Zur Gewinnung minimaler Zustandsraummodelle aus Übertragungsmatrizen

Boris Lohmann

Interne Notiz, Institut für Automatisierungstechnik,

Universität Bremen, 09.09.2002

lohmann@tum.de

Einleitung

Liegt die komplexe Übertragungsfunktion $g(s)$ eines linearen *Eingrößensystems* vor, so kann ein zugehöriges Zustandsraummodell sofort angegeben werden, beispielsweise in Regelungsnormalform oder (nach Partialbruchzerlegung der Übertragungsfunktion) in Diagonalform. Etwas schwieriger gestaltet sich die Aufgabe bei linearen *Mehrgrößensystemen*: Zwar kann man zunächst die einzelnen Elemente $g_{ij}(s)$ der gegebenen komplexen Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$ einzeln und unabhängig voneinander in den Zustandsraum transformieren und dann leicht ein Gesamtmodell zusammensetzen, jedoch entstehen dabei typischerweise Modelle *unnötig hoher Ordnung*¹. Abhilfe kann entweder die anschließende Durchführung einer *Ordnungsreduktion* (siehe z.B. MATLAB: Balancing and Truncation oder Minimal Realization) schaffen, oder der folgende Vorschlag:

Zustandsraummodell durch Partialbruchzerlegung von $\mathbf{G}(s)$

Angestrebt wird hier die Gewinnung eines Zustandsraummodells in Diagonalform (Modalform), d.h.

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}. \quad (1)$$

Die Übertragungsmatrix zu diesem Modell kann man anschreiben als

¹ *Unnötig hohe Ordnung* bedeutet: Das System besitzt nicht steuer- und/oder nicht beobachtbare Anteile (oder zumindest sehr schwach steuer- und/oder beobachtbare Anteile). Ein vollständig steuer- und beobachtbares Modell heißt auch Minimalrealisierung des zugehörigen dynamischen Systems.

$$\mathbf{G}(s) = \sum_{i=1}^n \frac{\mathbf{c}_i \mathbf{b}_i^T}{s - \lambda_i}, \quad (2)$$

worin die Vektoren $\mathbf{c}_i$ die Spalten von $\mathbf{C}$ und $\mathbf{b}_i^T$ die Zeilen von $\mathbf{B}$ bezeichnen. Die dyadischen Produkte $\mathbf{c}_i \mathbf{b}_i^T$ stellen dabei Matrizen vom Range *eins* dar, die man auch als *Residuenmatrizen* bezeichnet. Gleichung (2) stellt eine Partialbruchzerlegung der Übertragungsmatrix dar.

Wenn man annimmt, dass die gegebene Übertragungsmatrix $\mathbf{G}(s)$ keine mehrfachen Pole in ihren Elementen aufweist, so lässt sich eine Partialbruchzerlegung leicht durchführen und lautet

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{R}_1 \frac{1}{s - \lambda_1} + \dots + \mathbf{R}_n \frac{1}{s - \lambda_n}, \quad (3)$$

worin die Residuenmatrizen $\mathbf{R}_i$ bekannt sind.

Ein Vergleich mit (2) zeigt: Genau dann, wenn eine solche Residuenmatrix $\mathbf{R}_i$ den Rang *eins* besitzt, kann sie als dyadisches Produkt $\mathbf{c}_i \mathbf{b}_i^T$ dargestellt werden.

Besitzen *alle* Residuenmatrizen $\mathbf{R}_i$ den Rang eins, so gelangt man von (3) durch Vergleich mit (2) direkt zu einem Modell (1). Besitzt eine Residuenmatrix aber einen Rang größer als eins, so kann sie als Summe mehrerer Rang-eins-Matrizen dargestellt werden, und mit entsprechender Vielfachheit ist der zugehörige Pol als Eigenwert von $\mathbf{A}$ vorzusehen.

Hierin liegt also der Grund für die häufig *zu hohe* Ordnung von so gewonnenen Zustandsraummodellen: Bei der Gewinnung von Übertragungsmatrizen durch Identifikation wird man in der Regel für alle Elemente das gleiche Nennerpolynom ansetzen und identifizieren. Dann werden aber die Residuenmatrizen schon aufgrund von Messfehlern in der Regel einen Rang > 1 aufweisen, obwohl der zugehörige Eigenwert im zugrundeliegenden physikalischen System nur in der Vielfachheit *eins* auftritt.

Abhilfe kann dadurch geschaffen werden, dass alle Residuenmatrizen, gleich welchen Ranges, durch Rang-eins-Matrizen angenähert werden: Dazu führe man zunächst eine Partialbruchzerlegung der durch Identifikation gewonnenen

Übertragungsmatrix durch, wie oben angegeben. Nun wird eine Singulärwertzerlegung jeder Residuenmatrix durchgeführt (Index i weggelassen),

$$\mathbf{R} = \mathbf{T} \Sigma \mathbf{P}^T, \quad (4)$$

worin $\mathbf{T}$ und $\mathbf{P}$ orthogonale Matrizen sind und

$$\Sigma = \text{diag}\{\sigma_1, \dots, \sigma_q\} \quad (5)$$

die absteigend sortierten Singulärwerte umfasst. Nun kann die Residuenmatrix $\mathbf{R}$ durch eine Rang-1-Matrix $\tilde{\mathbf{R}}$ optimal angenähert werden im Sinne

$$J = \text{spur}\{(\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}})(\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}})^T\} \stackrel{!}{=} \min, \quad (6)$$

indem man in (4) die Singulärwerte 2 bis q durch Nullen ersetzt (Literatur: Problem von Eckart-Young). Damit wird

$$\tilde{\mathbf{R}} = \mathbf{t}_1 \mathbf{p}_1^T \sigma_1, \quad (7)$$

worin $\mathbf{t}_1$ die erste Spalte von $\mathbf{T}$ und $\mathbf{p}_1^T$ die erste Zeile von $\mathbf{P}^T$ bezeichnet. (Der dabei gemachte Approximationsfehler² ist übrigens

$$J = \text{spur}\{(\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}})(\mathbf{R} - \tilde{\mathbf{R}})^T\} = \sigma_2^2 + \dots + \sigma_q^2)$$

Mit den Residuenmatrizen (7) anstelle der ursprünglichen resultiert dann ein Zustandsraummodell der gegebenen Übertragungsmatrix $\mathbf{G}$ sofort zu

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x},$$

mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_{11}^T \sigma_{11} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{1p}^T \sigma_{1p} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{t}_{11} \quad \dots \quad \mathbf{t}_{1m}].$$

Dieses Modell ist eine Minimalrealisierung.

² Ist der Approximationsfehler groß, d.h. ist σ_1 nicht wesentlich größer als die anderen Singulärwerte, so ist dies ein Hinweis auf einen tatsächlich *mehrfachen* Eigenwert, und man approximiert $\mathbf{R}$ durch eine Matrix mit Rang > 1 , indem man $\tilde{\mathbf{R}}$ in (7) aus mehreren Rang-eins-Matrizen aufbaut, die dann im Zustandsraummodell zu mehrfachen Eigenwerten führen.