

# Zur Störgrößenaufschaltung im Zustandsraum

On Disturbance Feedforward Control by State Space Methods

Boris Lohmann

*Zur Unterdrückung des Einflusses äußerer Störungen auf die Ausgangsgrößen eines dynamischen Systems ist der Einsatz einer konstanten Störgrößenaufschaltung dann die adäquate Maßnahme, wenn die Störungen meßbar oder beobachtbar sind und über die Gestalt der Störgrößenvverläufe Vorkenntnisse bestehen. In diesem Falle kann das System so gesteuert werden, daß die Störungen unbeobachtbar werden und nach Abklingen der Einschwingvorgänge keine Wirkung auf die Ausgänge haben.*

*Ausgehend von Strecken- und Störmodell wird die Störgrößenaufschaltung auf zwei Wegen hergeleitet, zum einen direkt aus der Zustandsdarstellung und zum anderen mittels Vollständiger Modaler Synthese.*

## Einleitung

Es liege ein lineares zeitinvariantes System mit gleich vielen Stell- wie Ausgangsgrößen in der gängigen Zustandsdarstellung vor,

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{E}\mathbf{z}(t), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (2)$$

worin  $\mathbf{x}(t)$  den  $(n,1)$ -Zustandsvektor,  $\mathbf{u}(t)$  den  $(p,1)$ -Stellgrößenvektor,  $\mathbf{z}(t)$  den  $(r,1)$ -Störgrößenvektor und  $\mathbf{y}(t)$  den  $(p,1)$ -Ausgangsgrößenvektor bezeichnen und  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{E}$  konstante Matrizen passender Dimension sind.

Ziel ist es, den Einfluß der Störgrößen  $\mathbf{z}(t)$  auf die Ausgangsgrößen möglichst zu unterdrücken. Hierzu bestehen verschiedene Möglichkeiten:

1. In seltenen Fällen wirken die Störungen  $\mathbf{z}$  schon ohne zusätzliche Maßnahmen *nicht* auf  $\mathbf{y}$ , und zwar genau dann, wenn alle Spalten von  $\mathbf{E}$  als Linearkombination derjenigen Eigenvektoren  $\mathbf{v}$  von  $\mathbf{A}$  darstellbar sind, für die  $\mathbf{C}\mathbf{v} = \mathbf{0}$  gilt, [6], - eine sehr restriktive Bedingung.
2. Liegt eine derartige Unstörbarkeit (=Störkopplung) von  $\mathbf{y}$  nicht vor, so kann man versuchen, durch eine *konstante Zustandsrückführung*  $\mathbf{u}(t) = -\mathbf{R}\mathbf{x}(t)$  entweder Unstörbarkeit herbeizuführen (was allerdings



**Universität Bremen**

Institut für Automatisierungstechnik

Prof. Dr. Ing. habil. Boris Lohmann

Interner Bericht

Lo97/01

Seite 1

ebenfalls an restriktive Bedingungen geknüpft ist, [6]) oder sogenannte *stationäre Unstörbarkeit* zu erzielen [8, 9] (was lediglich  $\text{rang}[\mathbf{B};\mathbf{E}] = p+r$  erfordert). Im Allgemeinen ist die Messung aller Zustandsgrößen erforderlich.

3. Weitere Möglichkeiten der Störminderung ergeben sich durch klassische Regelungsstrukturen, bei denen ein Modell der Störung(en) in den Regler integriert wird (Inneres-Modell-Prinzip, [4]). So sorgt der I-Anteil eines Reglers im *Standard-Regelkreis* dafür, daß *konstante* Störungen  $z$  stationär von  $y$  ferngehalten werden. Allerdings beeinflusst der I-Anteil Dynamik und Stabilitätsverhalten tendenziell ungünstig.
4. Da Störungen bei der letztgenannten Struktur zunächst bis zu den Systemausgängen vordringen müssen, um im Regler gegensteuernde Maßnahmen auszulösen, ergeben sich dynamische Verbesserungen, wenn die Störungen  $z$  unmittelbar *gemessen* werden können und auf die Eingänge des Systems rückgeführt werden. Eine solche Struktur heißt *Störgrößenaufschaltung* [1, 2, 4]. Sie hat sich unter anderem in einer industriellen Anwendung des Autors hervorragend bewährt [7]. Neben der verbesserten Schnelligkeit hat die Störgrößenaufschaltung den Vorteil, das Stabilitätsverhalten der Strecke nicht zu verändern, da keine geschlossenen Wirkungslinien entstehen (Bild 1).

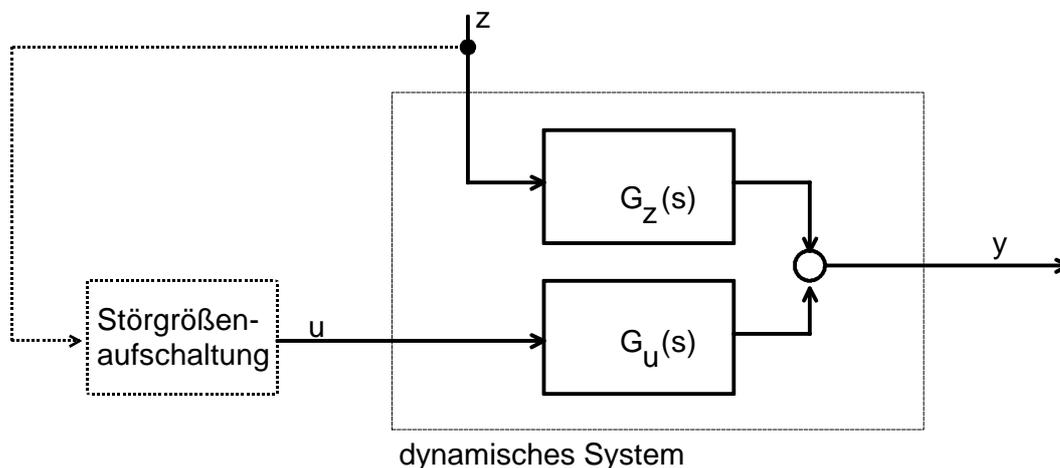


Bild 1: dynamisches System mit Störgrößenaufschaltung



Eine mögliche Ausprägung der Störgrößenaufschaltung erhält man wie folgt: Man wendet auf (1), (2) die Laplace-Transformation an, eliminiert  $X(s)$  und erhält so für das Ein-Ausgangsverhalten

$$\mathbf{y}(s) = \underbrace{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}}_{\mathbf{G}_u(s)}\mathbf{u}(s) + \underbrace{\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E}}_{\mathbf{G}_z(s)}\mathbf{z}(s). \quad (3)$$

Mit der Forderung nach Unstörbarkeit,  $\mathbf{Y}(s)=\mathbf{0}$ , erhält man hieraus durch Auflösen nach  $\mathbf{u}$  die *dynamische Störgrößenaufschaltung*

$$\mathbf{u}(s) = -(\mathbf{G}_u(s))^{-1} \cdot \mathbf{G}_z(s) \cdot \mathbf{z}(s). \quad (4)$$

Sie ist mit verschiedenen Nachteilen hinsichtlich Realisierbarkeit und interner Stabilität verbunden [4], weswegen man einer *statischen Störgrößenaufschaltung* den Vorzug geben mag. Eine solche ergibt sich, wenn der Einfluß der Summe  $\mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{E}\mathbf{z}$  in Gleichung (1) minimiert wird, durch die Wahl  $\mathbf{u} = (\mathbf{B}^T\mathbf{B})^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{E}\mathbf{z}$ , siehe [1]. Aufgrund des Näherungscharakters dieser Lösung kann die verbleibende Wirkung von  $\mathbf{z}(t)$  auf die Systemausgänge allerdings nicht genau quantifiziert werden, zudem ist das Rückführgesetz nicht invariant gegenüber Zustands Transformationen der Systemdarstellung. Alternativ hierzu erhält man eine statische Störgrößenaufschaltung aus (4),

$$\mathbf{u}(s) = -(\mathbf{G}_u(0))^{-1} \cdot \mathbf{G}_z(0) \cdot \mathbf{z}(s). \quad (5)$$

Sie sorgt dafür, daß *konstante Störungen* für große Zeiten ausgeregelt werden, bewirkt also stationäre Unstörbarkeit. Erst das Wissen  $\mathbf{z}(t) \approx \text{const.}$  macht (5) zu einer sinnvollen Variante.

Eine derartige, zumindest grobe Kenntnis typischer Störgrößenverläufe kann oft vorausgesetzt werden. So weiß man häufig vorab, daß auftretende Störungen abschnittsweise konstant sind (oder sich zumindest langsamer ändern als die Systemgrößen) oder z.B. harmonische Dauerschwingungen ausführen, siehe Bild 2. Im ersten Falle folgt die zugehörige Störgröße der Differentialgleichung  $\dot{z} = 0$ , im zweiten Falle gilt  $T^2\ddot{z} + z = 0$ . Allgemein können derartige Störungen durch ein Zustandsraummodell der Form



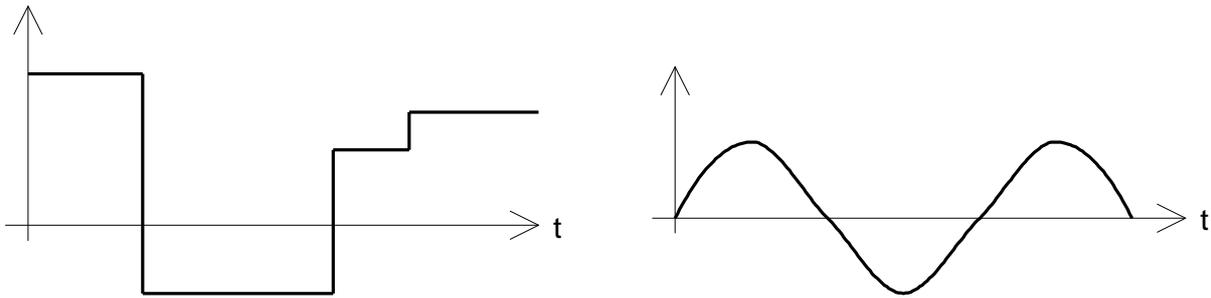


Bild 2: Typische Störgrößenverläufe

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \underset{(s,s)}{\mathbf{W}} \cdot \underset{(s,1)}{\mathbf{w}}(t), \quad \mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0 \quad (6)$$

$$\mathbf{z}(t) = \underset{(r,1)}{\mathbf{Z}} \cdot \underset{(r,s)}{\mathbf{w}}(t) \quad (7)$$

mit leicht zu bestimmenden Matrizen  $\mathbf{W}$  und  $\mathbf{Z}$  dargestellt werden. Bild 3 illustriert das Zusammenwirken von Strecke (1), (2) und Störmodell (6), (7); die Zustandsgleichungen lauten zusammengefaßt

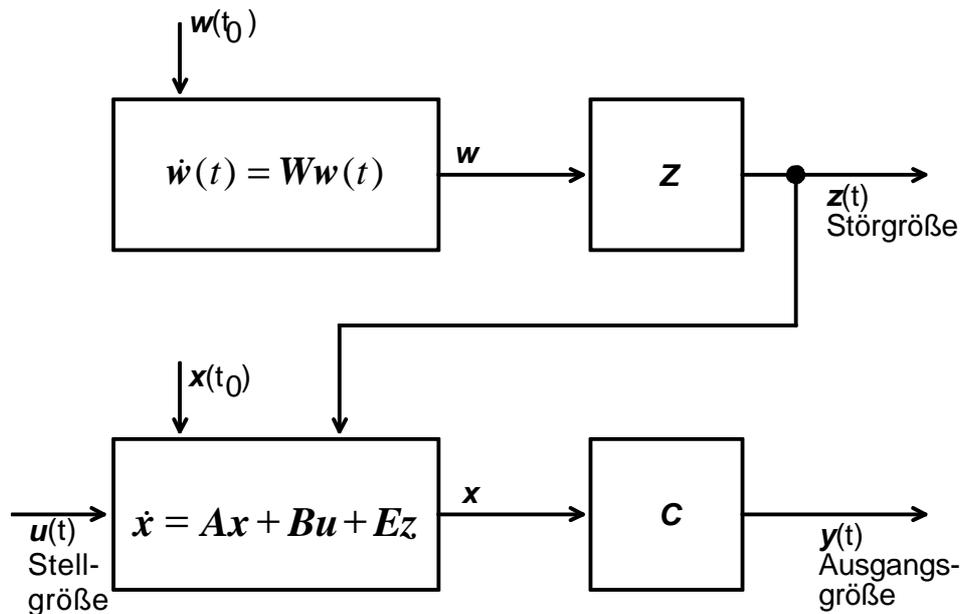


Bild 3: Dynamisches System und Störmodell

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{E}\mathbf{Z}\mathbf{w} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{W}\mathbf{w}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$$



oder

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{EZ} \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix}}_{\substack{n \quad s \\ A_z}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}}_{x_z} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{B_z} \mathbf{u}, \quad (8)$$

$$\mathbf{y} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{C_z} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}. \quad (9)$$

Auf Basis dieses Modells soll im folgenden eine *konstante Störgrößen-aufschaltung* entworfen werden, die im Unterschied zu (5) für beliebige Störmodelle (6), (7) Anwendung finden kann. Dazu wird eine konstante Rückführung des Zustandsvektor  $\mathbf{w}(t)$  des Störmodells auf die Stellgrößen  $\mathbf{u}(t)$  angesetzt, gemäß

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}_w \mathbf{w}. \quad (10)$$

Soll außerdem auf die Dynamik des Systems (1) eingewirkt werden, das heißt Eigenwerte von  $\mathbf{A}$  verschoben werden, so kann das Rückführgesetz (10) z.B. um eine Zustandsrückführung  $\mathbf{R}_x$  mit

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}_w \mathbf{w} - \mathbf{R}_x \mathbf{x} \quad (11)$$

oder um eine Ausgangsrückführung ergänzt werden. Da durch die Störgrößenaufschaltung (10) keine geschlossene Wirkungslinie, also kein Regelkreis entsteht, können durch  $\mathbf{R}_w$  keine Eigenwerte verschoben werden. Dies wird auch deutlich, wenn man das Rückführgesetz (10) in (8) einsetzt,

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{EZ} - \mathbf{BR}_w \\ \mathbf{0} & \mathbf{W} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix}, \quad (12)$$

und das charakteristische Polynom bestimmt:

$$p(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \cdot \det(s\mathbf{I} - \mathbf{W}); \quad (13)$$

es ist von  $\mathbf{R}_w$  unabhängig.

Für die technische Realisierung der Störgrößenaufschaltung (10) müssen die Komponenten des Vektors  $\mathbf{w}(t)$  entweder unmittelbar einer Messung zugänglich sein oder durch einen Störgrößenbeobachter [1, 3] geschätzt



werden. Der Beobachter verwertet dabei alle meßbaren Größen (diese sind nicht unbedingt identisch mit  $y$ ) und kann häufig als reduzierter Beobachter niedriger Ordnung realisiert werden [1].

Bei den folgenden Lösungswegen soll nun  $R_w$  derart bestimmt werden, daß die *Eigenwerte des Störmodells*, also die Eigenwerte der Matrix  $W$ , *unbeobachtbar* werden. Dies hat zur Folge, daß die Ausgangsgrößen  $y$  nach Abklingen der Einschwingvorgänge der restlichen Eigenwerte von den Störungen gänzlich unberührt bleiben.

## Lösungsweg 1

Ausgangspunkt ist das Gesamtsystem (8), (9) mit dem Rückführgesetz (10)<sup>1</sup>. Mit der Forderung nach Unbeobachtbarkeit eines einzelnen Eigenwertes  $\lambda$  ist laut dem *Gilbert-Kriterium* [1, 4] hier die Beziehung  $C_z v = [C \ 0]v = 0$  für den zugehörigen Eigenvektor  $v$  verbunden. Diese Forderung soll für die Eigenwerte des Störmodells, also für die Eigenwerte von  $W$  erfüllt werden. Indiziert man die Eigenwerte von  $A$  mit  $1, \dots, n$  und die von  $W$  mit  $n+1, \dots, n+s$ , so berechnen sich die Eigenvektoren  $v_{n+1}, \dots, v_{n+s}$  definitionsgemäß aus der Gleichung

$$\begin{bmatrix} I_{n+i}I - A & -EZ + BR_w \\ 0 & I_{n+i}I - W \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} v_{x,n+i} \\ v_{w,n+i} \end{bmatrix}}_{v_{n+i}} = 0, \quad i = 1, \dots, s, \quad (14)$$

in der die Systemmatrix aus (12) verwendet ist. Aus der unteren Teilgleichung lassen sich die Teilvektoren  $v_{w,n+i}$  sofort berechnen; sie sind identisch mit den Eigenvektoren von  $W$ . Aus der oberen Teilgleichung von (14) erhält man zunächst die Beziehung

$$(I_{n+i}I - A)v_{x,n+i} = (EZ - BR_w)v_{w,n+i}, \quad (15)$$

$$\Rightarrow v_{x,n+i} = (I_{n+i}I - A)^{-1}(EZ - BR_w)v_{w,n+i}, \quad (16)$$

<sup>1</sup> Soll nicht (10) sondern (11) Verwendung finden, so ist zunächst  $R_x$  durch eines der bekannten Verfahren zum Entwurf von Zustandsrückführungen zu bestimmen, [1-4], und in den Gleichungen (14) bis (22) ist mit  $A - BR_x$  anstelle  $A$  zu rechnen.



mit der noch unbekanntem Matrix  $R_w$ . Einsetzen dieser Beziehung in die Forderung nach Unbeobachtbarkeit,

$$[C \quad \mathbf{0}] \mathbf{v}_{n+i} = [C \quad \mathbf{0}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{x,n+i} \\ \mathbf{v}_{w,n+i} \end{bmatrix} = C \mathbf{v}_{x,n+i} = \mathbf{0} \quad , \quad (17)$$

ergibt

$$\underbrace{C(I_{n+i}I - A)^{-1}EZ}_{G_z(I)} \mathbf{v}_{w,n+i} - \underbrace{C(I_{n+i}I - A)^{-1}BR_w}_{G_u(I)} \mathbf{v}_{w,n+i} = \mathbf{0} \quad (18)$$

$$\text{bzw. } R_w \mathbf{v}_{w,n+i} = (G_u(I_{n+i}))^{-1} G_z(I_{n+i}) Z \mathbf{v}_{w,n+i} \quad , \quad i = 1, \dots, s \quad . \quad (19)$$

Nebeneinander angeschrieben lassen sich diese  $s$  vektoriellen Forderungen zusammenfassen zu

$$\begin{aligned} R_w \cdot [\mathbf{v}_{w,n+1} \quad \dots \quad \mathbf{v}_{w,n+s}] &= \\ &= [G_u^{-1}(I_{n+1})G_z(I_{n+1})Z \mathbf{v}_{w,n+1} \quad \dots \quad G_u^{-1}(I_{n+s})G_z(I_{n+s})Z \mathbf{v}_{w,n+s}] \end{aligned} \quad (20)$$

Wenn die Eigenvektoren  $\mathbf{v}_{w,n+i}$  des Störmodells linear unabhängig sind (was hier angenommen werden soll), dann resultiert endgültig das

**Ergebnis: Die konstante Störgrößenaufschaltung  $u = -R_w w$  mit**

$$R_w = [G_u^{-1}(I_{n+1})G_z(I_{n+1})Z \mathbf{v}_{w,n+1} \quad \dots \quad G_u^{-1}(I_{n+s})G_z(I_{n+s})Z \mathbf{v}_{w,n+s}] [\mathbf{v}_{w,n+1} \quad \dots \quad \mathbf{v}_{w,n+s}]^{-1} \quad (21)$$

**macht die durch  $W, Z$  beschriebenen Störungen *unbeobachtbar*.**

Speziell für *abschnittsweise konstante* Störungen, d.h.  $W=0$  und  $Z=I$ , folgt das schon aus (5) bekannte Ergebnis

$$R_w = [G_u(0)]^{-1} G_z(0). \quad (22)$$

Hinreichend für die Existenz der Lösung (21) ist, daß die benötigten Matrizen-Inversen existieren, also daß 1.) die Eigenwerte  $I_{n+i}$  ungleich den Eigenwerten von  $A$  sind, dann nämlich ist die Existenz von  $G_z$  sichergestellt, und daß 2.) die Eigenwerte  $I_{n+i}$  ungleich den invarianten Nullstellen des Systems  $(A,B,C)$  sind, dann nämlich existiert sicher auch  $G_u^{-1}$ , [5].



Hält die gewonnene Störgrößenaufschaltung alle modellierten Störungen von  $y$  fern? Die Antwort ist: Nur solange sich die Anfangswerte des Störmodells nicht ändern! Werden sie jedoch durch eventuelle Anregung von außen neu gesetzt, so werden gleichzeitig auch von  $A$  herrührende *beobachtbare* Eigenbewegungen des Systems mit angeregt. Das kommt daher, daß ein aus  $x(t_0) = \mathbf{0}$  und  $w(t_0) \neq \mathbf{0}$  zusammengesetzter Anfangsvektor im allgemeinen *nicht* als Linearkombination allein der Eigenvektoren  $v_{n+i}$  darstellbar ist. Folglich werden auch andere Eigenvektoren ausgelenkt, und die Wirkung der neu gesetzten Anfangswerte klingt mit den (stabil angenommenen) Eigenbewegungen von  $A$  ab. Demnach hält (22) zwar *konstante* Störungen von  $y$  fern, sprunghafte Störungen jedoch bewirken von Null verschiedene abklingende Vorgänge in  $y$ .

## Lösungsweg 2

Ein entsprechendes Ergebnis erhält man mittels der *Vollständigen Modalen Synthese* [1, 2]. Die Roppenecker-Formel zur Bestimmung einer vollständigen Zustandsrückführung lautet für das System (8)

$$\mathbf{R} = [\mathbf{p}_1 \quad \cdots \quad \mathbf{p}_{n+s}] [\mathbf{v}_{R1} \quad \cdots \quad \mathbf{v}_{R,n+s}]^{-1} \quad (23)$$

$$\text{mit } (\mathbf{A}_z - \mathbf{I}_{Ri} \mathbf{I}) \mathbf{v}_{Ri} = \mathbf{B}_z \mathbf{p}_i \quad (24)$$

$$\text{bzw. } \mathbf{v}_{Ri} = (\mathbf{A}_z - \mathbf{I}_{Ri} \mathbf{I})^{-1} \mathbf{B}_z \mathbf{p}_i, \quad i = 1, \dots, n + s. \quad (25)$$

Hierin kann für jeden steuerbaren Streckeneigenwert  $\lambda_i$  ein Regelungseigenwert  $\lambda_{Ri}$  frei (reell oder paarweise konjugiert komplex) vorgegeben werden; die sogenannten Parametervektoren  $\mathbf{p}_i$  sind ebenfalls frei vorgebar und beinhalten die über die Eigenwerte hinaus bestehenden Entwurfsfreiheiten. Existiert die in (23) benötigte Inverse, so verleiht der erhaltene Regler  $\mathbf{R}$  dem System (8) über das Rückführgesetz

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R} \mathbf{x}_z = -[\mathbf{R}_x \quad \mathbf{R}_w] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = -\mathbf{R}_x \mathbf{x} - \mathbf{R}_w \mathbf{w} \quad (26)$$

die vorgegebenen Eigenwerte. Die so berechnete Rückführung ist also vom Typ (11) und gestattet in *einem* Schritt die Berechnung von  $\mathbf{R}_w$  und  $\mathbf{R}_x$ . Um die Analogie zum Lösungsweg 1 aufrechtzuerhalten, soll auf eine



Verschiebung von Eigenwerten hier aber verzichtet werden. Die Entwurfspareparameter werden nun in zwei Schritten festgelegt:

- a) Um die ersten  $n$  Eigenwerte unverändert zu lassen, werden sie gleich den Eigenwerten von  $A$  vorgegeben,

$$\lambda_{R1} = \lambda_1, \dots, \lambda_{Rn} = \lambda_n . \quad (27)$$

Die zugehörigen Parametervektoren werden zu Null gesetzt [2], und die Regelungseigenvektoren sind dann gemäß (24) gerade die Eigenvektoren von  $A_z$ :

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}, \dots, \mathbf{p}_n = \mathbf{0} , \quad (28)$$

$$\mathbf{v}_{R1} = \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{Rn} = \mathbf{v}_n . \quad (29)$$

- b) Die verbleibenden, nicht steuerbaren Eigenwerte  $\lambda_{R,n+1}, \dots, \lambda_{R,n+s}$  müssen unverändert bleiben,

$$\lambda_{R,n+1} = \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{R,n+s} = \lambda_{n+s} , \quad (30)$$

sollen aber zusätzlich *unbeobachtbar* werden. Für die zugehörigen Regelungseigenvektoren muß dann gelten:

$$\mathbf{C}_z \mathbf{v}_{R,n+1} = \mathbf{0}, \dots, \mathbf{C}_z \mathbf{v}_{R,n+s} = \mathbf{0} . \quad (31)$$

Diese Forderung wird mit (24) kombiniert:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}_z - \lambda_{Ri} \mathbf{I} & \mathbf{B}_z \\ \mathbf{C}_z & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{P}(\lambda_{Ri})} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ri} \\ -\mathbf{p}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} , \quad i = n+1, \dots, n+s . \quad (32)$$

Hieraus lassen sich die  $\mathbf{v}_{Ri}, \mathbf{p}_i, i = n+1, \dots, n+s$  berechnen<sup>2</sup>.

---

<sup>2</sup> denn  $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+s}$  sind *nicht-steuerbare* Eigenwerte des Systems (8), und man kann leicht zeigen, daß die sogenannte Rosenbrock-Matrix  $\mathbf{P}$  dann Rangabfall aufweist [4, 5]. Folglich besitzt (32) nichttriviale Lösungen  $\mathbf{v}_{Ri}, \mathbf{p}_i$ . Da es in (23) auf die Beträge der Parametervektoren nicht ankommt, [2], bleibt die Lösung eindeutig. Um Weitläufigkeiten zu vermeiden, wird wie in Lösungsweg 1 angenommen, daß die  $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{n+s}$  verschieden von den Eigenwerten von  $A$  und von den invarianten Nullstellen des Systems  $(A, B, C)$  sind. Um nicht die Einführung sogenannter Hauptvektoren erforderlich zu machen, wird hier außerdem Diagonalähnlichkeit der Matrizen  $A$  und  $W$  vorausgesetzt [1, 2].



Im letzten Schritt ist dann der Regler  $\mathbf{R}$  gemäß (23) zu bestimmen. Weil die Parametervektoren  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$  zu Null gesetzt wurden, sind auch die ersten  $n$  Spalten von  $\mathbf{R}$  Nullvektoren. So reduziert sich die Rückführung auf die Störgrößenaufschaltung  $\mathbf{u} = -\mathbf{R}_w \mathbf{w}$ , wie in Lösungsweg 1.

## Zahlenbeispiel

Auf ein System der Ordnung 2, bestehend aus zwei hintereinandergeschalteten PT1-Gliedern, wirke eine Störung in Form harmonischer Dauerschwingungen ein. Die Systemmatrizen gemäß (1), (2) seien

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}^T = [1 \quad 0], \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die Störung  $z$  sei durch  $\ddot{z} + z = 0$  modelliert; das Störmodell (6), (7) wird also durch die Matrizen

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}^T = [1 \quad 0]$$

beschrieben. Die Matrizen des Gesamtsystems (8), (9) lauten dann

$$\mathbf{A}_z = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_z^T = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0].$$

Zu Lösungsweg 1: Zunächst werden zu den beiden Eigenwerten  $j$  und  $-j$  des Störmodells Teileigenvektoren  $\mathbf{v}_{w,3}, \mathbf{v}_{w4}$  bestimmt, z.B.

$$\mathbf{v}_{w,3} = \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{w4} = \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix}.$$

Aus Gleichung (21) erhält man sodann  $\mathbf{r}_w^T = [3 \quad 1]$ .

Zu Lösungsweg 2: Gemäß (28) ist  $p_1 = p_2 = 0$  zu setzen, außerdem z.B.



$$\mathbf{v}_{R1} = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{R2} = \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Aus (32) erhält man z.B.  $p_3 = p_4 = 10$  und

$$\mathbf{v}_{R3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3+j \\ 3-j \\ 1+3j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{R4} = \begin{bmatrix} 0 \\ -3-j \\ 3+j \\ 1-3j \end{bmatrix}.$$

Gleichung (23) führt sodann auf  $\mathbf{r}^T = [0 \ 0 \ 3 \ 1]$ , das heißt  $\mathbf{r}_w^T = [3 \ 1]$ , wie oben.

## Abschließende Bemerkungen

Die *Stabilität* der Entwürfe hängt allein von der Lage der Eigenwerte von  $A$  und  $W$  ab, die ja durch die Störgrößenaufschaltung (10) nicht verschoben werden. In der Praxis können für das Störmodell einfache, auf der imaginären Achse gelegene Eigenwerte toleriert werden, wie sie auch in den dargestellten Beispielen der konstanten und der harmonischen Dauerstörungen auftreten. Die Systemgrößen bleiben endlich, weil das Störmodell ausschließlich durch (endliche) Anfangsauslenkungen angeregt wird.

Es sei erwähnt, daß beide vorgestellten Lösungswege auf Systeme mit *Durchgriff* wie folgt erweiterbar sind: Lautet die Ausgangsgleichung

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) + \mathbf{F}\mathbf{z}(t) \quad (33)$$

anstatt (2), so wird zunächst (9)

$$\mathbf{y} = \underbrace{[\mathbf{C} \quad \mathbf{F}\mathbf{Z}]}_{\mathbf{C}_z} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \quad (34)$$

und Lösungsweg 1 führt unverändert auf das Ergebnis (21), jedoch mit

$$\mathbf{G}_z(\mathbf{I}) = \mathbf{C}(\mathbf{I}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{E} + \mathbf{F}, \quad (35)$$

$$\mathbf{G}_u(\mathbf{I}) = \mathbf{C}(\mathbf{I}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}. \quad (36)$$



In Lösungsweg 2 wird die Forderung (31) nach Unbeobachtbarkeit nun

$$\mathbf{C}_z \mathbf{v}_{Ri} - \mathbf{D} \mathbf{R} \mathbf{v}_{Ri} = \mathbf{C}_z \mathbf{v}_{Ri} - \mathbf{D} \mathbf{p}_i = \mathbf{0}, \quad (37)$$

unter Verwendung der Beziehung  $\mathbf{R} \mathbf{v}_{Ri} = \mathbf{p}_i$  aus (23). Damit bleibt die Bestimmungsgleichung (32) gültig, jedoch mit

$$\mathbf{P}(\mathbf{l}_{Ri}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_z - \mathbf{l}_{Ri} \mathbf{I} & \mathbf{B}_z \\ \mathbf{C}_z & \mathbf{D} \end{bmatrix}. \quad (38)$$

Weitere interessante *Spezialfälle* ergeben sich, wenn man von den getroffenen Annahmen der Nicht-Übereinstimmung der  $\mathbf{l}_{n+i}$  mit den Eigenwerten von  $\mathbf{A}$  und den invarianten Nullstellen der Strecke abrückt und/oder andere unübersichtliche Konstellationen mit mehrfachen Eigenwerten zuläßt. Die systematische zustandsraumorientierte Untersuchung derartiger Konstellationen erfordert die Einführung sogenannter Hauptvektoren als Ergänzung zu den Eigenvektoren und die Betrachtung von Nullstellenrichtungen [2, 5], worauf im Rahmen dieser Arbeit aber nicht eingegangen wird.

### Weitere ergänzende Überlegungen<sup>3</sup>

Dieser Abschnitt bringt einige Überlegungen zur *Existenz* der angegebenen Lösungen und zu den oben ausgeschlossenen *Sonderfällen*.

#### **Zu Lösungsweg 1:**

- Die in (21) benötigten Inversen von  $\mathbf{G}_u(\mathbf{l})$  existieren (wie schon erwähnt) sicher dann, wenn kein  $\mathbf{l}_{n+i}$  mit einer *invarianten Nullstelle* des Systems  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$  zusammenfällt (Die invarianten Nullstellen sind die Lösungen von  $\det \mathbf{P}(\mathbf{h}) = 0$ ). Dies liest man sofort ab aus der folgenden Beziehung:

---

<sup>3</sup> Dieser Abschnitt wurde dem ursprünglichen Bericht von 1997 im Herbst 1999 hinzugefügt, angeregt insbesondere durch Gespräche mit Prof. P.C. Müller beim Regelungstechnischen Workshop der GMA in Thun '99.



$$\det \underbrace{\begin{bmatrix} A - II & B \\ C & 0 \end{bmatrix}}_{P(I)} = \det \begin{bmatrix} I & 0 \\ -C(A - II)^{-1} & I \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} A - II & B \\ C & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \det \begin{bmatrix} A - II & B \\ 0 & C(II - A)^{-1}B \end{bmatrix} = \det(A - II) \cdot \det G(I)$$

- Eine notwendige *und* hinreichende Existenzbedingung erhält man, wenn  $\mathbf{v}_{x,n+i}$  nicht eliminiert wird, sondern gemeinsam mit  $\mathbf{R}_w \mathbf{v}_{w,i}$  folgendermaßen bestimmt wird: Die obere Teilgleichung von (14) ist zunächst  $(I_{n+i}I - A)\mathbf{v}_{x,n+i} - \mathbf{E}Z\mathbf{v}_{w,i} + \mathbf{B}\mathbf{R}_w \mathbf{v}_{w,i} = \mathbf{0}$ . Zusammengefaßt mit der Forderung  $\mathbf{C}\mathbf{v}_{x,n+i} = \mathbf{0}$  erhält man die Bestimmungsgleichung

$$\begin{bmatrix} A - I_{n+i}I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{x,n+i} \\ \mathbf{R}_w \mathbf{v}_{w,i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}Z\mathbf{v}_{w,i} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad i=1, \dots, s$$

für die gesuchten  $\mathbf{R}_w \mathbf{v}_{w,i}$  (und die  $\mathbf{v}_{x,n+i}$ ). Sie ist *genau dann lösbar*, wenn

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A - I_{n+i}I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} A - I_{n+i}I & B & \mathbf{E}Z\mathbf{v}_{w,i} \\ C & 0 & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (*)$$

Hinreichend hierfür ist  $\det P(I_{n+i}) \neq 0$ , wie schon oben.

- Von *P.C. Müller* wurden entsprechende und weitere Ergebnisse auch für *allgemeinere Fälle* (mit gesonderter Meßgleichung, unterschiedlicher Zahl von Stell- und Regelgrößen, Durchgriff und mehrfachen Eigenwerten) in [10, 11] angegeben! Alle dort genannten Varianten der Bedingung (\*) sind für quadratische Strecken sicher erfüllt, wenn kein Störeigenwert mit einer invarianten Nullstelle der Strecke zusammenfällt.

### Zu Lösungsweg 2:

- Für die Existenz von  $\mathbf{R}$  gemäß (23) müssen die  $n+s$  Vektoren  $\mathbf{v}_{Ri}$  linear unabhängig sein. Da die ersten Vektoren  $\mathbf{v}_{R1}, \dots, \mathbf{v}_{Rn}$  zu den Streckeneigenwerten gehören und folglich linear unabhängige Teileigenvektoren



$\mathbf{v}_{Rx1}, \dots, \mathbf{v}_{Rxn}$  beinhalten, nimmt die interessierende Matrix die Gestalt an:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{R1} & \dots & \mathbf{v}_{R,n+s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Rx,1}, \dots, \mathbf{v}_{Rxn} & \mathbf{v}_{Rx,n+1}, \dots, \mathbf{v}_{Rx,n+s} \\ \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0} & \mathbf{v}_{Rw,n+1}, \dots, \mathbf{v}_{Rw,n+s} \end{bmatrix}$$

Für Regularität dieser Matrix ist also zu fordern, daß die Teilvektoren  $\mathbf{v}_{Rw,n+1}, \dots, \mathbf{v}_{Rw,n+s}$  linear unabhängig sind. Um dies weiter zu untersuchen, wird (32) nochmals angeschrieben,

$$\begin{bmatrix} A - I_{Ri}I & EZ & B \\ \mathbf{0} & W - I_{Ri}I & \mathbf{0} \\ C & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Rxi} \\ \mathbf{v}_{Rwi} \\ -\mathbf{p}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - I_{Ri}I & B \\ C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & W - I_{Ri}I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Rxi} \\ -\mathbf{p}_i \\ \mathbf{v}_{Rwi} \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Hieraus wird ersichtlich, daß die  $\mathbf{v}_{Rwi}$  gleich den (linear unabhängigen) Eigenvektoren von  $W$  zu wählen sind. Die zugehörigen  $\mathbf{v}_{Rxi}$  und  $\mathbf{p}_i$  sind genau dann berechenbar, wenn die schon bekannte Bedingung

$$\text{rang} \begin{bmatrix} A - I_iI & B \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \text{rang} \begin{bmatrix} A - I_iI & B & EZ\mathbf{v}_{Rwi} \\ C & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

erfüllt ist. Hinreichend ist wiederum: Eigenwerte von  $W$  verschieden von den Invarianten Nullstellen des System  $(A, B, C)$ .

- Die Modale Synthese eignet sich auch zur Vorgabe *mehrfacher* Eigenwerte unterschiedlicher geometrischer und algebraischer Vielfachheit, [2, 12]. Weist  $W$  (beispielsweise zur Erzeugung rampenförmiger Störungen) einen *doppelten* Eigenwert  $I_{R1} = I_{R2}$  auf, so sind gemäß [12] in Gl. (17) Hauptvektoren erster und zweiter Stufe (hier mit den Indizes 1 und 2) einzubeziehen,

$$(A_z - I_{R1}I)\mathbf{v}_{R1} = B_z\mathbf{p}_1, \quad \text{und} \quad (A_z - I_{R2}I)\mathbf{v}_{R2} = B_z\mathbf{p}_2 + \mathbf{v}_{R1}.$$

Somit wird (32) für diesen doppelten Eigenwert

$$\begin{bmatrix} A_z - I_{Ri}I & B_z \\ C_z & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{Ri} \\ -\mathbf{p}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{R,i-1} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_{R0} = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2.$$



## Literatur

- [1] Föllinger, O.: Regelungstechnik. 8. Auflage, Hüthig-Verlag Heidelberg 1994.
- [2] Roppenecker, G.: Zeitbereichsentwurf linearer Regelungen. R. Oldenbourg Verlag, München 1990.
- [3] Ludyk, G.: Theoretische Regelungstechnik, Band 2. Springer-Verlag 1995.
- [4] Lunze, J.: Regelungstechnik, Band 2. Springer-Verlag 1997.
- [5] Lohmann, B.: Nullstellen und Kompensation im Zustandsraum und ihre Bedeutung für den Entwurf. Forschungsbericht, Institut für Automatisierungstechnik, Universität Bremen 1997, Download über <http://siemens.physik.uni-bremen.de/lohmann/Papers/default.html>.
- [6] Roppenecker, G. und Lohmann, B.: Vollständige Modale Synthese von Zustandsregelungen zur Störrentkopplung. Automatisierungstechnik 37 (1989), S. 120-121.
- [7] Lohmann, B.: Regelungsstruktur für eine Klasse von Förder- und Bearbeitungsprozessen und Anwendung in der Postautomatisierung. Automatisierungstechnik 44 (1996), S. 52-60.
- [8] Preuss, H.-P.: Störungsunterdrückung durch Zustandsrückführung. Regelungstechnik 28 (1980), S. 227-232 und S. 266-271.
- [9] Tächtler, A.: Analytische Berücksichtigung von Strukturbeschränkungen beim Reglerentwurf im Zustandsraum. VDI-Verlag, Düsseldorf, Reihe 8, Nr 287, 1992.
- [10] Müller, P.C. und Lückel, J.: Zur Theorie der Störgrößenaufschaltung in linearen Mehrgrößenregelsystemen. Regelungstechnik 25 (1977), S. 54-59.
- [11] Lückel, J. und Müller, P.C.: Verallgemeinerte Störgrößenaufschaltung bei unvollständiger Zustandskompensation am Beispiel einer aktiven Federung. Regelungstechnik 27 (1979), S. 281-288.
- [12] Roppenecker, G.: Vollständige Modale Synthese linearer Systeme und ihre Anwendung zum Entwurf strukturbeschränkter Zustandsrückführungen. Dissertation, VDI-Verlag 1983, Reihe 8 Nr. 59.

