können. Wie beispielsweise durch Gleichung (2.75) leicht zu sehen ist, sind die Eigenfrequenzen nur dann grenzstabil, wenn deren Imaginärteil zu null wird. Unter Zuhilfenahme des Nyquist-Kriteriums kann deren Stabilität überprüft werden. Dabei wird die reelle Achse der Frequenz, wie in Abbildung 3.22 dargestellt, winkeltreu in die OLG-Ebene übertragen. Passiert diese den kritischen Punkt $-1 + 0i$ rechter Hand, so ist die korrespondierende Frequenz gedämpft. Umgekehrt ist sie instabil. Da dies nur ein qualitatives, jedoch kein quantitatives Maß für die Dämpfung darstellt, geben Sattelmayer und Polifke [56] dazu eine Erweiterung an. Demnach ist der minimale (gleichzusetzen mit dem senkrechten) Abstand von der reellen Frequenzachse zum kritischen Punkt äquivalent zur Dämpfung.

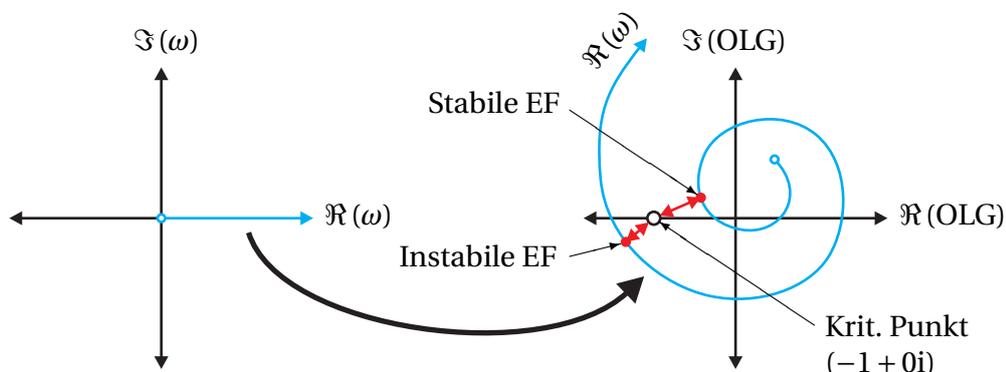


Abbildung 3.22.: Transformation der reellen Achse der Frequenz in die OLG-Ebene

Das Übertragungsverhalten ergibt sich durch Vergleich von Eingangs- zu Antwortverhalten

$$\text{OLG}(\omega) = \frac{\hat{f}_u(\omega)}{\hat{f}_d(\omega)}. \quad (3.18)$$

Angewandt auf ein Netzwerkmodell bedeutet dies, dass das System an einer Stelle aufgeschnitten (Abbildung 3.23) und die stromab laufende Welle \hat{f}_d konstant auf den Wert 1 gehalten wird. Für jede Frequenz wird das Antwortver-

halten $\hat{f}_u(\omega)$ ermittelt. Da nur reelle Frequenzen variiert werden, erlaubt diese Methode das Miteinbeziehen von experimentell ermittelten Elementen.

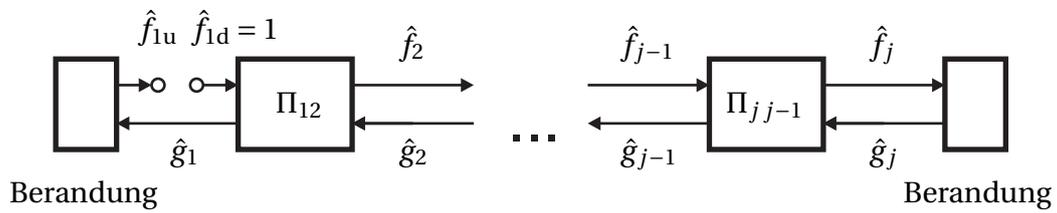


Abbildung 3.23.: Netzwerkmodell OLG aufgeschnitten

4 Versuchsanlage

Im folgenden Kapitel wird die verwendete Versuchseinrichtung beschrieben, die am Lehrstuhl für Thermodynamik an der Technischen Universität München betrieben wurde. Sie besteht aus verschiedenen Modulen, wie beispielsweise Düsen und Brennkammern und weiteren Komponenten, die untereinander ausgetauscht werden können. Die Versuchsanlage wurde eigens für diese Arbeit entwickelt und gefertigt. Im ersten Abschnitt des Kapitels werden die Komponenten im Detail erläutert, die je nach Anforderung auf unterschiedlichste Art und Weise miteinander kombiniert werden können. Die Anforderungen an den Aufbau ergeben sich unter anderem aus den experimentellen Methoden und Analyseverfahren, die im vorherigen Kapitel 3 vorgestellt wurden. Auf die sich daraus ergebenden Konfigurationen wird im darauf folgenden Abschnitt näher eingegangen.

4.1. Komponenten

Die Anlage besteht im Wesentlichen aus den Komponenten

- Luftversorgung
- Sirene
- Einströmkopf
- Absorbermodul
- Messmodule
- Verlängerungs- und Anschlussmodule
- Düsenmodule
- Mess- und Regeleinrichtung sowie Steuerungselektronik,

welche im Folgenden auszugsweise beschrieben werden.

4.1.1. Luftversorgung

Als Arbeitsmedium wird Druckluft verwendet, welche von der hauseigenen Kompressorstation zur Verfügung gestellt wird. Ein mechanischer Druckregler unterdrückt Störeinflüsse in der Hausversorgung. Die Zuluft wird in zwei voneinander unabhängig regelbare Versorgungsstränge (Hauptluft und Sirenenluft) aufgeteilt. Die beiden Leitungen sind durch einen Schalldämpfer voneinander entkoppelt. Das Anlagenschema ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Der maximal zur Verfügung stehende Luftmassenstrom beträgt mit angeschlossenem Versuchsstand $\dot{m} = 1.25 \text{ kg/s}$.

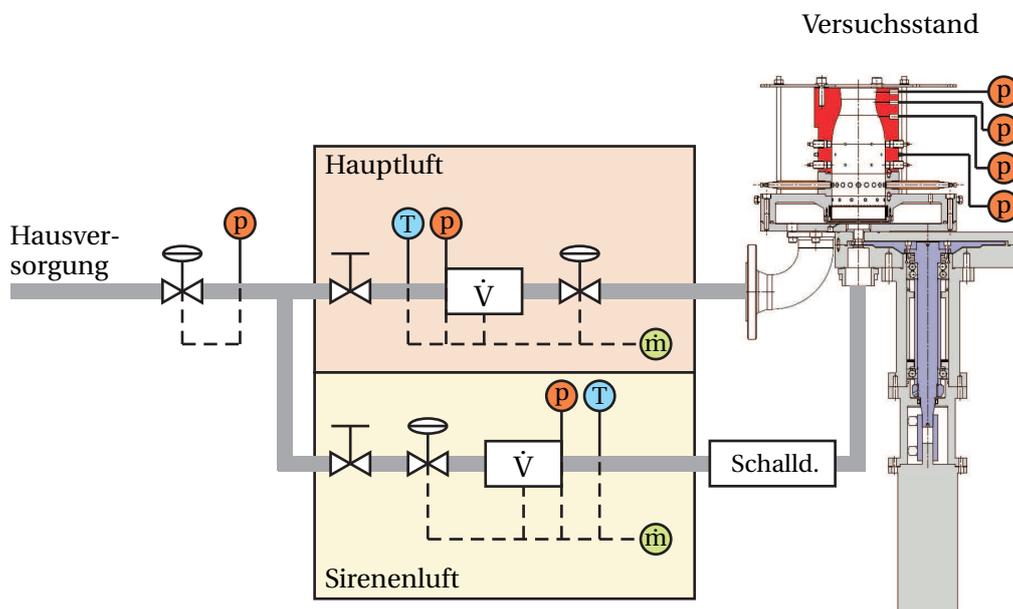


Abbildung 4.1.: Schematischer Aufbau der Versuchsanlage, T = Thermoelement, p = statischer Drucksensor, \dot{V} = Volumenstrommesser

4.1.2. Sirene

Die Anregung erfolgt über eine Lochblechsirene (Abbildung 4.2). Dabei wird ein Luftstrom durch eine rotierende Scheibe periodisch unterbrochen, wodurch sich durch Vorgabe der Motordrehzahl die gewünschte Anregungsfrequenz einstellt.

Die Austrittsöffnung (Abbildung 4.3) der Sirene ist so gestaltet, dass der Druckpuls einen sinusförmigen Verlauf aufweist. Sie kann unter Verwendung von zwei verschiedenen Rotoren (Abbildung 4.2) nicht nur als kontinuierliche (56

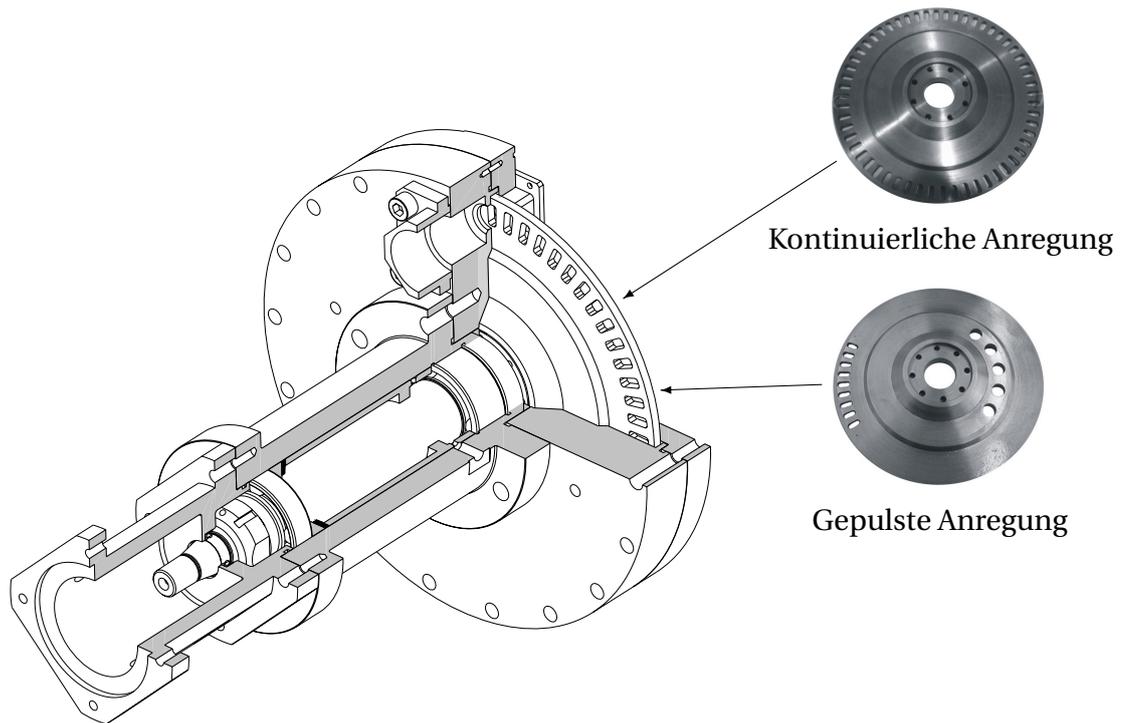


Abbildung 4.2.: Ausbruchsansicht der Sirene mit zwei verschiedenen Rotorscheiben für kontinuierliche und gepulste Anregung für Abklingversuche

Löcher pro Umdrehung), sondern auch als gepulste Anregungsquelle (9 Löcher pro Umdrehung mit der selben Teilung wie beim kontinuierlichen Rotor) betrieben werden.

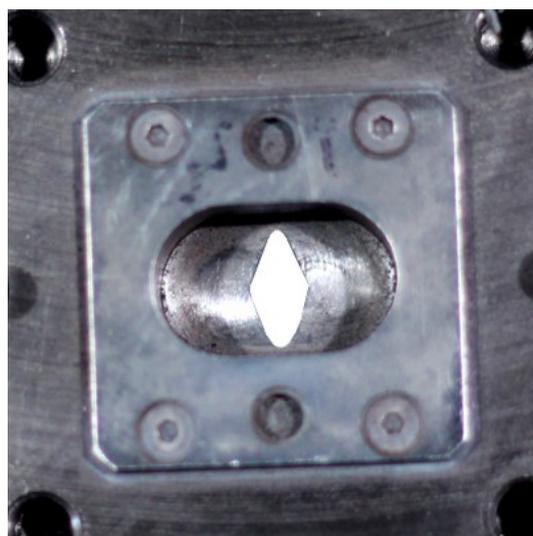


Abbildung 4.3.: Austrittsöffnung der Sirene, als Doppelsinusblende ausgeführt

Letztere kann zur direkten Bestimmung von Dämpfungskoeffizienten (Abklingraten) verwendet werden, eine Methode, die bereits in ähnlicher Form von Buffum et. al. [7] erfolgreich angewendet wurde.

4.1.3. Einströmkopf

Die Versorgung der Brennkammer mit Druckluft erfolgt über einen zylinderförmigen Einströmkopf, der aus zwei Kammern besteht (Abbildung 4.4). In der ersten ringförmigen Kammer verteilt sich die punktwise eingeleitete Luft und strömt durch einen Ringspalt radial in die zweite Kammer ein.

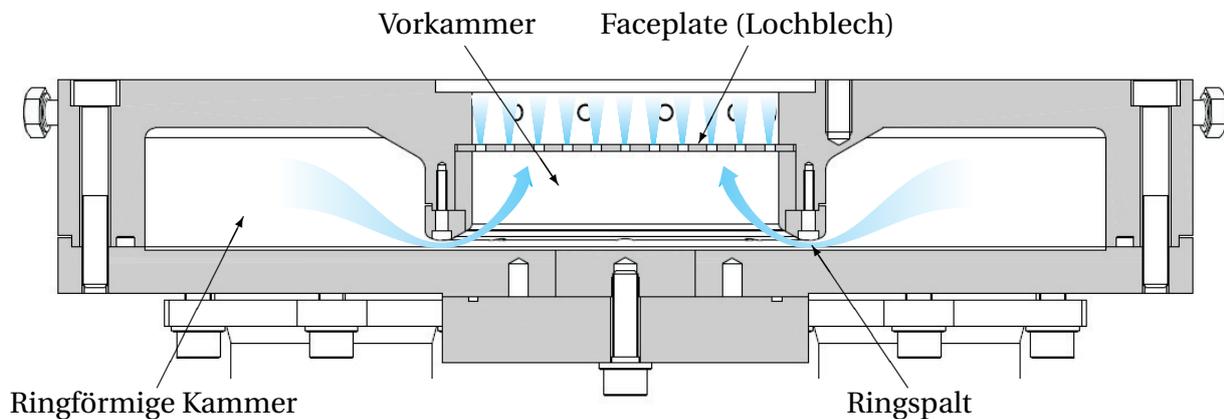


Abbildung 4.4.: Einströmkopf

Der Ringspalt ist kritisch durchströmt, um die Brennkammer akustisch vom Zufuhrsystem zu entkoppeln. Den Abschluss der zweiten Kammer bildet ein Lochblech (Rv 3-4 nach DIN 24041, Abbildung 4.5), welches anstatt eines realen Einspritzkopfes verwendet wird. Der Lochdurchmesser ist so gewählt, dass sich im Loch eine Machzahl von $M = 0.4$ und im Kontraktionsquerschnitt von $M = 0.55$ einstellt (Berechnung siehe Anhang A.1.3). Die Abmessungen sind in Tabelle 4.1 angegeben.



Abbildung 4.5.: Einströmkopf mit eingebautem Lochblech

	Wert	Einheit
Lochdurchmesser	3	mm
Teilung	4	mm
Versatz	60	°
Dicke	2	mm
Offener Querschnitt	51	%

Tabelle 4.1.: Geometriedaten Lochblech

4.1.4. Absorbermodul

Das Absorbermodul besteht aus einem zylindrischen Ring und 20 daran angeschlossenen, als $\lambda/4$ -Absorber ausgeführten Rohren. Das Flächenverhältnis aus Gesamtabsorberquerschnitt- zu Brennkammerquerschnitt beträgt

$$\frac{A_{\text{Abs,ges}}}{A_{\text{BK}}} = 15. \quad (4.1)$$

Der Durchmesser der Absorberrohre beträgt $d = 8$ mm. Die Länge ist über Stopfen in einem Bereich von 0 mm – 60 mm einstellbar, die durch Schrauben in ihrer Lage fixiert werden können. Das Modul ist in Abbildung 4.6 dargestellt.

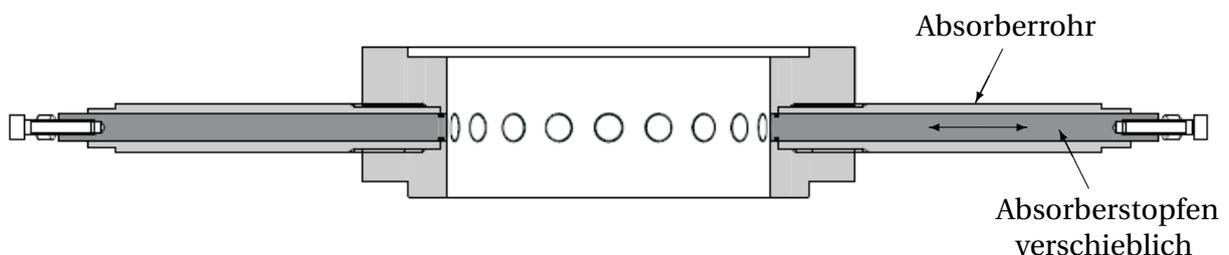


Abbildung 4.6.: Absorbermodul mit 20 Absorbern

4.1.5. Messmodule

Die Messung des dynamischen Drucks erfolgt wandnah. Die Sensoren sind zur Umgebung hin druckdicht über einen Adapter in die Module eingeschraubt. Der Durchmesser der kreisrunden Öffnung zur Brennkammer beträgt $d = 4 \text{ mm}$. Es stehen sowohl in axialer als auch in Umfangsrichtung mehrere Messpositionen zur Verfügung. Die Teilung beträgt axial 36 mm und 60° am Umfang. Ein Messmodul ist in Abbildung 4.7 abgebildet.

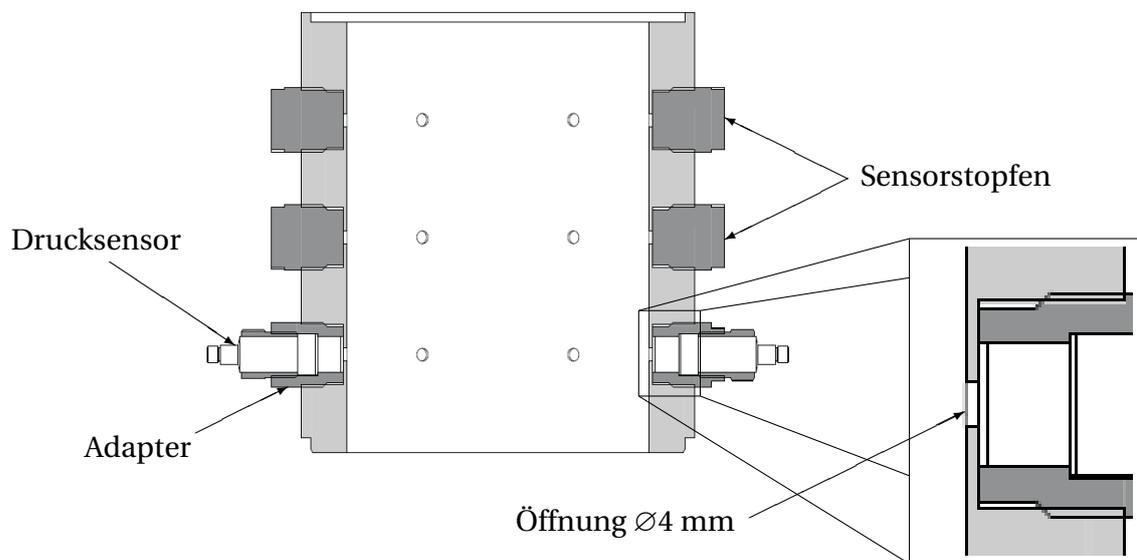


Abbildung 4.7.: Sensormodul mit 3 Messebenen mit jeweils 6 Anschlussmöglichkeiten in Umfangsrichtung

4.1.6. Düsenmodule

Es werden zwei unterschiedliche Düsengeometrien verwendet. Düse A weist eine auf den Brennkammerdurchmesser der Versuchsanlage skalierte Kontur auf, wie sie typischerweise in realen Triebwerken zu finden ist. Düse B liegt eine generische Geometrie zugrunde, die ausschließlich zu Forschungszwecken entwickelt wurde. Beide Geometrien bestehen aus einem konvergenten und einem divergenten Düsenteil, um die Strömung in den Überschallbereich zu beschleunigen. Dadurch wird sichergestellt, dass der Düsenhalsquerschnitt kritisch durchströmt wird (Auslegungsberechnung siehe Angang A.1). Die Düsenkontur von Düse A ist in Abbildung 4.8 dargestellt. Die zugehörigen Abmes-

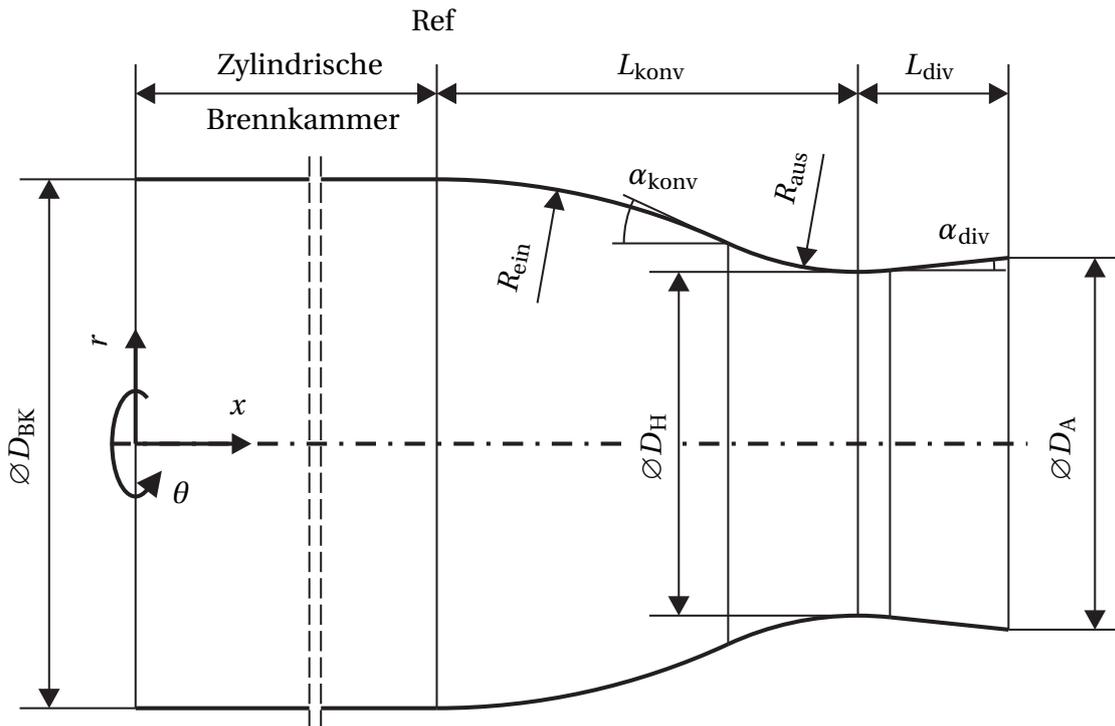


Abbildung 4.8.: Düsenkontur

sungen beider Düsen sind in Tabelle 4.3 angegeben, die Betriebsbedingungen in Tabelle 4.2. Das Düsenmodul mit der Kontur von Düse A besteht aus konstruktiven Gründen zusätzlich noch aus einem zylindrischen Teil und bietet die Möglichkeit, in drei Ebenen Sensoren einzusetzen.

Tabelle 4.2.: Statische Größen in der Brennkammer

Größe	Symbol	Düse A	Düse B	Einheit
Lufmassenstrom	\dot{m}_{BK}	1.150	1.000	kg/s
Druck	p_{BK}	1.654	1.664	bar
Machzahl	M_{BK}	0.25	0.22	-

4.1.7. Mess-, Regeleinrichtung und Steuerungselektronik

Die Messung von dynamischen und statischen Größen wird getrennt voneinander durchgeführt. Die Erfassung des dynamischen Drucks erfolgt über

Tabelle 4.3.: Geometriegrößen der verwendeten Düsen

Größe	Symbol	Düse A	Düse B	Einheit
Brennkammerdurchmesser	D_{BK}	92	92	mm
Halsdurchmesser	D_H	60	56	mm
Austrittsdurchmesser	D_A	64	67	mm
Eingangsradius	R_{ein}	119	1469	mm
Ausgangsradius	R_{aus}	53	544	mm
Kegelwinkel konvergent	α_{konv}	25	7	°
Kegelwinkel divergent	α_{div}	6	6	°
Länge konvergenter Teil	L_{konv}	73	273	mm
Länge divergenter Teil	L_{div}	25	81	mm

dynamische Drucksensoren, welche von einem Messwerterfassungs-PC simultan abgetastet werden. Zusätzlich zur Ansteuerung der Sirenenelektronik dient dieser Rechner der Datenerfassung und -aufbereitung. Ein zweiter PC erfasst Prozessdaten (z. B. Leitungsdruck, Volumenstrom, Temperatur) und regelt die Luftmassenströme von Sirene und Hauptluftversorgung (vgl. Abbildung 4.1).



Hersteller	PCB Piezotronics
Modell	M106B
Resonanzfrequenz	≥ 60 kHz
Auflösung	0.69 Pa
Sensitivität	43.5 mV/kPa
Messbereich	57.2 kPa
Anstiegszeit	$\leq 9 \mu s$
Messwerterfassung	ICP
Membrandurchmesser	11 mm

Abbildung 4.9.: Dynamischer Drucksensor, Modell PCB M106B

Tabelle 4.4.: Kenndaten dynamischer Drucksensoren [48]

Die Datenerfassung erfolgt mit Hilfe der Mess- und Steuersoftware LabVIEW [43] (Abbildung 4.10). Zur Messung des dynamischen Druckes stehen 24 Drucksensoren des Typs *Synotech PCB M106B* zur Verfügung (siehe Abbildung 4.9 und Tabelle 4.4). Diese Sensoren arbeiten nach dem ICP-Standard (Integrated Circuit Piezoelectric [49]), der das Messsignal bereits mit Hilfe der im Sen-

vor verbauten Elektronik konditioniert. Der dabei verwendete Hochpassfilter sorgt dafür, dass nur Drucksignale mit Frequenzen höher als 10 Hz an die Datenerfassungseinheit übergeben werden.

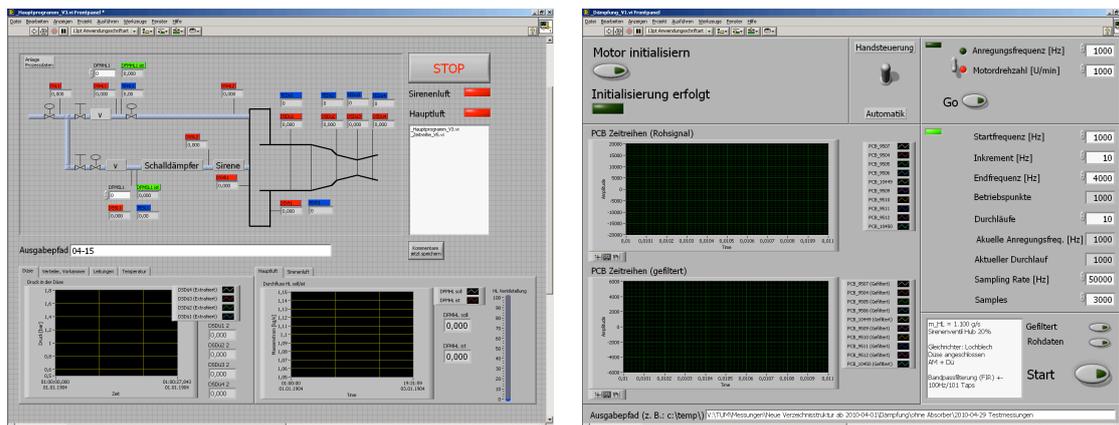


Abbildung 4.10.: Steuerungsprogramm (links), Messprogramm (rechts)

4.2. Konfigurationen

Im Folgenden werden die verschiedenen Konfigurationen beschrieben, mit denen die aufgeführten Größen experimentell ermittelt werden:

- Düsenadmittanzen
- Faceplateadmittanzen
- Absorbertransfermatrizen
- Abklingverhalten

Auf die Grundlagen der Auswerte- und Analysemethoden wurde bereits im Detail im vorherigen Kapitel 3 eingegangen. Ergänzende Informationen zu den Versuchsstandkonfigurationen, wie Abmessungen und Sensorpositionen, sind im Anhang C aufgeführt.

4.2.1. Düsenadmittanzen

Die Düsenadmittanzen von beiden Düsen werden mit Hilfe von zwei verschiedenen Versuchsstandskonfigurationen bestimmt. Diese sind in Abbildung 4.11 dargestellt und werden im Weiteren genauer beschrieben. Die Absorber sind bei allen Versuchen deaktiviert, das Absorbermodul dient nur als Platzhalter.

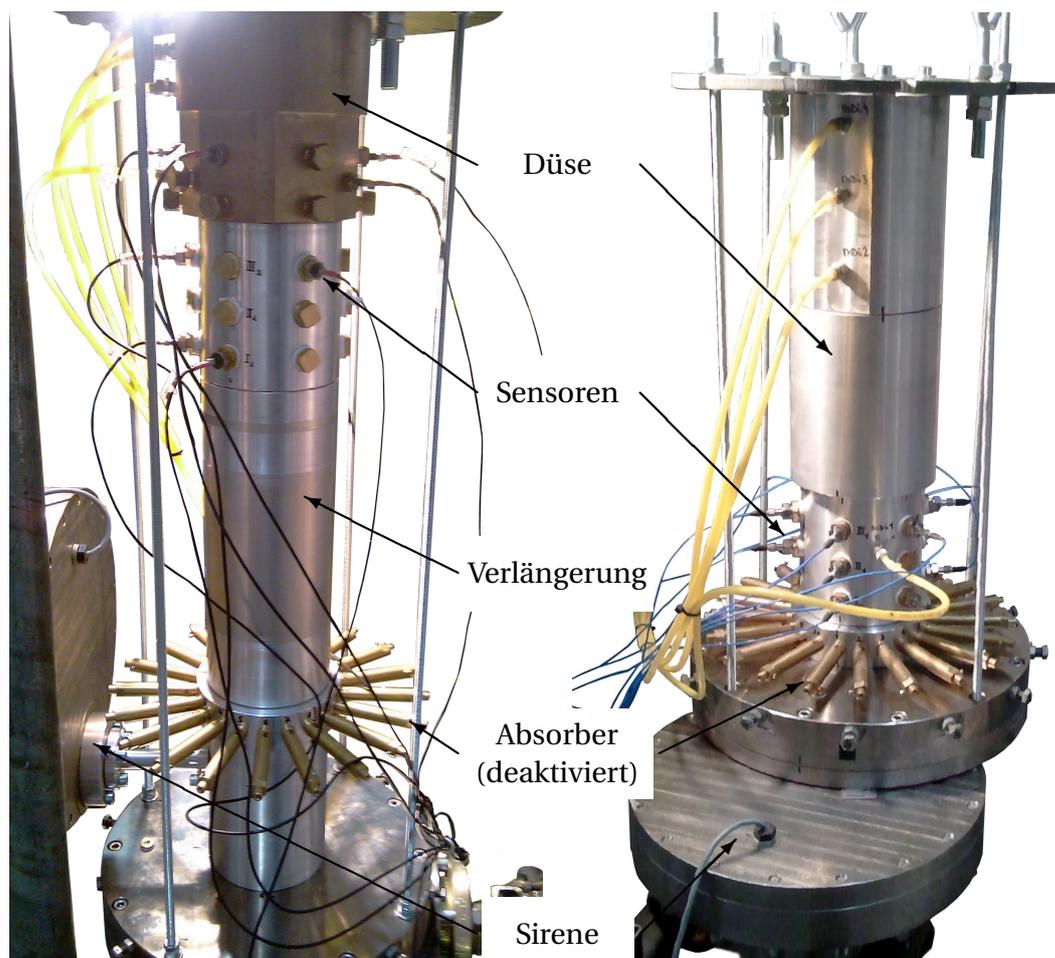


Abbildung 4.11.: Versuchsaufbauten zur Bestimmung der Düsenadmittanzen. Düse A (links): Anregung seitlich; Düse B (rechts): Anregung koaxial

Düse A

Die Anregung erfolgt seitlich in die Brennkammer. Eine Verlängerung des zylindrischen Brennkammerteils stellt sicher, dass sich die Wellen bis zur ersten

Sensorebene über den gesamten Querschnitt ausgebreitet haben und dass Störeinflüsse durch die Sirene vermieden werden. Insgesamt stehen 5 Messebenen zu je 6 und eine Messebene zu 3 Anschlussmöglichkeiten für dynamische Drucksensoren zur Verfügung. Zur Überprüfung der Reproduzierbarkeit der Ergebnisse, und zur Schaffung einer großen Datenbasis, wird das Experiment vier Mal wiederholt, wobei vor jedem Durchlauf einige Sensoren neu positioniert werden. Dadurch können 32 Stützstellen für die Berechnung der Admittanz geschaffen werden.

Düse B

Die Anregung befindet sich stromauf der Vorkammer und erfolgt parallel um 30 mm zur Brennkammerachse versetzt, um sicher zu stellen, dass neben longitudinalen auch transversale Moden angeregt werden. Die zylindrische Brennkammer besteht im Wesentlichen aus dem Absorberring und einem Messmodul mit 3 Messebenen zu je 6 Anschlussmöglichkeiten für dynamische Drucksensoren. Das Experiment wird mit 13 Drucksensoren durchgeführt.

4.2.2. Faceplateadmittanzen

Die Versuchsaufbau gleicht jenem von Düse A (siehe Abschnitt 4.2.1), mit dem Unterschied, dass Anregung und Sensoren vertauscht sind.

Die Anregung erfolgt nahe an der Düse seitlich in die zylindrische Brennkammer. Der zylindrische Teil ist verlängert, damit sich die Wellen bis zur ersten Sensorebene über den gesamten Querschnitt ausbreiten können. Die drei Messebenen befinden sich nahe an der Faceplate. Der Versuch wird zwei Mal durchgeführt, um durch Umsetzen der Sensoren die Anzahl der Stützstellen für die Multimikrofonmethode aus Abschnitt 3.2 auf 15 zu erhöhen. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 4.12 dargestellt.

4.2.3. Absorbertransfermatrizen

Stromauf und stromab vom Absorberring befinden sich Messmodule mit jeweils drei Messebenen zu je 6 Anschlussstellen, auf die insgesamt 24 dynamische Drucksensoren verteilt sind (Schema siehe Abbildung 3.14, Versuchsauf-

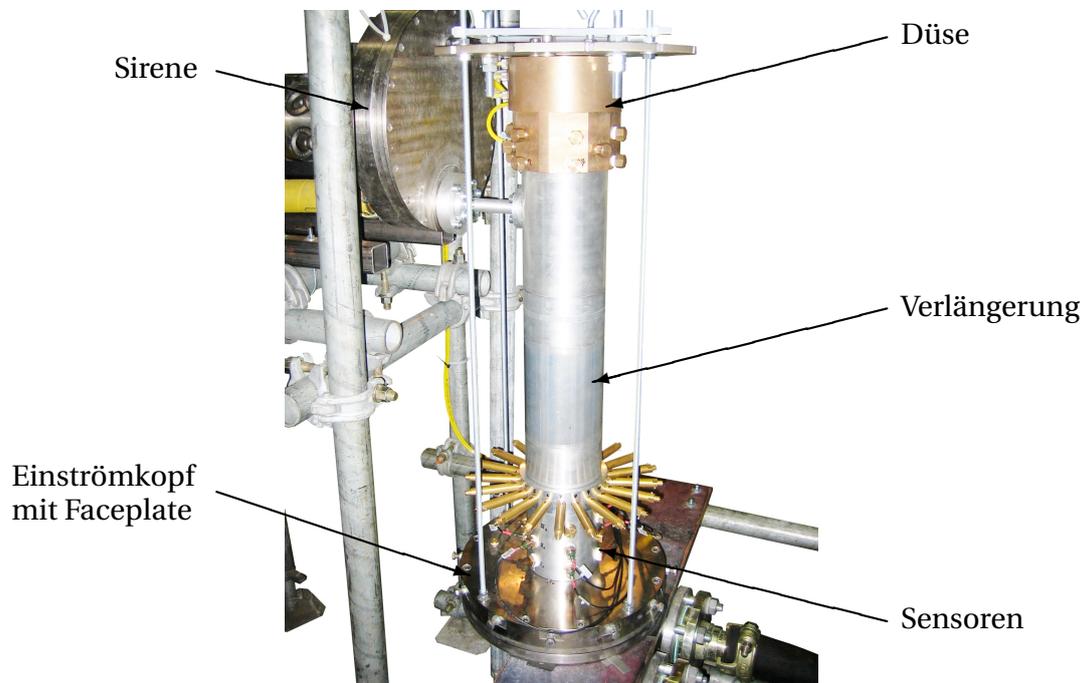


Abbildung 4.12.: Versuchsaufbau zur Bestimmung der Faceplateadmittanzen

bau im Labor siehe Abbildung 4.13).

Bei Anregungszustand a befindet sich die Sirene stromauf vom Absorberring und regt die Brennkammer parallel zur Achse exzentrisch an.

Der Aufbau bei Anregungszustand b ist ähnlich zu jenem der Faceplateadmittanzen. Dabei erfolgt die Anregung stromab vom Absorberring radial in die Brennkammer. Da durch die Anregung von stromab auf Grund des Wegfalls des Sirenenluftmassenstroms geringfügig weniger Luft durch den Absorberring strömen würde, was eine Änderung der Machzahl zur Folge hätte, wird dies durch eine Erhöhung des Hauptluftmassenstroms ausgeglichen.

4.2.4. Abklingverhalten

Die Anregung erfolgt hierbei von stromauf in axialer Richtung (vgl. Anregung bei Versuchsaufbau Admittanzbestimmung Düse B, Abschnitt 4.2.1) in die

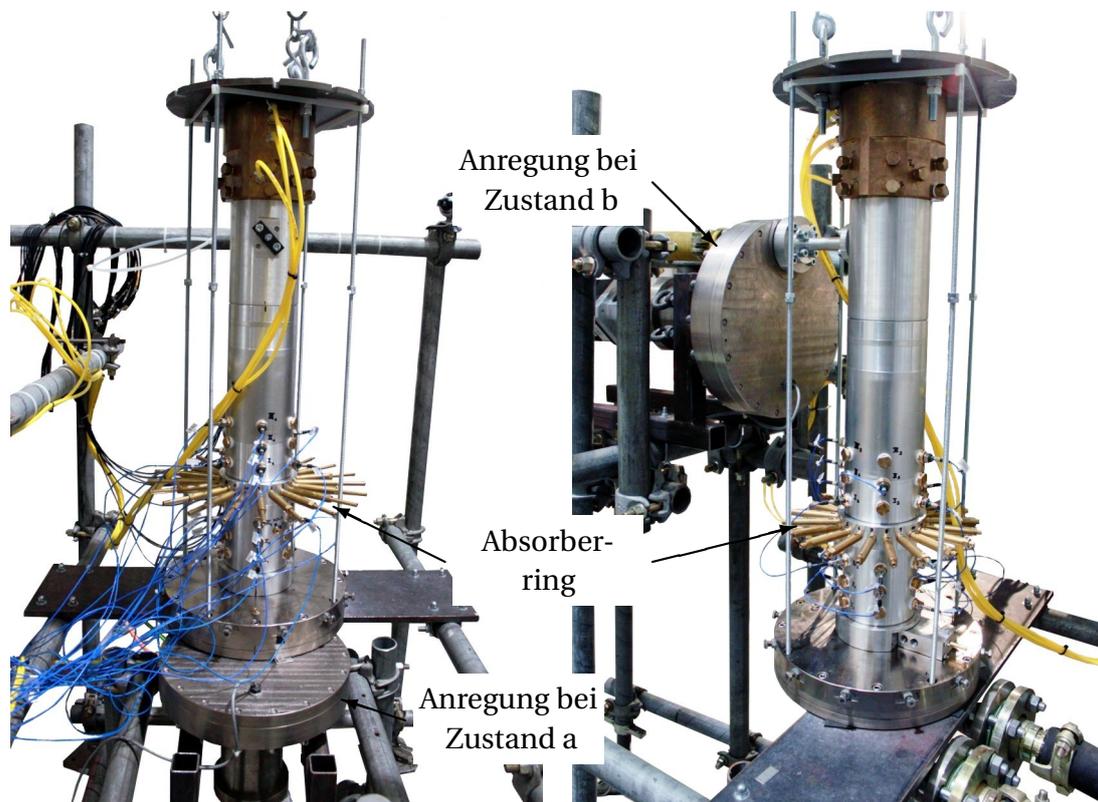


Abbildung 4.13.: Versuchsaufbau zur Messung von Transfermatrizen, links: Anregung von stromauf (a), rechts: Anregung von stromab (b)

Brennkammer unter Verwendung des Sirenenrotors für gepulste Anregung mit 9 Öffnungen (siehe Abbildung 4.2). Es werden vom Sirenenrotor getriggerte Zeitreihen des dynamischen Drucks mit insgesamt 10 Drucksensoren aufgezeichnet. Die Versuche werden unter Verwendung von Düse A und des Absorberringes für verschiedene Absorberpositionen durchgeführt. Der Versuchsaufbau ist in Abbildung 4.14 dargestellt und im Anhang C.4 detailliert beschrieben.

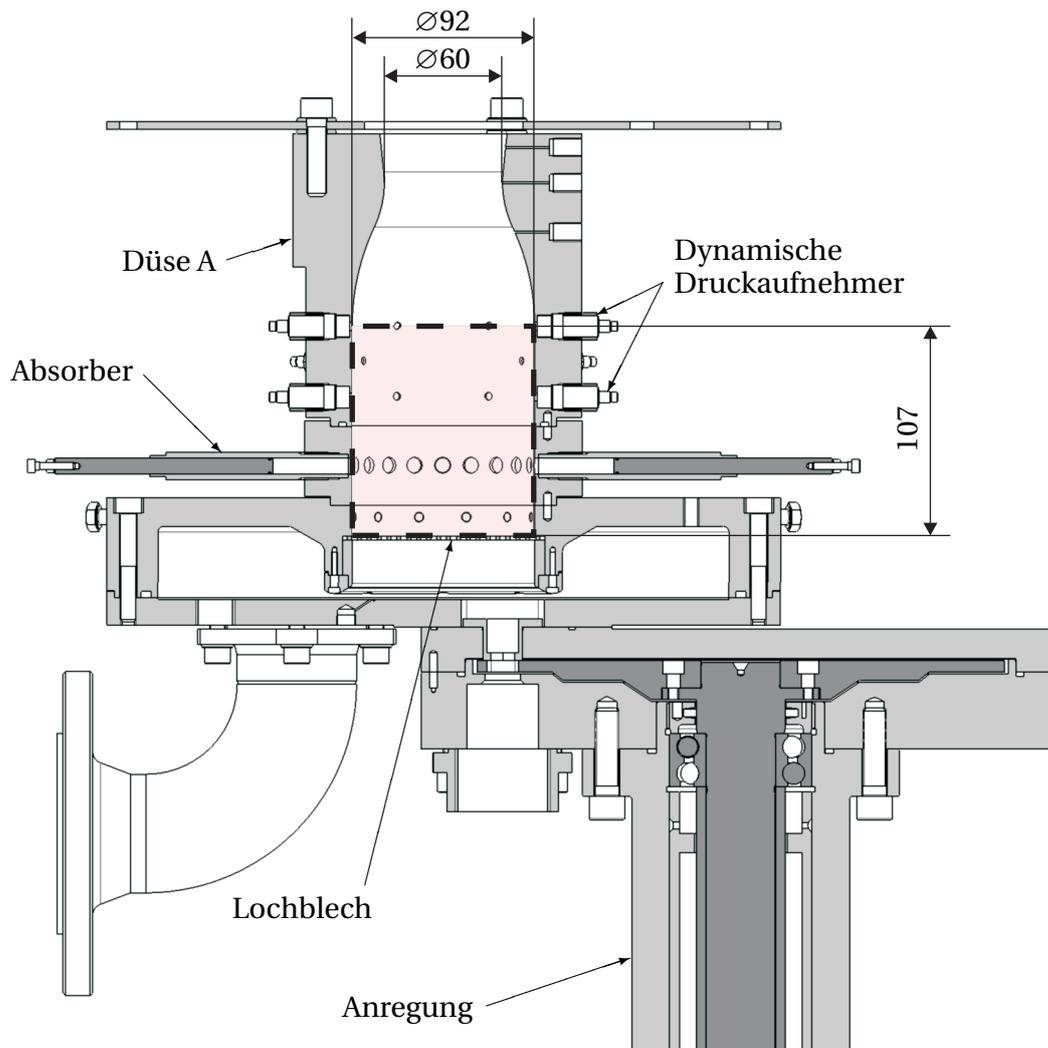


Abbildung 4.14.: Versuchsaufbau Gesamtsystem, schattierter umrahmter Bereich: zylindrische Brennkammer

5 Akustische Eigenschaften der Komponenten der Versuchsanlage

In diesem Kapitel wird auf die akustischen Eigenschaften der einzelnen Komponenten der Versuchsanlage eingegangen, die im vorherigen Kapitel 4 beschrieben wurden. Es werden die gemessenen und aufbereiteten Größen in Form von Admittanzen und Transfermatrizen präsentiert und anhand von Daten aus der Literatur plausibilisiert. Die Grundlagen dazu bilden die theoretischen Zusammenhänge aus Kapitel 2 sowie die experimentellen Methoden und Analyseverfahren aus Kapitel 3.

5.1. Sirenenanregung

Die Qualität der Sirenenanregung lässt sich auf einfache Art und Weise überprüfen. Anhand einer Rampenfahrt können Oberfrequenzen identifiziert werden, aus denen sich die Güte der Sirene ableiten lässt. Je weniger diese im Vergleich zur Hauptfrequenz in Erscheinung treten, desto besser ist die Anregung.

Eine einfache Form dies zu überprüfen, stellt die Spektralanalyse über den Zeitraum einer Rampenfahrt dar. Der für die Untersuchung verwendete Versuchsaufbau entspricht dabei jenem, wie er in Abbildung 4.14 gezeigt ist. Die Rampenfahrt ist für einen Frequenzbereich von 1000 bis 5600 Hz durchgeführt und ist in Form eines Spektrogramms des dabei gemessenen Drucks als Funktion der Zeit in Abbildung 5.1 dargestellt. Die Hauptfrequenz verläuft dabei in Form einer diagonalen Linie durch das Spektrum. Daneben ist die erste Oberfrequenz erkennbar, die bereits deutlich schwächer ausgeprägt ist. Höhere Oberfrequenzen können nicht identifiziert werden, da sie zu schwach sind und nicht in Erscheinung treten. Alles zusammen unterstreicht dies die gute Qualität der verwendeten Sirene.

Gut zu erkennen sind neben der Sirenenanregung die Eigenfrequenzen der Brennkammer, die durch das Strömungsrauschen permanent angeregt wer-

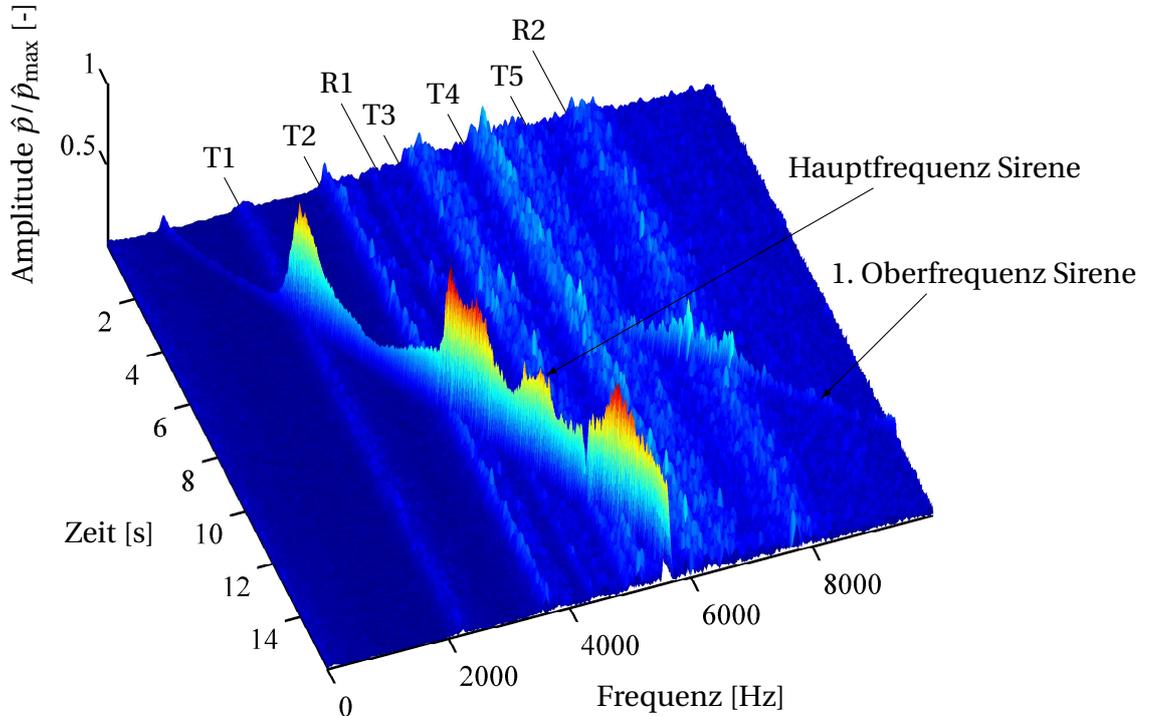


Abbildung 5.1.: Zeitlicher Verlauf der Frequenzantwort auf die Sirenenanregung

den. Obwohl die Amplituden sehr klein sind, können einige Eigenfrequenzen identifiziert werden. Sehr gut ist die jeweils erste schwingungsfähige transversale Eigenmode mit $m = 1..4 / n = 0$ (als T1, T2, T3 und T4 im Bild markiert) sowie radiale Eigenmoden mit $m = 0 / n = 1..2$ (als R1 und R2 im Bild markiert) zu erkennen, die sich gut mit den theoretisch berechneten Werten aus Abschnitt 5.2.1 und Anhang B.1 decken. Sobald die Anregungsfrequenz der Sirene mit den Eigenfrequenzen der Brennkammer übereinstimmt, sind deutliche Ausschläge zu erkennen. Dabei werden sehr hohe Amplituden im Vergleich zu den anderen Frequenzen erreicht. Hohe Eigenfrequenzen können nur bedingt identifiziert werden, da immer mehr Mischformen (z. B. T2L3, T2R2L4, usw.) existieren und es somit zu einer Art Verschmierung im Spektrum kommt. Einzelne Amplitudenmaxima sind deshalb nicht mehr klar erkennbar.

5.2. Düse

Im folgenden Abschnitt sind die Ergebnisse aus den experimentellen Untersuchungen der beiden Konfigurationen aus 4.2.1 gezeigt. Zuerst werden numerische Methoden für die Berechnung von Düsenadmittanzen vorgestellt, die im Anschluss mit den experimentellen Ergebnissen verglichen werden. Auswirkungen der Düsengeometrie auf den akustischen Fluss werden im Anschluss daran gezeigt.

5.2.1. Numerische Methoden zur Bestimmung von Düsenadmittanzen

In der Literatur finden sich vor allem zwei theoretische Arbeiten, die sich mit Düsenadmittanzen auseinandersetzen, welche sich grundlegend voneinander unterscheiden. Die Arbeiten von Bell und Zinn [67] basieren auf den *Linearisierten Eulergleichungen* (LEEs) für isentrope Strömungen und werden im Frequenzbereich gelöst. Im Gegensatz dazu berechnet Pieringer [50] Düsenadmittanz mit Hilfe der *Acoustic Perturbation Equations* (APEs) im Zeitbereich. Im Folgenden sind beide Verfahren näher beschrieben.

5.2.1.1. Frequenzbereich

Crocco und Sirignano [10] haben 1967 die in einer Raketendüse geltenden akustischen Gleichungen für die dreidimensionale Wellenausbreitung formuliert. Bell und Zinn [67] entwickelten 1972 ein darauf basierendes Computerprogramm, das abhängig von wenigen Parametern, wie der Düsengeometrie, der Modenklasse, sowie Kenngrößen des strömenden Fluids, die Düsenadmittanzen am Eintritt zur Düse in Abhängigkeit der Frequenz berechnet. Dabei werden ausgehend von der Beschreibung der jeweiligen Modenform im Düsenhals die LEEs in die Potentialfunktion für die stationäre Geschwindigkeit und in die stationäre Stromfunktion überführt. Durch die Integration der sich daraus ergebenden Riccati-Differentialgleichung¹ können die Admittanzen im Düseneintritt angegeben werden.

Voraussetzung für die Anwendbarkeit des numerische Tools von Bell und Zinn ist eine parametrisierte Düsenkontur in Form eines kreisförmigen

¹ Die riccatische Differentialgleichung ist eine nichtlineare gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung und wurde nach dem Mathematiker Jacopo Francesco Riccati (1676–1754) benannt [2, 65].

Eingangs-Übergangsbogens, einer Geraden und eines kreisförmigen Austritts-Übergangsbogens (vgl. Abbildung 4.8). Weitere Eingangsgrößen sind die Machzahl am Düsen Eintritt M , der Isentropenexponent κ , die Temperatur T , sowie die betrachtete transversale und radiale Mode (m und n).

5.2.1.2. Zeitbereich

Pieringer [50] verwendet in ihrer Arbeit das 3D-Aeroakustik-Tool PIANO [13] (**P**erturbation **I**nvestigation of **A**erodynamik **N**oise) vom DLR Braunschweig - Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik² zur Lösung der APEs im Zeitbereich. Die APEs beschreiben die Wellenausbreitung in nicht-gleichförmigen mittleren Strömungen. Die Berechnung der Grundströmung, die PIANO unterlegt ist, erfolgte zweidimensional mit dem Berechnungstool FLUENT [27]. Das Rechengebiet umfasste dabei eine zylinderförmige Brennkammer mit einem konvergenten und divergenten Düsenteil. Die Abmessungen der Düse und die Strömungsparameter entsprachen dabei der im Rahmen dieser Arbeit verwendeten Düse A, deren Parameter in den Tabellen 4.2 und 4.3 angegeben sind.

Pieringer gibt in ihrer Arbeit die Düsenadmittanzen von Düse A für die erste schwingungsfähige Transversalmode an. In ihrer Arbeit konnte sie eine konstante Admittanz über den Düsen Eintrittsquerschnitt nachweisen und somit die Gültigkeit der in Abschnitt 2.5 verwendeten Methoden bestätigen.

5.2.2. Experimentell bestimmte Düsenadmittanzen und Vergleich mit numerischen Ergebnissen

Die hier vorgestellten Düsenadmittanzen werden, wie in Abschnitt 3.4 beschrieben, mit Hilfe der Multimikrofonmethode auf Grundlage von experimentell ermittelten Daten berechnet. Bei den Experimenten wurden die beiden in Abschnitt 4.1.6 beschriebenen Düsen A und B verwendet. Der Versuchsaufbau ist in Abschnitt 4.2.1 gezeigt. Die Düsenadmittanzen sind im Folgenden dargestellt und werden mit numerischen Ergebnissen, welche auf den Arbeiten von Bell und Zinn [67] basieren, und den simulierten Daten von Pieringer [50] verglichen.

² <http://www.dlr.de/as/>, abgerufen am 8.1.2013

Die Ergebnisse für die ersten beiden transversalen Modenklassen ($m = 1 / n = 0$ und $m = 2 / n = 0$) sind in den Abbildungen 5.3 und 5.4 gezeigt. Die Zahlenwerte der ersten schwingungsfähigen transversalen Mode von Düse A sind zusätzlich in Tabelle 5.1 angegeben.

Die Übereinstimmung der experimentell bestimmten Düsenadmittanzen mit den berechneten Werten ist abschnittsweise sehr gut. Vor allem unterhalb der cut-on Frequenz der nächsthöheren transversalen Moden (ω_{10}^{co} für $m = 0 / n = 0$ und ω_{20}^{co} für $m = 1 / n = 0$) trifft dies sowohl bei Düse A, als auch Düse B zu. Oberhalb der cut-on Frequenzen sind starke Streuungen in den Werten erkennbar, die mit zunehmender Frequenz abnehmen und tendenziell den numerischen Ergebnissen folgen.

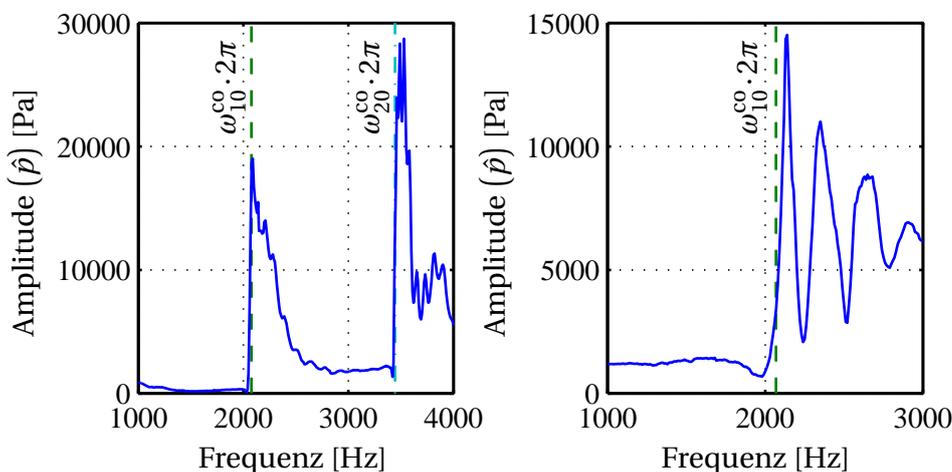


Abbildung 5.2.: Druckamplituden in der Brennkammer bei Verwendung von Düse A (links) und Düse B (rechts) in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz der Sirene

Betrachtet man in dem Zusammenhang die Druckamplitude innerhalb der zylindrischen Brennkammer, so fällt auf, dass diese unmittelbar oberhalb der cut-on Frequenzen sehr hohe Werte annimmt (vgl. Abbildung 5.2). Im Gegensatz dazu ist die Druckamplitude unterhalb der cut-on Frequenz wesentlich geringer. Das Verhältnis der Druckamplituden beträgt bei Düse A ca. 1:30, bei Düse B ca. 1:12. In dem Frequenzbereich knapp oberhalb der cut-on Frequenz dominiert die neu hinzugekommene Modenklasse.

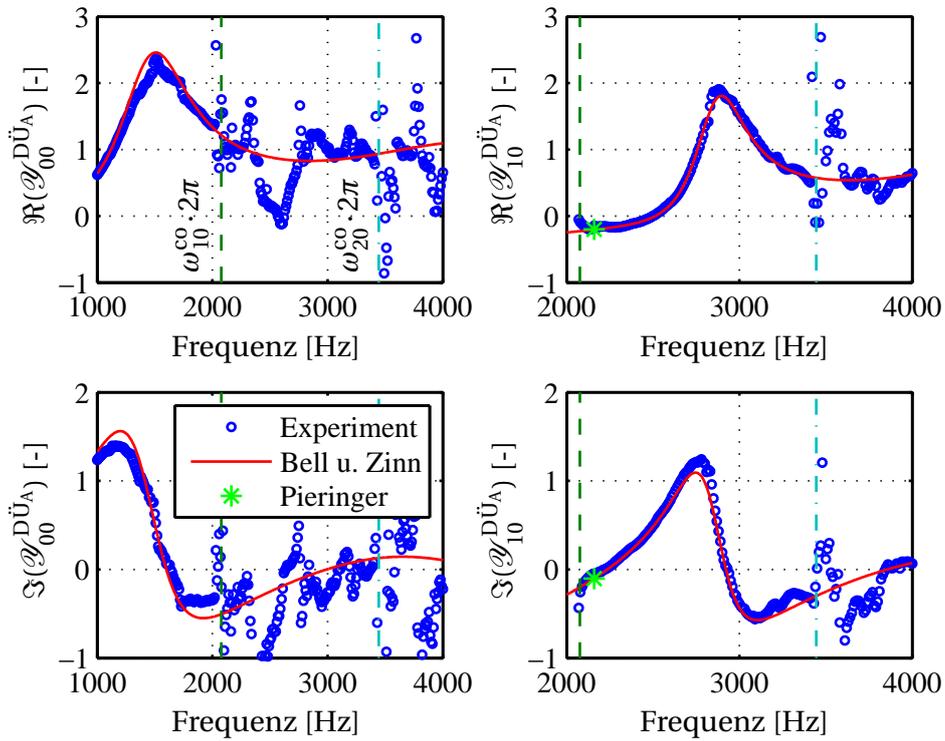


Abbildung 5.3.: Düsenadmittanzen Düse A

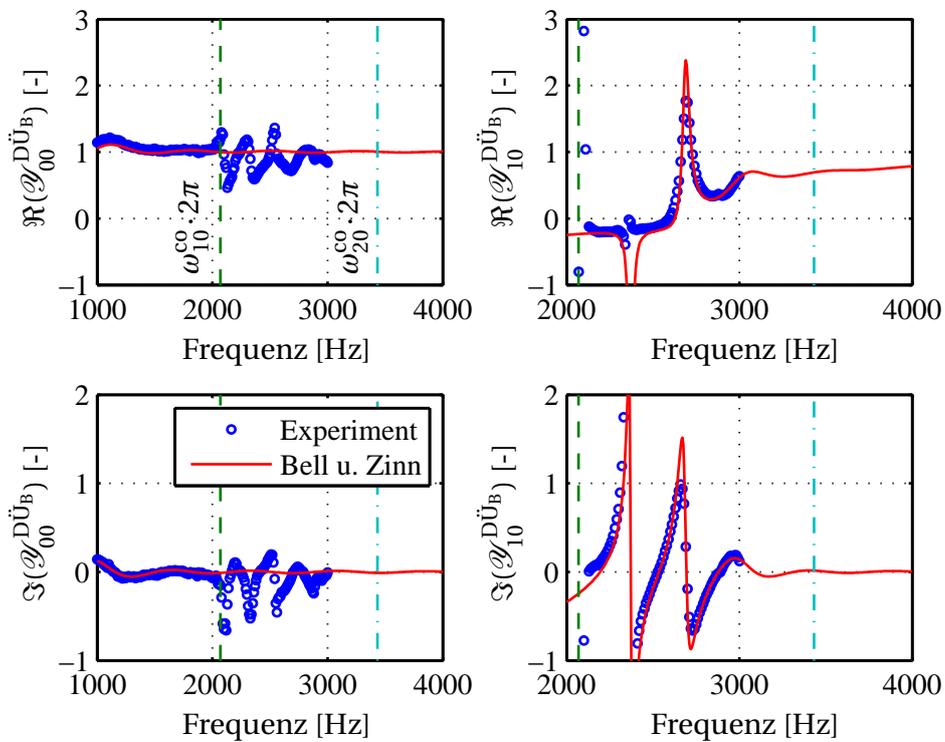


Abbildung 5.4.: Düsenadmittanzen Düse B

Gut zu sehen ist, dass die beschriebenen Streuungen genau dann auftreten, wenn eine Modenklasse dominiert und die Druckamplituden der darunterliegenden klein sind ($\hat{p}_{20} \gg \hat{p}_{10} \gg \hat{p}_{00}$). So kann es vorkommen, dass das Lösungsverfahren bei der kleineren Druckamplitude zu nicht exakten Ergebnissen führt, was in weiterer Folge Einfluss auf die Admittanz hat. Da bei ihr der Druck im Nenner steht, zeigen bereits kleine Abweichungen im ohnehin kleinen Zahlenwert große Wirkung und das Ergebnis kann massiv schwanken. Mit abnehmendem Verhältnis der Druckamplituden ($\hat{p}_{20} : \hat{p}_{10} : \hat{p}_{00}$) nehmen die Streuungen ab und die Übereinstimmung mit der numerischen Lösung ist wieder gegeben. Somit kann davon ausgegangen werden, dass die Streuungen weniger physikalischer Natur sind, als vielmehr eine Folge des verwendeten Lösungsverfahrens und somit mathematischen Ursprungs sind. Zudem nimmt die Admittanz bei höher werdenden Frequenzen keine tragende Rolle mehr ein, da die Druckamplituden der korrespondierenden Eigemoden bereits sehr stark gedämpft sind. Dies zeigt sich vor allem daran, dass die Admittanzen zu $\mathcal{Y}_{mn}^{D\ddot{U}} = 1 + 0i$ konvergieren, was nach Tabelle 2.1 einer laufenden Welle ohne Reflektion entspricht (für $\omega \rightarrow \infty$ werden $\kappa_{mn}^+ = 1$ und $R_{mn}^d = 0$). Die Düsenadmittanzen überführt in einen Reflektionsfaktor, wie in Abschnitt 2.5 beschrieben, sind sie im Anhang D.3 angegeben.

Tabelle 5.1.: Vergleich der Düsenadmittanz bei ca. 2080 Hz von $m = 1 / n = 0$, Düse A

	$\Re\left(\mathcal{Y}_{10}^{D\ddot{U}_A}\right)$	$\Im\left(\mathcal{Y}_{10}^{D\ddot{U}_A}\right)$
Experiment	-0.190	-0.060
Pieringer $r = R_{BK}$	-0.200	-0.103
Pieringer $r = 0.5 \cdot R_{BK}$	-0.190	-0.110
Bell und Zinn	-0.220	-0.130

Anhand dieser Form der Darstellung zeigt sich, dass die Reflektion von reinen Längsmoden mit zunehmender Frequenz sehr stark abnimmt. Bereits bei 3000 Hz ist sie $< 10\%$. Ein Ähnliches Verhalten ist bei Modenklasse 10 erkennbar. Es zeigt sich allerdings im Unterschied zu Modenklasse 00, dass die Reflektion zwischen 3000 und 4000 Hz nahezu konstant bei ca. 30% ist. Mit zunehmender Frequenz ist jedoch damit zu rechnen, dass sie gegen null konvergiert, da die Admittanz wie bereits beschrieben und anhand von Düse B gezeigt (siehe Abbildung 5.4) sich analog einer Randbedingung für eine laufende Welle verhält.

Anhand der experimentellen Daten kann somit die gute Qualität der beiden vorgestellten numerischen Verfahren bestätigt werden. Vor allem das numerische Tool von Bell und Zinn ist eine leistungsfähige und schnelle Methode für die Berechnung von Düsenadmittanzen. Die in den folgenden Kapiteln verwendeten Düsenadmittanzen von Düse A sind ausschließlich mit dem Verfahren von Bell und Zinn berechnet.

5.2.3. Einfluss der Düsengeometrie auf den akustischen Fluss

In der Literatur wird oft der Hinweis gegeben [67], dass Düsen bei transversalen Moden einen destabilisierenden Einfluss auf das Dämpfungsverhalten von Raketenbrennkammern haben. Dabei würde die Düse anregend wirken, was einem Eintrag an akustischer Energie in die Brennkammer gleich kommt. Diese Aussage kann bei genauerer Betrachtung entkräftet werden, berücksichtigt man konvektive Effekte in der Düse.

Unter Verwendung des in Abschnitt 2.6.1 vorgestellten Zusammenhanges zwischen Admittanz und akustischem Fluss, kann gezeigt werden, dass die mittlere Strömung stets zu einem Transport von akustischer Energie aus der Brennkammer hinaus führt, was einen dämpfenden und dadurch stabilisierenden Einfluss auf die Brennkammer hat.

Mit Hilfe des in Abschnitt 5.2.2 validierten numerischen Tools von Bell und Zinn sind Admittanzen für verschiedene Düsen berechnet, anhand derer der stetige Abtransport von akustischer Energie aus der Brennkammer gezeigt werden kann. Die dabei verwendeten Geometriegrößen sind in Tabelle 5.2 angegeben. Die gewählten Düsengeometrien ähneln jenen, die üblicherweise in der Realität verwendet werden. Setzt man die berechneten Düsenadmittanzen in (*) von Gleichung (2.78) ein, lässt sich dadurch die Auswirkung auf den akustischen Fluss durch die Düsen bestimmen. In Relation gebracht zu Abschnitt 2.6.1, können die Ergebnisse grafisch in Form von Trajektorien in Abbildung 2.10 eingezeichnet werden. Befindet sich ein Punkt einer solchen Trajektorie innerhalb des Bereiches $((*) < 0)$ der zugehörigen Machzahl in der Brennkammer, so bedeutet dies, dass der akustische Fluss bei dieser Frequenz negativ ist, somit akustische Energie in die Brennkammer gelangt und die Düse dadurch destabilisierenden Einfluss hat. Außerhalb dieses Bereichs ist der akustische Fluss positiv und die Düse wirkt stabilisierend. Liegt ein Punkt der Trajektorie auf der Grenzlinie, so ist der akustische Fluss null $((*) = 0)$.

Tabelle 5.2.: Variation von Geometriegrößen von Düse A zur Bestimmung ihres Einflusses auf den akustischen Fluss

Parameter	Symbol	Größe	Einheit	Anmerkung	Abbildung
Halsdurchmesser	D_H	50	mm		5.5
		55	mm		
		60	mm	Düse A	
Eingangsradius	R_{ein}	80	mm		D.1
		100	mm		
		119	mm	Düse A	
Ausgangsradius	R_{aus}	40	mm		D.2
		50	mm		
		53	mm	Düse A	
Kegelwinkel konvergent	α_{konv}	15	°		D.3
		20	°		
		25	°	Düse A	

In Abbildung 5.5 sind die Ergebnisse für verschiedene Düsenhalsdurchmesser für die Modenklassen 10, 20 und 30 gezeigt. Die Kurven mit den verschiedenen Machzahlen in den Bildern ergeben sich daraus, dass durch die Änderung des Querschnittsverhältnisses A_{BK}/A_H die Geschwindigkeit in der Brennkammer geändert wird. Anhand des Verlaufs der Trajektorien zeigt sich, dass für alle dargestellten Fälle der akustische Fluss stets positiv ($(*) > 0$), und damit aus der Brennkammer hinaus ist. Unterhalb der cut-on Frequenzen bewegen sich die Trajektorien von $m = 1$ und $m = 2$ auf den Grenzlinien der zugehörigen Machzahl, wodurch der akustische Fluss zu null wird. Oberhalb der cut-on Frequenzen beginnen sich die Trajektorien schneckenförmig von der Grenzlinie zu entfernen und konvergieren zu $\mathcal{Y} = 1 + 0i$. Die Düse wirkt somit für alle Frequenzen stabilisierend. Kritisch können Frequenzen knapp oberhalb der cut-on Frequenzen sein, da gerade hier sehr hohe Drücke auftreten (siehe Abbildung 5.2). Zwar geht der Druck mit dem Quadrat in die Gleichung für den akustischen Fluss (2.78) ein, jedoch ist $(*)$ nahe an null (erkennbar am geringen Abstand zur Grenzlinie in Abbildung 5.5), wodurch der akustische Fluss trotzdem sehr klein werden kann.

Die Variation der Radien und Winkel führt zu ähnlichen Ergebnissen (siehe

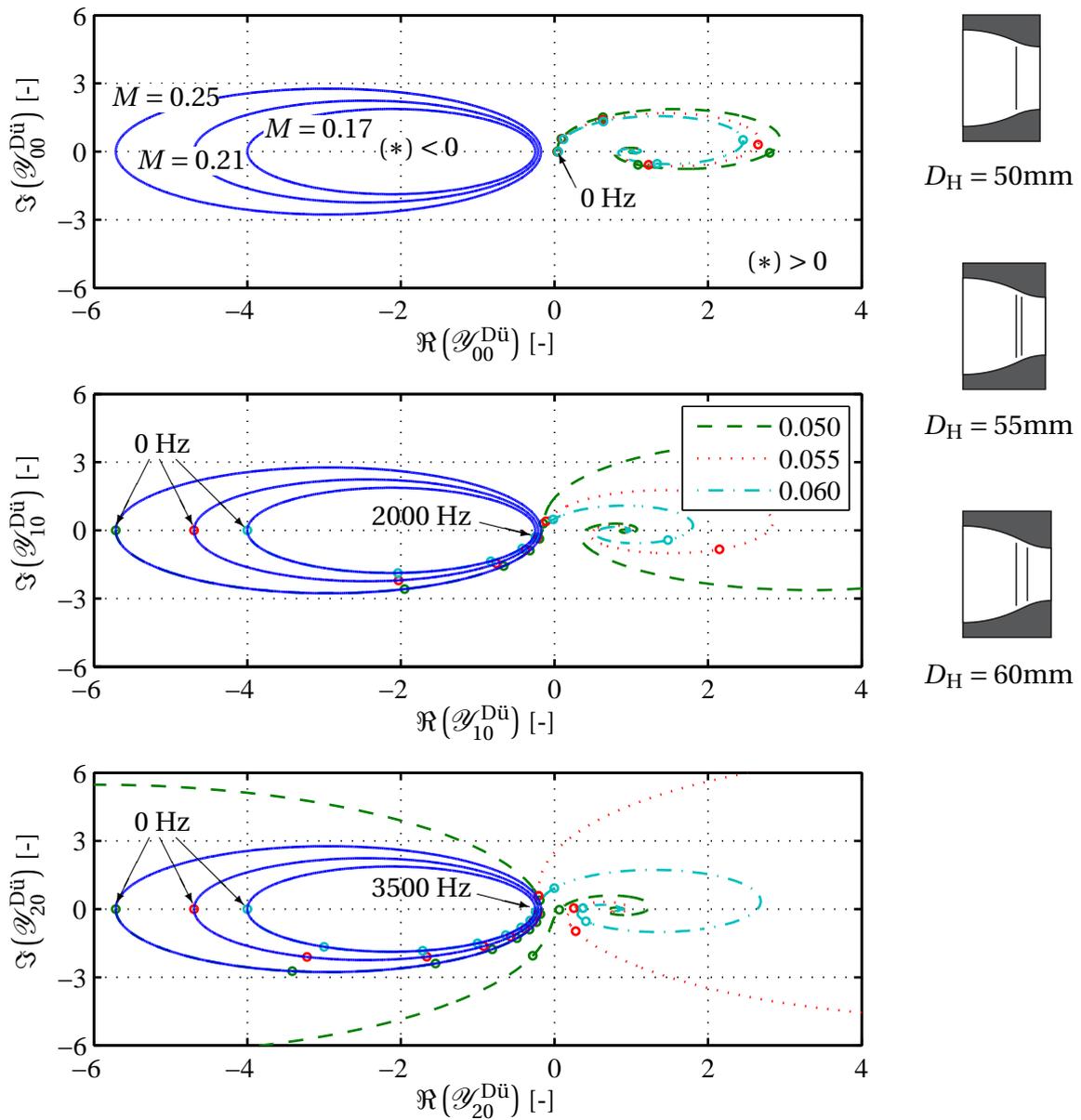


Abbildung 5.5.: Trajektorien der Düsenadmittanz von Düse A für unterschiedliche Düsenhalsdurchmesser D_H , Indikatoren alle 500 Hz. Die Größen für D_{BK} , R_{ein} , R_{aus} und α_{konv} können Tabelle 4.3 entnommen werden

Anhang D.1). Auch hier wird der akustische Fluss niemals negativ.

Aus diesen gemachten Beobachtungen lässt sich ein Designkriterium für die Wahl der Düsengeometrie ableiten. Je flacher die Steigung der Trajektorie an der cut-on Frequenz ist und je schneller sie sich von der Grenzlinie ($(*) = 0$) entfernt und zu $\mathcal{Y} = 1 + 0i$ konvergiert, desto stabilisierender wirkt die Düse.

Beispielsweise hätte eine Änderung des Düsenhalsdurchmessers wie in Abbildung 5.5 dargestellt bei reinen longitudinalen Moden ($m = 0 / n = 0$) so gut wie keine Auswirkungen auf (*). Eine Aufweitung beeinflusst (*) erst bei höheren Modenklassen mit $m > 0 / n = 0$ positiv. Eine Änderung des Kegelwinkels (siehe Anhang D.3) von Düse A von 15° auf 25° bei Modenklasse 20 würde ebenfalls zu günstigeren Werten von(*) führen. Demgegenüber hat eine Änderung des Ausgangsradius nur geringen Einfluss.

5.3. Absorberring

Basierend auf den Ausführungen in Abschnitt 3.5 werden hier die experimentell bestimmten Transfermatrizen für verschiedene Absorberlängen mit 0 mm sowie 25 mm bis 45 mm in Schrittweiten von 5 mm vorgestellt. Zur Validierung der Methode dient die reibungsfreie Rohrlösung mit Konvektion, die mit den Ergebnissen der 0 mm Konfiguration verglichen wird. Die für die Experimente verwendeten Aufbauten wurden bereits in Abschnitt 4.2.3 im Detail beschrieben. Aufbauend auf den Transfermatrizen erfolgt anschließend die Bilanzierung der akustischen Energie in den Absorberringen. Da der Fokus dieser Arbeit auf Modenklasse 10 liegt, werden im Folgenden ausschließlich die dafür relevanten Ergebnisse präsentiert.

5.3.1. Absorbertransfermatrizen

Der Einfachheit und der besseren Vergleichbarkeit halber wurden die Referenzebenen stromauf- und stromabseitig zusammengelegt (vgl. Abbildung 3.14 mit $x_{d,Ref} - x_{u,Ref} = 0$). Das hat den Vorteil, dass in den Transfermatrizelementen der Einfluss der Absorber direkt erkennbar ist, da keine Phasendrehung aufgrund der verschwindenden Wegstrecke erfolgt. Die Lösung entspricht dabei einem Rohrstück (vgl. Gleichung (2.32)) ohne Ausdehnung in Längsrichtung, was zu $e^{-ikx^\pm(x_{d,Ref} - x_{u,Ref})} = 1$ führt. Für alle Modenklassen und Frequenzen lautet die Transfermatrix für ein solches Rohr:

$$\begin{bmatrix} TM11 & TM12 \\ TM21 & TM22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

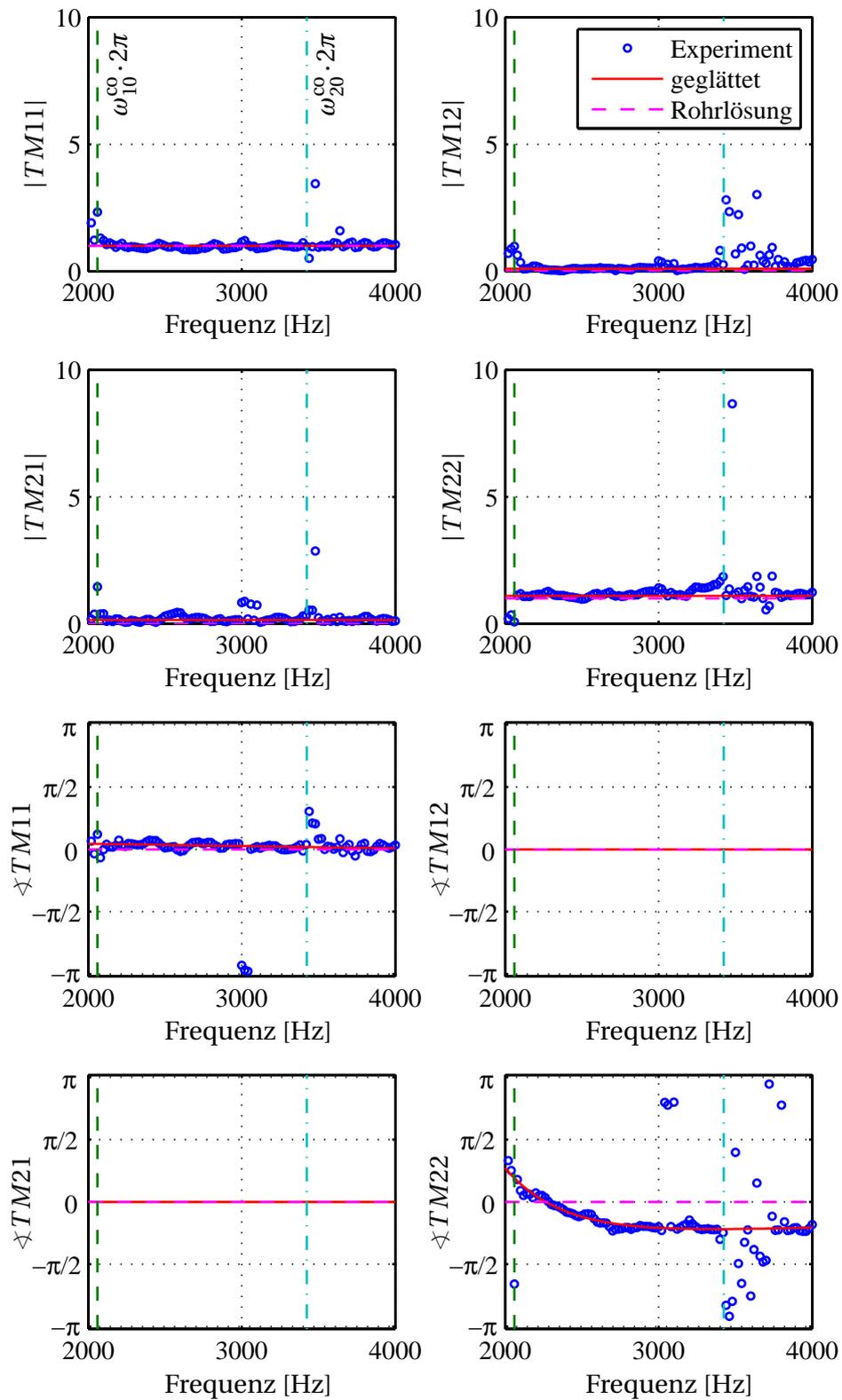
Im Folgenden werden exemplarisch die Validierungslösung sowie die Auswertung für eine Absorberstellung von 30 mm präsentiert. Ergebnisse zu weiteren

Absorberlängen sind im Anhang D.5 aufgeführt.

In Abbildung 5.6 ist die spezielle Form der Rohrlösung (5.1) zusammen mit der Absorberstellung 0 mm dargestellt. Es zeigt sich in allen vier Elementen in der Amplitude eine sehr gute Übereinstimmung bis zum Erreichen der cut-on Frequenz von Modenklasse 2 ($m = 2 / n = 0$). Speziell in TM12 und TM22 sind bei Frequenzen knapp darüber deutliche Abweichungen zu erkennen. Ein ähnliches Verhalten konnte bereits in Abschnitt 5.2.2 bei der Auswertung der Düsenadmittanzen identifiziert werden. Da das dort verwendete Verfahren der modalen Zerlegung und Feldrekonstruktion identisch zum hier verwendeten ist, liegt die selbe Ursache für die Streuung der Ergebnisse in diesem Bereich vor (siehe dazu Abschnitt 5.2.2). Zur besseren Verwendung für die folgenden Abschnitte, speziell für die Netzwerkmethod, sind die Verläufe von Amplitude und Phase geglättet (Details siehe D.5).

Der Phasenverlauf von TM11 deckt sich sehr gut mit der Rohrlösung. Die Phasen von TM12 und TM21 besitzen keine Aussagekraft, da die dazugehörigen Amplituden null sind. Auffällig ist die Phase von TM22, in deren Verlauf eine deutliche Abweichung von der Rohrlösung erkennbar ist. Er ist stetig und konvergiert für hohe Frequenzen zu $-\pi/5$. Die Ursache dafür könnte an einer nicht perfekt glatten Rohrwand im Bereich der Absorberöffnungen liegen, deren fertigungsbedingte Abphasungen zu Ablösungen der Strömung führen und damit in Zusammenhang mit dem dargestellten Phasenverlauf stehen.

Für die Absorberlänge von 30 mm sind die Verläufe in Abbildung 5.7 gezeigt. Als Bezugsgrößen sind in den Diagrammen die $\lambda/4$ -Frequenz (2792 Hz) der Absorber sowie die Rohrlösung eingezeichnet. In den Amplituden aller vier Matrixelemente ist dabei ein deutlicher Ausschlag unterhalb dieser $\lambda/4$ -Frequenz zu erkennen, was den Einfluss der Absorber auf die Transfermatrix zeigt. Für höhere Frequenzen konvergieren die experimentellen Daten zur Rohrlösung und zeigen damit, dass in diesem Bereich keine Absorberwirksamkeit besteht. Dieses Verhalten ist bei allen anderen untersuchten Absorberlängen ebenfalls zu erkennen (siehe Anhang D.5). Auffällig ist auch hier, dass die Phase der Elemente TM22 für hohe Frequenzen ebenfalls zu $-\pi/5$ konvergiert.

Abbildung 5.6.: $m = 1 / n = 0$, Absorberlänge 0 mm mit Durchströmung

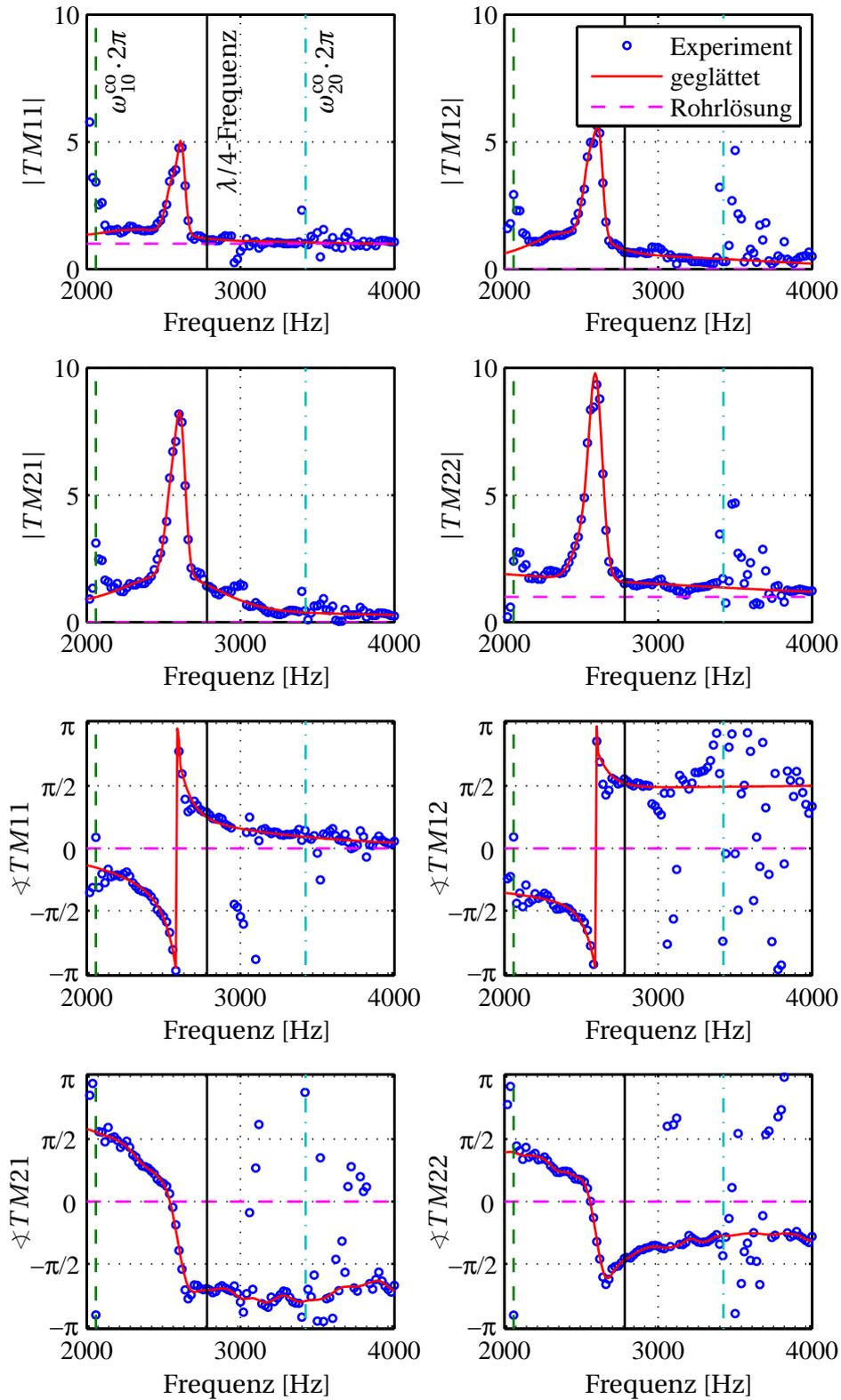


Abbildung 5.7.: $m = 1 / n = 0$, Absorberlänge 30 mm mit Durchströmung

5.3.2. Energiebilanz von Absorberringen

Das Verfahren für die energetische Bilanzierung in einem Absorberring basiert auf der Betrachtung der zu- und abgeführten akustischen Energie in Form der akustischen Flüsse. Zur Verwendung kommen dabei die Streumatrizen, die, wie in Abschnitt 3.5 erläutert, aus den experimentell bestimmten Transfermatrizen berechnet werden können. Das zur Anwendung kommende Verfahren wurde bereits in Abschnitt 3.6 vorgestellt. In Abbildung 5.8 ist der Verlauf der Dissipation in einem Absorberring mit Absorberringern der Länge 30 mm dargestellt. Weiter Verläufe sind in Anhang D.6 aufgeführt. Alle untersuchten Absorberringlängen zeigen unterhalb der $\lambda/4$ -Frequenz ein Maximum an Ausfluss von akustischer Energie, und damit eine klare Abhängigkeit von der Absorberringlänge. Bereits in den Absorberringtransfermatrizen, wie zum Beispiel in Abbildung 5.7 dargestellt, konnte an der selben Stelle eine eindeutige Reaktion auf das Vorhandensein von Absorberringern und deren $\lambda/4$ -Frequenz festgestellt werden.

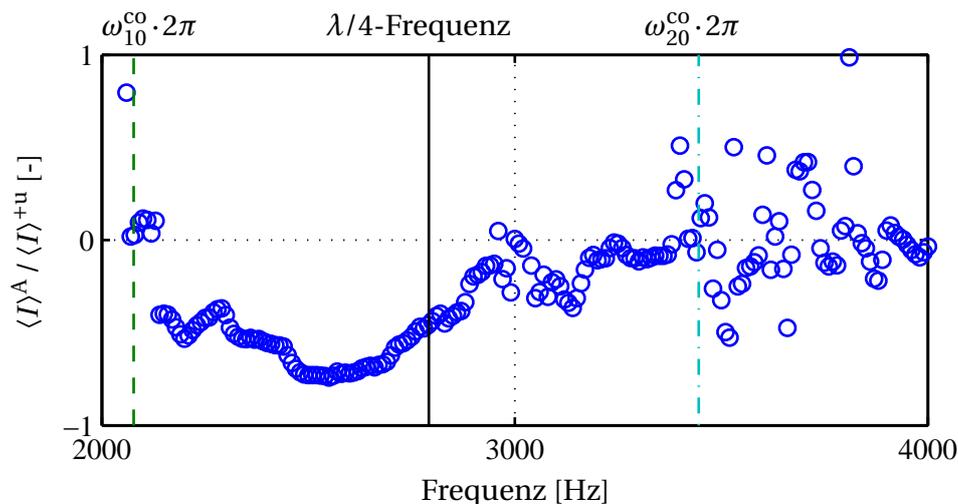


Abbildung 5.8.: Verlauf der Dissipation (negative Werte bedeuten Abfluss an akustischer Energie), 30 mm Absorberelement, $m = 1 / n = 0$

5.4. Faceplate

Die experimentell bestimmten Faceplateadmittanzen sind in Abbildung 5.9 für die Modenklassen 00 und 10 dargestellt. Bei beiden zeigt sich nur ein geringe Abhängigkeiten von der Frequenz. Wie schon zuvor bei den Düsenadmittanzen (Abschnitt 5.2.2) und den Transfermatrizen (Abschnitt 5.3.1) zeigen sich auch hier sowohl im Real- als auch Imaginärteil ab den nächsthöheren cut-on

Frequenzen starke Streuungen, die jedoch, wie bereits ausgeführt wurde, für diese Arbeit unerheblich sind.

Die Admittanzen beider Modenklassen sind näherungsweise konstant und entsprechen einer teilreflektierenden Randbedingung. Die Reflektionsfaktoren, dargestellt in Anhang D.3, sind sehr ähnlich zueinander. Sie zeigen einen konstanten Verlauf mit einem geringen Reflektionsfaktor von ca. 25%. Der große Teil der auftreffenden Welle wird demnach entweder durch die Jets der in die Brennkammer einströmenden Luft dissipiert, oder durch die Löcher in der Facplate in den dahinterliegenden Raum transmittiert. Dort erfolgt die weitere Dissipation durch die radiale Einströmung der Druckluft durch den Ringspalt (siehe Abbildung 4.4).

Die Admittanzen werden zur leichteren Weiterverwendung mit Polynomen³ genähert. Die einzelnen Parameter des Polynoms sind in Anhang D.2 angegeben.

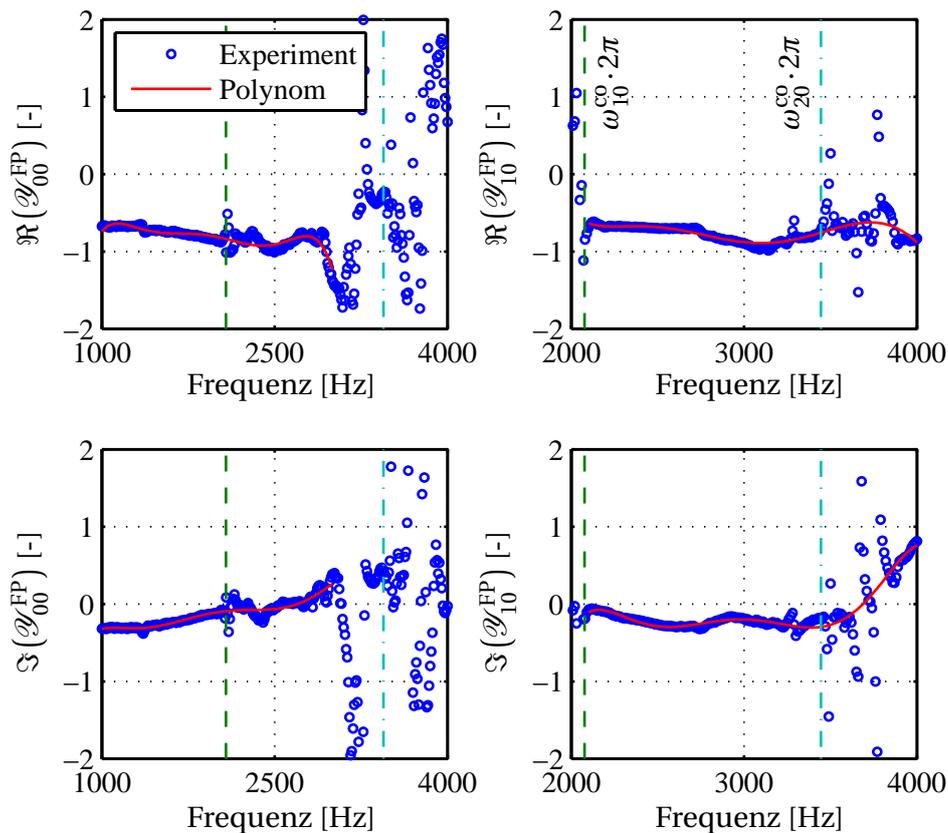


Abbildung 5.9.: Faceplateadmittanzen

³ $\Re/\Im(\mathcal{Y}_{00,10}^{\text{FP}}) = a_1 f^6 + a_2 f^5 + a_3 f^4 + a_4 f^3 + a_5 f^2 + a_6 f^1 + a_7$

6 Integraler Energiehaushalt

Für die integrale Betrachtung der Raketenbrennkammer wird die in Abbildung 4.14 dargestellte Konfiguration verwendet. Sie besteht im Wesentlichen aus Düse A, der Faceplate, einem Zylinder und dem Absorberring. Das sich daraus ergebende Verhältnis von Brennkammerlänge zu Brennkammerdurchmesser von $L/D_{BK} = 1.16$ ist vergleichbar mit realen Triebwerksabmessungen und ist deshalb gut geeignet, Überleitungen auf industrielle Anwendungen zu schaffen. Die Details zu der Sensoranzahl und den -positionen sowie zu den Betriebsparametern während den Versuchsdurchführungen sind in Anhang C.4 angegeben.

Im ersten Abschnitt werden experimentelle Daten ausgewertet. Es ist der Einfluss der Absorber dargestellt und wird mit vorhandenen Daten aus der Literatur verglichen. Dabei werden jene Methoden angewandt, die einen geringen Abstraktionsgrad aufweisen und sich durch ein geringes Maß an Postprocessingaufwand auszeichnen.

Im zweiten Abschnitt wird mit der vorgestellten Netzwerkmethode ein numerisches Verfahren verwendet, das sehr stark an die Grundlagen von Kapitel 2 anknüpft und einen hohen Grad an Abstraktion beinhaltet. Als Eingangsgrößen werden die experimentell ermittelten Absorbertransfermatrizen und als Randbedingungen die Daten von Faceplate und Düse A verwendet. Die Netzwerkmethode erlaubt es, Eigenfrequenzen und Dämpfung für jede Modenklasse gesondert anzugeben.

Die Ergebnisse für Modenklasse 10 sind im letzten Abschnitt in Form einer Tabelle zusammengefasst dargestellt. Sie erlaubt einen direkten Vergleich der Resultate aus den verschiedenen experimentellen und numerischen Verfahren und zeigt die Abhängigkeit von Eigenfrequenzen und Dämpfungswerten gegenüber Absorbern.

6.1. Experimentelle Ergebnisse

Im Folgenden werden experimentell ermittelte Ergebnisse in Form von Spektren und Zeitreihen präsentiert. Die Anregung erfolgte dabei in einen Fall durch breitbandiges Strömungsrauschen und im anderen Fall durch die Sirene. Darauf aufbauend folgt die Darstellung der akustischen Energie und der Flüsse durch Faceplate und Düse.

6.1.1. Breitbandige Anregung

Eine einfache Abschätzung der Eigenfrequenzen und der Dämpfung kann durch die Analyse des Druckes bei breitbandiger Anregung der Brennkammer erfolgen, wie es in Abschnitt 3.7.2 beschrieben wurde. Statt einer externen Zwangsanregung wird dies durch das Strömungsrauschen realisiert. Dadurch werden alle Frequenzen gleichzeitig angeregt und die Eigenfrequenzen können anhand der Maxima im Druckspektrum identifiziert werden.

Abbildung 6.1 zeigt die Spektren mit den Eigenfrequenzen in Abhängigkeit der Absorberlänge. Sehr deutlich ist dabei der Einfluss der Absorber zu sehen, die in den Spektren zu zusätzlichen Peaks führen. Es sind die Eigenfrequenzen der ersten ausbreitungsfähigen Eigenmode der Modenklassen 10 und 20, bezeichnet mit T1 und T2, für den Fall ohne Absorber klar zu erkennen. Mit Zunahme der Absorberlänge gibt es weitere Eigenmoden, die zu drei zusätzlichen Peaks im Spektrum führen. Diese Beobachtung beruht auf einem bekannten Phänomen, welches bereits in zahlreichen Studien beschrieben wurde [8, 50]. Oschwald et al. [45] bezeichnen diese zusätzlichen Peaks als Sonderform von T1. Aufgrund der neuen Querschnittsform, bilden sich bei Verwendung eines einzigen Absorbers die Eigenmoden $T1\sigma^-$, $T1\pi$ und $T1\sigma^+$, deren Druckknotenlinien entweder kooaxial zum Absorber, oder rechtwinklig zur Absorberachse und zum Rand hin gekrümmt sind (siehe Abbildung 6.2). Die dargestellten Verläufe treten in ähnlicher Form auch bei der Verwendung von mehreren Absorbern auf [22], allerdings lässt sich dabei keine eindeutige Lage der Druckknotenlinien angeben. Die modifizierten T1-Formen reduzieren sich auf die Moden $T1^+$ und $T1^-$, wie sie in den Spektren zu sehen sind und gut mit den Ergebnissen von Pieringer [50] und Farago et al. [22] übereinstimmen. Der dritte Peak entspricht der $T1L2^+$ -Mode, die sehr breit und dadurch stark gedämpft ist, und ein ähnliches Verhalten gegenüber der Absorberlänge aufweist wie $T1^+$.

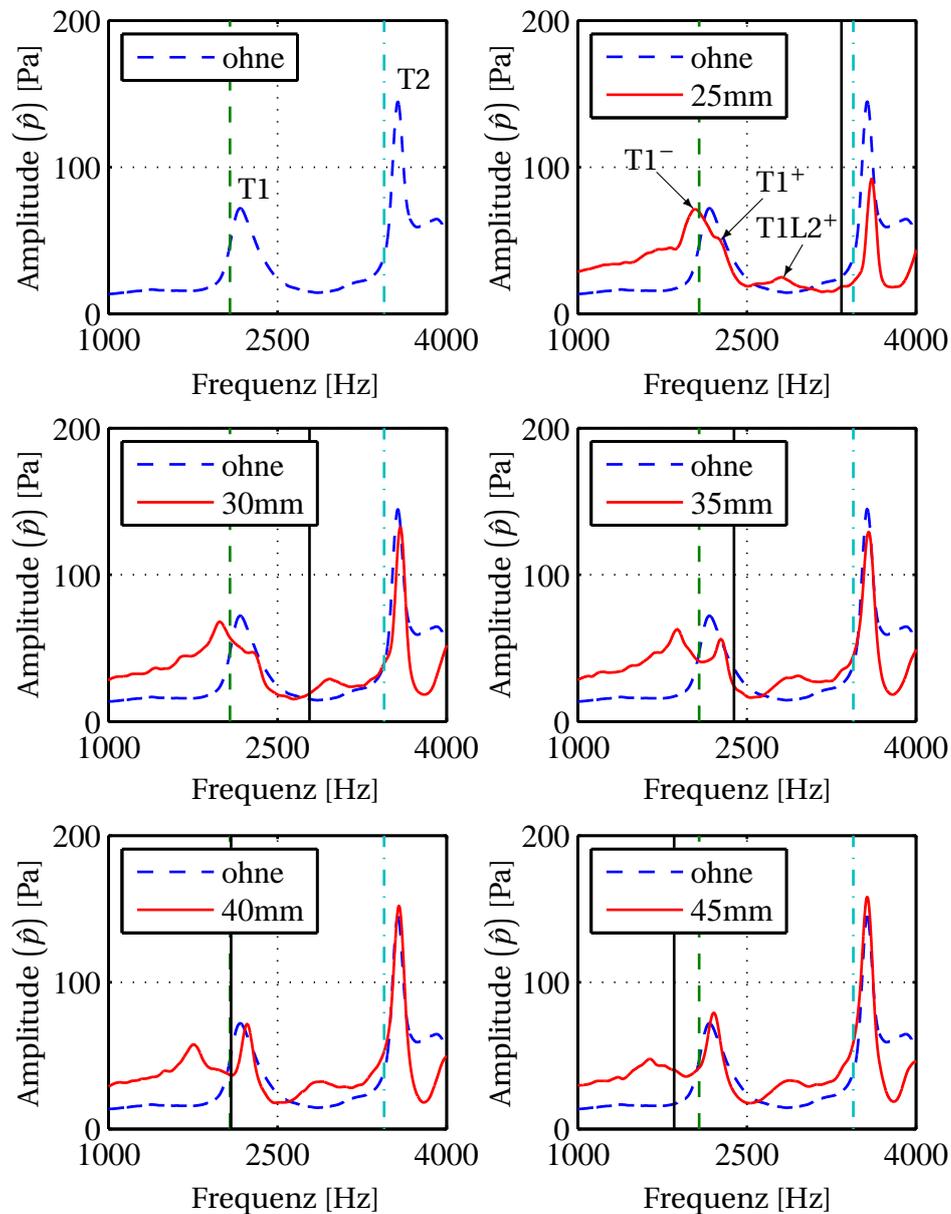


Abbildung 6.1.: Einfluss der Absorber auf die Eigenfrequenzen, vertikale durchgezogene Linie: $\lambda/4$ -Frequenz der Absorber, vertikale unterbrochene Linien: cut-on Frequenzen von Modenklasse 1 und 2

Die Ergebnisse von Pieringer für eine Brennkammer mit ähnlicher Geometrie bestätigen die Existenz der $T1L2^+$ -Mode und deren hohe Dämpfung.

Durch Näherung einer Lorenzkurve (Beschreibung siehe Anhang B.3) an die Amplitudenmaxima können die Eigenfrequenzen und die Dämpfung sehr genau bestimmt werden. In Abbildung 6.3 wird dies für zwei Absorberstellungen

exemplarisch gezeigt. Eingezeichnet sind die Halbwertsbreiten I und II, mit denen die Dämpfungswerte von T1 und T2 berechnet werden.

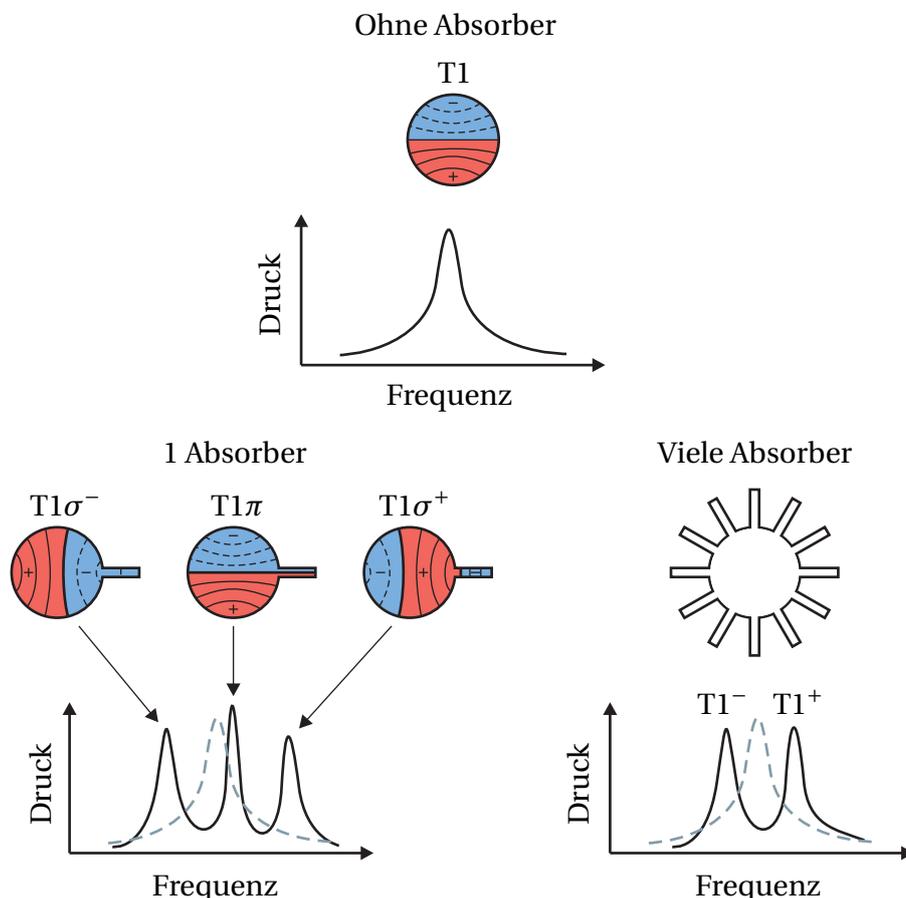


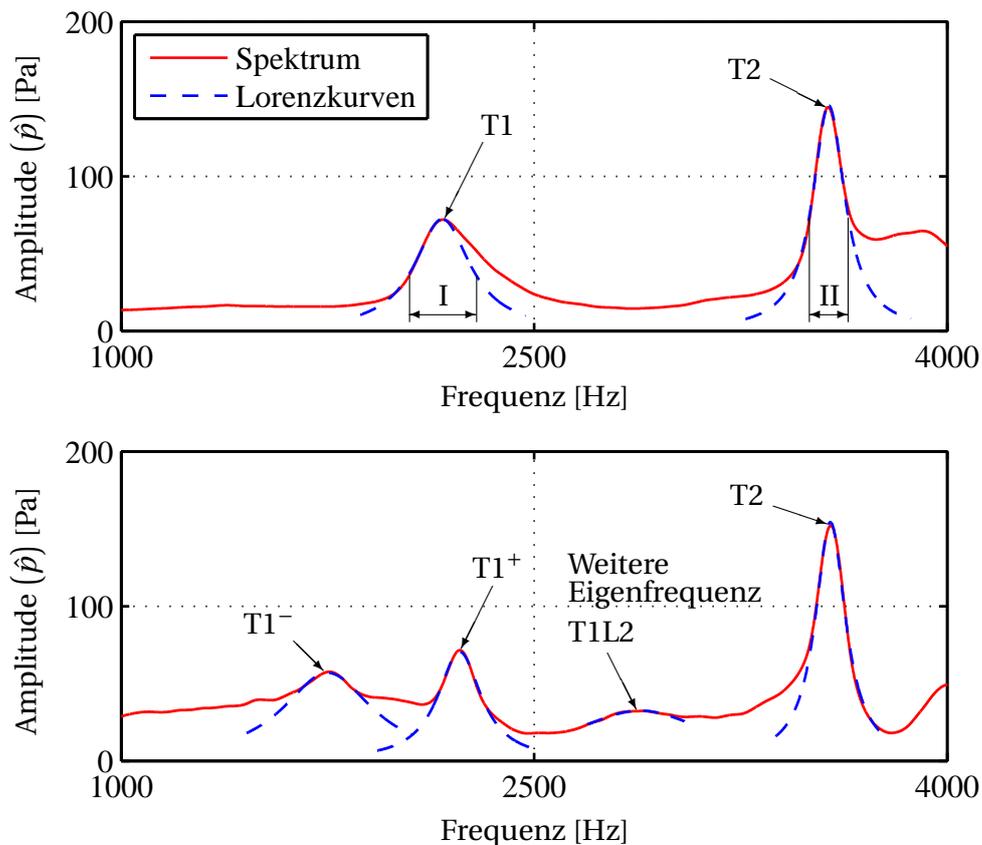
Abbildung 6.2.: Schematische Darstellung des Einflusses von einem Absorbern auf Modenklasse 10 nach Oschwald et al. [45]. Diese Verhalten gilt auch für T1L2, T1L3, usw.

Die Zahlenwerte der Eigenfrequenzen mit den Dämpfungswerten aller untersuchten Absorberpositionen sind in Tabelle 6.1 angegeben. Auffallend ist, dass mit größer werdender Absorberlänge die Eigenfrequenz der $T1^-$ -Mode stetig abnimmt, wohingegen $T1^+$ nur marginal beeinflusst wird. Sobald die $\lambda/4$ -Frequenz geringer als die $T1^+$ Frequenz ist, konvergiert $T1^+$ sie zur Eigenfrequenz der Brennkammer ohne Absorber. Selbiges gilt für die $T1L2^+$ -Mode. Die höchste Frequenzverschiebung von $T1^+$ tritt ein, wenn die $\lambda/4$ -Frequenz der Absorber sich an T1 annähert. Die maximale Verschiebung beträgt bei der T1-Mode ca. 80 Hz (35 mm Absorberlänge) und bei der $T1L2^+$ -Mode (30 mm Absorberlänge) ca. 140 Hz. Die Dämpfungswerte von beiden Eigenmoden werden durch die Absorber beeinflusst. Sind die Absorber auf die Frequenz

Tabelle 6.1.: Eigenfrequenzen von Modenklasse 10 bei Anregung mit Strömungsrauschen (oben) und Sirenenanregung (unten) für verschiedene Absorberlängen

Länge [mm]	Absorber $\lambda/4$ - Frequenz [Hz]	$T1^-$		T1		$T1^+$	
		Frequenz [Hz]	α [1/s]	Frequenz [Hz]	α [1/s]	Frequenz [Hz]	α [1/s]
0	-	-	-	2166	-758	-	-
25	3340	2044	-1259	-	-	2239	-912
30	2783	1988	-998	-	-	2284	-714
35	2386	1882	-906	-	-	2270	-554
40	2088	1756	-1096	-	-	2238	-551
45	1856	1638	-1143	-	-	2207	-643

von $T1^+$ bzw. $T1L2^+$ abgestimmt, so zeigt sich eine deutliche Reduktion der Dämpfung.

**Abbildung 6.3.:** Spektren ohne (oben) und mit 40 mm-Absorber (unten) mit angenäherten Lorenzkurven und den Amplitudenhalbbreiten I und II

6.1.2. Sirenenanregung

6.1.2.1. Analyse des Drucksignals

Die Eigenfrequenzen lassen sich wie in Abschnitt 3.7.1 beschrieben, mit Hilfe der Spektren des abklingenden Drucksignals bei gepulster Anregung bestimmen. Abbildung 6.4 zeigt dies für zwei verschiedene Absorberstellungen von 0 mm und 40 mm. Es ist das Maximum der Spektren in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz zusammen mit der Schwankungsbreite¹ gezeigt.

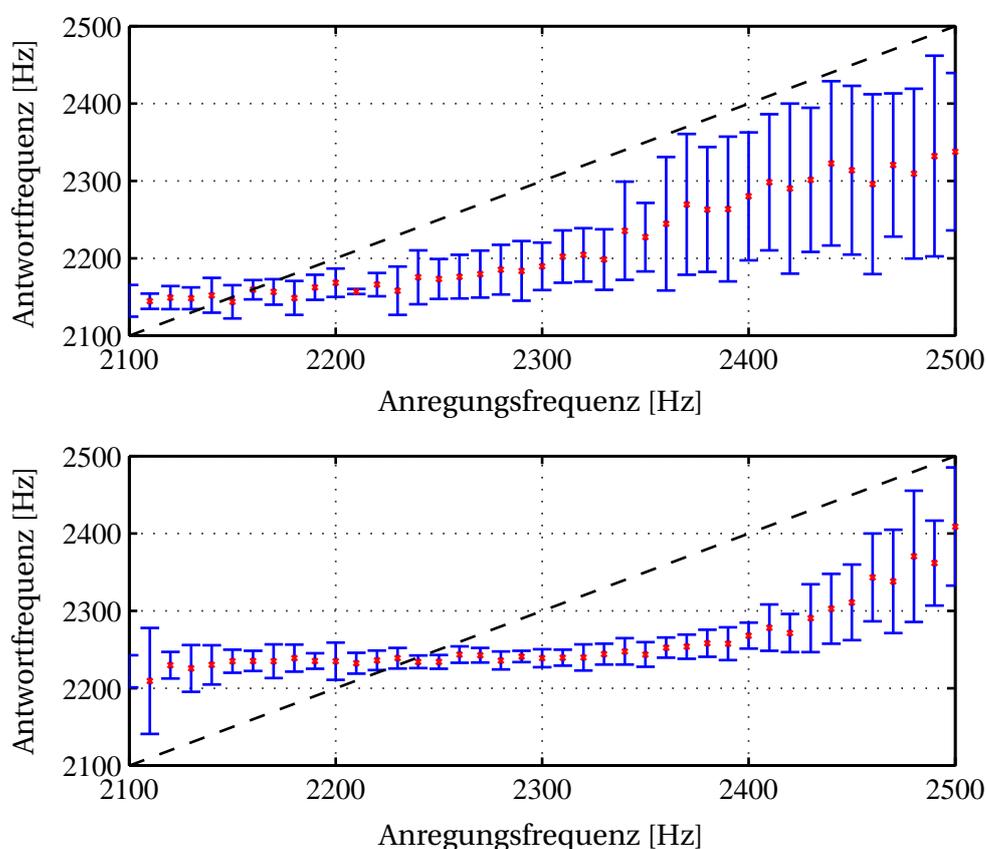


Abbildung 6.4.: Frequenz des abklingenden Drucksignals in Abhängigkeit der Anregungsfrequenz ohne (oben) und mit 40 mm-Absorber (unten), Mittelwert (Punkte) und Schwankungsbreite (Balken) der Ergebnisse

Gut zu erkennen ist, dass das abklingende Signal für den Fall ohne Absorber mit 2160 Hz schwingt, auch wenn mit tieferer oder höherer Frequenz angeregt wird. Noch deutlicher ist dies mit Absorbern zu erkennen. Die Abklingfrequenz

¹ Die Fehlerbalken stellen den Schwankungsbereich der Messungen, gebildet über 10 Drucksensoren, dar. Die zugehörigen Zeitreihen sind im Anhang D.4 dargestellt.

verschiebt sich dabei auf 2230 Hz, was der $T1^+$ -Eigenmode entspricht. Der Vergleich mit den Ergebnisse aus dem vorherigen Abschnitt 6.1.1 zeigt eine gute Übereinstimmung dieser Frequenzen.

Die Dämpfung kann wie in Abschnitt 3.7.1 beschrieben, durch eine Näherung einer Exponentialfunktion an die Einhüllende des abklingenden Drucksignals, oder mit Hilfe einer Lorentzkurve und des Frequenzspektrums, bestimmt werden. Abbildung 6.5 zeigt Signalverläufe für die beiden zuvor schon verwendeten Absorberkonfigurationen, angeregt an den bereits bekannten Eigenfrequenzen von 2160 Hz und 2230 Hz. Aus Gründen der besseren Vergleichbarkeit ist der Nullpunkt der Zeitachse auf den Zeitpunkt des maximalen Drucksignals gesetzt.

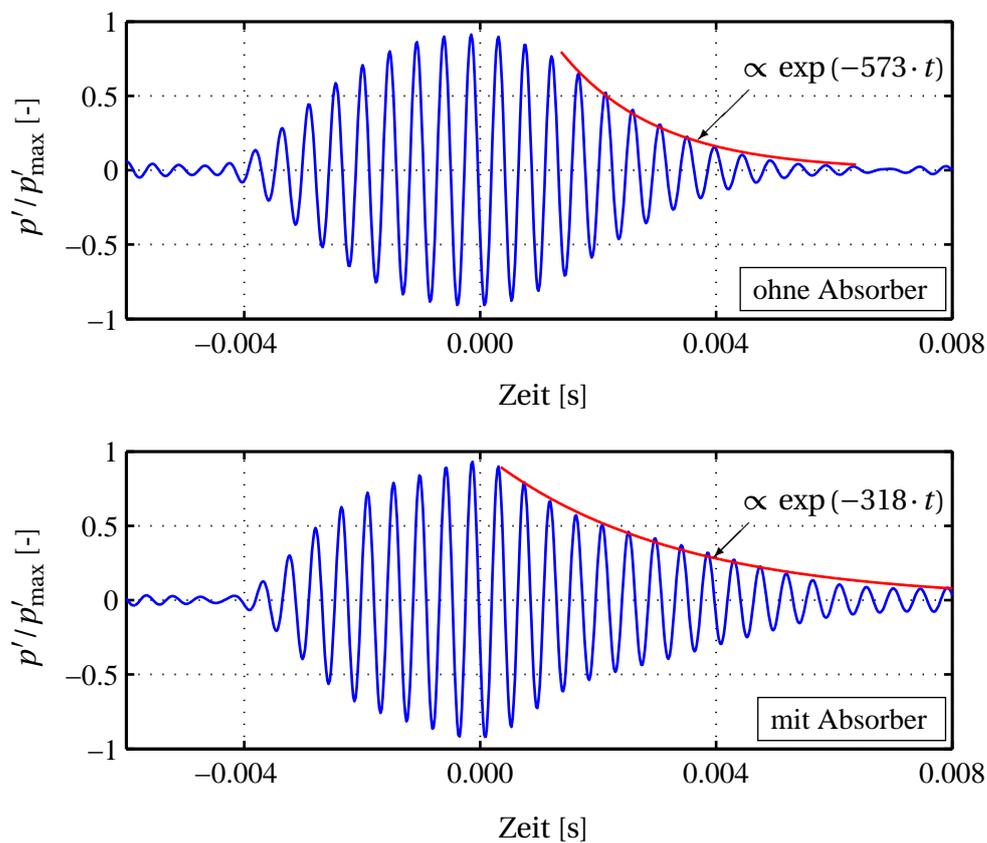


Abbildung 6.5.: Näherung einer Exponentialfunktion an das Drucksignal, ohne (oben) und mit 40 mm - Absorber (unten) bei einer Anregungsfrequenz von 2160 Hz und 2250 Hz (Sensoren 7)

Sehr deutlich sind die 9 Anregungspulse ($t = -0.004..0$ s) zu erkennen und der Übergang in einen nahezu gesättigten Zustand bei $t = 0$. Für den Fall ohne Absorber fällt auf, dass das Abklingen sehr exakt einer Exponentialfunktion

folgt und nahezu optimal gefittet werden kann (siehe dazu Abschnitt 3.7.1). Die so ermittelten Dämpfungswerte von -573 1/s (Einhüllende, siehe Abbildung 6.5) und $-495 \pm 167 \text{ 1/s}$ (Lorentzkurve) sind sehr ähnlich und können näherungsweise als gleich angenommen werden.

Die Verwendung von Absorbern führt zu einem deutlich schlechteren Abklingverhalten, was sich durch einen längeren Abklingzeitraum und periodische Nachschwinger in manchen Signalverläufen, dargestellt in Anhang D.4, äußert. Vor allem Letzteres führt zu Einschränkungen bei der Durchführung des Exponentialfittes. Für die Ermittlung der Dämpfung wurde deshalb ein Signalverlauf mit wenigen Nachschwingern ausgewählt. Sie beträgt für diesen Fall -318 1/s .

Die Ergebnisse sind in Tabelle 6.2 aufgeführt. Ein Vergleich mit jenen in Tabelle 6.1 zeigt vor allem bei den Eigenfrequenzen eine sehr gute Übereinstimmung. Es zeigt sich, dass sich Eigenfrequenzen und Dämpfung sowohl mit Hilfe von Strömungsrauschen als auch mit Zwangsanregung durch die Sirene gut bestimmen lassen.

Die präsentierten Eigenfrequenzen sind zusammen mit den Ergebnissen der noch folgenden Abschnitte in Form einer Frequenzkarte grafisch in Abbildung 6.10 dargestellt.

Tabelle 6.2.: Eigenfrequenzen von Modenklasse 10 bei Anregung mit Strömungsrauschen (oben) und Sirenenanregung (unten) für verschiedene Absorberlängen

Länge [mm]	Absorber		T1		T1 ⁺	
	$\lambda/4$ - Frequenz [Hz]	Frequenz [Hz]	α [1/s]	Frequenz [Hz]	α [1/s]	
0	3340	2160	-573^2	-	-	
40	2088	-	-	2230	-318	

6.1.2.2. Bilanzierung der akustischen Energie

Die Grundlagen für die Bilanzierung der akustischen Energie in einer zylinderförmigen Brennkammer bilden die in Abschnitt 2.6 hergeleiteten Beziehung und können sowohl bei kontinuierlicher, als auch bei gepulster Anregung verwendet werden. Vor allem letzteres erlaubt die Darstellung der zeitlichen

² Über Exponentialfit, $-495 \pm 167 \text{ 1/s}$ mit Lorentzkurve und Spektrum

Verläufe von akustischer Energie und Flüsse durch die Faceplate und die Düse während eines Abklingvorganges. Beide Methoden zeichnen sich dadurch aus, dass eine Zerlegung in unterschiedliche Modenklasse möglich ist, und deren Dämpfungswerte unabhängig voneinander angegeben werden können. Sie sind jedoch dadurch limitiert, dass sie nur auf einfache Geometrien anwendbar sind. Auf die Vorgehensweise bei kontinuierlicher Anregung wurde bereits in Abschnitt 3.7.3 näher eingegangen.

Das Schema für die gepulste Anregung ist in Abbildung 6.6 dargestellt. Dabei werden aus den abklingenden Drucksignalen mit Hilfe der Multimikrofonmethode (Abschnitt 3.2) die stromauf und stromab laufenden Wellen, \hat{f}_{mn} und \hat{g}_{mn} , für jede Modenklasse bestimmt. Darauf aufbauend lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (2.76) und (2.77) die zeitlichen Verläufe von Energie und Intensität (= Flüsse über die Flächen S_k) berechnen. Die Dämpfungswerte können entweder integral für das gesamte betrachtete System berechnet werden ($\alpha_{mn}(t)$), oder getrennt für jede Randbedingung (z. B.: $\alpha_{mn}(DÜ_A, t)$ oder $\alpha_{mn}(FP, t)$).

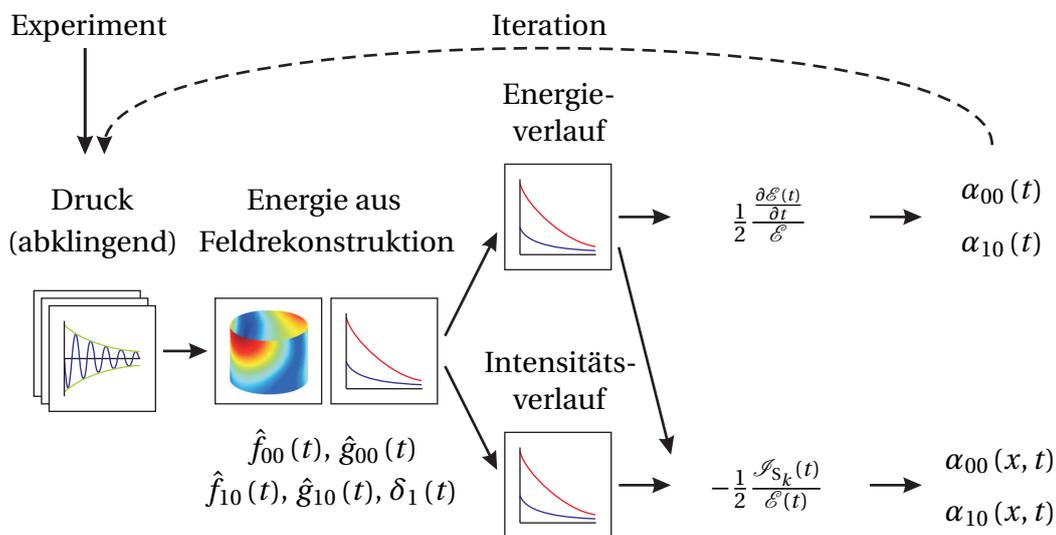


Abbildung 6.6.: Schema zur Bilanzierung der akustischen Energie im Zeitbereich für abklingende Signale

Die Verläufe der akustischen Energie von Modenklasse 00 und 10 sowie der Flüsse durch Faceplate und Düse sind in Abbildung 6.7 dargestellt.

Dabei ist zu erkennen, dass während der Dauer der Anregung ($t = -0.004..0$ s) ein Eintrag von akustischer Energie über die Faceplate in die Brennkammer

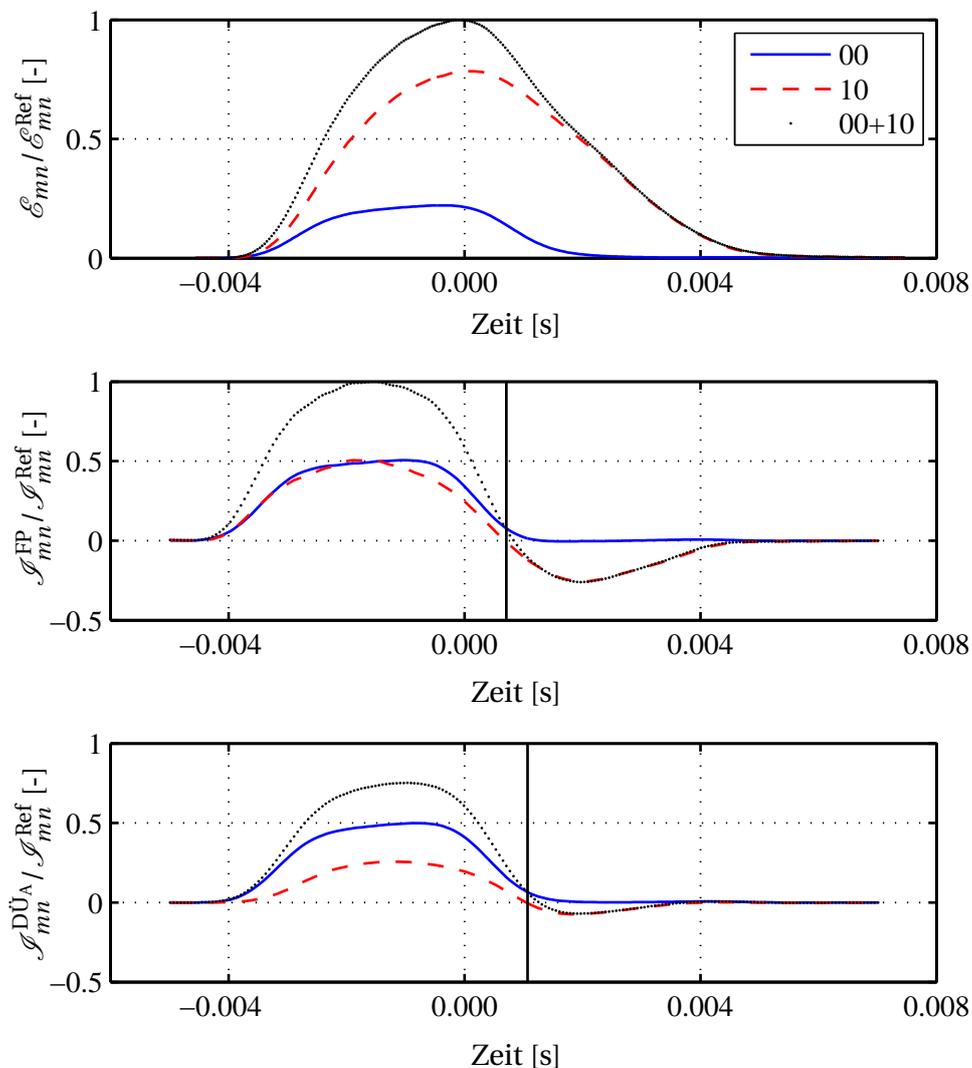


Abbildung 6.7.: Verlauf der Energien und der Intensitäten durch Faceplate und Düse

erfolgt. Zugleich verliert die Brennkammer akustische Energie durch die Düse. Für Modenklasse 00 sind Zu- und Abfuhr annähernd gleich groß, was sich in einer geringen Zunahme an akustischer Energie in der Brennkammer äußert. Der Eintrag an akustischer Energie bei Modenklasse 10 ist gleich groß wie von Modenklasse 00, jedoch ist der Ausfluss um ca. 50% geringer. Über den letzten Anregungspuls ($t > 0$) hinaus reduzieren sich die akustischen Flüsse

und es kommt zu einem Nulldurchgang bei Modenklasse 10 (vertikale Linie in Abbildung 6.7).

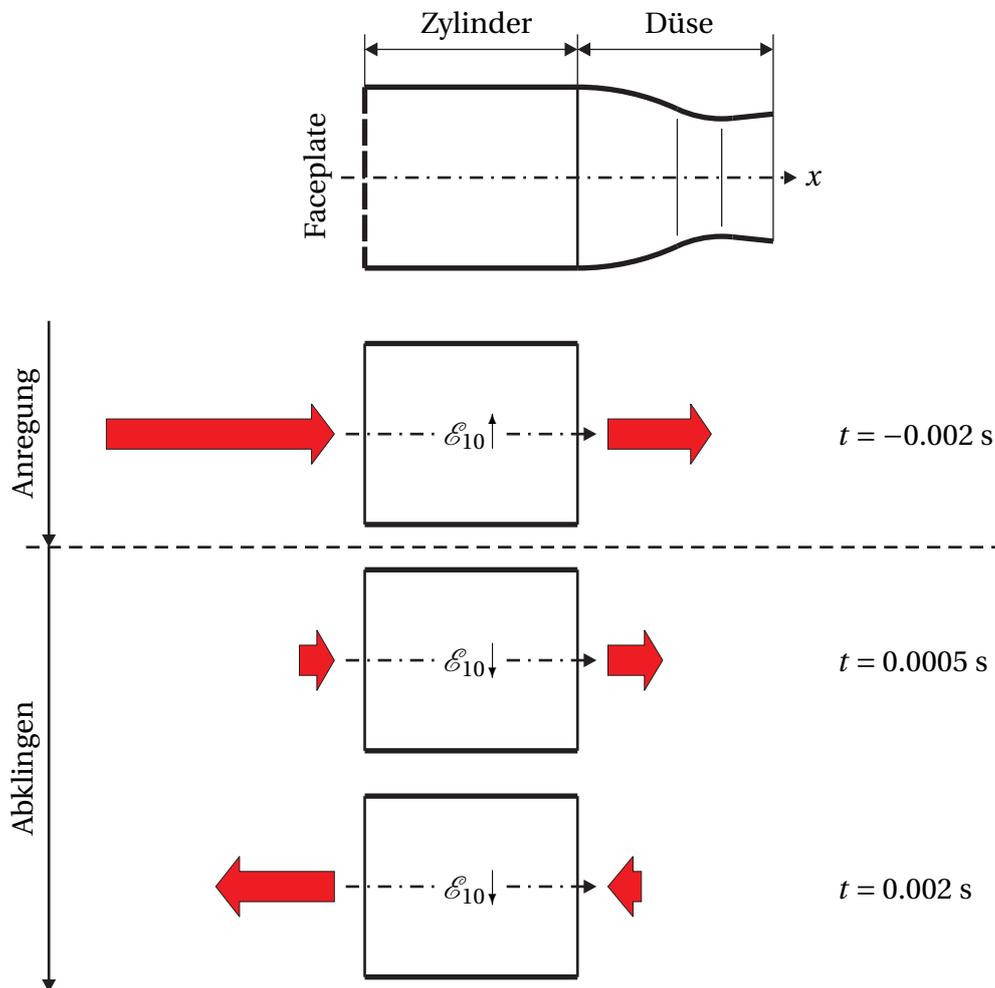


Abbildung 6.8.: Darstellung der Ausflüsse aus der Brennkammer zu bestimmten Zeitpunkten

Ab diesem Zeitpunkt erfolgt eine Umkehrung nach stromauf sowohl bei der Faceplate als auch bei der Düse. Bei der Faceplate bedeutet dies, dass akustische Energie aus der Brennkammer hinaus fließt, wohingegen bei der Düse die Energie der Brennkammer zugeführt wird. Dieses Verhalten ist in Abbildung 6.8 zur besseren Veranschaulichung für verschiedene Zeitpunkte schematisch dargestellt. Setzt man die Flüsse in Relation zur akustischen Energie (anhand der Gleichungen (2.83) und (2.84)), können für Düse und Faceplate getrennt voneinander Dämpfungswerte für die verschiedenen Modenklassen angegeben werden. Gemittelt über einen Zeitbereich von 3 – 4 ms betragen diese für Modenklasse 10, bei einer Gesamtdämpfung von -573 1/s , für die Faceplate -675 1/s und für die Düse $+102 \text{ 1/s}$.

Der Grund für die Umkehrung der Flussrichtung bei der Düse, die im Widerspruch zu Abschnitt 2.6.1 steht, liegt darin, dass sie kein kompaktes Element ist und ihr Volumen akustische Energie beinhaltet. Hinzu kommt, dass die Reflektion der Düse nahe an der cut-on Frequenz von Modenklasse 10 sehr hoch ist (Reflektionsfaktoren siehe Abschnitt D.3), was den akustischen Ausfluss stark hemmt. Demgegenüber ist die Reflektion der Faceplate gering, wodurch der Gesamtfluss aus der Brennkammer sehr stark von ihr dominiert wird. Es zeigt sich somit, dass die Düse nur einen sehr geringen Einfluss auf die Gesamtdämpfung von Modenklasse 10 nahe ihrer cut-on Frequenz hat. Modenklasse 00 klingt wesentlich schneller ab als 10 und es kommt zu keiner Umkehrung der Flüsse. Sie ist dadurch bei dieser Frequenz weitaus weniger relevant.

Aus dem Abklingen der akustischen Energie ergibt sich für Modenklasse 10 eine Dämpfung von -573 1/s .

6.2. Vergleich mit numerischen Ergebnissen

Im Folgenden werden die Ergebnisse aus dem vorherigen Abschnitt 6.1 mit jenen der Netzwerkmethodene aus 3.7.4 verglichen. Im ersten Teil erfolgt der Abgleich mit den Ergebnissen der Brennkammer ohne Absorber. Daran anschließend wird auf den Einfluss der Absorber eingegangen. Die Eigenfrequenzen sind in Abbildung 6.10 gesammelt dargestellt, die Dämpfungswerte sind in Tabelle 6.3 angegeben.

Zur Anwendung kommt ein Netzwerkmodell, das die Konfiguration C.4 abbildet. Der Aufbau ist in Abbildung 6.9 dargestellt, und besteht im Wesentlichen aus Zylinderelementen, den Randbedingungen Düse A und Faceplate und den Absorbern in Form eines Transfermatrizelements. Für die Brennkammer ohne Absorber wird das Modell (A) verwendet, mit Absorber das Modell (B) Die verwendeten Randbedingungen und Transfermatrizen sind in Anhang D.3 und D.5 angegeben.

6.2.1. Ohne Absorber

Mit Hilfe der Netzwerkmethodene (Modell (A), Abbildung 6.9) lassen sich für Modenklasse 10 zwei Eigenfrequenzen bei 2259 Hz und 2782 Hz finden. Die erste entspricht dabei der T1-Mode und liegt etwas oberhalb von den experimen-

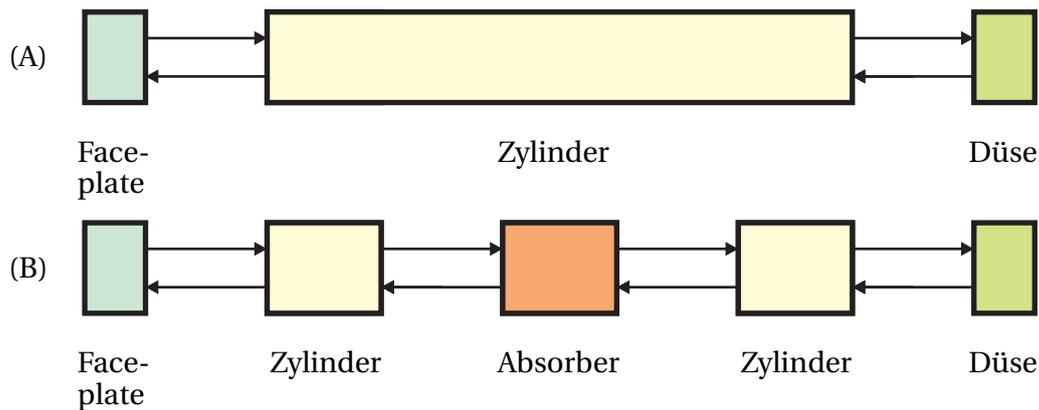


Abbildung 6.9.: Aufbau der Netzwerkmodelle, (A) ohne Absorber, (B) mit Absorber

tellen Werten. Die zweite Eigenfrequenz entspricht der T1L2, deren Existenz anhand des gezeigten Spektrums (Abbildung 6.3) nicht direkt bestätigt werden konnte. Die Dämpfungswerte beider Eigenfrequenzen sind mit -1857 1/s (T1) und -3932 1/s (T1L2) sehr hoch und decken sich nicht mit den experimentellen Ergebnissen. Es zeigt sich jedoch, dass die Dämpfung von T1L2 mehr als das Doppelte von T1 ist. Übertragen auf die experimentell ermittelte Dämpfungswerte würde sich für die T1L2 eine Dämpfung von $> 1200 \text{ 1/s}$ ergeben, was einen Grund darstellen, dass sie im experimentellen Spektrum nicht detektierbar ist.

6.2.2. Absorbereinfluss

Der Einfluss der Absorber kann mit der Netzwerkmethod (Modell (B), Abbildung 6.9) unter Verwendung der geglätteten experimentell ermittelten Absorbertransfermatrizen (dargestellt in Anhang D.5) gezeigt werden. Die Ergebnisse sind in Abbildung 6.10 dargestellt und stimmen teilweise gut mit den Eigenfrequenzen aus den Spektren in Abbildung 6.1 überein. Die Netzwerkmethod zeigt die Existenz der charakteristischen Doppelpicks, die bereits zuvor anhand Abbildung 6.2 beschrieben wurden, für Eigenmoden unterhalb der $\lambda/4$ -Frequenz der Absorber.

Schwächen der Netzwerkmethod sind vor allem bei der Vorhersage der T1⁻-Frequenzen zu erkennen. Da die Method dahingehend limitiert ist, dass sie das akustische Verhalten unterhalb der cut-on Frequenzen nicht vollständig abbildet, können dafür keine Eigenfrequenzen gefunden werden. Die 25 mm

Absorberkonfiguration stellt den Grenzfall dar, bei dem die Eigenfrequenz von $T1^-$ sehr nahe an der cut-on Frequenz der Brennkammer liegt.

Die Dämpfungswerte aus der Netzwerkmethod sind in Tabelle 6.3 angegeben. Sie sind sehr hoch und stimmen nur bedingt mit den experimentellen Werten überein.

Wie bereits in Abschnitt 6.1.1 festgestellt wurde, führen Absorber zu einer Verstimmung der Brennkammer. Aus den experimentellen und numerischen Ergebnissen geht hervor, dass diese Frequenzverschiebungen, speziell was die + Moden angeht, gering sind. Trotzdem kann sich diese Verschiebung sowohl positiv als auch negativ auf die Gesamtstabilität des Raketentriebwerks auswirken. Im günstigsten Fall wird durch eine optimale Verwendung von Absorbern das Frequenzspektrum der Brennkammer so verändert, dass keine weiteren Effekte, wie zum Beispiel die Verbrennung, getriggert werden können. Im ungünstigsten Fall erweist sich diese Verstimmung als negativ, und die Raketebrennkammer wird instabil. Dass sich bereits eine geringe Verschiebung in den Eigenfrequenzen massiv auf die Stabilität auswirken kann, beschreiben Gröning et al. [29] am Beispiel einer experimentellen Studie an einem Versuchsträger mit Verbrennung.

6.3. Ergebnisübersicht für Modenklasse 10

Im Folgenden sind in Tabelle 6.3 die Ergebnisse für Modenklasse 10 in Abhängigkeit der Absorberlänge zusammengefasst dargestellt. Dabei sind die verschiedenen Methoden aufgeführt, mit denen die Eigenfrequenzen und Dämpfungswerte ermittelt wurden. Zur leichteren Verständlichkeit sind die Eigenfrequenzen in grafischer Form in Abbildung 6.10 gezeigt.

Dabei wird mit *Abklingen p* und *Abklingen E* das zeitliche Verhalten des abklingenden Drucksignals und der abklingenden akustischen Energie, beschrieben in den Abschnitten 6.1.2.1 und 6.1.2.2, bezeichnet. *Antwort E* kennzeichnet die Ergebnisse aus der Frequenzantwort der akustischen Energie aus 3.7.3. Die Ergebnisse der breitbandigen Anregung aus 6.1.1 sind mit *Rauschen* und jene der Netzwerkmethod aus 6.2 mit *OLG* bezeichnet.

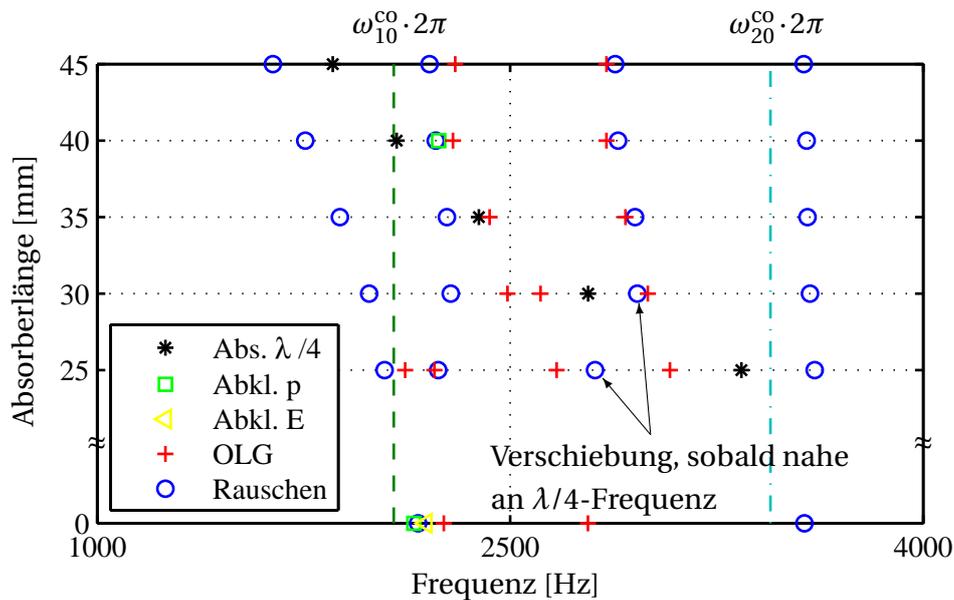


Abbildung 6.10.: Übersicht gefundene Eigenfrequenzen ($T1^-$, $T1$, $T1^+$, $T1L$ und $T2$) mit den cut-on Frequenzen für die Eigenmoden mit $m = 1 / n = 0$ und $m = 2 / n = 0$, OLG = Netzwerkmethod Open Loop Gain, Rauschen = Anregung durch Strömungsrauschen

Tabelle 6.3.: Zusammenstellung der Ergebnisse für Modenklasse 10 und 20

Methode	Eigenmode	Absorberlänge											
		0 mm		25 mm		30 mm		35 mm		40 mm		45 mm	
		f [Hz]	α [1/s]	f [Hz]	α [1/s]	f [Hz]	α [1/s]	f [Hz]	α [1/s]	f [Hz]	α [1/s]	f [Hz]	α [1/s]
Abs $\lambda/4$		-	-	3340	-	2783	-	2386	-	2088	-	1856	-
Abklngen p	T1	2160	-573	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	T1 ⁺	-	-	-	-	-	-	-	-	2230	-318	-	-
Abklngen E	T1	2160	-573	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Antwort E	T1	2195	-555	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
OLG	T1 ⁻	-	-	2119	-820	2111	-670	-	-	-	-	-	-
	T1	2259	-1857	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	T1 ⁺	2782	-3932	2225	-4046	2490	-3084	2425	-	2292	-2253	2300	-2374
	T1L2 ⁻	-	-	2669	-4508	2610	-6486	-	-	-	-	-	-
	T1L2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	T1L2 ⁺	-	-	3080	-1482	3000	-	2919	-	2850	-6315	2850	-5506
Rauschen	T1 ⁻	-	-	2044	-1259	1989	-998	1882	-906	1756	-1096	1638	-1143
	T1	2166	-758	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	T1 ⁺	-	-	2239	-912	2284	-714	2270	-554	2238	-551	2207	-643
	T1L2 ⁺	-	-	2808	-960	2962	-1282	2954	-1250	2894	-1845	2882	-1897

7 Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurden die Einflüsse von verschiedenen Komponenten auf die Stabilität einer Raketenbrennkammer untersucht. Dabei lag der Fokus insbesondere auf der Düse, der Faceplate und den Absorbern. Das Wissen um den Einfluss dieser passiven Bauteile auf die Brennkammerakustik erlaubt es, bereits in einer frühen Phase der Entwicklung Maßnahmen zu ergreifen, die im späteren Betrieb zu einem Optimum an Dämpfung führen.

Anhand verschiedener Methoden konnten für eine Beispielbrennkammer die Eigenfrequenzen und die Dämpfungswerte bestimmt werden. Dabei wurden sowohl experimentelle als auch numerische Techniken eingesetzt. Der Fokus lag dabei auf Transversalmoden, da diese auf Grund ihrer speziellen Charakteristik in der Vergangenheit große Probleme in Raketentriebwerken verursacht haben.

Die untersuchte Raketenbrennkammer, bestehend aus einer klassischen Düse, einer zylinderförmigen Brennkammer, $\lambda/4$ -Absorbern und einer Faceplate, modelliert als Lochblech, wurde ohne Verbrennung betrieben. Die Experimente zur Bestimmung des akustischen Verhaltens erfolgten sowohl mit als auch ohne Zwangsanregung. Es hat sich gezeigt, dass direkte Messungen des dynamischen Druckes bereits zu einer sehr guten Abschätzung von Eigenfrequenzen und Abklingraten führen. Unter Umständen ist jedoch die tiefgreifendere Kenntnis der kausalen Zusammenhänge erforderlich. Beispielsweise interessiert es, wie groß der quantitative Beitrag einer Komponente auf die Dämpfung einer Eigenmode ist. Dazu wurde eine Methode entwickelt, welche das akustische Feld innerhalb des Brennkammerzylinders ohne Absorber auf Basis von Druckmessungen an verschiedenen axialen und longitudinalen Positionen für verschiedene gleichzeitig auftretende Modenformen vollständig reproduzieren kann. Die dafür notwendigen Herleitungen sind in dieser Arbeit ausführlich dargestellt. Dadurch konnte gezeigt werden, dass Längsmoden sehr stark gedämpft und im Vergleich zu transversalen Moden nahezu unerheblich sind. Mit Hilfe einer Bilanzierung der akustischen Energie zusammen mit den akustischen Flüssen im Zeitbereich über die Faceplate und die Düseneintrittsebene konnte der Einfluss

dieser Komponenten auf die Gesamtstabilität bestimmt werden. Dabei zeigte sich, dass bei der untersuchten Brennkammer der Einfluss der Düse im Bereich der T1-Eigenmode sehr gering ist, wohingegen jener der Faceplate dominiert. Mit zunehmender Frequenz nimmt die Reflektion der Düse ab, wodurch mehr an akustischer Energie entweichen kann.

Diese Ergebnisse dienen der Validierung eines einfachen Netzwerkmodells auf Basis der Open Loop Gain Methode (OLG). Bei diesem Verfahren wird die Raketenbrennkammer auf ein einfaches akustisches Modell reduziert. Durch Lösen des resultierenden Gleichungssatzes können die Eigenfrequenzen und die Stabilität qualitativ vorhergesagt werden. Die für das Gesamtmodell erforderlichen Randbedingungen wurden mit Hilfe der Multimikrofonmethode sowohl für Längs- als auch Umfangsmoden experimentell bestimmt. Dabei konnte ein numerisches Verfahren für die Berechnung von Düsenadmittanzen anhand zweier unterschiedlicher Düsengeometrien validiert werden. Es konnte die Gültigkeit dieses Verfahrens bestätigt werden. Zudem hat sich gezeigt, dass eine Düse unter Berücksichtigung von konvektiven Effekten über alle Frequenzen und für jede Eigenmode stets stabilisierende Wirkung auf die Brennkammer hat. Die bisher in der Literatur getroffene Aussage, dass eine Düse destabilisierenden Einfluss auf eine Raketenbrennkammer bei transversalen Moden hat, konnte widerlegt werden.

Das Verhalten der Absorber wurde experimentell mit Hilfe der Multimikrofonmethode bestimmt und in Form einer Transfermatrix in das Netzwerkmodell eingebunden. Dabei wurde die Absorberlänge variiert, um deren Einfluss auf die erste transversale Eigenmode zu untersuchen. Die Dissipation in den Absorberringen wurde anhand einer Energiebilanz präsentiert. Es hat sich gezeigt, dass die Absorber jeweils unterhalb ihrer $\lambda/4$ Eigenfrequenz wirksam sind und dass die Dissipation dabei erheblich ist. Die Verwendung von Absorbern führt zu einer starken Beeinflussung der Brennkammerakustik, was sich an einem veränderten Frequenzspektrum äußert. Diese Verstimmung der Eigenfrequenzen kann sich sowohl positiv, als auch negativ auf die Stabilität von Triebwerken auswirken, betrachtet man weitere Effekte wie beispielsweise die Verbrennung.

Die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Studien haben gezeigt, dass sich das akustische Verhalten einer Raketenbrennkammer und deren Komponenten mit einfachen Methoden beschreiben lässt. So kann das Verhalten von Düsen mit Hilfe eines einfachen numerischen Verfahrens ohne großen Aufwand in vollem Umfang berechnet werden. Die Erkenntnis, dass der Einfluss

der Düse auf die Gesamtstabilität für transversale Moden sehr gering ist, hilft bei zukünftigen Entwicklungen von Raketentriebwerken. Die Anzahl kostenintensiver und unter Umständen nicht zielführender Untersuchungen kann dadurch massiv reduziert werden. Da die Gestaltungsmöglichkeiten bei der Düse oft stark limitiert sind, empfiehlt es sich, Stabilitätsproblemen mit Hilfe einer optimierten Faceplate entgegen zu wirken.

A Anhang: Auslegungsberechnung und Geometrie

A.1. Düsenauslegung

Tabelle A.1.: Geometriegrößen der beiden verwendeten Düsen und Zustandsgrößen am Düsen Eintritt

Größe	Symbol	Düse A	Düse B	Einheit
Brennkammerdurchmesser	D_{BK}	92	92	mm
Halsdurchmesser	D_H	60	56	mm
Austrittsdurchmesser	D_A	64	67	mm
Umgebungsdruck	p_u	0.960	0.960	bar
Totaltemperatur	T_0	280	295	K

Maßgeblich für den Betrieb der Anlage ist das kritische Durchströmen der Düse. Der minimal erforderliche Druck in der Brennkammer wird über die Isentropenbeziehungen für den Betriebszustand "Venturibetrieb" [55] berechnet. Im Betrieb wird der so berechnete mittlere Druck um den zu erwartenden Schwankungsanteil und einer Druckreserve erhöht, um sicherzustellen, dass die Düse auch im ungünstigsten Fall kritisch durchströmt wird.

Der Düsenhalsquerschnitt ist mit $M = 1$ durchströmt und wird im Folgenden mit A^* bezeichnet.

Die Auslegungsberechnungen für die beiden Düsen werden getrennt voneinander durchgeführt und orientieren sich am Skriptum zur Vorlesung Thermodynamik 2 [55]. Dabei stehen die Bezeichnungen „US“ für Unterschall und „ÜS“ für Überschall.

A.1.1. Düse A

Venturibetrieb - minimal erforderlicher Brennkammerdruck

Statisches Druckverhältnis bis zum Austritt

$$\frac{A_A}{A^*} = \frac{A_A}{A_H} = \frac{D_A^2}{D_H^2} = \frac{64^2}{60^2} = 1.138$$

$$\xrightarrow{\text{US}} \frac{p_A}{p_0} = 0.750$$

Totaldruck in der Brennkammer mit $p_A = p_u$

$$p_0 = \frac{p_0}{p_A} \cdot p_u = 0.750^{-1} \cdot 0.960 = 1.28 \text{ bar}$$

Erforderlicher Massenstrom

$$\dot{m} = p_0 \cdot A^* \cdot \Psi_{\max} \cdot \sqrt{\frac{2}{R \cdot T_0}} = 1.28 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{0.060}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 0.4842 \cdot \sqrt{\frac{2}{287 \cdot 280}} = 0.874 \text{ kg/s}$$

Betrieb

Totaldruck in der Brennkammer bei $\dot{m} = 1,15 \text{ kg/s}$

$$p_0 = \frac{\dot{m}}{A^* \cdot \Psi_{\max} \cdot \sqrt{\frac{2}{R \cdot T_0}}} = \frac{1.15 \cdot 10^{-5}}{\left(\frac{0.060}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 0.4842 \cdot \sqrt{\frac{2}{287 \cdot 280}}} = 1.684 \text{ bar}$$

Statischer Druck und Machzahl in der Brennkammer

$$\frac{A_{BK}}{A^*} = \frac{A_{BK}}{A_H} = \frac{D_{BK}^2}{D_H^2} = \frac{92^2}{60^2} = 2.351$$

$$\xrightarrow{\text{US}} \frac{p_{BK}}{p_0} = 0.957$$

$$p_{BK} = \frac{p_{BK}}{p_0} \cdot p_0 = 0.957 \cdot 1.684 = \underline{1.611} \text{ bar}$$

$$\xrightarrow{\text{US}} M_{BK} = \underline{0.25}$$

A.1.2. Düse B**Venturibetrieb - minimal erforderlicher Brennkammerdruck**

Statisches Druckverhältnis bis zum Austritt

$$\frac{A_A}{A^*} = \frac{A_A}{A_H} = \frac{D_A^2}{D_H^2} = \frac{67^2}{56^2} = 1.431$$

$$\xrightarrow{\text{US}} \frac{p_A}{p_0} = 0.865$$

Totaldruck in der Brennkammer mit $p_A = p_u$

$$p_0 = \frac{p_0}{p_A} \cdot p_u = 0.865^{-1} \cdot 0.960 = 1.11 \text{ bar}$$

Erforderlicher Massenstrom

$$\dot{m} = p_0 \cdot A^* \cdot \Psi_{\max} \cdot \sqrt{\frac{2}{R \cdot T_0}} = 1,11 \cdot 10^5 \cdot \left(\frac{0.056}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 0.4842 \cdot \sqrt{\frac{2}{287 \cdot 295}} = 0.643 \text{ kg/s}$$

BetriebTotaldruck in der Brennkammer bei $\dot{m} = 1.00 \text{ kg/s}$

$$p_0 = \frac{\dot{m}}{A^* \cdot \Psi_{\max} \cdot \sqrt{\frac{2}{R \cdot T_0}}} = \frac{1,00 \cdot 10^{-5}}{\left(\frac{0.056}{2}\right)^2 \cdot \pi \cdot 0.4842 \cdot \sqrt{\frac{2}{287 \cdot 295}}} = 1.725 \text{ bar}$$

Statischer Druck und Machzahl in der Brennkammer

$$\frac{A_{BK}}{A^*} = \frac{A_{BK}}{A_H} = \frac{D_{BK}^2}{D_H^2} = \frac{92^2}{56^2} = 2.700$$

$$\xrightarrow{\text{US}} \frac{p_{BK}}{p_0} = 0.967$$

$$p_{BK} = \frac{p_{BK}}{p_0} \cdot p_0 = 0.967 \cdot 1,725 = \underline{1.668 \text{ bar}}$$

$$\xrightarrow{\text{US}} M_{BK} = \underline{0.22}$$

A.1.3. Berechnung von Machzahl und Druckverlust am Lochblech

Im Folgenden werden der Druckverlust über ein Lochblech sowie die Strömungsgeschwindigkeiten in den Löchern und im Kontraktionsquerschnitt berechnet. Die geometrischen und strömungsmechanischen Größen sind in Tabelle A.2 angegeben. Da nicht alle Größen bekannt sind, erfolgen in erster Näherung Abschätzungen, welche im Verlauf der gezeigten Berechnung plausibilisiert und bestätigt werden. Die zunächst nur angenommenen Größen sind in Tabelle A.2 mit * kenntlich gemacht. In Abbildung A.1 ist zum leichteren Verständnis der Verlauf des statischen Druckes und der Stromlinien schematisch dargestellt.

Tabelle A.2.: Geometriegrößen des Lochblechs und Zustandsgrößen

Größe	Symbol	Wert	Einheit
Lochdurchmesser	d_L	3	mm
Dicke	b_L	2	mm
Brennkammerdurchmesser	d_{BK}	92	mm
Versperrungsgrad (offener Querschnitt)	φ	51	%
Machzahl im Loch*	M_L	0.4	-
Druck stromauf*	p_1	1.800	bar
Druck in der Brennkammer (Düse A)	p_{BK}	1.654	bar
Temperaturen*	T_0, T_1, T_L, T_2	280	K
Schallgeschwindigkeit	c	335	m/s
Dichte Luft bei 1 bar Druck	ρ_0	1.2	kg/m ³
Massenstrom	\dot{m}_{BK}	1.150	kg/s

Der Druckverlust berechnet sich zu

$$\Delta p = \zeta \cdot \frac{\rho_1}{2} \cdot w_1^2$$

mit dem auf die Geschwindigkeit w_1 bezogenen Druckverlustbeiwert ζ , der sich aus der Geometrie des Lochbleches und dem Versperrungsgrad

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d_L}{b_L} = 0.67 \\ \varphi = 51\% \end{array} \right\} \rightarrow \zeta_L = 0.6$$

$$\zeta = \frac{\zeta_L}{\varphi^2} = \frac{0.6}{0.51^2} = 2.31$$

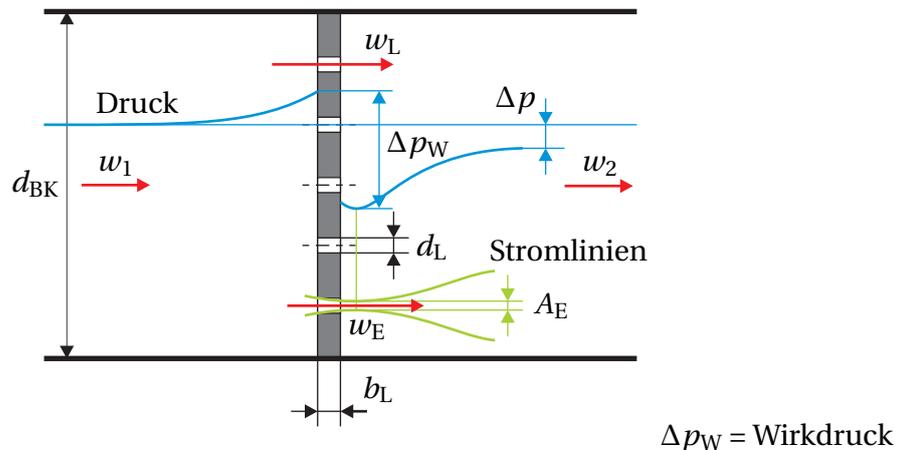


Abbildung A.1.: Verlauf des statischen Drucks und der Stromlinien

ergibt, der Dichte

$$\rho_1 = p_1 \cdot \rho_0$$

$$\rho_1 = 1.8 \cdot 1.2 = 2.15 \text{ kg/m}^3,$$

und der Strömungsgeschwindigkeit

$$w_1 = \frac{\dot{m}}{\rho_1 \cdot A}$$

$$w_1 = \frac{1.150 \cdot 4}{2.16 \cdot 0.092^2 \cdot \pi} = 80 \text{ m/s}$$

stromauf vom Lochblech.

Der Druckverlust ist somit

$$\Delta p = 2.31 \cdot \frac{2.16}{2} \cdot 80^2 = \underline{\underline{0.118 \text{ bar}}}, \quad (\text{A.1})$$

woraus sich der Druck in der Brennkammer berechnen lässt:

$$p_2 = p_1 - \Delta p$$

$$p_2 = 1.8 - 0.120 = 1.682 \text{ bar}.$$

Der so berechnete Druck p_2 entspricht in guter Näherung dem gemessenen Druck in der Brennkammer $p_{BK} = 1.654 \text{ bar}$ (siehe 4.2).

Die Strömungsgeschwindigkeiten im Lochquerschnitt A_L und Kontraktionsquerschnitt A_E lassen sich mit Hilfe des VDI-Wärmeatlas [60] bestimmen. Die

Berechnung ist im Folgenden aufgeführt und weist große Ähnlichkeiten zur zuvor präsentierten auf. Beachtet werden muss, dass dieses Mal die Werte auf die Größen im Lochblech bezogen sind.

Der Druckverlust, bezogen auf die Geschwindigkeit im Lochblech, berechnet sich zu

$$\Delta p = \zeta \cdot \frac{\rho_L}{2} \cdot w_L^2, \quad (\text{A.2})$$

mit dem Druckverlustbeiwert

$$\zeta = \zeta_0 + \varphi^2 - 2 \cdot \varphi \cdot \sqrt{\zeta_0},$$

der sich mit $\zeta_0 = 1.85$ aus [60] berechnen lässt:

$$\zeta = 1.85 + 0.51^2 - 2 \cdot 0.51 \cdot \sqrt{1.85} = 0.72$$

Mit dem bekannten Druckverlust aus Gleichung (A.1) kann nach Umformung von Gleichung A.2 die Geschwindigkeit im Lochblech angegeben werden zu:

$$w_L = \sqrt{\frac{\Delta p \cdot 2}{\zeta \cdot \rho_L}}$$

Dichte ρ_L und Geschwindigkeit w_L hängen aufgrund der Kompressibilität und Kontinuität direkt voneinander ab. Allerdings ändert sich die Dichte bei niedrigen Geschwindigkeiten nur moderat. Unter der Annahme einer Machzahl von $M_L = 0.40$ im Loch ergibt sich unter Berücksichtigung einer isentropen Zustandsänderung nach [55] für die Dichte

$$\begin{aligned} \rho_L &= \rho_1 \cdot \frac{\rho_0}{\rho_1} \cdot \frac{\rho_L}{\rho_0} \\ \rho_L &= 2.15 \cdot 1.8 \cdot 0.98^{-1} \cdot 0.885 = 1.95 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

Strömungsgeschwindigkeit und Machzahl im Loch sind, unter der Annahme, dass $c_L \approx c$ wegen $T_L \approx T$ für kleine M , somit:

$$\begin{aligned} w_L &= \sqrt{\frac{0.118 \cdot 10^5 \cdot 2}{0.72 \cdot 1.95}} = \underline{130 \text{ m/s}} \\ M_L &= \frac{w_L}{c_L} = \frac{130}{335} = \underline{0.39}. \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Kontraktionsfaktors α , der für kleine Verhältnisse von b_L/d_L über die einfache Beziehung [60]

$$\begin{aligned} \alpha &= 0.6 + 0.4 \cdot \varphi^2 \\ \alpha &= 0.6 + 0.4 \cdot 0.51^2 = 0.7 \end{aligned}$$

berechnet wird, können schlussendlich die Strömungsgeschwindigkeit und die Machzahl im Kontraktionsquerschnitt A_E angegeben werden:

$$w_E = \frac{w_L}{\alpha}$$

$$w_E = \frac{130}{0.7} = \underline{186 \text{ m/s}}$$

$$M_E = \frac{w_E}{c_E}$$

$$M_E = \frac{w_E}{c_E} = \underline{0.55}$$

B Anhang: Herleitungen

Die folgenden Herleitungen gelten unabhängig für alle Modenklassen. Die Indices m und n sind die deshalb zur besseren Lesbarkeit in den formelmäßigen Beziehungen oftmals nicht aufgeführt sind. Dadurch ergeben sich teilweise Abweichungen von der bisherigen Nomenklatur und der Positionierung von Indices und hochgestellten Symbole.

B.1. Eigenwerte der Besselfunktion

Tabelle B.1.: Eigenwerte der Besselfunktion und Eigenfrequenzen für $R = 0.046$ m

Moden- form	m	n	s_{mn}	Frequenz [Hz] bei $M = 0$	Frequenz [Hz] bei $M = 0.25$
T1	1	0	1.8412	2128	2060
T2	2	0	3.0540	3529	3417
R1	0	1	3.8318	4428	4287
T3	3	0	4.2013	4855	4701
T4	4	0	5.3175	6145	5950
T5	5	0	6.3160	7299	7067
R2	0	2	7.0155	8107	7850
T6	6	0	7.5018	8669	8394
T7	7	0	8.5781	9913	9598
T8	8	0	9.6475	11149	10795

B.2. Voraussetzungen für die Existenz einer reinen T1-Mode

Eine reine T1-Mode zeichnet sich aus durch:

$$\left. \frac{\partial p}{\partial x} \right|_x = 0 \quad (\text{B.1})$$

Für den Druck gilt:

$$\hat{p}(x, r, \theta) = \rho c \left(\hat{f} \cdot e^{-ik_{10}^{x+} x} + \hat{g} \cdot e^{-ik_{10}^{x-} x} \right) \cdot J_1(k_{10}^r \cdot r) \cdot \cos(k_{10}^\theta \cdot \theta) \quad (\text{B.2})$$

Bedingung (B.1) ist an den Rändern $x = 0$ und $x = L$ erfüllt, wenn diese voll reflektierend sind ($R^u = R^d = 1$).

Im Bereich $0 < x < L$ verschwindet der Druckgradient von Gleichung (B.2) nur dann, wenn die axialen Wellenzahlen

$$k_{10}^{x+} = k_{10}^{x-} = 0 \quad (\text{B.3})$$

werden. Betrachtet man Abbildung 2.6, so lässt sich sehr leicht feststellen, dass dies nur für den Fall ohne Durchströmung möglich ist, da mit zunehmender Machzahl die Kurvenverläufe der Wellenzahlen unsymmetrisch werden und kein paarweiser Nulldurchgang existiert. Bedingung (B.3) ist nur für $M = 0$ und an der cut-on Frequenz erfüllt, die sich nach Gleichung (2.47) berechnen lässt.

Zusammengefasst sind folgende Voraussetzungen für die Existenz einer reinen T1-Mode erforderlich:

- Schallharte Randbedingungen in axialer Richtung.
- Keine Durchströmung ($M = 0$).

B.3. Bestimmung von Eigenfrequenz und Dämpfungswert aus der Halbwertsbreite

Die Funktion der Lorentz- oder Breit-Wigner-Kurve [6] lautet

$$\mathcal{F}(e^{i(\omega_0 - i\alpha)t}) = \frac{-\alpha}{\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2} \quad (\text{B.4})$$

und ist in Abbildung B.1 gezeigt. Ihr Maximum liegt bei ω_0 und $\frac{1}{|\alpha|}$. Sie ist die Fourier-Transformierte der ideal abklingenden Schwingung.

Üblicherweise ist die Frequenzauflösung eines durch die diskrete Fourier-Transformation ermittelten Spektrums (z. B. aus Druck oder Energie) zu grob, um die Höhe von Peaks ausreichend genug wiederzugeben. Durch Anpassung einer Lorentzkurve können diese näherungsweise rekonstruiert werden. Aus den Koeffizienten der Lorentzkurve lassen sich die zugehörige Frequenz (ω_0) und die Dämpfung (α) bestimmen. Diese wird typischerweise aus der Halbwertsbreite des Peaks bestimmt: Bei $\omega_0 \pm \alpha$ nimmt die Lorentzkurve den Wert $\frac{1}{2|\alpha|}$ an, dies entspricht der Hälfte der Peakhöhe. Der Dämpfungskoeffizient lässt sich demnach berechnen aus:

$$\alpha = \frac{1}{2}\delta, \quad (\text{B.5})$$

wobei δ die Halbwertsbreite darstellt. Diese Methode der Eigenfrequenz- und Dämpfungsbestimmung kann nach Fiala [23] sowohl bei gepulster, als auch bei kontinuierlicher Anregung angewandt werden.

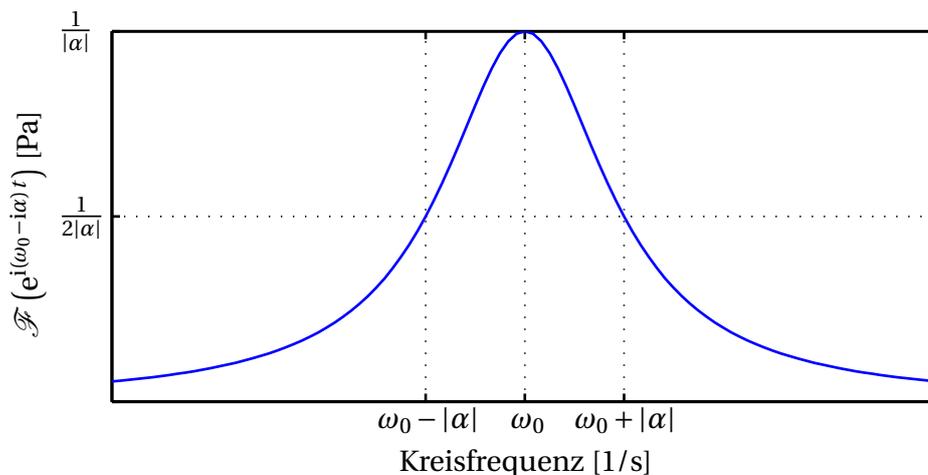


Abbildung B.1.: Die Lorentzkurve

B.4. Berechnung der Hilfsvariablen κ^\pm

Die Grundgleichungen für ein Feld ohne Gradienten unter Berücksichtigung von Durchströmung lauten

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho' + \bar{\rho} \nabla \cdot \vec{u}' = 0 \quad (\text{B.6})$$

$$\frac{\partial \vec{u}'}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}' = -\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p'. \quad (\text{B.7})$$

Setzt man nun den folgenden Ansatz für das Druck- und Geschwindigkeitsfeld der stromab laufenden Welle

$$p' = \bar{\rho} c \hat{F} e^{ik^{x+} x} R \Theta e^{i\omega t} \quad (\text{B.8})$$

$$u' = \kappa^+ \hat{F} e^{ik^{x+} x} R \Theta e^{i\omega t} \quad (\text{B.9})$$

in die Gleichungen (B.6) und (B.7) ein, so ergeben sich die folgenden Terme:

$$\frac{\partial u'}{\partial t} = i\omega \hat{F} \kappa^+ e^{-ik^{x+} x} \quad (\text{B.10})$$

$$\vec{u} \nabla u' = \vec{u} \hat{F} \kappa^+ (-ik^{x+}) e^{-ik^{x+} x} e^{i\omega t} R \Theta \quad (\text{B.11})$$

$$-\frac{1}{\bar{\rho}} \nabla p' = -c \hat{F} (-ik^{x+}) e^{-ik^{x+} x} e^{i\omega t} R \Theta \quad (\text{B.12})$$

Zusammengefasst ergibt sich

$$\frac{\omega}{c} c \kappa^+ + M c \kappa^+ (-k^{x+}) = -c (-k^{x+}) \quad (\text{B.13})$$

und führt zu

$$\kappa^+ = \frac{k^{x+}}{k - M k^{x+}}. \quad (\text{B.14})$$

Die Herleitung für die stromauf laufende Welle ist analog und führt zu:

$$\kappa^- = \frac{k^{x-}}{k - M k^{x-}} \quad (\text{B.15})$$

Ist k parallel zu k^{x^\pm} , so ergeben sich die Werte

$$\kappa^+ = 1 \quad (\text{B.16})$$

$$\kappa^- = -1. \quad (\text{B.17})$$

Dies trifft zum Beispiel für reine Längsmoden zu, wodurch sich für die Geschwindigkeit die bekannte Form

$$\hat{u} = \hat{F}_{00} \cdot e^{-ik_{00}^{x+} x} - \hat{G}_{00} \cdot e^{-ik_{00}^{x-} x} \quad (\text{B.18})$$

ergibt.

B.5. Zusammenhang zwischen Admittanz und Reflektionsfaktor

Da die folgende Herleitung unabhängig von der Modenklasse ist, wird auf eine diesbezügliche spezielle Indizierung verzichtet. Die Wellen senkrecht zur

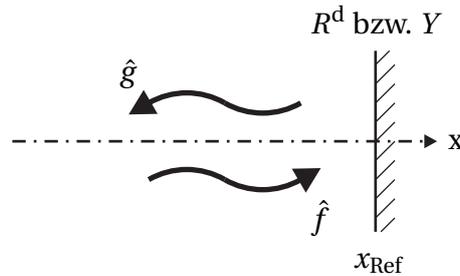


Abbildung B.2.: Stromabseitige Reflexion

Reflektionsebene an der Koordinate x_{Ref} sind

$$\hat{f}^{\text{Ref}} = \hat{F} \cdot e^{-ik^{x^+} x_{\text{Ref}}}$$

$$\hat{g}^{\text{Ref}} = \hat{G} \cdot e^{-ik^{x^-} x_{\text{Ref}}}$$

Der stromabseitiger Reflektionsfaktor und die Admittanz sind definiert als:

$$R^{\text{d}} = \frac{\hat{g}^{\text{Ref}}}{\hat{f}^{\text{Ref}}} \quad (\text{B.19})$$

$$Y = \frac{\hat{u}}{\hat{p}} \quad (\text{B.20})$$

mit dem Druck und der Geschwindigkeit

$$\hat{p} = \bar{\rho}c (\hat{f}^{\text{Ref}} + \hat{g}^{\text{Ref}}) \quad (\text{B.21})$$

$$\hat{u} = \kappa^+ \hat{f}^{\text{Ref}} + \kappa^- \hat{g}^{\text{Ref}} \quad (\text{B.22})$$

Eingesetzt in (B.19) und (B.20) ergibt sich

$$Y \cdot \bar{\rho}c = \frac{\kappa^+ \hat{f}^{\text{Ref}} + \kappa^- \hat{g}^{\text{Ref}}}{\hat{f}^{\text{Ref}} + \hat{g}^{\text{Ref}}} \quad (\text{B.23})$$

$$\mathcal{Y} = \frac{\kappa^+ \hat{f}^{\text{Ref}} + \kappa^- \hat{g}^{\text{Ref}}}{\hat{f}^{\text{Ref}} + \hat{g}^{\text{Ref}}} \quad (\text{B.24})$$

Die stromauflaufende Welle lässt sich in Abhängigkeit des Reflektionsfaktors und der auftreffenden Welle schreiben als $\hat{g}^{\text{Ref}} = R^{\text{d}} \hat{f}^{\text{Ref}}$. Somit lautet die Admittanz

$$\mathcal{Y} = \frac{\kappa^+ \hat{f}^{\text{Ref}} + \kappa^- R^{\text{d}} \hat{f}^{\text{Ref}}}{\hat{f}^{\text{Ref}} + R^{\text{d}} \hat{f}^{\text{Ref}}}. \quad (\text{B.25})$$

Durch Kürzen erhält man

$$\mathcal{Y} = \frac{\kappa^+ + \kappa^- R^{\text{d}}}{1 + R^{\text{d}}}. \quad (\text{B.26})$$

Umgeformt ergibt sich

$$R^{\text{d}} = -\frac{\mathcal{Y} - \kappa^+}{\mathcal{Y} - \kappa^-}. \quad (\text{B.27})$$

Da an jeder Position gelten muss

$$R^{\text{d}} \cdot R^{\text{u}} = 1, \quad (\text{B.28})$$

ist der stromaufseitige Reflektionsfaktor

$$R^{\text{u}} = \left(-\frac{\mathcal{Y} - \kappa^+}{\mathcal{Y} - \kappa^-} \right)^{-1}. \quad (\text{B.29})$$

B.6. Berechnung des zeitlichen Mittels

Für streng harmonische Schwingungen gilt:

$$\begin{aligned}
 \langle p' u' \rangle &:= \frac{1}{T} \int_0^T p' u' dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \Re(\hat{p} e^{i\omega t}) \cdot \Re(\hat{u} e^{i\omega t}) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T (\Re(\hat{p}) \cdot \cos(\omega t) - \Im(\hat{p}) \cdot \sin(\omega t)) \\
 &\quad \cdot (\Re(\hat{u}) \cdot \cos(\omega t) - \Im(\hat{u}) \cdot \sin(\omega t)) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \Re(\hat{p}) \cdot \Re(\hat{u}) \cdot (\cos(\omega t))^2 + \Im(\hat{p}) \cdot \Im(\hat{u}) \cdot (\sin(\omega t))^2 \\
 &\quad - (\Im(\hat{p}) \cdot \Re(\hat{u}) + \Re(\hat{p}) \cdot \Im(\hat{u})) \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\omega t) dt \\
 &= \frac{1}{2} (\Re(\hat{p}) \cdot \Re(\hat{u}) + \Im(\hat{p}) \cdot \Im(\hat{u})) \\
 &= \frac{1}{2} \Re(\hat{p} \hat{u}^*) \\
 &= \frac{1}{2} |\hat{p} \hat{u}|^2
 \end{aligned}$$

Für schwach gedämpfte Signale der Form

$$\begin{aligned}
 p' &= \Re(\hat{p} e^{i\tilde{\omega} t}) = \Re(\hat{p} e^{i\omega t}) \cdot e^{\alpha t} \\
 u' &= \Re(\hat{u} e^{i\tilde{\omega} t}) = \Re(\hat{u} e^{i\omega t}) \cdot e^{\alpha t}
 \end{aligned}$$

ist der Dämpfungsanteil $e^{\alpha t}$ über eine Periode T annähernd konstant und man kann definieren:

$$\begin{aligned}
 \langle p' u' \rangle (t) &:= \frac{1}{T} \int_0^T p' u' dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T (\Re(\hat{p} e^{i\omega t}) \cdot e^{\alpha t}) \cdot (\Re(\hat{u} e^{i\omega t}) \cdot e^{\alpha t}) dt \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \Re(\hat{p} e^{i\omega t}) \cdot \Re(\hat{u} e^{i\omega t}) \cdot e^{2\alpha t} dt \\
 &\approx e^{2\alpha t} \cdot \frac{1}{T} \int_0^T \Re(\hat{p} e^{i\omega t}) \cdot \Re(\hat{u} e^{i\omega t}) dt \\
 &= \frac{1}{2} \Re(\hat{p} \hat{u}^*) \cdot e^{2\alpha t}
 \end{aligned}$$

B.7. Herleitung der akustischen Energie einer zylindrischen Geometrie

Die Gesamtenergie eines akustischen Feldes ist definiert als:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E} \rangle &= \iiint_V E \, dV = \int_0^L \int_0^{r_c} \int_0^{2\pi} \langle \mathcal{E} \rangle \cdot r \, d\vartheta \, dr \, dx \\ &= \int_0^L \int_0^{r_c} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \Re \left(\frac{\bar{\rho}}{2} (\hat{u} \hat{u}^* + \hat{v} \hat{v}^* + \hat{w} \hat{w}^*) + \frac{1}{2\bar{\rho}c^2} \hat{p} \hat{p}^* \right. \\ &\quad \left. + \frac{\bar{u}}{c^2} (\hat{p} \hat{u}^*) + \frac{\bar{v}}{c^2} (\hat{p} \hat{v}^*) + \frac{\bar{w}}{c^2} (\hat{p} \hat{w}^*) \right) \cdot r \, d\vartheta \, dr \, dx \end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned} \hat{p} &= P(x) \cdot R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \\ \hat{u} &= U(x) \cdot R(r) \cdot \Theta(\vartheta) \\ \hat{v} &= V(x) \cdot \frac{dR(r)}{dr} \cdot \Theta(\vartheta) \\ \hat{w} &= W(x) \cdot \frac{R(r)}{r} \cdot \frac{d\Theta(\vartheta)}{d\vartheta} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} P(x) &= \rho c \cdot \left(\hat{F} \cdot e^{-ik^{x^+}x} + \hat{G} \cdot e^{-ik^{x^-}x} \right) \\ U(x) &= \kappa^+ \cdot \hat{F} \cdot e^{-ik^{x^+}x} + \kappa^- \cdot \hat{G} \cdot e^{-ik^{x^-}x} \\ V(x) &= \mu^+ \cdot \hat{F} \cdot e^{-ik^{x^+}x} + \mu^- \cdot \hat{G} \cdot e^{-ik^{x^-}x} \\ W(x) &= \mu^+ \cdot \hat{F} \cdot e^{-ik^{x^+}x} + \mu^- \cdot \hat{G} \cdot e^{-ik^{x^-}x} \end{aligned}$$

sowie $\bar{v} = \bar{w} = 0$ lässt sich obige Gleichung aufteilen auf:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E} \rangle = & \frac{1}{2} \Re \{ \\ & \frac{\bar{\rho}}{2} \left[\int_0^L UU^* dx \cdot \int_0^{r_c} RR^* r dr \cdot \int_0^{2\pi} \Theta\Theta^* d\vartheta \right. \\ & + \int_0^L VV^* dx \cdot \int_0^{r_c} \left(\frac{dR}{dr} \right) \left(\frac{dR}{dr} \right)^* r dr \cdot \int_0^{2\pi} \Theta\Theta^* d\vartheta \\ & + \left. \int_0^L WW^* dx \cdot \int_0^{r_c} \frac{RR^*}{r^2} r dr \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) \left(\frac{d\Theta}{d\vartheta} \right)^* d\vartheta \right] \\ & + \frac{1}{2\bar{\rho}c^2} \int_0^L PP^* dx \cdot \int_0^{r_c} RR^* r dr \cdot \int_0^{2\pi} \Theta\Theta^* d\vartheta \\ & + \left. \frac{M}{c} \int_0^L PU^* dx \cdot \int_0^{r_c} RR^* r dr \cdot \int_0^{2\pi} \Theta\Theta^* d\vartheta \right\} \end{aligned}$$

Das lässt sich zusammenfassen zu:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E} \rangle = & \frac{1}{2} \Re \{ \\ & \int_0^L \left[\frac{\bar{\rho}}{2} UU^* + \frac{1}{2\bar{\rho}c^2} PP^* + \frac{M}{c} PU^* \right] dx \cdot \int_0^{r_c} RR^* r dr \cdot \int_0^{2\pi} \Theta\Theta^* d\vartheta \\ & + \frac{\bar{\rho}}{2} \int_0^L VV^* dx \cdot \int_0^{r_c} \left(\frac{dR}{dr} \right) \left(\frac{dR}{dr} \right)^* r dr \cdot \int_0^{2\pi} \Theta\Theta^* d\vartheta \\ & + \left. \frac{\bar{\rho}}{2} \int_0^L WW^* dx \cdot \int_0^{r_c} \frac{RR^*}{r^2} r dr \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) \left(\frac{d\Theta}{d\vartheta} \right)^* d\vartheta \right\} \quad (\text{B.30}) \end{aligned}$$

Für eine rein stromablaufende Welle der $m = 1 / n = 0$ - Moden mit

$$\begin{aligned} P(x) &= \bar{\rho}c \cdot \hat{F} e^{-ik^{x^+} x} \\ U(x) &= \kappa^+ \hat{F} e^{-ik^{x^+} x} \\ V(x) = W(x) &= \mu^+ \hat{F} e^{-ik^{x^+} x} \\ R(r) &= J_1\left(s_{10} \frac{r}{r_c}\right) \\ \Theta(\vartheta) &= \cos(1(\vartheta - \delta)) \end{aligned}$$

lassen sich die Integrale auswerten zu:

$$\begin{aligned}
 \int_0^L \left[\frac{\rho}{2} UU^* + \frac{1}{2\bar{\rho}c^2} PP^* + \frac{M}{c} PU^* \right] dx &= \rho \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\kappa^+ \kappa^{+*} + M\kappa^+ \right] \frac{e^{L\Im(k^{x+})} - 1}{2\Im(k^{x+})} \hat{F}\hat{F}^* \\
 \frac{\rho}{2} \int_0^L VV^* dx &= \frac{\bar{\rho}}{2} \int_0^L WW^* dx = \rho \frac{1}{2} \mu^+ \mu^{+*} \frac{e^{L\Im(k^{x+})} - 1}{2\Im(k^{x+})} \hat{F}\hat{F}^* \\
 \int_0^{2\pi} \Theta\Theta^* d\vartheta &= \pi \\
 \int_0^{2\pi} \left(\frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) \left(\frac{d\Theta}{d\vartheta} \right)^* d\vartheta &= \pi \\
 \int_0^{r_c} RR^* r dr &= \frac{1}{2} r_c^2 [(\mathcal{J}_1(s_{10}))^2 - \mathcal{J}_0(s_{10}) \cdot \mathcal{J}_2(s_{10})] \\
 \int_0^{r_c} \left(\frac{dR}{dr} \right) \left(\frac{dR}{dr} \right)^* r dr &= \frac{1}{2} [1 - (\mathcal{J}_1(s_{10}))^2 - (\mathcal{J}_0(s_{10}))^2] \\
 \int_0^{r_c} \frac{RR^*}{r^2} r dr &= \frac{1}{2} [(\mathcal{J}_0(s_{10}))^2 - (\mathcal{J}_1(s_{10}))^2 \\
 &\quad + s_{10}^2 ((\mathcal{J}_0(s_{10}))^2 + (\mathcal{J}_1(s_{10}))^2) - 1]
 \end{aligned}$$

Teilweise eingesetzt in (B.30) erhält man:

$$\begin{aligned}
 \langle \mathcal{E} \rangle^+ &= \pi \frac{\bar{\rho}}{2} \Re \left\{ \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\kappa^+ \kappa^{+*} + M\kappa^+ \right] \frac{e^{L\Im(k^{x+})} - 1}{2\Im(k^{x+})} \hat{F}\hat{F}^* \cdot \int_0^{r_c} RR^* r dr \right. \\
 &\quad \left. + \mu^+ \mu^{+*} \frac{e^{L\Im(k^{x+})} - 1}{2\Im(k^{x+})} \hat{F}\hat{F}^* \cdot \left[\int_0^{r_c} \left(\frac{dR}{dr} \right) \left(\frac{dR}{dr} \right)^* r dr + \int_0^{r_c} \frac{RR^*}{r^2} r dr \right] \right\} \\
 &\hspace{25em} \text{(B.31)}
 \end{aligned}$$

Für die $m = 0 / n = 0$ - Moden ergibt sich analog:

$$\int_0^L \left[\frac{\bar{\rho}}{2} UU^* + \frac{1}{2\bar{\rho}c^2} PP^* + \frac{M}{c} PU^* \right] dx = \bar{\rho} [1 \pm M] \frac{e^{L\Im(k^{x+})} - 1}{2\Im(k^{x+})} \hat{F}\hat{F}^*$$

$$\frac{\bar{\rho}}{2} \int_0^L VV^* dx = \frac{\bar{\rho}}{2} \int_0^L WW^* dx = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \Theta\Theta^* d\vartheta = 2\pi$$

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{d\Theta}{d\vartheta} \right) \left(\frac{d\Theta}{d\vartheta} \right)^* d\vartheta = 0$$

$$\int_0^{r_c} RR^* r dr = \frac{1}{2} r_c^2$$

$$\int_0^{r_c} \left(\frac{dR}{dr} \right) \left(\frac{dR}{dr} \right)^* r dr = 0$$

$$\int_0^{r_c} \frac{RR^*}{r^2} r dr = 0$$

Die Energie der stromab- und stromauflaufenden Wellen von $m = 0 / n = 0$ - Moden lässt sich somit schreiben als:

$$\langle \mathcal{E} \rangle^+ = \frac{\bar{\rho}}{2} \Re \left\{ [1 + M] \frac{e^{L\Im(k^{x+})} - 1}{2\Im(k^{x+})} \hat{F}\hat{F}^* \right\} \quad (\text{B.32})$$

$$\langle \mathcal{E} \rangle^- = \frac{\bar{\rho}}{2} \Re \left\{ [1 - M] \frac{e^{L\Im(k^{x+})} - 1}{2\Im(k^{x+})} \hat{F}\hat{F}^* \right\} \quad (\text{B.33})$$

Für rein harmonische Wellen ($\Im(k^{x+}) = 0$) lässt sich der verbleibende Exponentialterm vereinfachen zu:

$$\frac{e^{L\Im(k^{x+})} - 1}{2\Im(k^{x+})} = L$$

Die Gesamtenergie des Zylinders ergibt sich aus der Summe der Energien der stromauf- und stromablaufenden Wellen aller existierenden Modenformen.

B.8. Energiebilanz an einem kompakten akustischen Element auf Basis von Transfermatrizen

Die im Folgenden aufgeführten Definitionen und Zusammenhänge zwischen Transfermatrizen und Streumatrizen basieren auf der Arbeit von Fischer [26].

Transfermatrix:

$$\begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix}_d = \begin{bmatrix} \text{TM11} & \text{TM12} \\ \text{TM21} & \text{TM22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{f} \\ \hat{g} \end{pmatrix}_u$$

$$\hat{f}_d = \text{TM11} \cdot \hat{f}_u + \text{TM12} \cdot \hat{g}_u$$

$$\hat{g}_d = \text{TM21} \cdot \hat{f}_u + \text{TM22} \cdot \hat{g}_u$$

$$\text{TM}_{fg} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

Streumatrix:

$$\begin{pmatrix} \hat{f}_d \\ \hat{g}_u \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \text{SM11} & \text{SM12} \\ \text{SM21} & \text{SM22} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \hat{f}_u \\ \hat{g}_d \end{pmatrix}$$

$$\hat{f}_d = \text{SM11} \cdot \hat{f}_u + \text{SM12} \cdot \hat{g}_d$$

$$\hat{g}_u = \text{SM21} \cdot \hat{f}_u + \text{SM22} \cdot \hat{g}_d$$

Besonderheit Streumatrix:

$$\text{SM} = \begin{bmatrix} T_{ud} & R_{du} \\ R_{ud} & T_{du} \end{bmatrix}$$

T_{ud} = Transmission up \rightarrow down

R_{ud} = Reflektion up

R_{du} = Reflektion down

T_{du} = Transmission down \rightarrow up

Zusammenhang Transfermatrix - Streumatrix [26]:

$$SM = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} AD - BC & B \\ -C & 1 \end{bmatrix}$$

Intensität:

$$\langle I \rangle^{+u} = \frac{\rho c}{2} [(1 + M^2) \kappa^+ + M(1 + \kappa^+ \kappa^{+*})] \hat{f}_u \hat{f}_u^* \quad (\text{B.34})$$

$$\langle I \rangle^{-u} = \frac{\rho c}{2} [(1 + M^2) \kappa^- + M(1 + \kappa^- \kappa^{-*})] \hat{g}_u \hat{g}_u^* \quad (\text{B.35})$$

$$\langle I \rangle^{+d} = \frac{\rho c}{2} [(1 + M^2) \kappa^+ + M(1 + \kappa^+ \kappa^{+*})] \hat{f}_d \hat{f}_d^* \quad (\text{B.36})$$

$$\langle I \rangle^{-d} = \frac{\rho c}{2} [(1 + M^2) \kappa^- + M(1 + \kappa^- \kappa^{-*})] \hat{g}_d \hat{g}_d^* \quad (\text{B.37})$$

Fall I (bezogen auf stromauf):

$$\hat{f}_u \neq 0$$

$$\hat{g}_d = 0$$

Somit:

$$\hat{f}_d = SM11 \cdot \hat{f}_u$$

$$\hat{g}_u = SM21 \cdot \hat{f}_u$$

bzw.

$$\frac{\hat{f}_d}{\hat{f}_u} = SM11$$

$$\frac{\hat{g}_u}{\hat{f}_u} = SM21$$

Flüsse:

(positive Richtung von $\langle I \rangle^A$ zeigt in das Element hinein)

$$0 = \langle I \rangle^{+u} - \langle I \rangle^{-u} + \langle I \rangle^A - \langle I \rangle^{+d} \quad | : \langle I \rangle^{+u}$$

$$0 = 1 - \frac{\langle I \rangle^{-u}}{\langle I \rangle^{+u}} + \frac{\langle I \rangle^A}{\langle I \rangle^{+u}} - \frac{\langle I \rangle^{+d}}{\langle I \rangle^{+u}}$$

$$\frac{\langle I \rangle^A}{\langle I \rangle^{+u}} = \frac{\langle I \rangle^{-u}}{\langle I \rangle^{+u}} + \frac{\langle I \rangle^{+d}}{\langle I \rangle^{+u}} - 1$$

Einsetzen:

$$\frac{\langle I \rangle^A}{\langle I \rangle^{+u}} = \frac{\frac{\hat{\rho}c}{2} [(1+M^2)\kappa_- + M(1+\kappa^-\kappa^{-*})]}{\frac{\hat{\rho}c}{2} [(1+M^2)\kappa^+ + M(1+\kappa^+\kappa^{+*})]} \cdot \frac{\hat{g}_u \hat{g}_u^*}{\hat{f}_u \hat{f}_u^*} + \frac{\frac{\rho c}{2} [(1+M^2)\kappa^+ + M(1+\kappa^+\kappa^{+*})]}{\frac{\hat{\rho}c}{2} [(1+M^2)\kappa^+ + M(1+\kappa^+\kappa^{+*})]} \cdot \frac{\hat{f}_d \hat{f}_d^*}{\hat{f}_u \hat{f}_u^*} - 1$$

Kürzen und Zusammenfassen:

$$\frac{\langle I \rangle^A}{\langle I \rangle^{+u}} = \underbrace{\frac{(1+M^2)\kappa^- + M(1+\kappa^-\kappa^{-*})}{(1+M^2)\kappa^+ + M(1+\kappa^+\kappa^{+*})}}_K \cdot \underbrace{\frac{\hat{g}_u \hat{g}_u^*}{\hat{f}_u \hat{f}_u^*}}_{SM21 \cdot SM21^*} + \underbrace{\frac{\hat{f}_d \hat{f}_d^*}{\hat{f}_u \hat{f}_u^*}}_{SM11 \cdot SM11^*} - 1$$

mit:

$$\begin{aligned} SM11 \cdot SM11^* &= |SM11^2| \\ SM21 \cdot SM21^* &= |SM21^2| \end{aligned}$$

folgt:

$$\frac{\langle I \rangle^A}{\langle I \rangle^{+u}} = K \cdot |SM21^2| + |SM11^2| - 1$$

Wenn $M = 0$:

$$K = \frac{\kappa^-}{\kappa^+}$$

κ^\pm :

$$\begin{aligned} \kappa^+ &= +\sqrt{1 - \left(\frac{k^r}{k}\right)^2} \\ \kappa^- &= -\sqrt{1 - \left(\frac{k^r}{k}\right)^2} \end{aligned}$$

eingesetzt:

$$K = -\frac{\sqrt{1 - \left(\frac{k^r}{k}\right)^2}}{\sqrt{1 - \left(\frac{k^r}{k}\right)^2}} = -1$$

daraus folgt:

$$\frac{\langle I \rangle^A}{\langle I \rangle^{+u}} = -|SM_{21}|^2 + |SM_{11}|^2 - 1$$

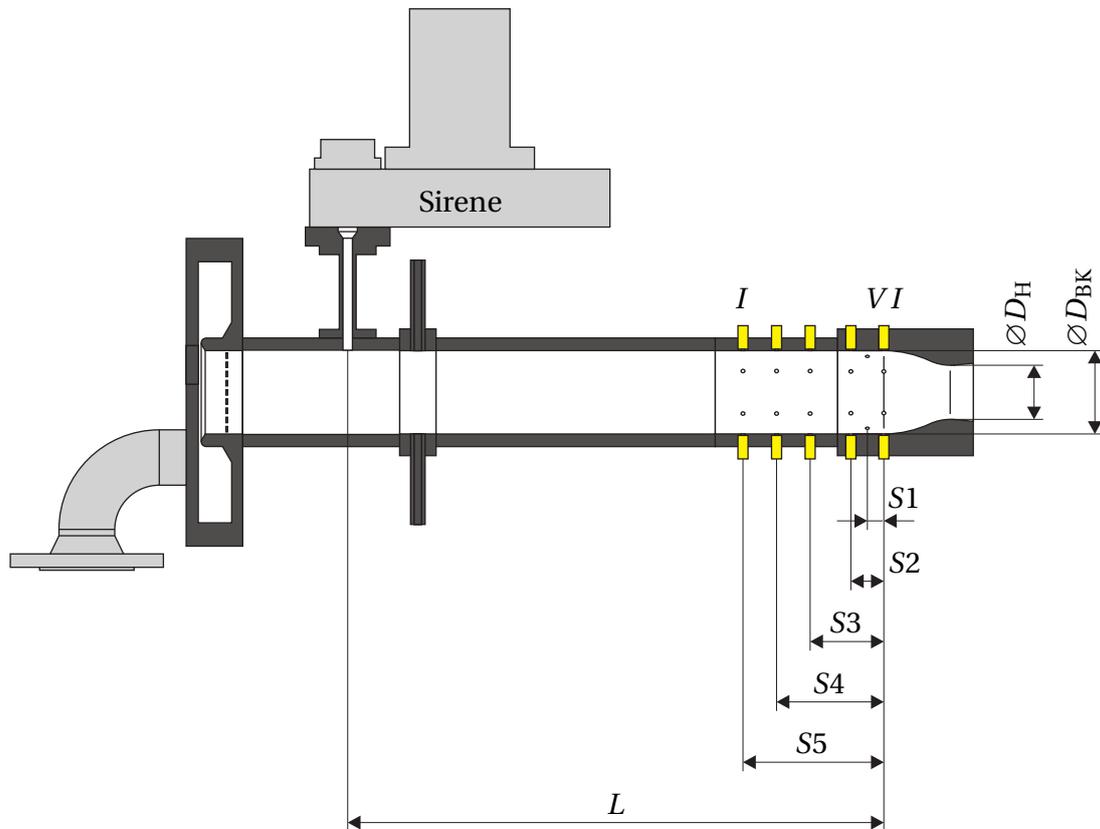
Für Fall II (bezogen auf stromab) ergibt sich:

$$\frac{\langle I \rangle^A}{\langle I \rangle^{-d}} = \frac{1}{K} \cdot |SM_{12}|^2 + |SM_{22}|^2 - 1$$

C Anhang: Versuchsstand und Messtechnik

Im Folgenden sind die verschiedenen experimentellen Konfigurationen aufgeführt. Es sind jeweils die verwendeten Anlagenteile grafisch dargestellt und beschrieben. Ergänzend dazu sind die relevanten Abmessungen und Anlagenparameter angegeben.

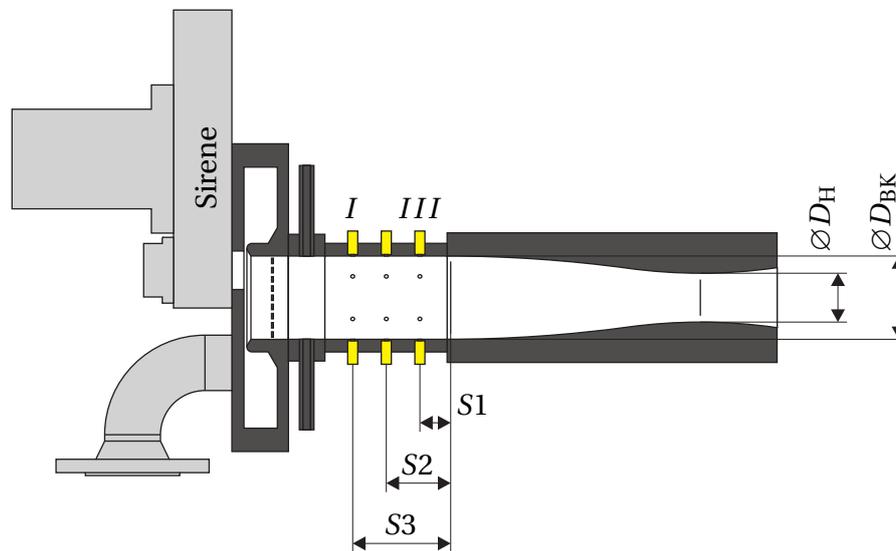
C.1. Admittanz, Düse A



Aufbau:	Düse A
Abmessungen:	$D_{BK} = 92 \text{ mm}$ $D_H = 60 \text{ mm}$ $L = 580 \text{ mm}$ $S1 = 18 \text{ mm}$ $S2 = 36 \text{ mm}$ $S3 = 81 \text{ mm}$ $S4 = 117 \text{ mm}$ $S5 = 153 \text{ mm}$
Parameter:	$\dot{m}_{HL} = 1.150 \text{ kg/s}$ $\dot{m}_{SL} = 0.065 \text{ kg/s}$ $p_{BK} = 1.850 \text{ bar}$ $T_{BK} = 280 \text{ K}$

Ebene	x [mm]	ϑ [°]	Durchgang 1 Sensor-ID	Durchgang 2 Sensor-ID	Durchgang 3 Sensor-ID	Durchgang 4 Sensor-ID
I	0	0	9504			
		60	9505			
		120				9504
		180			9505	
		240				9505
		300				
II	36	0				9504
		60		9504		
		120				10450
		180				10450
		240				9507
		300	10450			
III	72	0	9506			
		60				9507
		120	9507	9507		
		180		9506		
		240				9506
		300				
IV	117	0				9509
		60				9510
		120				9509
		180				9511
		240				9510
		300				
V	135	30				
		150	9509	9509		
		270	9510	9510		
VI	153	0	9511	9511		
		60	9512			
		120		9512		
		180	10449	10449	10449	10449
		240				9511
		300				9512
Düse	153					

C.2. Admittanz, Düse B



Aufbau: Düse B

Abmessungen: $D_{BK} = 92 \text{ mm}$
 $D_H = 64 \text{ mm}$

$S1 = 36 \text{ mm}$

$S2 = 81 \text{ mm}$

$S3 = 117 \text{ mm}$

Parameter: $\dot{m}_{HL} = 1.000 \text{ kg/s}$

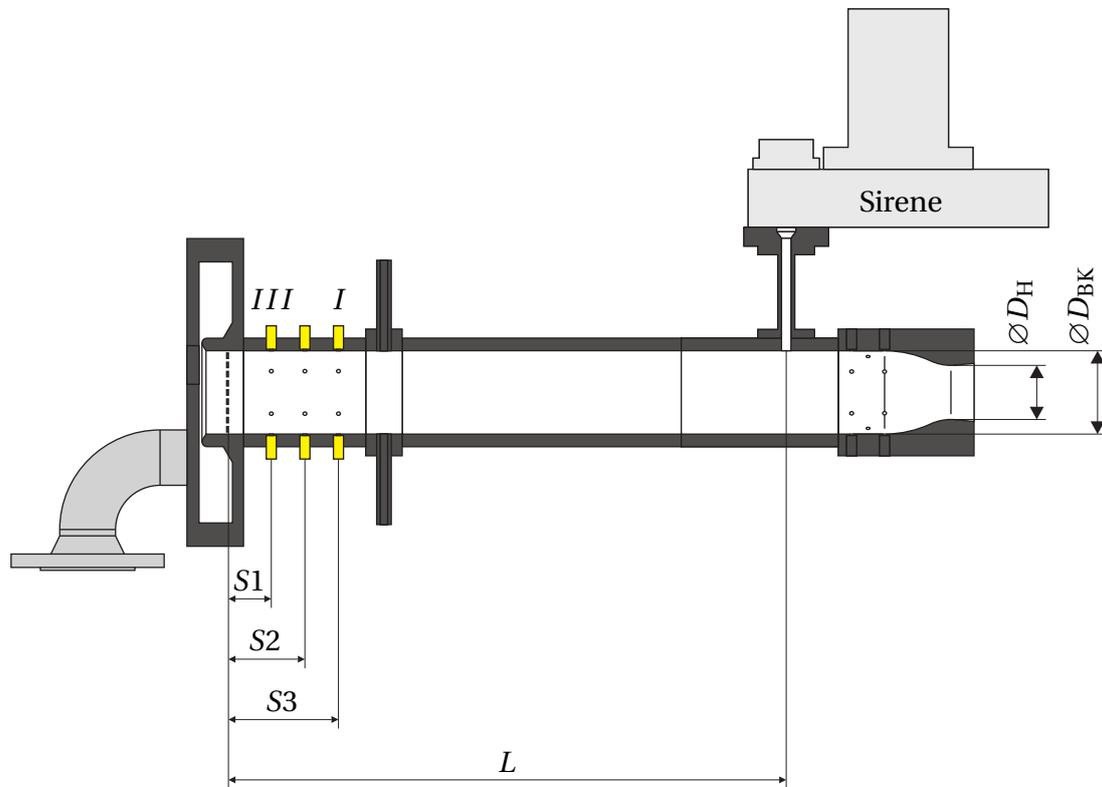
$\dot{m}_{SL} = 0.065 \text{ kg/s}$

$p_{BK} = 1.850 \text{ bar}$

$T_{BK} = 280 \text{ K}$

Ebene	x [mm]	ϑ [°]	Sensor-ID
I	0	0	12184
		60	12249
		120	12250
		180	12251
		240	
		300	
II	36	0	12252
		60	
		120	
		180	12253
		240	
		300	12254
III	72	0	12255
		60	12256
		120	12257
		180	12258
		240	12259
		300	12260
Düse	117		

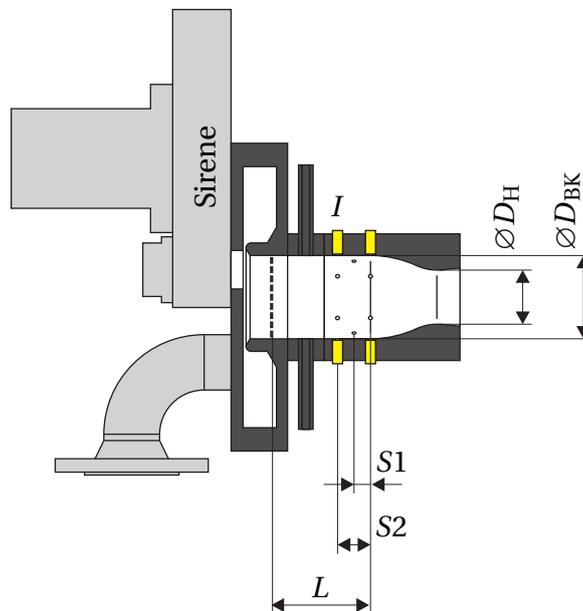
C.3. Admittanz, Faceplate



Aufbau:	Düse A
Abmessungen:	$D_{BK} = 92 \text{ mm}$
	$D_H = 60 \text{ mm}$
	$L = 601 \text{ mm}$
	$S_1 = 46 \text{ mm}$
	$S_2 = 82 \text{ mm}$
	$S_3 = 118 \text{ mm}$
Parameter:	$\dot{m}_{HL} = 1.150 \text{ kg/s}$
	$\dot{m}_{SL} = 0.065 \text{ kg/s}$
	$p_{BK} = 1.850 \text{ bar}$
	$T_{BK} = 280 \text{ K}$

Ebene	x [mm]	ϑ [°]	Durchgang 1 Sensor-ID	Durchgang 2 Sensor-ID
I	0	0	10449	10449
		60		9511
		120		9510
		180	9511	
		240	9510	
		300		9506
II	36	0		10450
		60	10450	
		120	9504	
		180		9504
		240	9507	
		300		9507
III	72	0	9509	
		60		9509
		120	9505	
		180		9505
		240	9512	9512
		300	9506	
Faceplate	117			

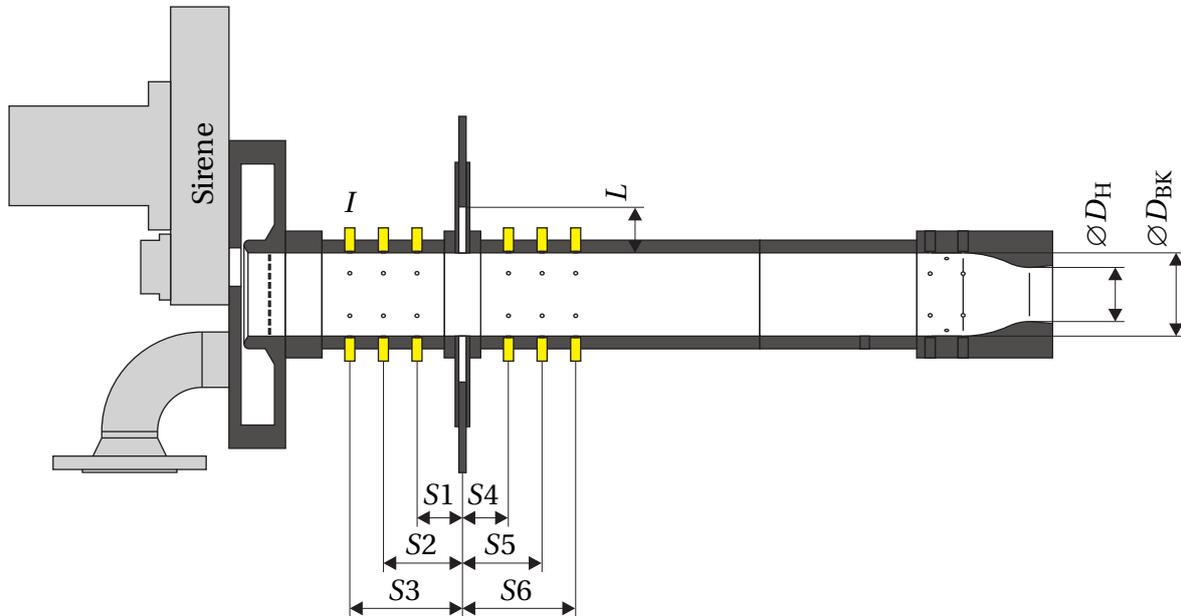
C.4. Dämpfung



Aufbau:	Düse A
Abmessungen:	$D_{BK} = 92 \text{ mm}$
	$D_H = 60 \text{ mm}$
	$L = 107 \text{ mm}$
	$S1 = 18 \text{ mm}$
	$S2 = 36 \text{ mm}$
Parameter:	$\dot{m}_{HL} = 1.150 \text{ kg/s}$
	$\dot{m}_{SL} = 0.065 \text{ kg/s}$
	$p_{BK} = 1.850 \text{ bar}$
	$T_{BK} = 280 \text{ K}$

Ebene	x [mm]	ϑ [°]	Sensor-ID
I	0	0	10449
		60	9504
		120	9506
		180	10450
		240	9510
		300	9512
II	18	30	
		150	9511
		270	9509
III	36	0	
		60	9505
		120	
		180	
		240	
		300	9507
Düse	36		

C.5. Transfermatrix Absorber, Anregung von stromauf, ohne Durchströmung



Aufbau: Düse A

Abmessungen: $D_{BK} = 92$ mm

$D_H = 60$ mm

$L = 0, 25, 30, 35, 40, 45$ mm

$S1 = 50$ mm

$S4 = 50$ mm

$S2 = 86$ mm

$S5 = 86$ mm

$S3 = 122$ mm

$S6 = 122$ mm

Parameter: $\dot{m}_{HL} = 1.150$ kg/s

$\dot{m}_{SL} = 0.065$ kg/s

$p_{BK} = 1.850$ bar

$T_{BK} = 280$ K

Stromauf				Stromab				
Ebene	x [mm]	ϑ [°]	Sensor-ID	Ebene	x [mm]	ϑ [°]	Sensor-ID	
I	0	0	12184	IV	172	0	9504	
		60				9505		
		120				120		
		180				12249	180	9506
		240				12251	240	9507
		300				12260	300	9509
II	36	0	12252	V	208	0	9510	
		60				60		
		120				12253	120	9511
		180				180		
		240				12250	240	
		300				300		
III	72	0	12255	VI	244	0	10449	
		60				12256	60	
		120				12257	120	
		180				12258	180	10450
		240				12259	240	
		300				12254	300	12262
Referenz	122							

C.6. Verwendete Messtechnik

Tabelle C.1.: Verwendete Messwerterfassungshardware

Anzahl	Hersteller	Typ	Kanäle gesamt	Merkmale	Verwendung
3	National Instruments	PXI-4472	24	Simultane Messwerterfassung	Dynamischer Druck
1	National Instruments	PCI-6229	32	Sequentielle Messwerterfassung	Prozessgrößen

Tabelle C.2.: Verwendete Messhardware

Hersteller	Typ	Verwendung
PCB Piezotronics	M106B	Dynamischer Druck
JUMO	Diverse	Statischer Druck

D Anhang: Weitere Ergebnisse

D.1. Einfluss der Düsengeometrie auf den akustischen Fluss

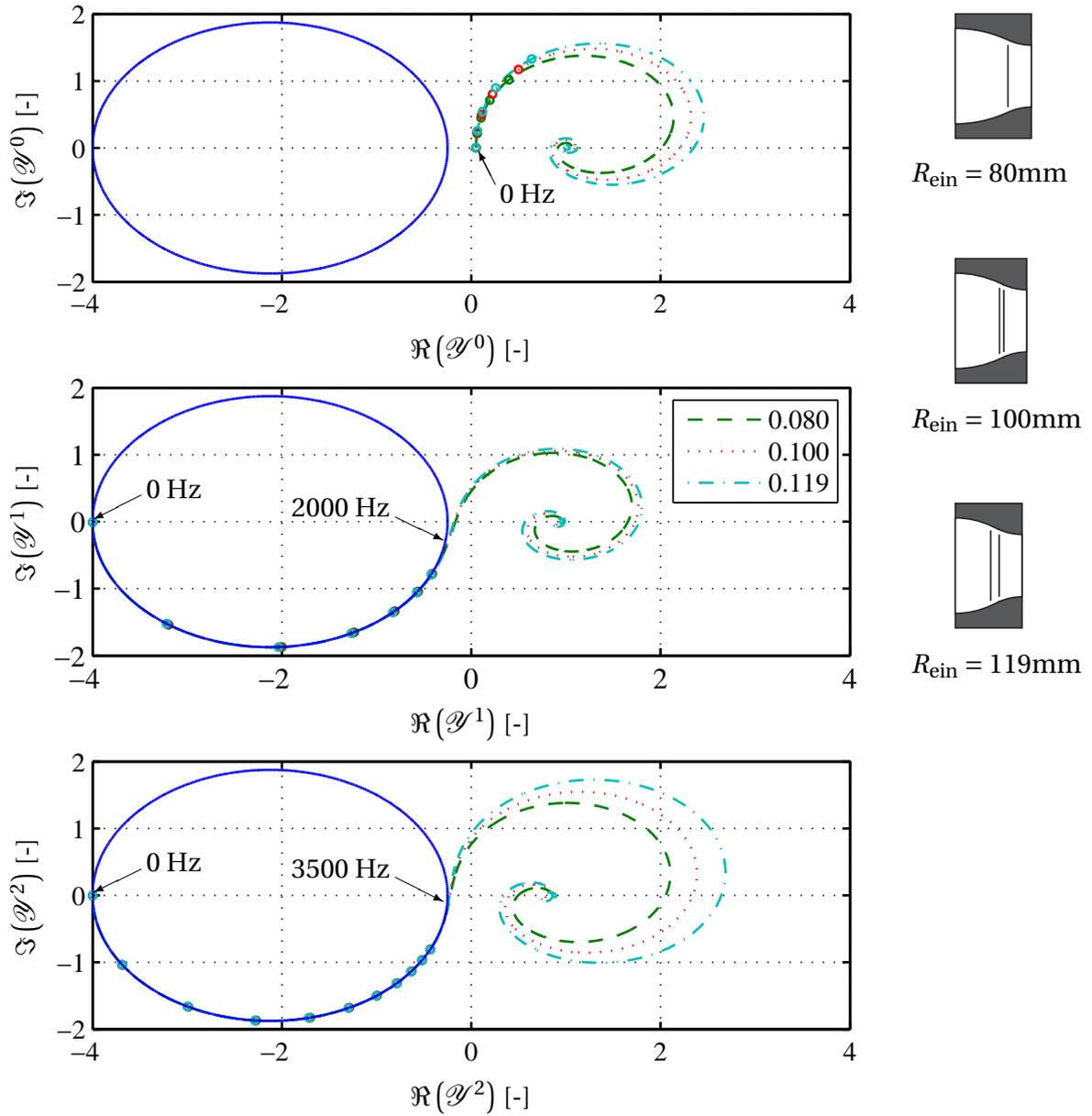


Abbildung D.1.: Trajektorien der Düsenadmittanz von Düse A für unterschiedliche Eingangsradien R_{ein} , Indikatoren alle 500 Hz. Die Größen für D_{BK} , D_{H} , R_{aus} , und α_{konv} und können aus Tabelle 4.3 entnommen werden.

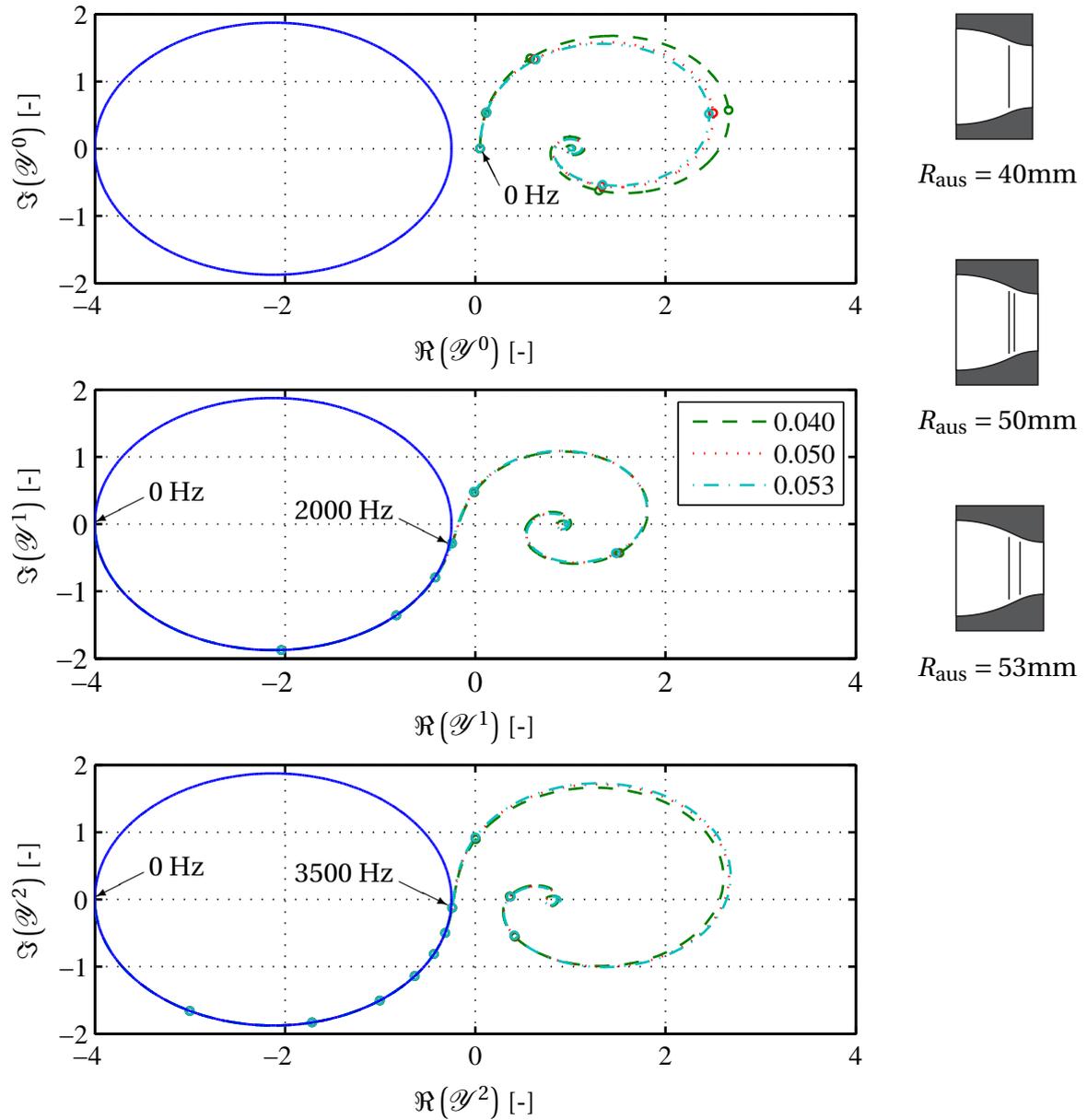


Abbildung D.2.: Trajektorien der Düsenadmittanz von Düse A für Ausgangsradien R_{aus} , Indikatoren alle 500 Hz. Die Größen für D_{BK} , D_{H} , R_{ein} , und α_{konv} und können aus Tabelle 4.3 entnommen werden.

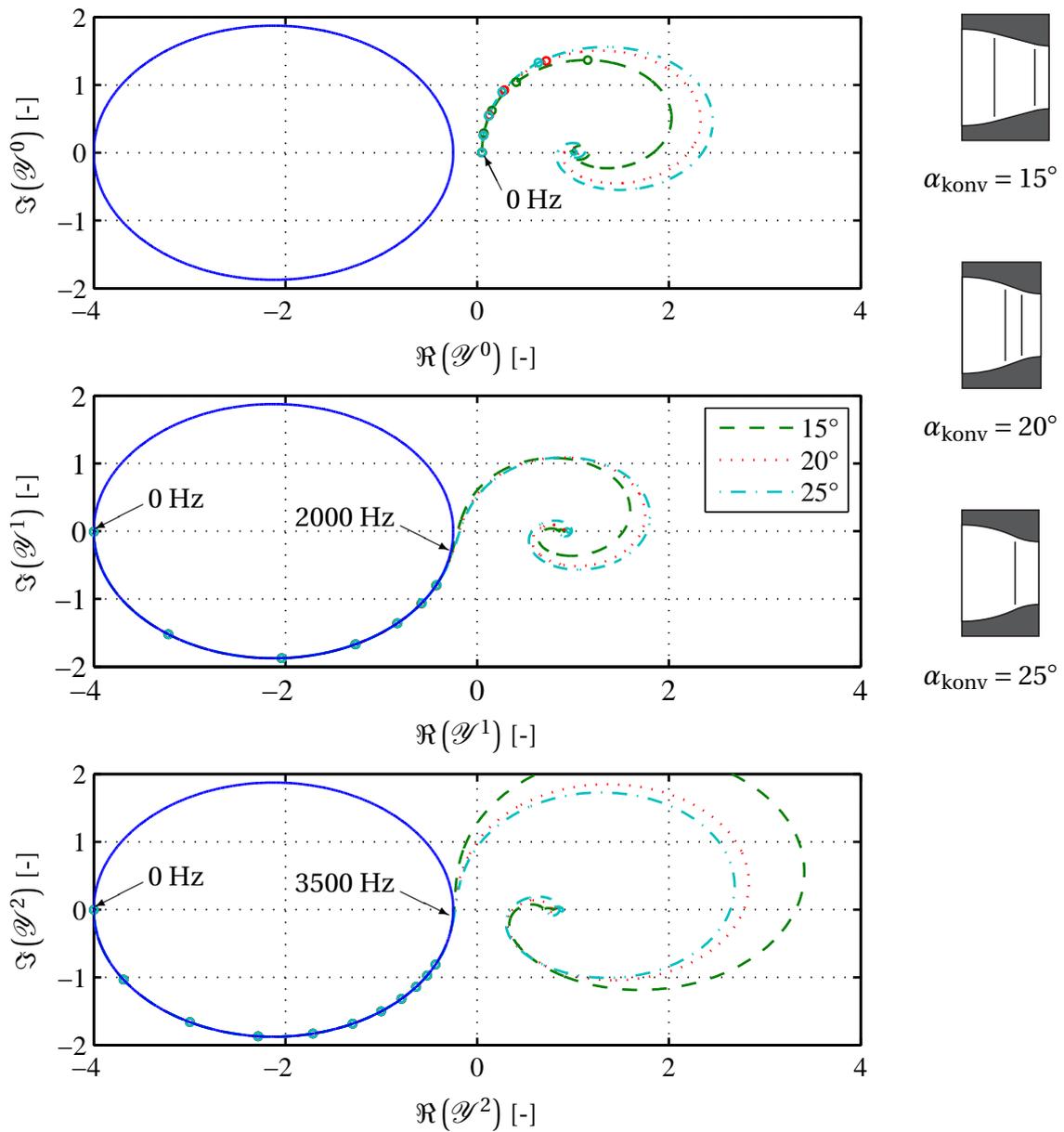


Abbildung D.3.: Trajektorien der Düsenadmittanz von Düse A für unterschiedliche Kegelwinkel α_{konv} , Indikatoren alle 500 Hz. Die Größen für D_{BK} , D_{H} , R_{ein} , und R_{aus} und können aus Tabelle 4.3 entnommen werden.

D.2. Faceplateadmittanzen

Tabelle D.1.: Parameter des Polynoms der Faceplateadmittanzen für Modenklasse 00 und 10

	$m = 0 / n = 0$		$m = 1 / n = 0$	
	$\Re(\mathcal{Y}_{001}^{\text{FP}})$	$\Im(\mathcal{Y}_{00}^{\text{FP}})$	$\Re(\mathcal{Y}_{10}^{\text{FP}})$	$\Im(\mathcal{Y}_{10}^{\text{FP}})$
a_1	-2.42E-18	-6.07E-19	7.69E-19	-3.82E-18
a_2	-2.81E-14	7.45E-15	-1.51E-14	6.94E-14
a_3	-1.33E-10	-3.68E-11	1.21E-10	-5.19E-10
a_4	-3.27E-07	-9.30E-08	-5.05E-07	2.05E-06
a_4	-4.43E-04	-1.27E-04	1.16E-03	-4.49E-03
a_6	-3.11E-01	8.87E-02	-1.40E+01	5.19E+01
a_7	-8.98E+01	-2.53E+02	6.93E+02	-2.47E+03
Startfrequenz	1000 Hz		2100 Hz	
Endfrequenz	3000 Hz		4000 Hz	

D.3. Reflektionsfaktoren von Faceplate und Düse A

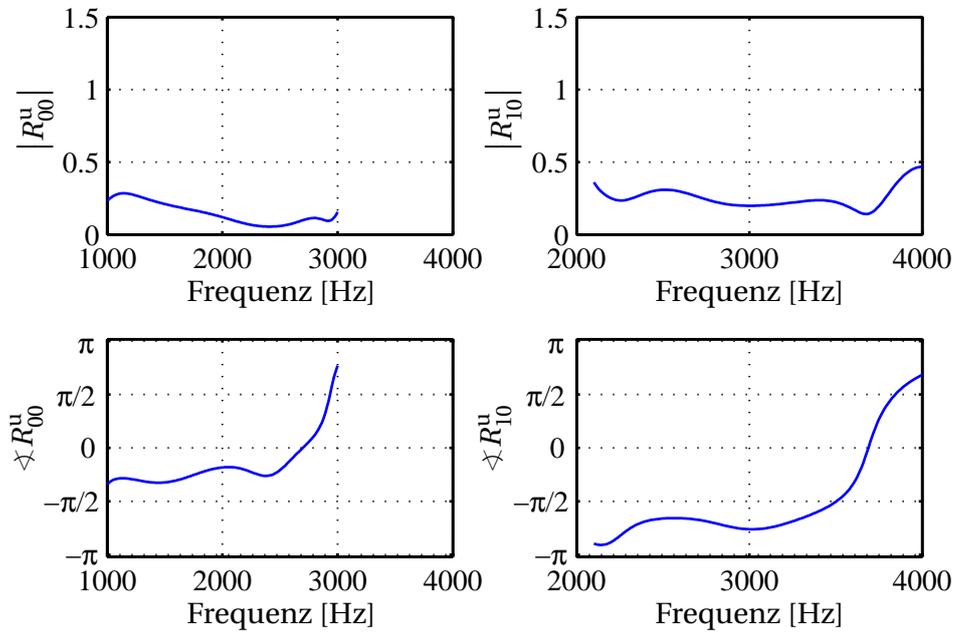


Abbildung D.4.: Reflektionsfaktoren Faceplate

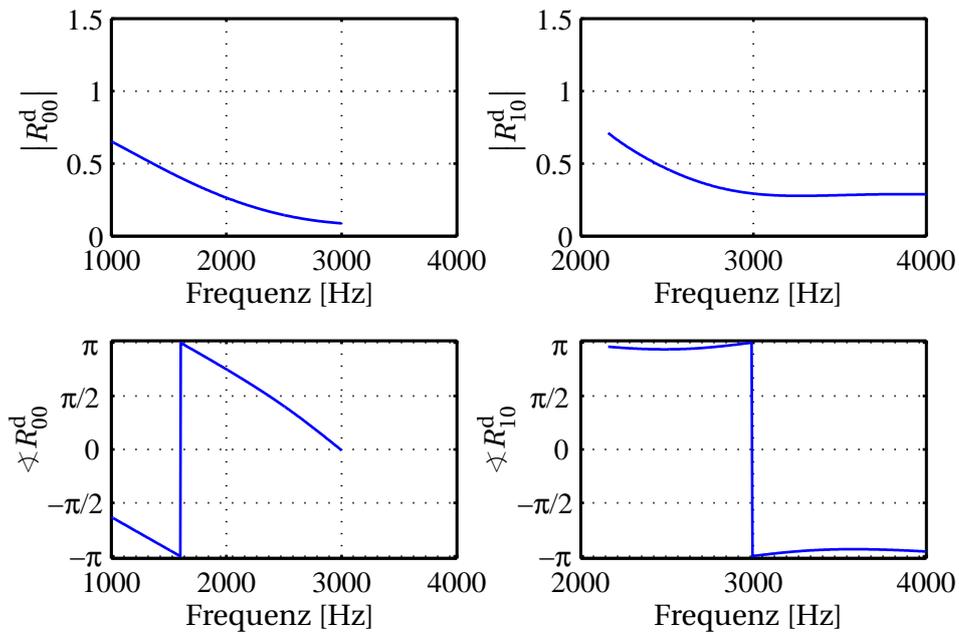


Abbildung D.5.: Reflektionsfaktoren Düse A

D.4. Abklingendes Drucksignal

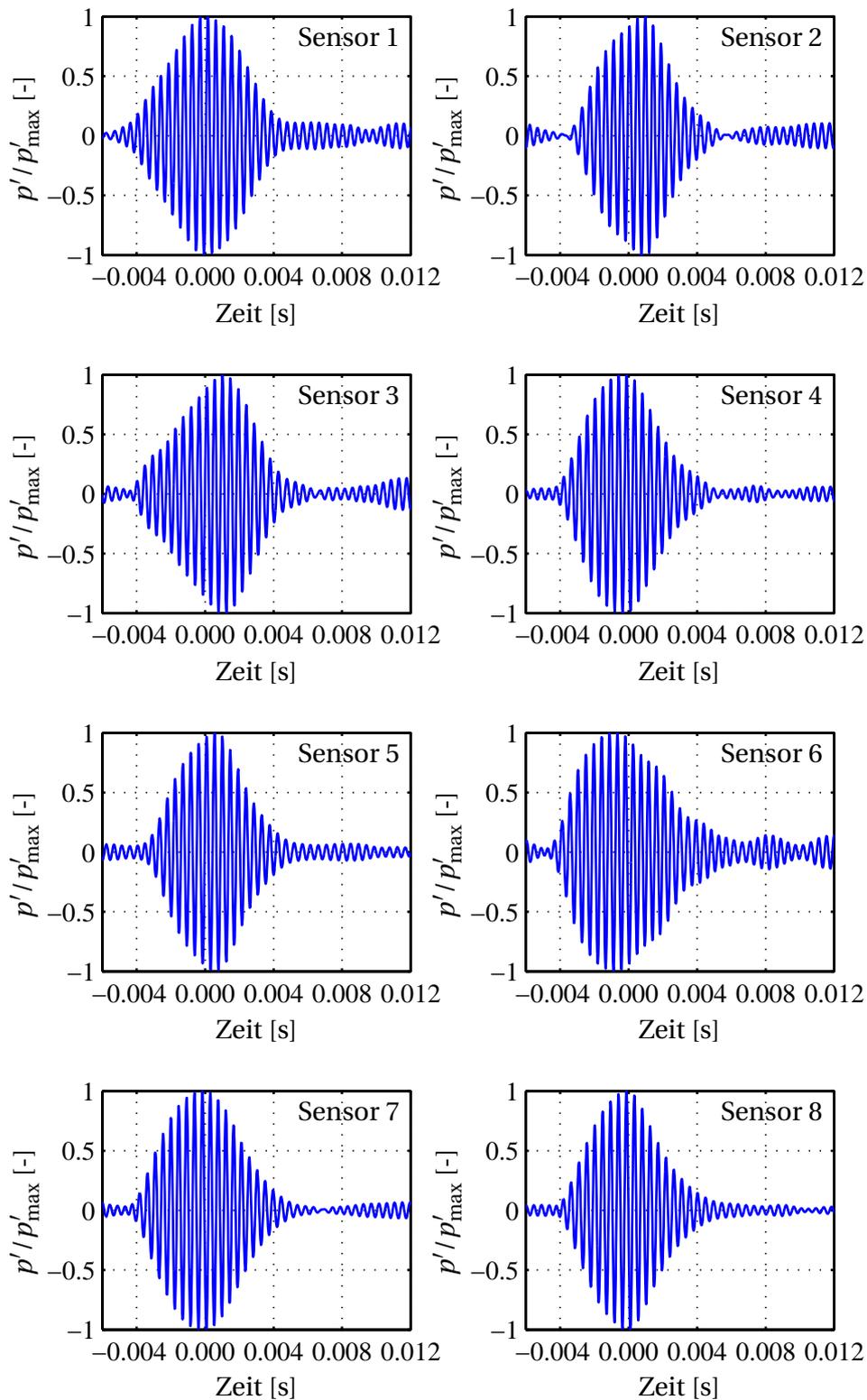


Abbildung D.6.: Drucksignal, ohne Absorber bei 2160 Hz

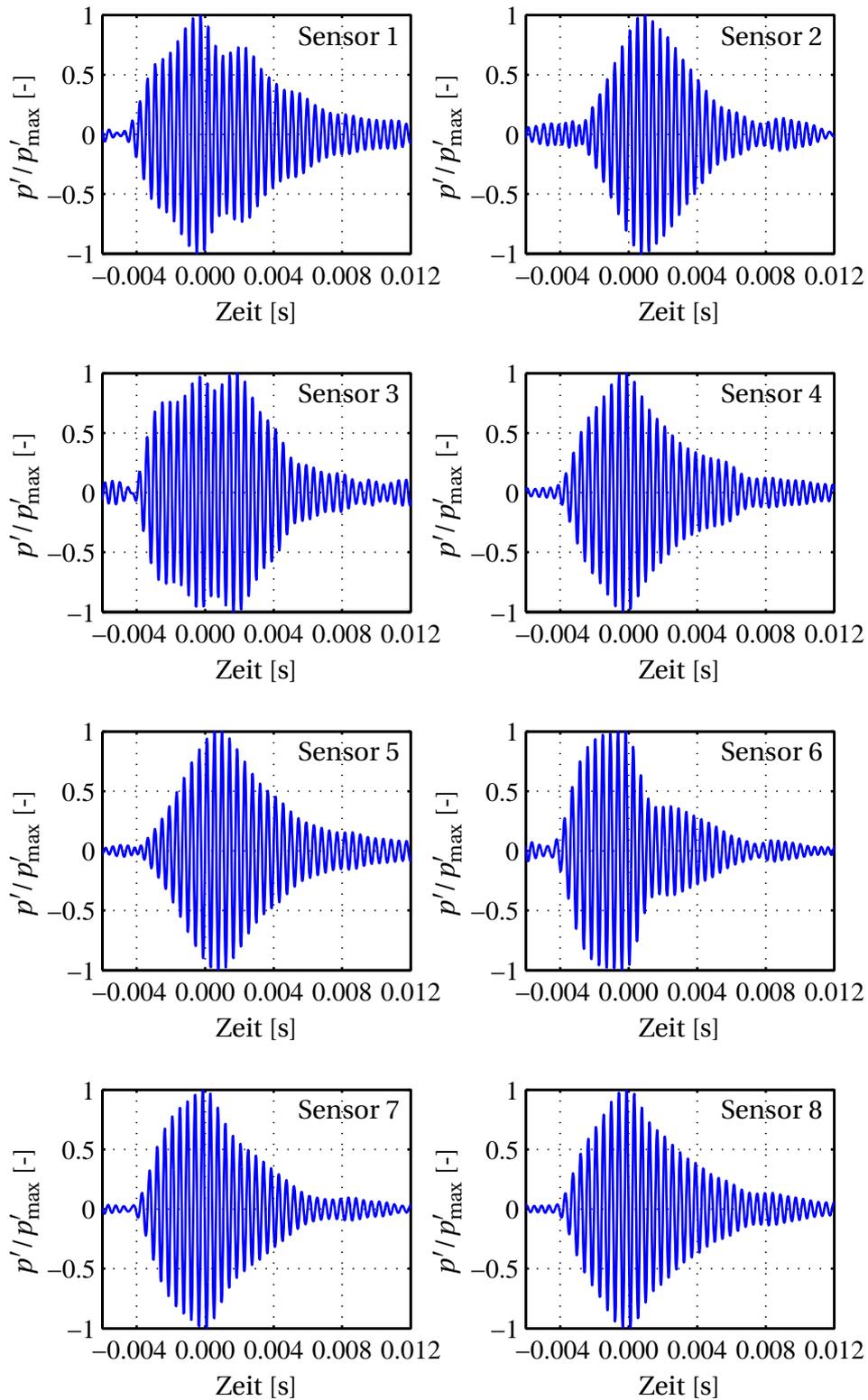


Abbildung D.7.: Drucksignal, mit Absorber bei 2230 Hz

D.5. Absorbertransfermatrizen

Im Folgenden sind Absorbertransfermatrizen für die Modenklasse 10 dargestellt. Gezeigt sind sowohl die Rohdaten als auch geglättete Verläufe von Amplituden und Phasen der Elemente TM11, TM12, TM21 und TM22. Die Glättung erfolgte mit Hilfe der *Curve Fitting Toolbox* von MATLAB unter Verwendung von Gauß-, Exponential- und Splinefunktionen. Datenpunkte, die eindeutig als unphysikalische Ausreißer identifiziert werden konnten, fanden für die Glättung keine Verwendung. In den Diagrammen sind zur besseren Orientierung jeweils die cut-on Frequenzen $\omega_{10}^{\text{co}} \cdot 2\pi$ und $\omega_{20}^{\text{co}} \cdot 2\pi$, sowie die $\lambda/4$ -Frequenzen der Absorber eingezeichnet.

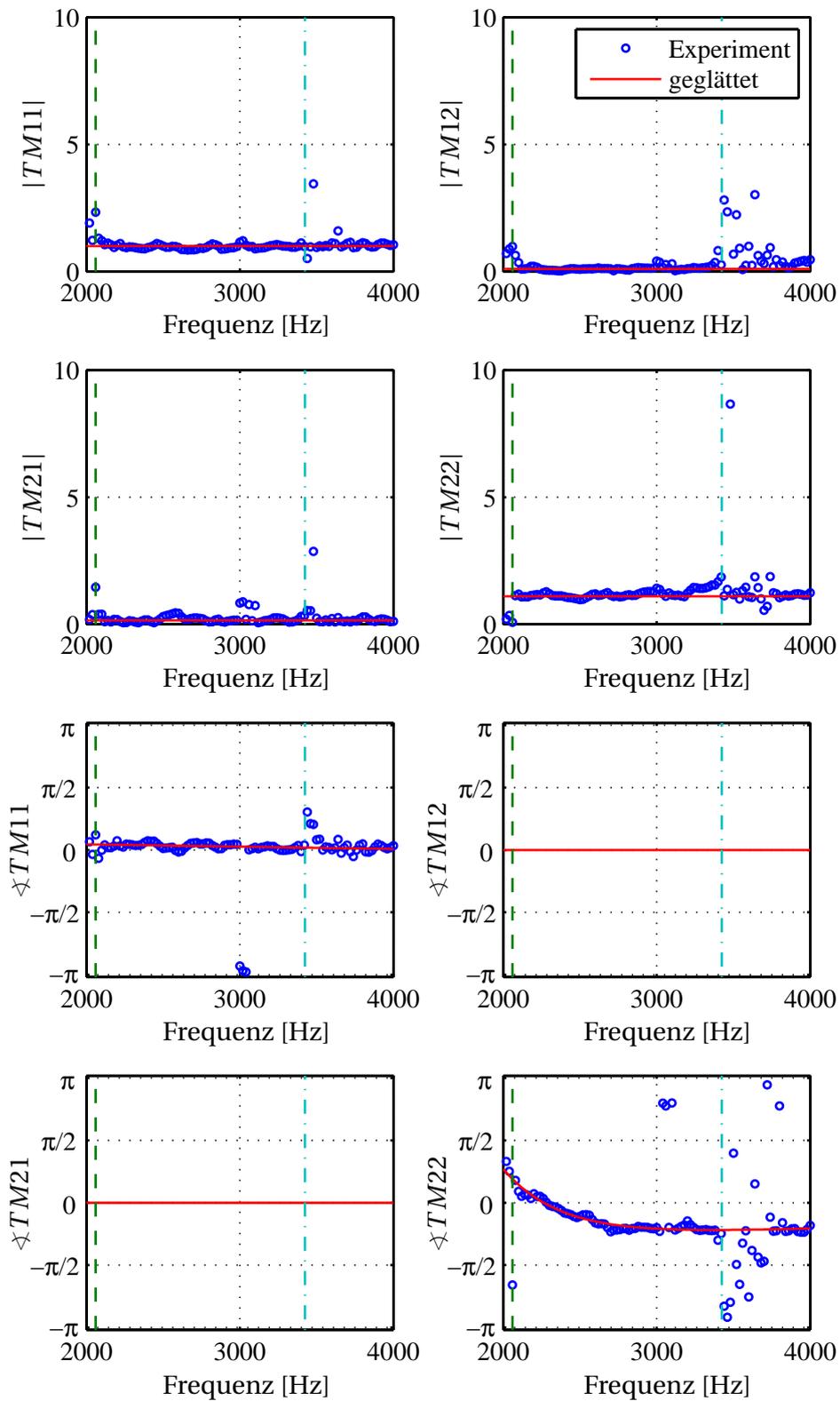


Abbildung D.8.: $m = 1 / n = 0$, Absorberlänge 0 mm

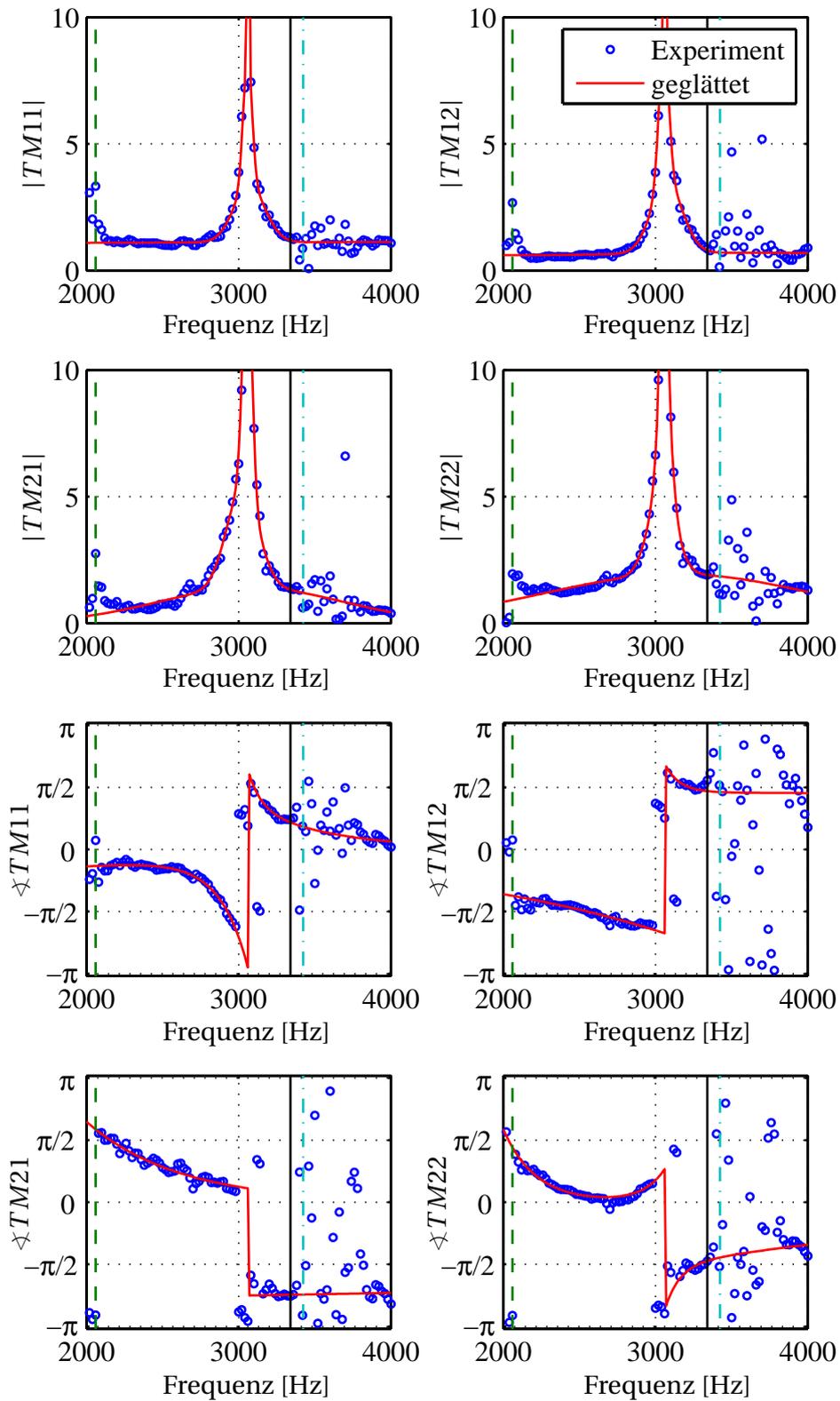


Abbildung D.9.: $m = 1 / n = 0$, Absorberlänge 25 mm

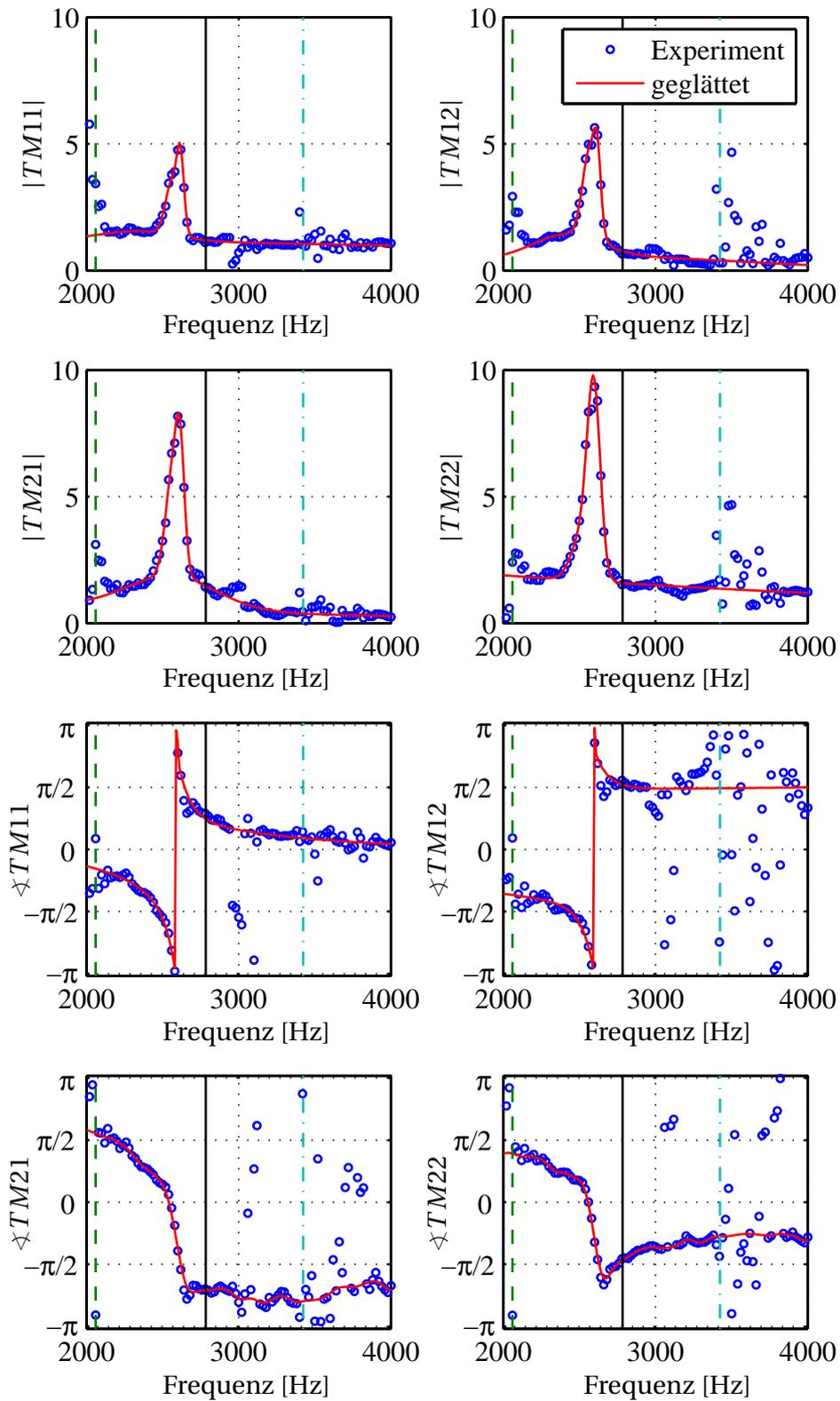
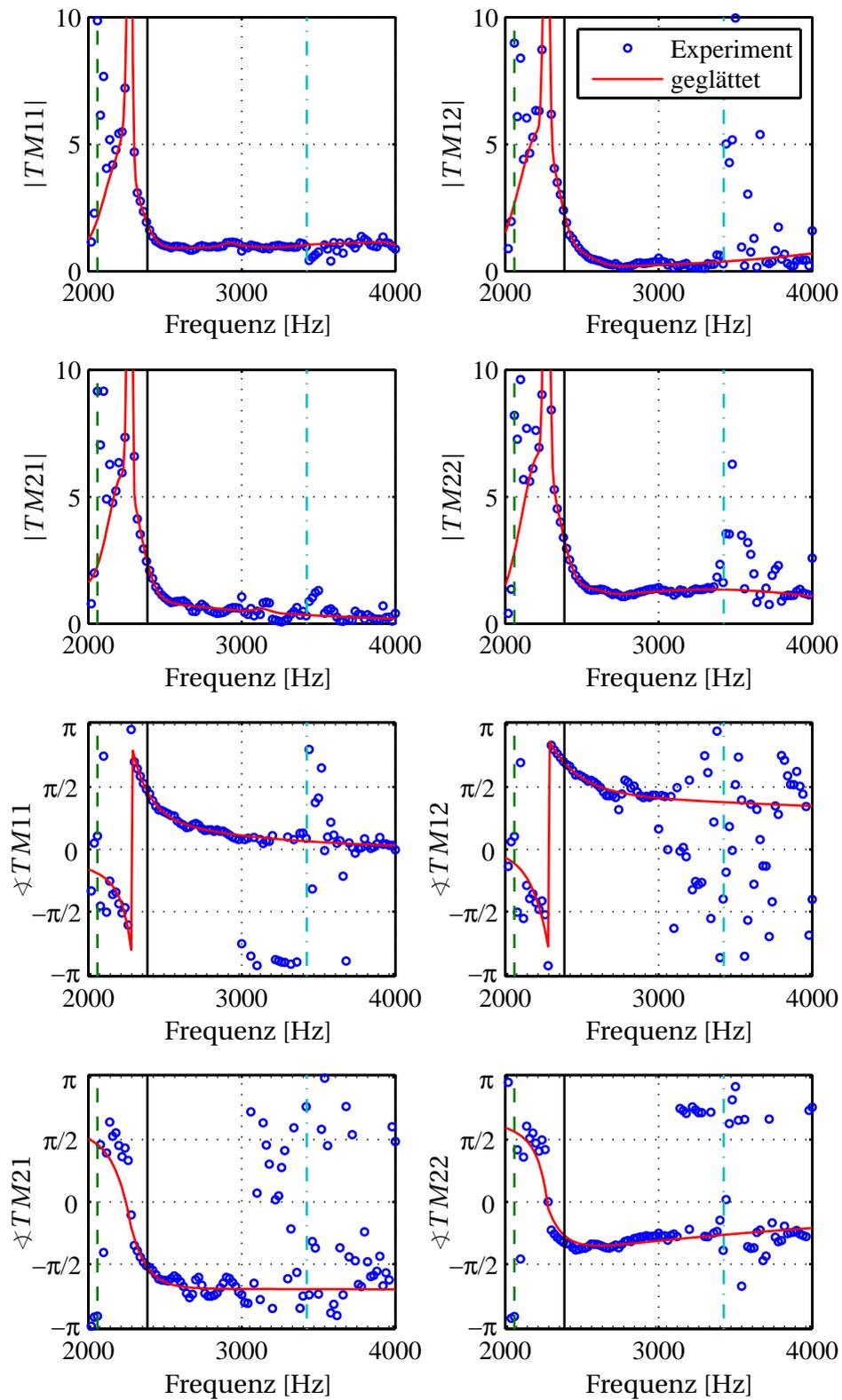


Abbildung D.10.: $m = 1 / n = 0$, Absorberlänge 30 mm

Abbildung D.11.: $m = 1 / n = 0$, Absorberlänge 35 mm

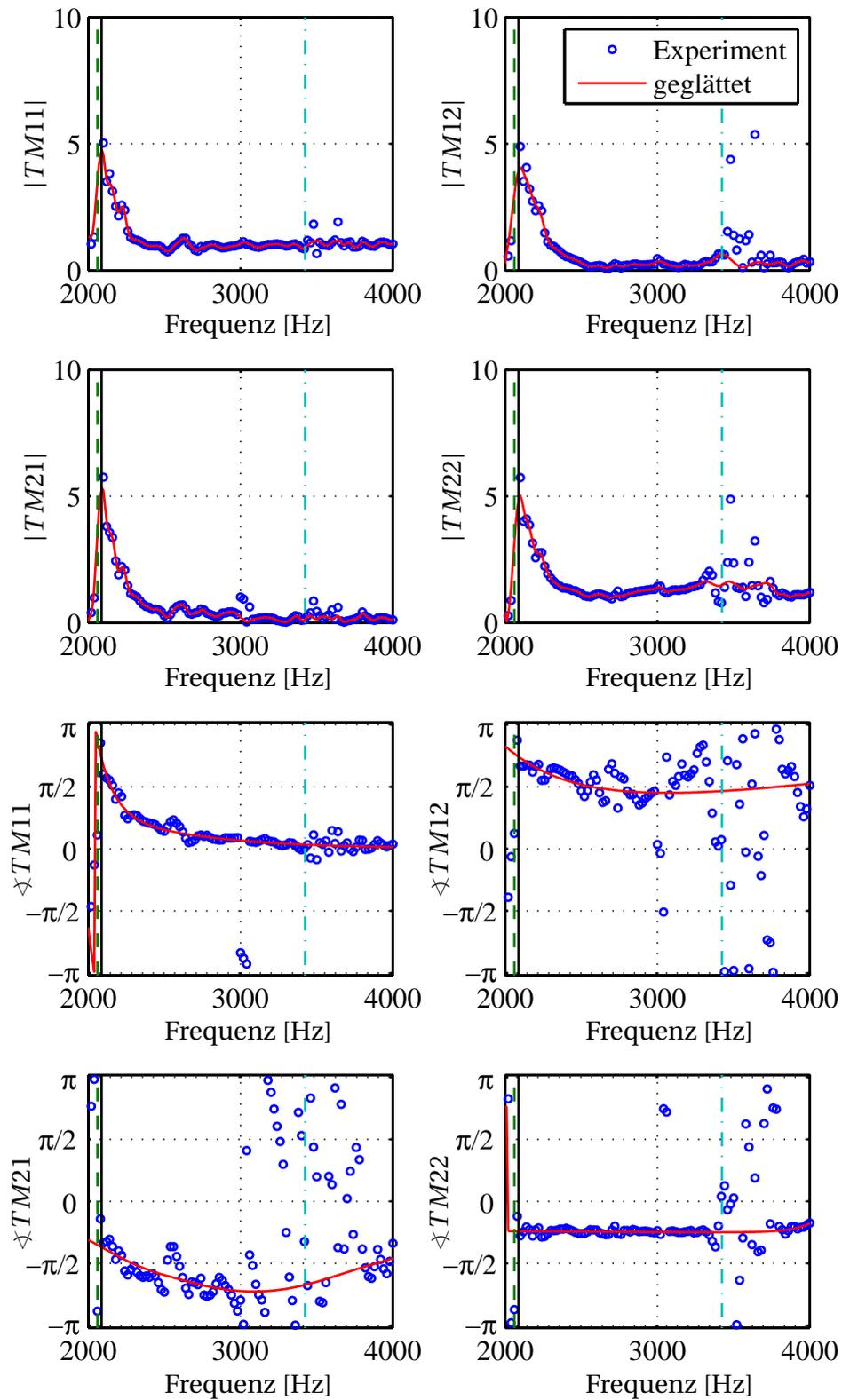
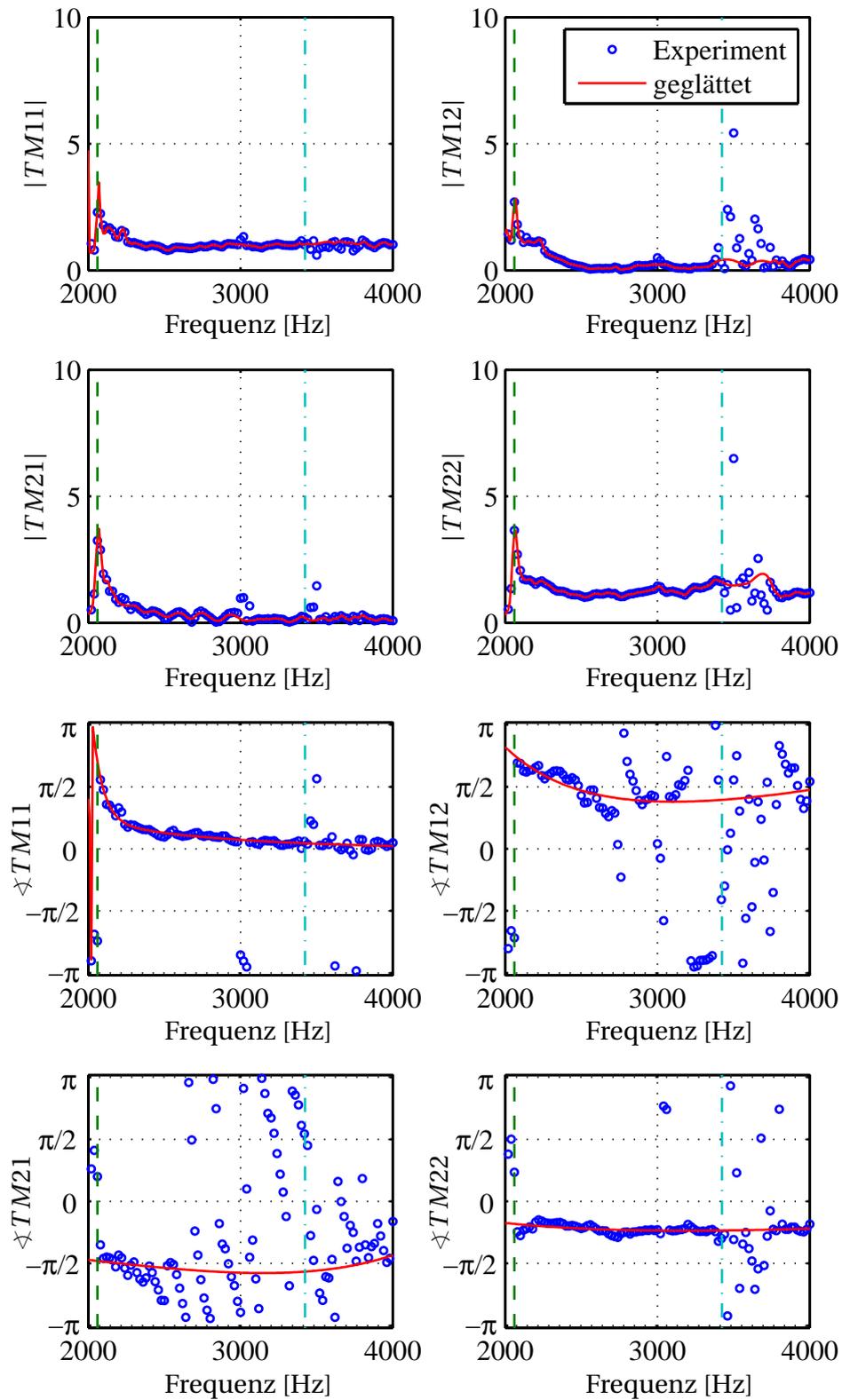


Abbildung D.12.: $m = 1 / n = 0$, Absorberlänge 40 mm

Abbildung D.13.: $m = 1 / n = 0$, Absorberlänge 45 mm

D.6. Energiebilanz an Absorbern

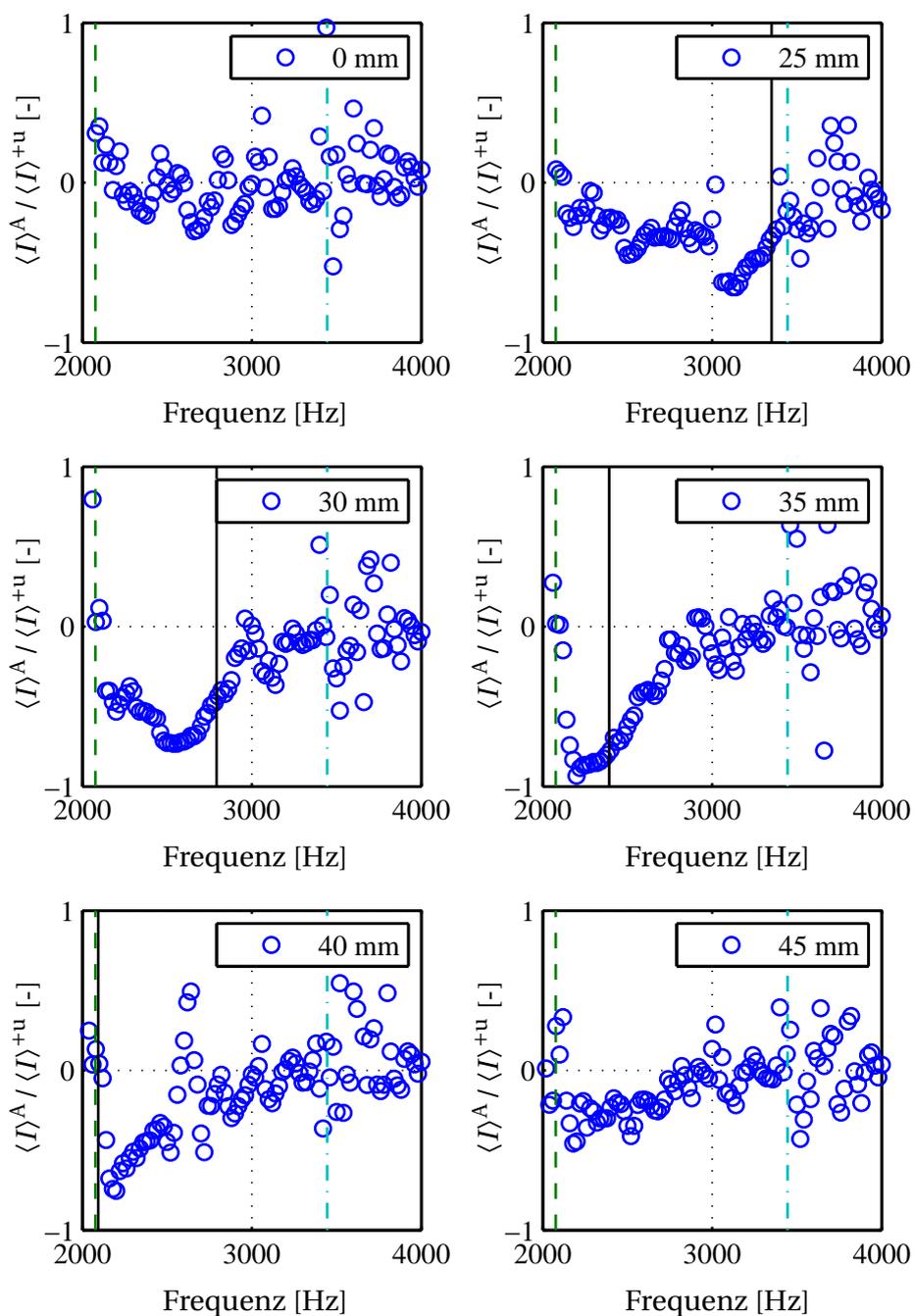


Abbildung D.14.: $m = 1 / n = 0$, Verlauf der Dissipation im Absorberelement, bezogen auf stromauf (Fall I)

E Anhang: Verzeichnis betreuter Studienarbeiten

Im Rahmen dieser Dissertation entstanden am Lehrstuhl für Thermodynamik (TD) in den Jahren von 2004 bis 2012 unter wesentlicher wissenschaftlicher, fachlicher und inhaltlicher Anleitung des Autors die im Folgenden aufgeführten studentischen Arbeiten, in welchen verschiedene Fragestellungen zur Akustik in Raketentriebwerken untersucht wurden und deren Ergebnisse in Teilen in das vorliegende Dokument eingeflossen sind. Der Autor dankt allen Studierenden für ihr Engagement bei der Unterstützung dieser wissenschaftlichen Arbeit.

Studierender	Studienarbeit
Thomas Fiala	Bestimmung der Dämpfung akustischer Wellen in einer Raketenbrennkammer, abgegeben im Oktober 2010, eingeflossen in die Abschnitte, 2.6, 3.7, 6.1.2, 6.2.1, B.4, B.6, B.7

Literaturverzeichnis

- [1] ALEMELA, P. R.: *Measurement and Scaling of Acoustic Transfer Matrices of Premixed Swirl Flames*, Lehrstuhl für Themodynamik, Technische Universität München, Diss., 2009
- [2] ANSORGE, R. ; OBERLE, H. J. ; ROTHE, K. ; TH., S. : *Mathematik für Ingenieure 2*. Wiley-VCH Verlag, 2011
- [3] ARIANESPACE: Flight 142: Inquiry Board report and action plan / Arianespace. 7. August 2001. – Press Release
- [4] BERENDT, G. ; WEIMAR, E. : *Mathematik für Physiker*. Bd. 2. 2. Wiley-VCH, 1990. – ISBN: 3-527-28078-2
- [5] BOHN, D. ; DEUCKER, E. : An Acoustical Model to Predict Combustion Driven Oscillations. In: *20th International congress on Combustion Engines*, 1993
- [6] BRONSTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A. ; GROSCHE, G. (Hrsg.) ; ZIEGLER, V. (Hrsg.) ; ZIEGLER, D. (Hrsg.): *Taschenbuch der Mathematik*. 25. Auflage. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft Stuttgart/Leipzig und Nauka Verlag Moskau, 1991
- [7] BUFFUM, F. G. ; DEHORITY, G. L. ; SLATES, R. O. ; W., P. E.: Acoustic Losses of a Subscale, Cold-Flow Rocket Motor for Various J Values / U. S. Naval Ordnance Test Station. 1966 (8971). – NOTS Technical Publication 3932
- [8] CAMPOREALE, S. M. ; FORT, A. ; B., F. ; M., M. ; A., F. : Numerical Simulation of the Acoustic Pressure Field in an Annular Combustion Chamber With Helmholtz Resonators. In: *ASME Turbo Expo 2004: Power for Land, Sea, and Air (GT2004)* 1 (2004), Nr. GT2004-54139, S. 713–724
- [9] CANDEL, S. : Acoustic Conservation Principles and an Application to Plane and Modal Propagation in Nozzles and Diffusers. In: *Journal of Sound and Vibration* 41 (1975), Nr. 2, S. 207–232

- [10] CROCCO, L. ; SIRIGNANO, W. A.: Behaviour of Supercritical Nozzles under Three-Dimensional Oscillatory Conditions / North Atlantic Treaty Organisation. 1967 (117). – AGARDograph
- [11] CULICK, F. : Stability of Three-Dimensional Motions in a Combustion Chamber. In: *Combustion Science and Technology* 10 (1975), S. 109–124
- [12] DAHMEN, W. ; REUSKEN, A. : *Numerik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*. Springer-Verlag Berlin, 2008
- [13] DELFS, J. ; BAUER, M. ; GROGGER, H. ; LUMMER, M. ; LAUKE, T. : Numerical Simulation of Aerodynamic Noise with DLR's Aeroacoustic Code PIANO / Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt, Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik, Abteilung Technische Akustik. Braunschweig, Germany, February 2007. – Forschungsbericht
- [14] DORNBERGER, W. : *Peenemünde: Die Geschichte der V-Waffen*. Ullstein, 1989
- [15] DOWLING, A. P.: The Calculation of Thermoacoustic Oscillations. In: *Journal of Fluid Mechanics* 394 (1999), S. 51–72
- [16] ECKSTEIN, J. : *On the Mechanisms of Combustion Driven Low-Frequency Oscillations in Aero-Engines*, Technische Universität München, Institut für Energietechnik, Lehrstuhl für Thermodynamik, Diss., 2005
- [17] EHRENFRIED, K. : *Skript zur Vorlesung Strömungsakustik I*. Technische Universität Berlin, 2003
- [18] ETTNER, F. : *Analysis of the Acoustic Field in an Annular Combustor*, Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München, Diplomarbeit, March 2007
- [19] EVESQUE, S. : Acoustic Energy Density and Fluxes - Application to Spinning and Azimuthally Standing Modes in an Annular Combustor / Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München. 2002. – Forschungsbericht
- [20] EVESQUE, S. ; W., P. : Low-Order Acoustic Modelling for Annular Combustors: Validation and Inclusion of Modal Coupling. In: *Proceedings of ASME Turbo Expo*, 2002
- [21] FANACA, D. : *Influence of Burner-Burner Interactions on the Flame Dyna-*

- mics in an Annular Combustor*, Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München, Diss., 2009
- [22] FARAGO, Z. ; MARKGRAF, S. : Damping Characteristics of Combustion Chambers Coupled with Acoustic Elements / Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt. 2006. – Forschungsbericht
- [23] FIALA, T. : *Bestimmung der Dämpfung akustischer Wellen in einer Raketenbrennkammer*, Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München, Diplomarbeit, 2010
- [24] FIALA, T. ; KATHAN, R. ; SATTELMAYER, T. : Effective Stability Analysis of Liquid Rocket Combustion Chambers: Experimental Investigation of Damped Admittances. In: *62nd International Astronautical Congress* 62nd International Astronautical Congress, 2011
- [25] FINN, B. S.: *Laplace and the Speed of Sound*. The University of Chicago Press, 1964
- [26] FISCHER, A. : *Hybride, thermoakustische Charakterisierung von Drallbrennern*, Technische Universität München, Institut für Energietechnik, Lehrstuhl für Thermodynamik, Diss., 2004
- [27] FLUENT INC.: *Fluent 6.2 Documentation*. 10 Cavendish Court, Lebanon, NH 03766, USA, 2005
- [28] FREITAG, E. : *On the Measurement and Modelling of Flame Transfer Functions at Elevated Pressure*, Lehrstuhl für Thermodynamik, Technische Universität München, Diss., 2009
- [29] GRÖNING, S. ; OSCHWALD, M. ; SATTELMAYER, T. : Selbst erregte tangentielle Moden in einer Raketenbrennkammer unter Repräsentativen Bedingungen. In: *Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress*. Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR) Institut für Raumfahrtantriebe 74239 Hardthausen, Deutschland, 2012. – Berlin, Germany
- [30] HAMILTON, M. F. ; BLACKSTOCK, D. T.: *Nonlinear Acoustics*. Academic Press, 1997. – ISBN 0-12-321860-8
- [31] HARRJE, D. T. ; REARDON, F. H.: *Liquid Propellant Rocket Combustion Instability*, NASA SP-194 / National Aeronautics and Space Administration. 1972. – Forschungsbericht

- [32] HUNGERBÜHLER, N. ; DEPARTEMENT MATHEMATIK, EIDGENÖSSICHE TECHNISCHE HOCHSCHULE ZÜRICH (Hrsg.): *Einführung in partielle Differentialgleichung: Für Ingenieure, Chemiker und Naturwissenschaftler*. vdf Hochschulverlag AG, 1997
- [33] KAESS, R. : *Thermoacoustic Stability Analysis from Open Loop Transfer Functions based on LES*, Technische Universität München, Institut für Energietechnik, Lehrstuhl für Thermodynamik, Diss., 2010
- [34] KATHAN, R. ; KAESS, R. ; PIERINGER, J. ; SATTELMAYER, T. : Nozzle Admittance for Higher Modes. In: *Deutscher Luft- und Raumfahrtkongress*, 2010. – Hamburg, Germany
- [35] KATHAN, R. ; MORGENWECK, D. ; KAESS, R. ; SATTELMAYER, T. : Validation of the Computation of Rocket Nozzle Admittances with Linearized Euler Equations. In: *4th European Conference for Aerospace Sciences*, 2011. – St. Petersburg, Russia
- [36] KINSLEY, L. E. ; FREY, A. R.: *Fundamentals of Acoustics*. John Wiley & Sons, 2000
- [37] KLINGEN, B. : *Fouriertransformation für Ingenieur- und Naturwissenschaftler*. Springer-Verlag Berlin, 2001
- [38] MORFEY, C. : Acoustic Energy in Non-Uniform Flows. In: *Journal of Sound and Vibration* 14(2) (1970), S. 159–170
- [39] MORSE, P. ; INGARD, K. : *Theoretical Acoustics*. Princeton University Press, 1968
- [40] MUNJAL, M. L.: *Acoustics of Ducts and Mufflers*. John Willey & Sons, 1987
- [41] MUNJAL, M. L. ; DOIGE, A. G.: Theory of a Two Source-Location Method for Direct Experimental Evaluation of the Four-Pole Parameters of an Aeroacoustic Element. In: *Journal of Sound and Vibration* Vol. 141 (1990)
- [42] NASA HUMAN SPACE FLIGHT: *Pogo Suppression System*. <http://spaceflight.nasa.gov/shuttle/reference/shutref/orbiter/prop/pogo.html>. Version: November 2011
- [43] NATIONAL INSTRUMENTS: *LabVIEW*. <http://www.ni.com/labview/>. Version: November 2011
- [44] NEUNERT, U. : *Thermoakustische Stabilität einer Reisemobilheizung*, Tech-

- nische Universität München, Institut für Energietechnik, Lehrstuhl für Thermodynamik, Diss., 2010
- [45] OSCHWALD, M. ; FARAGO, Z. : Acoustics of Rocket Combustors Equipped with Absorber Rings. In: *44th Joint Propulsion Conference, July 2008, Hartford, CT, 2008*
- [46] PANKIEWITZ, C. : *Hybrides Berechnungsverfahren für thermoakustische Instabilitäten von Mehrbrennersystemen*, Technische Universität München, Institut für Energietechnik, Lehrstuhl für Thermodynamik, Diss., 2004
- [47] PASCHEREIT, C. ; SCHUERMANS, B. ; POLIFKE ; W., O. Mattson: Measurement of Transfer Matrices and Source Terms of Premixed Flames. In: *Int. Gas Turbine and Aeroengine Congr. and Exp., Indianapolis, Indiana, USA No. 99-GT-133 (1999)*. – ASME
- [48] PCB PIEZOTRONIC INC: *High Sensitivity Pressure Sensors*. http://www.synotech.de/cms/UserFiles/File/PCB_451_Druck-HiSens_110601.pdf. Version: März 2012
- [49] PCB PIEZOTRONIC INC: *ICP® SENSORS*. http://www.pcb.com/techsupport/tech_signal.php. Version: März 2012
- [50] PIERINGER, J. E.: *Simulation Selbsterregter Verbrennungsschwingungen in Raketenschubkammern im Zeitbereich*, Technische Universität München, Institut für Energietechnik, Lehrstuhl für Thermodynamik, Diss., 2008
- [51] POLIFKE, W. : Advances in Aeroacoustics and Applications. In: *VKI Lecture Series 2004-05*
- [52] RAYLEIGH, L. : The Theory of Sound. (1945), S. 224–235
- [53] RIENSTRA, S. W. ; HIRSCHBERG, A. ; RIENSTRA, S. W. (Hrsg.) ; HIRSCHBERG, A. (Hrsg.): *An Introduction to Acoustics*. Eindhoven University of Technology, 2010
- [54] RUBINSKY, V. R.: Combustion Instability in the RD-0110 Engine. In: YANG, V. (Hrsg.) ; ANDERSON, W. E. A. (Hrsg.): *Liquid Rocket Engine Combustion Instability* Bd. 169. AIAA, 1995, Kapitel 4
- [55] SATTELMAYER, T. : *Skriptum zur Vorlesung Thermodynamik II: Technische Thermodynamik - Verbrennung - Gas-Dampf-Gemische - Gasdynamik*. Lehrstuhl für Thermodynamik, 2008

- [56] SATTELMAYER, T. ; POLIFKE, W. : Combustion Science and Technology. In: *Taylor and Francis Group* 175 (2003), S. 453–476
- [57] SCHMIDT, S. ; ADAMS, N. A.: *Skriptum zur Vorlesung Gasdynamik*. Technische Universität München, Lehrstuhl für Aerodynamik, 2011. – 23 S.
- [58] SCHÖNWALD, N. : *Effiziente Simulation der Schallausbreitung in anwendungsnahen Triebwerkskonfigurationen*, Technische Universität Berlin, Fachgebiet Numerische Methoden der Thermofluidodynamik, Institut für Strömungsmechanik und Technische Akustik, Diss., 2010
- [59] SKUDRZYK, E. : *The Foundations of Acoustics. Basic Mathematics and Basic Acoustics*. Springer-Verlag KG, 1972
- [60] STICHLMAIR, J. ; VDI (Hrsg.): *VDI-Wärmeatlas*. Springer-Verlag Berlin, 2006
- [61] SUTTON, G. (Hrsg.) ; BIBLARZ, O. (Hrsg.): *Rocket Propulsion Elements*. Wiley, J., 2010
- [62] WERKMANN, M. ; BARGENDE, M. (Hrsg.): *Schriftenreihe des Instituts für Verbrennungsmotoren und Kraftfahrwesen der Universität Stuttgart*. Bd. 13: *Zur Entstehung und Quantifizierung rauher Geräuschkomponenten von Verbrennungsmotoren*. expert Verlag, 1999. – 55 S.
- [63] WHITHAM, G. B.: *Linear and Nonlinear Waves*. 17. Wiley-Interscience, 1974. – ISBN: 0-471-94090-9
- [64] WIKIMEDIA: *Gruppengeschwindigkeit*. <http://de.wikipedia.org/wiki/Gruppengeschwindigkeit>. Version: Dezember 2012
- [65] WIKIMEDIA: *Riccatische Differentialgleichung*. http://de.wikipedia.org/wiki/Riccatische_Differentialgleichung. Version: März 2012
- [66] ZINN, B. T.: Review of Nozzle Damping in Solid Rocket Instabilities. In: *AIAA/SAE 8th Joint Propulsion Specialist Conference* (1972), Nr. 72-1050
- [67] ZINN, B. T. ; BELL, W. A. ; DANIEL, B. R. ; SMITH JR., A. J.: Experimental Determination of Three-Dimensional Liquid Rocket Nozzle Admittances. In: *AIAA 11* (1973), Nr. 11