Nullstellen und Kompensation im Zustandsraum und ihre Bedeutung für den Entwurf

Boris Lohmann

„Heben sich in einer komplexen Übertragungsfunktion Zähler- und Nennernullstellen gegeneinander heraus, so liegt Kompensation vor“. Eine derart griffige Umschreibung des Kompensationsbegriffs läßt sich für Mehrgrößensysteme nicht formulieren. Gleichwohl spielen die Begriffe der Nullstelle und der Kompensation eine zentrale Rolle sowohl bei der Systemanalyse als auch beim Systementwurf.

Ziel dieses Beitrages ist es, eine Übersicht über die theoretischen Grundlagen des Nullstellenbegriffs zu geben und so die Voraussetzung für das vollständige Verständnis vieler Entwurfsverfahren im Zustandsraum zu schaffen. Ausgehend von der Zustandsdarstellung für lineare zeitinvariante Systeme und einer Wiederholung einiger Grundlagen werden die relevanten Begriffe definiert und zueinander in Beziehung gesetzt. Schließlich wird die Bedeutung für die Zustandsraumtheorie und die Praxis aufgezeigt.

Ausgangspunkt

Obwohl die Definition der Nullstellen für Mehrgrößensysteme schon vor rund 20 Jahren in ihrer heute gängigen Form angegeben wurde, [2, 1], und ihre Bedeutung für das Verständnis und den Entwurf von Systemen unbestritten ist, findet die Darstellung der Thematik nur zögerlich Eingang in moderne Lehrbücher. Der vorliegende Beitrag möchte hier eine Lücke schließen und dem an Zustandsraummethoden interessierten Leser eine knappe Darstellung der wesentlichen Definitionen und Zusammenhänge anbieten. Im letzten Abschnitt wird die Bedeutung des Themenkomplexes diskutiert und auf weiterführende Literatur verwiesen.

Betrachtet werden lineare zeitinvariante dynamische Systeme mit gleich vielen Ein- wie Ausgangsgrößen,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{E}\boldsymbol{z}(t)\,, \tag{1a}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)\,, \tag{1b}$$

worin $\boldsymbol{x}(t)$ den $(n,1)$-Zustandsvektor, $\boldsymbol{u}(t)$ den $(p,1)$-Eingangsgrößenvektor und $\boldsymbol{y}(t)$ den $(p,1)$-Ausgangsgrößenvektor bezeichnen und $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, konstante Matrizen passender Dimension sind.

Durch Laplace-Transformation und anschließende Elimination von $\boldsymbol{X}(s)$ erhält man daraus die Beziehung

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{G}(s)\boldsymbol{U}(s) \tag{2}$$

mit der komplexen Übertragungsmatrix

$$\boldsymbol{G}(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B}\ . \tag{3}$$

Um die Darstellung übersichtlich zu halten, wollen wir annehmen, daß alle Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ paarweise verschieden sind (oder das System zumindest diagonalähnlich ist [5]). Dann lautet die kanonische Darstellung des Systems

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}} = \Lambda\hat{\boldsymbol{x}} + \underbrace{\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{B}}_{\hat{\boldsymbol{B}}}\boldsymbol{u}\,, \tag{4a}$$

$$\boldsymbol{y} = \underbrace{\boldsymbol{C}\boldsymbol{V}}_{\hat{\boldsymbol{C}}}\hat{\boldsymbol{x}}\,, \tag{4b}$$

worin Λ die Diagonalmatrix der n Eigenwerte l_i von $\boldsymbol{A}$ bezeichnet und $\boldsymbol{V}$ aus den n zugehörigen Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ aufgebaut ist. Die (durch die Transformation *nicht* veränderte) komplexe Übertragungsmatrix läßt sich dann darstellen als

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}(s) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{V}(s\boldsymbol{I} - \Lambda)^{-1}\boldsymbol{V}^{-1}\boldsymbol{B} = \\ &= \sum \frac{\hat{\boldsymbol{c}}_i\hat{\boldsymbol{b}}_i^T}{s - l_i}\end{aligned} \tag{5}$$

worin $\hat{\boldsymbol{c}}_i$ die i-te Spalte von $\hat{\boldsymbol{C}}$ und $\hat{\boldsymbol{b}}_i^T$ die i-te Zeile von $\hat{\boldsymbol{B}}$ bezeichnen. Die Vektoren $\hat{\boldsymbol{c}}_i$ und $\hat{\boldsymbol{b}}_i^T$ kann man dabei auch aus

$$\hat{\boldsymbol{c}}_i = \boldsymbol{C}\boldsymbol{v}_i \quad \text{und} \quad \hat{\boldsymbol{b}}_i^T = \boldsymbol{w}_i^T\boldsymbol{B}$$

berechnen, worin $\boldsymbol{v}_i$ die Spalten von $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{w}_i^T$ die Zeilen von $\boldsymbol{W}$ bezeichnen.

Folgende Kriterien der Steuer- und Beobachtbarkeit, [5], nach Gilbert und Hautus[1] werden im folgenden noch benötigt:

Gilbert: Das System (1) ist genau dann *steuerbar*, wenn die Matrix $\hat{\boldsymbol{B}}$ keine Nullzeile enthält, wenn also $\hat{\boldsymbol{b}}_i^T \neq \boldsymbol{0}^T$, $i = 1,\ldots,n$ gilt.

Gilbert: Das System (1) ist genau dann *beobachtbar*, wenn die Matrix $\hat{\boldsymbol{C}}$ keine Nullspalte enthält, wenn also $\hat{\boldsymbol{c}}_i \neq \boldsymbol{0}$, $i = 1,\ldots,n$.

Hautus: Das System (1) ist genau dann *steuerbar*, wenn für alle n Eigenwerte gilt

$$Rang\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - l_i\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} = n\,. \tag{6}$$

Hautus: Das System (1) ist genau dann *beobachtbar*, wenn für alle n Eigenwerte gilt

$$Rang\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - l_i\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{C} \end{bmatrix} = n\,. \tag{7}$$

Diese Kriterien legen es nahe, Steuer- und Beobachtbarkeit nicht nur dem System als Ganzem zuzuordnen, sondern einzelne Eigenwerte l_n dann als steuerbar zu bezeichnen, wenn $\hat{\boldsymbol{b}}_n^T \neq \boldsymbol{0}^T$ bzw. $Rang\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - l_n\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} = n$ gilt, und entsprechend bei der Beobachtbarkeit einzelner Eigenwerte zu verfahren. Ein Eigenwert l_n wird demnach als beobachtbar bezeichnet, wenn $\hat{\boldsymbol{c}}_n \neq \boldsymbol{0}$.

Eigenwerte und Pole

Aus Gleichung (5) wird nunmehr ersichtlich, daß ein Eigenwert l_n genau dann in $\boldsymbol{G}(s)$ eingeht, das heißt einen Beitrag zur Summe in (5) leistet, wenn er *steuer und beobachtbar* ist, wenn also sowohl $\hat{\boldsymbol{b}}_n^T \neq \boldsymbol{0}^T$ als auch $\hat{\boldsymbol{c}}_n \neq \boldsymbol{0}$ gilt. Ein solcher Eigenwert heißt ***Pol*** des Systems (oder auch

---

[1] Die beiden Kriterien nach Hautus gelten auch bei Auftreten *mehrfacher* Eigenwerte und bei nicht-diagonalähnlichen Systemen.

Übertragungspol), denn er ist offensichtlich Pol mindestens eines Elementes von $\boldsymbol{G}(s)$.

Invariante Nullstellen

Definition: Verliert die sogenannte *Rosenbrock-Matrix*

$$\boldsymbol{P}(s) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \tag{9}$$

an der Stelle $s = h$ ihren Höchstrang, so heißt h ***invariante Nullstelle*** des Systems.

Die invarianten Nullstellen sind also die Lösungen von

$$\det \boldsymbol{P}(h) = 0 \tag{10}$$

Warum werden diese doch auf recht abstraktem Wege bestimmten Zahlen *Nullstellen* genannt? Nehmen wir für einen Moment an, eine betrachtete invariante Nullstelle h sei verschieden von allen Eigenwerten, dann gilt

$$\det \boldsymbol{P}(h) = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - h\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} - h\boldsymbol{I})^{-1} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - h\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} =$$
$$= \det \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - h\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}(h\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \det(\boldsymbol{A} - h\boldsymbol{I}) \cdot \det \boldsymbol{G}(h) \,, \tag{11}$$

das heißt h ist auch Nullstelle von $\det \boldsymbol{G}(s)$. Speziell beim Eingrößensystem ist h dann also Nullstelle von $g(s)$, womit die Begriffswahl gerechtfertigt ist. Wir erkennen am obigen Determinanten-Zusammenhang außerdem: Wenn eine invariante Nullstelle mit einem Eigenwert zusammenfällt, dann muß $\det \boldsymbol{G}$ nicht mehr verschwinden, kann aber.

Der Zusatz „invariant“ rührt von der Nicht-Verschiebbarkeit der invarianten Nullstellen durch Zustandsrückführung her. Das sieht man wie folgt ein: Multipliziert man $\boldsymbol{P}(s)$ mit einer geeigneten regulären Matrix,

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - s\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{R} & \boldsymbol{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{BR} - s\boldsymbol{I} & \boldsymbol{BF} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \tag{12}$$

so ändert sich ihr Rang nicht; auf der rechten Seite steht aber gerade die Rosenbrock-Matrix des über die Zustandsrückführung $\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{Rx} + \boldsymbol{Fw}$ *geregelten* Systems mit regulärem Vorfilter $\boldsymbol{F}$. Das geregelte System besitzt folglich die gleichen invarianten Nullstellen wie das ungeregelte. Dies läßt sich auch für andere technisch sinnvolle Rückführgesetze zeigen, [3].

Kompensation

An der Rosenbrock-Matrix $\boldsymbol{P}$ fällt auf, daß ihr oberer Block der Matrix $\left[\boldsymbol{A} - l_i\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{B}\right]$ des Steuerbarkeitskriteriums nach Hautus entspricht, und daß ihr linker Block im Beobachtbarkeitskriterium nach Hautus auftaucht. Daraus kann man unmittelbar ableiten: Bei Nicht-Steuerbarkeit eines Eigenwertes l_n gilt $Rang\left[\boldsymbol{A} - l_n\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{B}\right] < n$ und folglich (da $\boldsymbol{P}$ aus dieser Matrix durch Anfügen von p Zeilen entsteht) gilt auch

$$Rang\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - l_n\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} < n + p\,.$$

Das heißt: **Jeder nicht-steuerbare Eigenwert fällt mit einer invarianten Nullstelle an gleicher Stelle zusammen. Man spricht von *Kompensation*; Eigenwert und Nullstelle kompensieren sich.**

Entsprechendes gilt für einen nicht-beobachtbaren Eigenwert l_n: die Matrix $\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - l_n\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{C} \end{bmatrix}$ besitzt weniger als n linear unabhängige Spalten, und folglich weist auch $\boldsymbol{P}$ Rangabfall auf.

Jeder nicht-beobachtare Eigenwert fällt mit einer invarianten Nullstelle an gleicher Stelle zusammen; Kompensation.

Die nicht kompensierten Eigenwerte sind also gerade die Pole.

Ebenso wie die *nicht* kompensierten Eigenwerte genau diejenigen sind, die auf das Übertragungsverhalten wirken, so sind die *nicht* kompensierten invarianten Nullstellen genau diejenigen, die auf das Übertragungsverhalten wirken. Man nennt sie deshalb Übertragungsnullstellen.

Invariante Nullstellen, die nicht kompensiert sind, heißen *Übertragungsnullstellen*.

Eine invariante Nullstelle η ist also genau dann Übertragungsnullstelle,

a) wenn sie mit keinem Eigenwert zusammenfällt (und dann gilt auch $\det \boldsymbol{G}(h) = 0$), oder

b) wenn der Eigenwert, mit dem sie zusammenfällt, sowohl steuer- als auch beobachtbar ist.

Umgekehrt ist eine einfache invariante Nullstelle genau dann *keine* Übertragungsnullstelle, wenn sie mit einem nicht steuer- oder/und nicht beobachtbaren Eigenwert zusammenfällt. Derartige kompensierte Nullstellen werden auch als *Abkopplungsnullstellen* bezeichnet.

Mit diesen Kriterien lassen sich invariante Nullstellen zumindest für die hier betrachteten Systeme mit einfachen Eigenwerten eindeutig in *Übertragungsnullstellen* und *kompensierte Nullstellen* klassifizieren.

Beispiel: Gegeben seien

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$

mit der Übertragungsmatrix gemäß (3)

$$\boldsymbol{G}(s) = \begin{bmatrix} \dfrac{2(s+1)}{s(s+2)} & \dfrac{1}{s+1} \\ 0 & \dfrac{2}{s+1} \end{bmatrix}.$$

Da $\boldsymbol{A}$ bereits in Diagonalform vorliegt, liest man unmittelbar die drei Eigenwerte 0, -1 und -2 ab. Mittels Gleichung (10) ermittelt man eine invariante Nullstelle in -1. Das System ist steuer- und beobachtbar, wie man anhand der Kriterien leicht nachprüft. Die invariante Nullstelle ist demzufolge Übertragungsnullstelle obwohl ein Eigenwert an gleicher Stelle vorliegt! Es tritt *keine* Kompensation ein. Auch anhand $\boldsymbol{G}(s)$ ist erkennbar, daß der Eigenwert in -1 und auch die invariante Nullstelle das Übertragungsverhalten beeinflussen[2].

Die *Determinante* von $\boldsymbol{G}(s)$ hingegen, die man wegen Gleichung (11) verleitet ist zur Nullstellenberechnung zu verwenden, liefert hier weder die invarianten Nullstellen noch die Übertragungsnullstellen:

$$\det \boldsymbol{G}(s) = \frac{2}{s(s+2)} \; .$$

Dieses Ergebnis unterstreicht: Nur wenn alle invarianten Nullstellen von allen Eigenwerten verschieden sind, liefert $\det \boldsymbol{G} = 0$ die Übertragungsnullstellen.

Nullstellenrichtungen

Gemäß den obigen Ausführungen ist zum Auffinden der Übertragungsnullstellen eine Untersuchung der Eigenwerte des Systems notwendig. Man kann sich von diesem Umweg durch Einführung der *Nullstellenrichtungen* befreien. Hierzu benötigen wir zunächst noch eine

Definition: Die Lösungen $\boldsymbol{z}$, $\boldsymbol{p}$ des homogenen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - h\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{z} \\ \boldsymbol{p} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0} \; , \tag{13}$$

worin h eine invariante Nullstelle ist, heißen *Nullstellenrichtung im Zustandsraum* und *Nullstellenrichtung im Eingangsraum.*

Fällt die invariante Nullstelle mit einem nicht beobachtbaren Eigenwert zusammen, so besitzt gemäß Hautus-Kriterium (7) schon die linke Teilmatrix in (13) Rangabfall, und es existiert folglich ein Vektor $\boldsymbol{z}$, der

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} - h\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{C} \end{bmatrix} \boldsymbol{z} = \boldsymbol{0}$$

erfüllt, nämlich gerade der zugehörige Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$. Das bedeutet:

---

[2] Es sei darauf hingewiesen, daß eine Übertragungsnullstelle nicht unbedingt auch Nullstelle eines einzelnen Elementes von G(s) sein muß wie hier im Beispiel.

Fällt die Nullstelle h mit einem nicht beobachtbaren Eigenwert zusammen (Kompensation!), dann ist die Nullstellenrichtung $\boldsymbol{z}$ gleichzeitig *Eigenvektor*, und es ist $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$.

Es gilt auch die Umkehrung: **Ist die Nullstellenrichtung $\boldsymbol{p}$ im Eingangsraum gleich dem Nullvektor, dann liegt Kompensation aufgrund eines nicht beobachtbaren Eigenwertes vor**.

Entsprechend wird bezüglich nicht steuerbarer Eigenwerte verfahren:

Definition: Die Lösungen $\boldsymbol{r}^T, \boldsymbol{q}^T$ des homogenen Gleichungssystems

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}^T & \boldsymbol{q}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-h\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}^T \tag{14}$$

worin h eine invariante Nullstelle ist, heißen *Linksnullstellenrichtung im Zustandsraum* und *Nullstellenrichtung im Ausgangsraum*.

Fällt die Nullstelle h mit einem nicht steuerbaren Eigenwert zusammen (Kompensation!), dann ist die Nullstellenrichtung $\boldsymbol{r}^T$ gleichzeitig *Linkseigenvektor* (das heißt sie erfüllt $\boldsymbol{r}^T(h\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{0}^T$), und es ist $\boldsymbol{q}^T=\boldsymbol{0}^T$.

Auch hier gilt die Umkehrung: **Ist die Nullstellenrichtung $\boldsymbol{q}^T$ im Ausgangsraum gleich dem Nullvektor, dann liegt Kompensation aufgrund eines nicht steuerbaren Eigenwertes vor**.

Natürlich kann h auch mit einem Eigenwert zusammenfallen, so daß weder $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$ noch $\boldsymbol{q}^T=\boldsymbol{0}^T$ gilt. Genau dann liegt *keine Kompensation* vor. Das weiter oben vorgestellte kleine Beispiel stellt einen solchen Fall dar, wie man leicht nachrechnet.

Eine invariante Nullstelle ist genau dann Übertragungsnullstelle, wenn ihre Nullstellenrichtungen im Eingangs- und Ausgangsraum beide von den Nullvektoren verschieden sind.

Sonderfall des Eingrößensystems

Man kann zeigen, daß sich speziell bei Systemen mit nur einer Eingangs- und einer Ausgangsgröße die Zusammenhänge vereinfachen. Hier gilt nämlich, daß bei Zusammenfallen einer Nullstelle mit einem Eigenwert stets entweder $\boldsymbol{p}=\boldsymbol{0}$ oder $\boldsymbol{q}^T=\boldsymbol{0}^T$ (oder beides) eintritt (Beweis im Anhang). Mit anderen Worten: Bei Eingrößensystemen kompensieren sich gleiche invariante Nullstellen und Eigenwerte *stets*. Hier ist also eine invariante Nullstelle genau dann Übertragungsnullstelle, wenn sie mit keinem Eigenwert zusammenfällt. Dies stimmt mit dem Verständnis der Kompensation im Sinne einer Pol-Nullstellenkürzung in Nenner und Zähler einer komplexen Übertragungsfunktion überein.

Anwendungen

1. Konstantes Vorfilter

Entwirft man für das System (1) eine konstante Zustandsrückführung

$$\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{R}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{F}\boldsymbol{w}\,, \tag{15}$$

so erhält man (durch Einsetzen und Laplace-Transformation) anstelle der Gleichungen (2) und (3) nun den Zusammenhang

$$\boldsymbol{Y}(s) = \boldsymbol{G}_w(s)\boldsymbol{W}(s) \tag{16}$$

zwischen dem Vektor der Führungsgrößen $\boldsymbol{w}$ und den Ausgängen, worin

$$\boldsymbol{G}_w(s) = \boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}\quad . \tag{17}$$

ist. Sollen die Ausgangsgrößen den konstant angenommenen Führungsgrößen für große Zeiten exakt folgen, also stationäre Genauigkeit eintreten, so muß gemäß dem Endwertsatz der Laplace-Transformation gelten

$$\lim_{s\to 0}\boldsymbol{G}_w(s) = \lim_{s\to 0}\boldsymbol{C}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{I}\,. \tag{18}$$

Hieraus kann das konstante Vorfilter ermittelt werden:

$$\boldsymbol{F} = \left[\boldsymbol{C}(-\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{R})^{-1}\boldsymbol{B}\right]^{-1}, \tag{19}$$

sofern die beiden benötigten *Matrix-Inversen* existieren. Hierfür gilt folgendes Kriterium:

Unter der Annahme, daß kein Regelungseigenwert in Null plaziert wurde, existiert das stationär genaue Vorfilter *F* genau dann, wenn keine invariante Nullstelle in Null liegt.

Beweis: Wir ziehen die Umformung (11) in einer erweiterten Form heran:

$$
\begin{aligned}
\det \boldsymbol{P}(h) &= \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-h\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \\
&= \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BR}-h\boldsymbol{I})^{-1} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \cdot \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-h\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \cdot \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{R} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \\
&= \det\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{BR}-h\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}(h\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BR})^{-1}\boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \\
&= \det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BR}-h\boldsymbol{I}) \cdot \det \boldsymbol{C}(h\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BR})^{-1}\boldsymbol{B},
\end{aligned}
\tag{20}
$$

und können daraus ablesen: Ist $h = 0$ eine invariante Nullstelle, aber nicht gleichzeitig Regelungseigenwert, so ist $\det \boldsymbol{P}(0) = 0$, außerdem $\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BR}) \neq 0$ und folglich $\det \boldsymbol{C}(-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BR})^{-1}\boldsymbol{B} = 0$, Gleichung (19) kann folglich nicht ausgewertet werden. Liegt hingegen *keine* invariante Nullstelle in Null und auch kein Regelungseigenwert in Null, so ist $\det \boldsymbol{P}(0) \neq 0$, ebenso $\det(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BR}) \neq 0$ und folglich $\det \boldsymbol{C}(-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BR})^{-1}\boldsymbol{B} \neq 0$, und die in (19) benötigten Inversen existieren.

2. Erzielbares Übertragungsverhalten *nicht-minimalphasiger* Systeme

Ein dynamisches System wird als nicht-minimalphasig bezeichnet, wenn es invariante Nullstellen in der rechten komplexen Halbebene aufweist. Eine Kompensation derartiger rechts gelegener Nullstellen hat man beim Reglerentwurf tunlichst zu vermeiden, um nicht Instabilität zu bewirken. **Rechts gelegene invariante Nullstellen sind also stets Übertragungsnullstellen eines stabil geregelten Systems**.

Betrachten wir nun die Auswirkungen einer rechts gelegenen Nullstelle h auf das erzielbare Übertragungsverhalten etwas genauer: Multipliziert man Gleichung (14) von rechts mit zwei geeigneten Matrizen,

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{r}^T & \boldsymbol{q}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-h\boldsymbol{I} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{R} & \boldsymbol{F} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & -(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{BR}-h\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{BF} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}^T \ ,
$$

$$
\Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{r}^T & \boldsymbol{q}^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-\boldsymbol{BR}-h\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{C}(-\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BR}+h\boldsymbol{I})^{-1}\boldsymbol{BF} \end{bmatrix} = \boldsymbol{0}^T,
$$

so liest man hieraus die Teilgleichung

$$\boldsymbol{q}^T \underbrace{\boldsymbol{C}(h\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} + \boldsymbol{BR})^{-1}\boldsymbol{BF}}_{\boldsymbol{G}_w(h)} = \boldsymbol{0}^T \tag{21}$$

ab, in der die Übertragungsmatrix $\boldsymbol{G}_w(s)$ des über (15) zustandsgeregelten Systems auftaucht. Damit die darin auftretende Inverse existiert, wollen wir annehmen, daß die invariante Nullstelle h nicht gleichzeitig Eigenwert von $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{BR}$ ist; diese Annahme ist vernünftig, denn zur Sicherung der Stabilität wird man die Regelungseigenwerte in der linken komplexen Halbebene plazieren, während die zur Diskussion stehende invariante Nullstelle rechts liegt. Somit läßt sich Gleichung (21) nun folgendermaßen interpretieren: **Jede durch konstante stabile Zustandsrückführung $u = -\boldsymbol{Rx} + \boldsymbol{Fw}$ erzielte Übertragungsmatrix $\boldsymbol{G}_w(s)$ erfüllt die Gleichung**

$$\boldsymbol{q}^T \boldsymbol{G}_w(h) = \boldsymbol{0}^T, \tag{22}$$

worin $\boldsymbol{q}^T$ die *Nullstellenrichtung im Ausgangsraum* zur betrachteten rechts gelegenen invarianten Nullstelle h ist.

Man wird also mit einem (häufig unerwünschten) Einfluß der rechts gelegenen Nullstelle auf das Übertraungsverhalten in Form der Bedingung (22) leben müssen. Es läßt sich überdies leicht zeigen, [3], daß auch *dynamische* Zustandsrückführungen $\boldsymbol{U}(s) = -\boldsymbol{R}(s)\boldsymbol{X}(s) + \boldsymbol{F}(s)\boldsymbol{W}(s)$ oder Ausgangsrückführungen an der Gleichung (22) prinzipiell nichts ändern.

3. Entkopplung, Stabilität und „Zero Dynamics“

Entkopplung des Ein-Ausgangsverhaltens eines Systems liegt vor, wenn jede einzelne Ausgangsgröße nur durch eine ihr fest zugeordnete Führungsgröße beeinflußt wird, nicht aber durch die anderen Führungsgrößen. Die Entkopplung ist damit eines der wichtigsten Entwurfsziele der Mehrgrößenregelung. Die Bedeutung der invarianten Nullstellen für dieses Ziel wird anhand zweier Entwurfsverfahren diskutiert:

1. Der Entwurf einer Zustandsrückführung (15) nach Falb/Wolovich [5] bewirkt Entkopplung. Diese kommt in einer diagonalförmigen Führungsübertragungsmatrix (17) zum Ausdruck, die d frei vorgebbare Pole und keine Übertragungsnullstellen aufweist. Die sogenannte *Dif-*

ferenzordnung d kann dabei kleiner als die Systemordnung sein. In diesem Falle existieren also Eigenwerte, die nicht Pole sind. Tatsächlich werden diese Eigenwerte durch den Entwurf unbeobachtbar, sie müssen folglich durch invariante Nullstellen kompensiert sein, [6]. Damit können wir bereits folgende wichtige Aussage machen: Der Entkopplungsentwurf nach Falb/Wolowich ist genau dann stabil, wenn alle eventuellen invarianten Nullstellen in der linken komplexen Halbebene liegen und die frei vorgebbaren Pole stabil gewählt werden. Nicht-minimalphasige Systeme können nach dem genannten Verfahren demnach nicht sinnvoll behandelt werden!

2. Der Entwurf einer entsprechenden Entkopplungsregelung durch *Vollständige Modale Synthese* [6, 7] legt die Zusammenhänge zwischen Eigenwerten und Nullstellen schon in den Entwurfsschritten offen: Alle n Eigenwerte werden gezielt vorgegeben, d von ihnen frei und die verbleibenden $n-d$ Stück gleich den invarianten Nullstellen; dadurch ist die Stabilitätsfrage unmittelbar beantwortet. Ebenso läßt sich ein *Entkoppelbarkeitskriterium* unter Verwendung des Nullstellenbegriffs angeben [6]. Wird Entkopplung unter Verwendung *dynamischer* Regelgesetze oder unter Einbeziehung von *Übertragungsnullstellen* angestrebt, so greifen die oben eingeführten Nullstellenrichtungen in den Entwurf ein, [4, 6, 7, 8], worauf hier nicht weiter eingegangen werden soll. Es bleibt festzuhalten: Die Entkopplung nichtminimalphasiger Systeme ist ohne Verständnis des Nullstellenbegriffs kaum durchführbar.

Der Entkopplungsentwurf nach Falb/Wolowich kann in geradliniger Weise auf *nichtlineare Systeme* übertragen werden und ist dort auch unter der Bezeichnung „exakte Ein-Ausgangslinearisierung“ bekannt. Die Entwurfsschritte können zum Beispiel in [9] nachgelesen werden. Ebenso wie bei den linearen Systemen können Stabilitätsprobleme auftreten, wenn die Summe der in den einzelnen Übertragungspfaden vorgegebenen Pole kleiner als die Systemordnung ist. Es treten dann wie im linearen Fall unbeobachtbare (kompensierte) Systembewegungen auf, die als „Zero dynamics“ bezeichnet werden. Ihre Stabilität kann jedoch nicht in einfacher Weise beurteilt werden, weil ein nichtlineares Analogon zur invarianten Nullstelle fehlt.

4. Störentkopplung

Betrachtet wird ein lineares zeitinvariantes System mit gleich vielen Stell- wie Ausgangsgrößen,

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) + \boldsymbol{E}\boldsymbol{z}(t)\,, \tag{21}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \tag{22}$$

worin in Erweiterung der Darstellung (1) ein $(r,1)$-Störgrößenvektor $\boldsymbol{z}(t)$ und eine Störeingriffsmatrix $\boldsymbol{E}$ auftritt. Das System heißt störentkoppelt, wenn beliebige Störgrößenverläufe $\boldsymbol{z}(t)$ ohne Wirkung auf die Ausgangsgrößen bleiben.

In seltenen Fällen liegt Störentkopplung schon ohne regelungstechnische Maßnahmen vor. Und zwar genau dann, wenn alle Spalten von $\boldsymbol{E}$ als Linearkombination derjenigen Eigenvektoren $\boldsymbol{v}$ von $\boldsymbol{A}$ darstellbar sind, für die $\boldsymbol{C}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$ gilt, [10]. Die zugehörigen Eigenwerte sind gemäß den obigen Ausführungen gerade die *unbeobachtbaren* Eigenwerte des Systems. Anschaulich gesprochen bedeutet die Forderung nach Störentkopplung also, daß durch Störungen $\boldsymbol{z}$ nur solche Eigenbewegungen des Systems anregbar sein dürfen, die unbeobachtbar sind. Eine sehr restriktive Bedingung, zumal für eine praktische Realisierung zusätzlich eine stabile Lage der zugehörigen Eigenwerte zu fordern ist.

Liegt Störentkopplung hingegen *nicht* von vornherein vor, so kann man versuchen, durch eine *konstante Zustandsrückführung* $\boldsymbol{u}(t) = -\boldsymbol{R}\boldsymbol{x}(t)$ Störentkopplung zu erreichen. Dazu müssen Eigenwerte derart verschoben werden, daß sie unbeobachtbar werden. Gemäß (13) und den zugehörigen Erläuterungen bedeutet dies, daß die zugehörigen Eigenvektoren mit den Nullstellenrichtungen der (dadurch kompensierten) invarianten Nullstellen übereinstimmen. Damit ist plausibel: **Das System (21), (22) kann genau dann störentkoppelt werden, wenn sich jede Spalte der Störeingriffsmatrix $\boldsymbol{E}$ als Linearkombination der *Nullstellenrichtungen im Zustandsraum* darstellen läßt** (Details in [10]).

5. Störgrößenaufschaltung

Sind die Störungen $\boldsymbol{z}$ in (21) meßbar oder beobachtbar, so bietet sich an, daraus geeignete Stellgrößenverläufe zu generieren, die den Störeinfluß auf $\boldsymbol{y}$ mindern. Eine solche Rückführung der Störgrößen auf die Eingänge

$\boldsymbol{u}$ heißt Störgrößenaufschaltung. Es sind verschiedene Ansätze und Strukturen bekannt [5, 11, 12], die hier nicht im einzelnen diskutiert werden sollen. Regelmäßig wird dabei Unbeobachtbarkeit gewisser Systemteile erreicht, das heißt Kompensation von invarianten Nullstellen, deren Lage deshalb über das Stabilitätsverhalten entscheidet.

Anhang

Behauptung: Fällt bei einem Eingrößensystem ein Eigenwert mit einer invarianten Nullstelle zusammen, so tritt stets Kompensation ein.

Beweis: Sei l_i eine invariante Nullstelle, das heißt

$$Rang\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-l_i\boldsymbol{I} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^T & 0 \end{bmatrix} < n+1\ ,$$

und sei l_i gleichzeitig ein steuerbarer Eigenwert, folglich

$$Rang[\boldsymbol{A}-l_i\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{b}] = n\,.$$

Dann läßt sich $[\boldsymbol{c}^T \quad 0]$ als Linearkombination der Zeilenvektoren von $[\boldsymbol{A}-l_i\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{b}]$ darstellen,

$$[\boldsymbol{c}^T \quad 0] = \boldsymbol{r}^T \cdot [\boldsymbol{A}-l_i\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{b}],$$

(denn die Lösbarkeitsbedingung [5 Anhang] zur Ermittlung von $\boldsymbol{r}^T$,

$$Rang\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}-l_i\boldsymbol{I} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c}^T & 0 \end{bmatrix} = Rang[\boldsymbol{A}-l_i\boldsymbol{I} \quad \boldsymbol{b}],$$

ist erfüllt). Somit gilt auch

$$\boldsymbol{c}^T = \boldsymbol{r}^T \cdot (\boldsymbol{A}-l_i\boldsymbol{I})\,.$$

Da l_i gleichzeitig ein Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ ist, gilt für den zugehörigen Eigenvektor $\boldsymbol{v}_i$ die Beziehung $(\boldsymbol{A}-l_i\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{0}$, und aus der vorangegangenen Gleichung folgt durch Multiplikation mit $\boldsymbol{v}_i$

$$\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{r}^T \cdot (\boldsymbol{A}-l_i\boldsymbol{I})v_i = 0\,.$$

Gemäß Gilbert-Kriterium ist l_i demnach wegen $\hat{c}_i = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{v}_i = 0$ unbeobachtbar, das heißt kompensiert.

Die Argumentation läßt sich unter der Annahme der Beobachtbarkeit des Eigenwertes l_i in entsprechender Weise aufbauen und führt dann auf eine Kompensation wegen Nicht-Steuerbarkeit.

Literatur

[1] Roppenecker, G. und Preuß, H.-P.: Nullstellen und Pole linearer Mehrgrößensysteme. Regelungstechnik 30 (1982), S. 219-225 und 255-263.

[2] MacFarlane, A.G.J., Karcanias, N.: Poles and Zeros of Linear Multivariable Systems: A Survey of the Algebraic, Geometric and the Complex-Variable Theory. Int. Journal of Control (1976), Bd. 24, S. 33-74.

[3] Lohmann, B.: Nullstellen und Kompensationen bei Mehrgrößensystemen. Universität Karlsruhe, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Interner Bericht 1989.

[4] Lohmann, B.: Vollständige und teilweise Führungsentkopplung im Zustandsraum. Dissertation, VDI-Verlag, 1991, (dort vor allem Kapitel 10).

[5] Föllinger, O.: Regelungstechnik. 8. Auflage, Hüthig-Verlag 1994.

[6] Roppenecker, G. und Lohmann, B.: Vollständige Modale Synthese von Entkopplungsregelungen. Automatisierungstechnik 36 (1988), S. 434-441.

[7] Lohmann, B.: Vollständige und teilweise Führungsentkopplung dynamischer Systeme durch konstante Zustandsrückführung. Automatisierungstechnik 39 (1991), S.329-334 und S. 376-378.

[8] Lohmann,B.: Vollständige Entkopplung durch dynamische Zustandsrückführung. Automatisierungstechnik 39 (1991), S. 459-464.

[9] Ludyk, G.: Theoretische Regelungstechnik, Band 2. Springer-Verlag 1995.

[10] Roppenecker, G. und Lohmann, B.: Vollständige Modale Synthese von Zustandsregelungen zur Störentkopplung. Automatisierungstechnik 37 (1989), S. 120-121.

[11] Lunze, J.: Regelungstechnik, Band 2. Springer-Verlag 1997.

[12] Lohmann, B.: Zur Störgrößenaufschaltung für lineare Systeme. Forschungsbericht, auch als Internet-Veröffentlichung, Institut für Automatisierungstechnik, Uni Bremen 1998.