

Ordnungsreduktion mittels Krylov-Unterraummethoden

Order Reduction using Krylov Subspace Methods

Boris Lohmann und Behnam Salimbahrami

Bei der Modellierung dynamischer Systeme entstehen heute durch gewachsene Güteanforderungen und den Einsatz von Softwaretools regelmäßig Systeme hoher Ordnung, deren weitere Verwendung durch eine Modellreduktion entscheidend erleichtert werden kann. Krylov-Unterraummethoden erlauben dabei die Reduktion auch sehr großer linearer Modelle mit zehntausenden Zustandsvariablen. Der vorliegende Beitrag gibt eine Einführung in die Grundgedanken, stellt die wichtigsten Algorithmen vor und gibt einen Ausblick auf zu lösende Aufgaben.

In the modelling of dynamic systems, increasing accuracy requirements and the usage of software tools lead to models of high order. These models can significantly be simplified by model reduction. Krylov Subspace Methods allow reducing even very high order models with several ten thousands of state variables. This paper gives an introduction into the basic concepts, presents the most important algorithms, and gives a short outlook into open questions.

Schlagwörter: Modellreduktion, Ordnungsreduktion, Krylov-Unterraummethoden, Arnoldi-Algorithmus, Lanczos-Algorithmus

Keywords: Model order reduction, Krylov subspace methods, Arnoldi algorithm, Lanczos algorithm

1 Einleitung

Bei der Modellierung komplexer technischer Systeme in der Verfahrenstechnik, der Mikrosystemtechnik und der Mechatronik entstehen zunehmend Modelle sehr großer Ordnung. Insbesondere der Einsatz von Software-Werkzeugen erlaubt eine sehr genaue Modellierung; dies aber zum Preis einer sehr großen Anzahl systembeschreibender Gleichungen. Als Beispiel zeigt Bild 1 die Struktur einer zweistufigen Destillationskolonne, die nach einer Modellierung mit dem Werkzeug *Aspen Dynamics* auf ein System von 400 linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen führt (Quelle: BASF AG). Dieses Modell ist in der Nähe des Arbeitspunktes sehr genau und kann, wie weiter unten dargestellt, ohne wesentliche Genauigkeitseinbußen auf rund 40 Gleichungen reduziert werden. Bild 2 zeigt den Aufbau eines mikrofluidischen Antriebssystems, dessen Erwärmungsvorgang nach einer FEM-Modellierung mit *ANSYS* auf 1000 bis 10 000 lineare Differentialgleichungen führt, je nach Feinheit des verwendeten FEM-Gitters

(Quelle: IMTEK, Univ. Freiburg [1;2]). Auch dieses Modell lässt sich mit den hier vorzustellenden Methoden drastisch reduzieren, und zwar mit besseren Ergebnissen als durch eine von Beginn an grob angesetzte FEM-Modellierung.

Voraussetzung für die erfolgreiche Verringerung der Zahl systembeschreibender Differentialgleichungen sind geeignete *Reduktionsverfahren*, die sich ihrerseits auf numerische Algorithmen stützen, welche mit sehr großen Matrizen operieren können. Zu diesen gehören die *Krylov-Unterraummethoden*, die seit mehreren Jahrzehnten erfolgreich unter anderem zur näherungsweise Lösung von linearen Gleichungssystemen und von Lyapunow-Gleichungen und zur Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren genutzt werden. In einem Themenheft der *IEEE Computing in Science and Engineering* im Januar 2000 werden die Krylov-Unterraummethoden deshalb den „top ten algorithms of the 20th century“ zugerechnet.

Der vorliegende Beitrag möchte eine Übersicht geben über die Kerngedanken der Krylov-unterraumbasierten Ord-

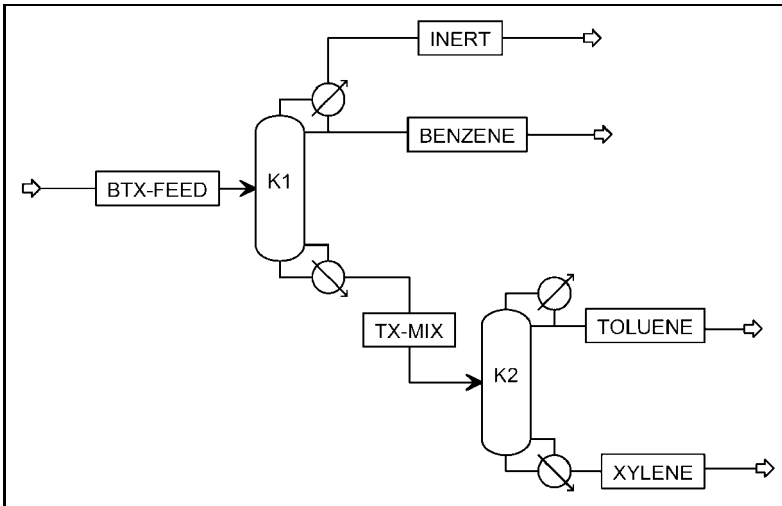


Bild 1: Aufbau einer Destillationskolonne (Quelle: BASF AG). Der BTX-Feed ist eine Mischung aus Benzol, Toluol und Ortho-Xylen, die in drei Ströme zu trennen ist. Eine rechnergestützte Modellierung liefert $n = 400$ Differentialgleichungen erster Ordnung.

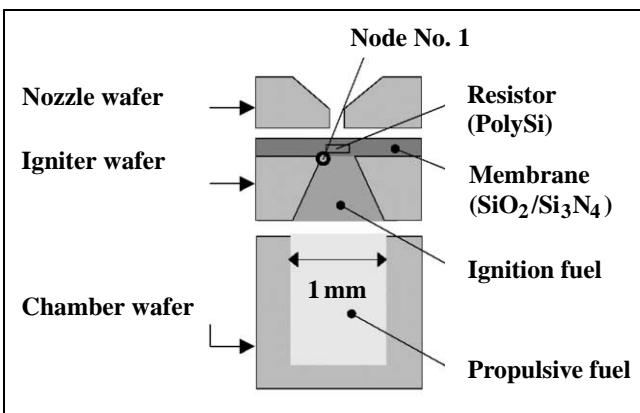


Bild 2: Aufbau eines mikrofluidischen Antriebssystems (IMTEK, Univ. Freiburg [1; 2]). Zur Zündung der explosiven Füllung wird der Widerstand elektrisch erhitzt. Dieser Erwärmungsprozess kann mittels Finiter Elemente Modellierung durch 1000 bis 10 000 gewöhnliche Differentialgleichungen beschrieben werden.

nungsreduktion (Abschnitt 2) und über die wichtigsten Algorithmen zur Berechnung der benötigten Projektionsmatrizen (Abschnitt 3). Nach einer kurzen Diskussion der Reduktion der oben genannten zwei Beispiele (Abschnitt 4) wird ein Zugang zur Reduktion von Differentialgleichungssystemen zweiter Ordnung vorgestellt und ein weiteres Anwendungsbeispiel diskutiert (Abschnitt 5). Ein kurzer Ausblick beschließt diesen Text.

Im Folgenden sollen aber zunächst einige Voraussetzungen und Anforderungen an reduzierte Modelle zusammengestellt werden. Betrachtet werden lineare, zeitinvariante dynamische Modelle in Zustandsdarstellung,

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad (1)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}, \quad (2)$$

für die der Übersichtlichkeit halber nur je ein Eingang u und ein Ausgang y vorgesehen wird. Die Dimension n des Zustandsvektors \mathbf{x} ist die Systemordnung. Das Ein-Ausgangsverhalten kann bekanntlich durch die komplexe Übertragungsfunktion

$$g(s) = \mathbf{c}^T (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \quad (3)$$

mittels $y(s) = g(s)u(s)$ beschrieben werden. Ziel einer Ordnungsreduktion ist es nun, ein Modell erheblich niedrigerer Ordnung $q < n$ zu finden, das das Verhalten des Originalmodells approximiert. In welchem Sinne soll eine solche Approximation erfolgen? Folgende Aspekte spielen eine Rolle:

- Die Systemantwort $y(t)$ auf eine gewisse Anregung $u(t)$ soll durch das reduzierte Modell gut nachgebildet werden.
- Manchmal ist man an einer guten Nachbildung nicht nur des Ausgangs y , sondern der gesamten Trajektorie $\mathbf{x}(t)$ interessiert.
- Alternativ zu einer Gütebewertung im Zeitbereich mag man fordern, dass der Frequenzgang des Originals gut approximiert wird [3].
- Gelegentlich ist es wichtig, die Zustandsvariablen des reduzierten Modells als physikalisch sinnvolle Größen interpretieren zu können, wie das beim Originalmodell meist der Fall ist.

Hinsichtlich des ersten und dritten Punktes kann man mittels der Kalmanschen Steuer- und Beobachtbarkeitsbegriffe [4; 5] leicht zeigen: nicht steuer- und nicht beobachtbare Systemteile können aus dem Modell (1), (2) entfernt werden, ohne das Übertragungsverhalten zu verändern, und man gelangt zu einer so genannten Minimalrealisierung des Systems. Entfernt man darüber hinaus *schwach* steuer- und *schwach* beobachtbare Anteile, so darf man hoffen, ein reduziertes Modell mit nur geringfügig abweichendem Übertragungsverhalten zu finden. Dieser Gedanke ist Kern z. B. der *modalen Ordnungsreduktionsverfahren* [4; 6] und der sehr verbreiteten *Reduktion über die balancierte Darstellung* [7-9]: In beiden Fällen wird zunächst eine reguläre Zustandstransformation $\mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{z}$ auf das System (1), (2) angewandt, derart, dass im transformierten Modell

$$\dot{\mathbf{z}} = \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}}_{\hat{\mathbf{A}}} \mathbf{z} + \underbrace{\mathbf{T}^{-1}\mathbf{b}}_{\hat{\mathbf{b}}} u, \quad (4)$$

$$y = \underbrace{\mathbf{c}^T \mathbf{T}}_{\hat{\mathbf{c}}^T} \mathbf{z} \quad (5)$$

eine Unterteilung der Zustandsvariablen z_i in dominante und nicht dominante, d.h. stark und schwach steuer/beobachtbare, erfolgen kann (Einzelheiten in [4; 6–8]). Nicht dominante Zustandsvariablen werden durch Streichen entsprechender Zeilen und Spalten aus $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}^T$ entfernt. Dasselbe reduzierte Modell resultiert, wenn man von Beginn an nur diejenigen Elemente von $\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{b}}, \hat{\mathbf{c}}^T$ bestimmt, die zu dominanten Zustandsvariablen gehören: Nimmt man an, dass die dominanten Zustandsvariablen gerade die Indizes $1, \dots, q$ aufweisen, so lautet das reduzierte Modell

$$\dot{\mathbf{x}}_r = \underbrace{\mathbf{T}_{\text{oben}}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}_{\text{links}}}_{\mathbf{A}_r} \mathbf{x}_r + \underbrace{\mathbf{T}_{\text{oben}}^{-1} \mathbf{b}}_{\mathbf{b}_r} u, \quad (6)$$

$$y = \underbrace{\mathbf{c}^T \mathbf{T}_{\text{links}}}_{\mathbf{c}_r^T} \mathbf{x}_r, \quad (7)$$

worin $\mathbf{T}_{\text{oben}}^{-1}$ die oberen q Zeilen von \mathbf{T}^{-1} umfasst und $\mathbf{T}_{\text{links}}$ die q linken Spalten von \mathbf{T} , und worin \mathbf{x}_r den Zustandsvektor des auf Ordnung q reduzierten Modells bezeichnet. Auf der rechten Seite von (6) ist erkennbar, wie der Zustandsvektor \mathbf{x}_r mittels $\mathbf{T}_{\text{links}}$ zunächst in den Raum der Dimension n abgebildet wird. Das Ergebnis wird mit \mathbf{A} multipliziert und erzeugt so eine Näherung für den ursprünglichen Ausdruck $\mathbf{A}\mathbf{x}$. Sodann erfolgt eine Rückabbildung in den Raum der Dimension q mittels $\mathbf{T}_{\text{oben}}^{-1}$. Der Original-Zustandsraum wird so auf einen Raum der Dimension q projiziert; man spricht von *Ordnungsreduktion durch Projektion*¹ [10; 13].

Allgemeiner kann anstelle der (biorthogonalen) Matrizen $\mathbf{T}_{\text{oben}}^{-1}$ und $\mathbf{T}_{\text{links}}$ mit zunächst unbestimmten (n, q) -Matrizen \mathbf{V} und \mathbf{W} argumentiert werden, die ein (ebenfalls allgemeiner formuliertes) Originalmodell

$$\mathbf{E}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b}u, \quad (8)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{x} \quad (9)$$

durch Projektion in ein reduziertes Modell

$$\underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{E} \mathbf{V}}_{\mathbf{E}_r} \dot{\mathbf{x}}_r = \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V}}_{\mathbf{A}_r} \mathbf{x}_r + \underbrace{\mathbf{W}^T \mathbf{b}}_{\mathbf{b}_r} u, \quad (10)$$

$$y = \underbrace{\mathbf{c}^T \mathbf{V}}_{\mathbf{c}_r^T} \mathbf{x}_r \quad (11)$$

überführen. Gegenstand der folgenden Abschnitte ist die Frage, wie mittels Krylov-Unterraummethoden geeignete Matrizen \mathbf{V} und \mathbf{W} auch für sehr große Systemordnungen n gefunden werden können. Neben den oben schon aufgelisteten vier Reduktionszielen sind dabei folgende weitere Forderungen zu beachten:

- Das Verfahren sollte Hinweise auf günstige Werte q liefern, also *Dominanzaussagen* machen.
- Die Reduktion sollte *invariant* bezüglich unterschiedlicher Darstellungen des Originalmodells sein, d.h. vorab

vorgenommene reguläre Zustandstransformationen sollten ohne Wirkung auf das Ergebnis sein.

- Stabile Originalmodelle sollten stabile reduzierte Modelle erzeugen.
- Es sollten Fehlerschranken existieren oder zumindest Klarheit darüber bestehen, in welchem Sinne die Approximation erfolgt.
- Das reduzierte Modell sollte dem Original stationär genau folgen.
- Die nötigen Berechnungen sollten einfach und numerisch robust sein und mit nur wenigen vom Entwerfer festzulegenden, möglichst transparenten Parametern versehen sein.
- Die Methode sollte allgemeine Modelle des Typs (8), (9) verarbeiten können, möglichst auch Modelle des Typs $\mathbf{M}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} = \mathbf{b}u$.

Das Verfahren der Reduktion durch Balancierung [7; 8] erfüllt diese Anforderungen, mit Einschränkungen bezüglich der letzten drei Punkte. Die Krylov-Unterraummethoden der folgenden Abschnitte haben ihre Stärken gerade bei diesen Punkten, erfüllen aber die ersten Punkte nur mit Einschränkungen (zu Invarianzeigenschaften siehe [11], zu Passivität/Stabilität siehe [12]). Derzeitige Forschungsarbeiten, auch in der Arbeitsgruppe der Autoren, zielen daher unter anderem auf Kombinationen von balancierten und Krylov-unterraumbasierten Methoden [10].

2 Krylov-Unterräume zur Modellreduktion

Gegeben seien eine konstante (n, n) -Matrix $\tilde{\mathbf{A}}$ und ein konstanter $(n, 1)$ -Vektor $\tilde{\mathbf{b}}$, auch Startvektor genannt, sowie eine positive ganze Zahl q . Dann ist der *Krylov-Unterraum* definiert

$$K_q(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}) = \text{span}\{\tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{b}}, \dots, \tilde{\mathbf{A}}^{q-1}\tilde{\mathbf{b}}\}; \quad (12)$$

er ist also der durch die q Spaltenvektoren $\tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{b}}, \dots, \tilde{\mathbf{A}}^{q-1}\tilde{\mathbf{b}}$ aufgespannte Unterraum.

Mit dieser Definition werden die für die Ordnungsreduktion benötigten Matrizen \mathbf{V}, \mathbf{W} aus Spaltenvektoren aufgebaut, die Basisvektoren folgender Krylov-Unterräume sind:

\mathbf{V} ist eine beliebige Basis des Krylov-Unterraums

$$K_{q_1}(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}) = \text{span}\left\{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}, \dots, (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{E})^{q_1-1}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}\right\}, \quad (13)$$

\mathbf{W} ist eine beliebige Basis des Krylov-Unterraums

$$K_{q_2}(\mathbf{A}^{-T}\mathbf{E}^T, \mathbf{A}^{-T}\mathbf{c}) = \text{span}\left\{\mathbf{A}^{-T}\mathbf{c}, \dots, (\mathbf{A}^{-T}\mathbf{E}^T)^{q_2-1}\mathbf{A}^{-T}\mathbf{c}\right\}, \quad (14)$$

mit $\mathbf{E}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ aus (8), mit $\mathbf{A}^{-T} = (\mathbf{A}^{-1})^T$, mit vorausgesetzter Regularität von \mathbf{A} , und mit einer hinreichend kleinen Wahl $q_1 = q_2 = q$ derart, dass \mathbf{V} und \mathbf{W} beide

¹ Mathematisch genauer: $\mathbf{P} = \mathbf{T}_{\text{links}}(\mathbf{T}_{\text{oben}}^{-1} \mathbf{T}_{\text{links}})^{-1} \mathbf{T}_{\text{oben}}^{-1}$ ist eine Projektion, da $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.

den Rang q aufweisen². Das so beschriebene Reduktionsverfahren heißt ein *zweiseitiges Verfahren*, weil sowohl eingangs- wie ausgangsseitige Beziehungen des Modells in die Projektionsmatrizen eingehen. Wird nur eine der beiden Matrizen \mathbf{V} , \mathbf{W} gemäß obiger Vorschrift gewählt und die andere beliebig, aber mit Höchststrang, so nennt man das Reduktionsverfahren ein *einseitiges Verfahren*.

Eine wichtige Frage ist nun: In welchem Sinne sind die vorgeschlagenen Verfahren „günstig“? Tatsächlich gleichen sich gewisse Parameter des Ein-Ausgangsverhaltens von Originalmodell (8), (9) und reduziertem Modell (10), (11), nämlich die so genannten *Momente*, unter der wenig einschränkenden Annahme, dass die durch (10) gefundene Matrix \mathbf{A}_r regulär ist. Die Momente m_i sind definiert als die negativen Koeffizienten der Taylor-Reihe der Übertragungsfunktion um $s_0 = 0$,

$$\begin{aligned} g(s) &= \mathbf{c}^T (s\mathbf{E} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{b} \\ &= - \underbrace{\mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}}_{m_0} - \underbrace{\mathbf{c}^T (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{E}) \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}}_{m_1} s - \dots \\ &\quad - \underbrace{\mathbf{c}^T (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{E})^i \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}}_{m_i} s^i - \dots \end{aligned} \quad (15)$$

Zweiseitige Methoden bringen die ersten $2q$ dieser Momente zur Übereinstimmung mit denen des reduzierten Modells, bei einseitigen Methoden sind es nur q Stück. Um einen Eindruck von der Beweisführung für diese wichtige Aussage zu vermitteln, wird die Übereinstimmung für das erste Moment, m_0 , durch folgende Zeile gezeigt:

$$\begin{aligned} m_{r0} &= \mathbf{c}_r^T \mathbf{A}_r^{-1} \mathbf{b}_r = \mathbf{c}^T \mathbf{V} (\mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{b} \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{V} (\mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V})^{-1} \mathbf{W}^T \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{r}_0 \\ &= \mathbf{c}^T \mathbf{V} \mathbf{r}_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} = m_0. \end{aligned} \quad (16)$$

Der entscheidende Schritt darin ist, dass $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b}$ bei Verwendung von \mathbf{V} nach (13) im Unterraum $K_{q_1}(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{E}, \mathbf{A}^{-1} \mathbf{b})$ liegt und folglich durch $\mathbf{A}^{-1} \mathbf{b} = \mathbf{V} \mathbf{r}_0$ ausgedrückt werden kann, d. h. $\mathbf{b} = \mathbf{A} \mathbf{V} \mathbf{r}_0$. Für die höheren Momente verläuft der Beweis entsprechend [11], unter Nutzung von $(\mathbf{A}^{-1} \mathbf{E})^i \mathbf{A} \mathbf{b} = \mathbf{V} \mathbf{r}_i$ und $(\mathbf{A}^{-T} \mathbf{E}^T)^i \mathbf{A}^{-T} \mathbf{c} = \mathbf{W} \mathbf{q}_i$. Da das Moment m_0 gerade die stationäre Verstärkung ausdrückt, bleibt diese bei der Reduktion erhalten.

Zusammenfassend kann festgehalten werden, dass die reduzierten Modelle das Originalmodell approximieren, im Sinne der Übereinstimmung der ersten q bzw. $2q$ Koeffizienten der Taylor-Reihen von $g(s)$ um null. Weitere Optionen und Eigenschaften der Krylov-unterraumbasierten Methoden sind:

- Anstelle von $s_0 = 0$ kann die Taylor-Reihe auch um einen Punkt $s_0 \neq 0$ entwickelt werden. Mit geringfügig anders gebildeten Krylov-Unterräumen kann dann Übereinstimmung der Momente an diesem Punkt erreicht werden. Es

ist auch möglich, gleichzeitig Momente zu verschiedenen Punkten s_0 zur Übereinstimmung zu bringen [31]. Für $s_0 \rightarrow \infty$ gehen die Momente in so genannte *Markov-Parameter* über, die ebenfalls zur Übereinstimmung gebracht werden können [11; 13].

- Bei Einsatz eines *einseitigen Verfahrens* wird typischerweise \mathbf{V} gemäß (13) und nicht \mathbf{W} gemäß (14) gewählt. Man kann analog zu (16) zeigen, dass dann die ersten q Momente für jeden beliebigen Ausgang y und folglich auch für jeden Ausgangsvektor $\mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x}$, insbesondere auch für $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, übereinstimmen. Eine Approximation des *gesamten* Zustandsvektors \mathbf{x} kann mit q übereinstimmenden Momenten also gemäß (11) durch $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{V} \mathbf{x}_r(t)$ erfolgen. Weiterhin wird bei einseitigen Verfahren typischerweise $\mathbf{W} = \mathbf{V}$ gewählt. Dann kann, bei Vorliegen gewisser passivitätsverwandter Eigenschaften des Originalmodells, *Passivität* des reduzierten Modells gezeigt werden [12].
- *Zweiseitige Verfahren* liefern aufgrund der größeren Zahl übereinstimmender Momente häufig eine bessere Approximation des Ausgangs y . Man kann außerdem zeigen [11], dass das Ein-Ausgangsverhalten zweiseitig reduzierter Modelle unabhängig von der Darstellung des Originalmodells ist. Für einseitige Verfahren gilt dies nicht: hier wirken sich reguläre Zustandstransformationen und andere Äquivalenzumformungen am Originalmodell auf das Übertragungsverhalten des reduzierten Modells aus!

Fehlerschranken im Zeit- oder Frequenzbereich sowie allgemeingültige Stabilitätsaussagen für das reduzierte Modell fehlen bislang. So konnten für die Kolonne nach Bild 1 mittels einseitiger Verfahren (mit \mathbf{V} nach (13)) keine stabilen reduzierten Modelle gefunden werden, während das zweiseitige Verfahren zum Erfolg führte. Das mikrofluidische Antriebssystem nach Bild 2 liefert bei einseitiger Reduktion stets stabile Modelle (da hier die Voraussetzungen für Passivität des reduzierten Modells erfüllt sind [2; 12]), während die zweiseitige Reduktion für manche Werte q instabile Modelle lieferte [14].

3 Algorithmen und Abbruchkriterien

Die Bestimmung einer Basis \mathbf{V} zum Krylov-Unterraum $K_q(\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}})$ ist bei höheren Systemordnungen numerisch heikel. Als günstig hat es sich erwiesen, orthogonale Basisvektoren \mathbf{v}_i iterativ zu bilden und zur Matrix \mathbf{V} zusammenzusetzen. Der inzwischen schon klassische *Arnoldi-Algorithmus* [15] tut dies (im Folgenden mit einer modifizierten Gram-Schmidt-Orthogonalisierung [12]) und liefert q orthonormale Vektoren:

$$0 \text{ Start: Setze } \mathbf{v}_1 = \frac{\tilde{\mathbf{b}}}{\sqrt{\tilde{\mathbf{b}}^T \tilde{\mathbf{b}}}} \text{ und } i = 2$$

(der Startvektor $\tilde{\mathbf{b}}$ wird hier normalisiert und wird erste Spalte von \mathbf{V} ; i wird initialisiert).

$$1 \text{ Nächster Vektor: Berechne } \hat{\mathbf{v}}_i = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{v}_{i-1}.$$

²Für Systeme mit regulärer Matrix \mathbf{E} lässt sich leicht zeigen, dass die höchstmöglichen Dimensionen der Krylov-Unterräume mit den Dimensionen der steuer- bzw. beobachtbaren Unterräume [5] des Modells (8), (9) identisch sind.

- 2 *Orthogonalisierung*: for $j = 1$ to $i - 1$ do
 $h = \hat{\mathbf{v}}_i^T \mathbf{v}_j$;
 $\hat{\mathbf{v}}_i = \hat{\mathbf{v}}_i - h \mathbf{v}_j$.
- 3 *Normalisierung*: Abbruch, falls $\hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{0}$. Andernfalls setze
 $\mathbf{v}_i = \frac{\hat{\mathbf{v}}_i}{\sqrt{\hat{\mathbf{v}}_i^T \hat{\mathbf{v}}_i}}$ (i -te Spalte von \mathbf{V}).
- 4 *Schleife*: Abbruch, falls $i = q$, andernfalls erhöhe i und gehe zu Schritt 1.

Der Arnoldi-Algorithmus kann sowohl bei ein- als auch bei zweiseitigen Verfahren unmittelbar eingesetzt werden und ist aufgrund seiner Einfachheit und seiner guten numerischen Eigenschaften häufig das Mittel der Wahl [14; 20; 31].

Alternativ kann für das zweiseitige Reduktionsverfahren der *Lanczos-Algorithmus* eingesetzt werden ([16] und verbesserte Implementierung in [12]). Er liefert in einer einzigen Iterationsschleife sowohl \mathbf{V} als auch \mathbf{W} in biorthogonaler Form, d. h. mit $\mathbf{W}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$. Ein Nachteil des Verfahrens ist seine gegenüber dem Arnoldi-Algorithmus geringere numerische Robustheit. Abhilfe kann durch Erweiterungen zur verbesserten Orthogonalisierung geschaffen werden [17; 18].

Beachtung verdient noch die in (13) und (14) auftretende *Inverse* der Matrix \mathbf{A} , deren explizite Berechnung die Lösung eines linearen Gleichungssystems mit n^2 Unbekannten erfordern würde. Tatsächlich werden im Arnoldi-Algorithmus aber nur q bzw. $2q$ Vektoren der Form $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{E} \mathbf{v}_{i-1}$ benötigt, die einfacher durch Lösen linearer Gleichungssysteme $\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{E} \mathbf{v}_{i-1}$ ermittelt werden können, mit insgesamt nur nq skalaren Unbekannten. Eine weitere drastische Vereinfachung und Verringerung der Rechenzeit lässt sich erreichen, wenn vor Eintritt in die Arnoldi-Iteration einmalig eine *LU-Faktorisierung* [19] der Matrix \mathbf{A} bereitgestellt wird. Innerhalb der Arnoldi-Iteration müssen dann nur noch dreieckförmige Probleme durch Gaußsche Elimination [18] gelöst werden.

Einen *Hinweis auf günstige Ordnungen* q des reduzierten Modells kann das innerhalb des Arnoldi-Algorithmus verwendete Abbruchkriterium liefern: Wird im dritten Schritt („Normalisierung“) der i -ten Iteration ein Nullvektor, $\hat{\mathbf{v}}_i = \mathbf{0}$, festgestellt, so wird abgebrochen; Sodann kann man mit $q = i - 1$ ein reduziertes Modell berechnen, das das Verhalten des Originalsystems exakt widerspiegelt. Man wird nun erwarten dürfen, dass auch für Vektoren „kleiner“ euklidischer Norm, $|\hat{\mathbf{v}}_i| < \varepsilon$, eine „gute“ Approximation eintritt. Zur Ermittlung günstiger Ordnungen q ist also die Arnoldi-Iteration (ohne Vorgabe von q) so oft zu durchlaufen, bis in Schritt 3 ein $|\hat{\mathbf{v}}_i| < \varepsilon$ mit vorgegebenen ε eintritt. Bild 3 veranschaulicht den Arnoldi-Algorithmus und das Abbruchkriterium: In Schritt 0 wird \mathbf{v}_1 durch Normalisieren des Starvektors $\hat{\mathbf{b}}$ gewonnen. Mit $i = 2$ wird in Schritt 1 sodann $\mathbf{b}_2 = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{v}_1$ gebildet und in den Schritten 2 und 3 orthonormalisiert zu \mathbf{v}_2 , usw. Ragt nun beispielsweise der nächste Vektor, $\mathbf{b}_3 = \hat{\mathbf{A}} \mathbf{v}_2$, nur wenig aus der $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ -Ebene heraus, ist also $|\hat{\mathbf{v}}_3|$ klein, so kann der

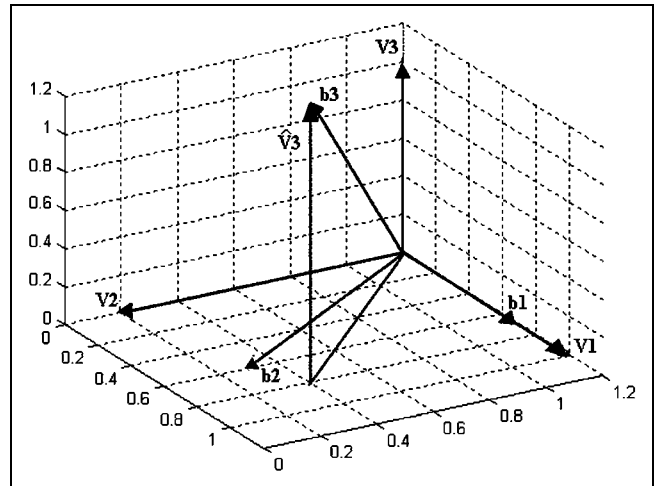


Bild 3: Veranschaulichung des Arnoldi-Algorithmus und eines Abbruchkriteriums.

Unterraum der Dimension 2 als gute Approximation des steuerbaren Unterraums erwartet werden und $q = 2$ gewählt werden. Alternativ kann auch der Winkel zwischen \mathbf{b}_3 und der $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ -Ebene betrachtet werden: ist er klein, kann abgebrochen werden. Endgültig resultieren also die zwei alternativen Maßzahlen

$$d_{1i} = |\hat{\mathbf{v}}_i|, \quad d_{2i} = \frac{|\hat{\mathbf{v}}_i|}{|\hat{\mathbf{A}} \mathbf{v}_{i-1}|}. \quad (17)$$

Bei Verwendung eines *zweiseitigen* Verfahrens können die beiden Krylov-Unterräume in ein- und derselben Iterationsschleife implementiert werden und das *Produkt* der beiden zugehörigen Maßzahlen für die Abbruchentscheidung genutzt werden.

4 Beispiele

Bei dem mikrofluidischen Antriebssystem nach Bild 2 wird die im Innern befindliche explosive Flüssigkeit durch Bestromung des Widerstands erhitzt und zur Explosion gebracht. Dabei wird die Membran zerstört, und das rasch austretende Material verleiht der Anordnung einen mechanischen Impuls (der in der Praxis z. B. zur Lagekorrektur kleiner Satelliten genutzt werden kann). Die Modellierung der dynamischen Vorgänge wird derzeit am Institut für Mikrosystemtechnik (IMTEK) der Universität Freiburg [1; 2] auf der Basis separater Modelle für die verschiedenen aufeinander folgenden Phasen vorangetrieben. Die erste Phase, das Erwärmen der Anordnung durch den Widerstand, kann über eine rechnergestützte FEM-Modellierung geschehen, wobei ein System von 1000 bis 10 000 linearen, zeitinvarianten Differentialgleichungen entsteht, dessen äußere Anregungsfunktion der Einheitssprung ist (Einschalten des Heizstromes). Reduzierte Modelle, die die Erwärmungsvorgänge an unterschiedlichen Stellen innerhalb der Anordnung nachbilden, konnten erfolgreich mit ein- und zweiseitigen Verfahren gewonnen werden, bei Systemordnungen zwischen 10 und 25. Detaillierte Darstellungen der Ergebnisse finden sich in [2; 14].

Für den Prozess nach Bild 1 wurde bei der BASF AG rechnergestützt ein nichtlineares Modell entwickelt, das nach Linearisierung um den Arbeitspunkt 400 lineare Differentialgleichungen umfasst (für die 40+40 Böden der beiden Teilkolonnen), mit 16 Eingangsgrößen und 9 Ausgangsgrößen. Für die geforderte Approximation des Ein-Ausgangsverhaltens bietet sich ein zweiseitiges Verfahren an: Zur Anwendung kam der zweiseitige Arnoldi-Algorithmus [14; 31], der im Mehrgrößenfall gewisse Freiheitsgrade beim Aufbau der Matrizen \mathbf{V} und \mathbf{W} bietet, die in [20] vorteilhaft genutzt werden. Die mit guten Approximationsgüten erreichbaren Modellordnungen liegen bei 40 bis 50. Modellreduktionen durch Balancieren ist mit den vorhandenen MATLAB-Routinen bis zu Ordnungen um 1000 durchführbar, sodass sich hier ein Vergleich anbietet: Wie nicht anders zu erwarten erreicht das balancierte Verfahren die besten Ergebnisse, nämlich vergleichbare Approximationsgüte bei Ordnungen um 30.

5 Systeme zweiter Ordnung

Insbesondere bei der Modellierung mechanischer Systeme entstehen regelmäßig große Systeme linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung,

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{D}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \bar{\mathbf{b}}u, \quad (18)$$

$$y = \bar{\mathbf{c}}^T \mathbf{z}. \quad (19)$$

Bei der Reduktion solcher Modelle ist es häufig wünschenswert, wiederum Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu erhalten, um die damit verbundenen strukturellen Eigenschaften aufrecht zu erhalten. Zur Erreichung dieses Ziels mittel Krylov-Unterraummethoden können Projektionen des oben eingeführten Typs entweder direkt auf das Modell (18), (19) angewandt werden [21; 32], oder aber auf eine äquivalente Zustandsdarstellung

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}}_{\mathbf{E}} \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{bmatrix}}_{\dot{\mathbf{x}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{K} & -\mathbf{D} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}} u, \quad (20)$$

$$y = \underbrace{[\bar{\mathbf{c}}^T \quad \mathbf{0}^T]}_{\mathbf{c}^T} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

die anschließend wieder in die Darstellung zweiter Ordnung, (18), (19), gewandelt werden muss. Auf dem letztgenannten Wege kann nach heutigem Wissensstand eine größere Zahl übereinstimmender Momente erreicht werden (nämlich doppelt so viele wie in [21] und viermal so viele wie in [32]), weshalb im Folgenden auf diese wirkungsvollere Variante näher eingegangen wird.

Ein wichtiges Charakteristikum des Modells (20), (21) ist, dass u nicht direkt auf \dot{y} einwirkt. Diese Tatsache kann mittels der so genannten *Markov-Parameter*

$$M_i = \mathbf{c}^T (\mathbf{E}^{-1} \mathbf{A})^i \mathbf{E}^{-1} \mathbf{b}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (22)$$

ausgedrückt werden: der erste Markov-Parameter ist null,

$$M_0 = [\bar{\mathbf{c}}^T \quad \mathbf{0}^T] \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \bar{\mathbf{b}} \end{bmatrix} = 0 \quad (23)$$

(wobei Invertierbarkeit von \mathbf{M} und auch von \mathbf{K} hier und im Folgenden vorausgesetzt wird). Diese wichtige Eigenschaft soll bei der Reduktion aufrecht erhalten bleiben, was mit dem Verfahren nach Abschnitt 2 dadurch gelingt, dass (13) ersetzt wird durch

$$K_{q_1} (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{E}, \mathbf{E}^{-1} \mathbf{b}) = \text{span} \left\{ \mathbf{E}^{-1} \mathbf{b}, \dots, (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{E})^{q_1-1} \mathbf{E}^{-1} \mathbf{b} \right\}. \quad (24)$$

Der geänderte Startvektor hat zur Folge, dass nunmehr $q-1$ Momente, aber zusätzlich der erste Markov-Parameter zur Übereinstimmung gebracht werden, wenn \mathbf{V} zur Projektion genutzt wird (und wenn \mathbf{E}_r und \mathbf{A}_r nach (10) invertierbar sind, was hier angenommen wird) [11; 13]. Wird zusätzlich \mathbf{W} nach Gleichung (14) gewählt, kommen weitere q übereinstimmende Momente hinzu. In jedem Falle resultiert ein reduziertes Modell der Form (10), (11),

$$\mathbf{E}_r \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_r \mathbf{x} + \mathbf{b}_r u, \quad y = \mathbf{c}_r^T \mathbf{x}, \quad (25)$$

das durch Linksmultiplikation mit \mathbf{E}_r^{-1} übergeht in

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{b} u, \quad y = \mathbf{c}^T \mathbf{x}. \quad (26)$$

Weist ein solches Zustandsraummodell geradzahlige Ordnung $q = 2\tilde{n}$ und einen verschwindenden ersten Markov-Parameter, $M_0 = \mathbf{c}^T \mathbf{b} = 0$, auf, so kann es wie folgt in ein System (18), (19) von Differentialgleichungen zweiter Ordnung gewandelt werden: Zunächst wird ein \tilde{n} -dimensionaler Vektor \mathbf{z} definiert

$$\mathbf{z} = \mathbf{C}_z \mathbf{x} \quad \text{mit} \quad \mathbf{C}_z = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{R} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

worin die $(\tilde{n}-1, 2\tilde{n})$ -Matrix \mathbf{R} frei gewählt wird, aber so, dass \mathbf{C}_z vollen Rang aufweist und $\mathbf{R} \mathbf{b} = \mathbf{0}$ gilt [21; 22]. Die Ableitung dieses Vektors ist

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{C}_z \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}_z \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{C}_z \mathbf{b} u = \mathbf{C}_z \mathbf{A} \mathbf{x}, \quad (28)$$

folglich gilt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_z \\ \mathbf{C}_z \mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{x}. \quad (29)$$

Hiermit definiert sich eine Zustandstransformation³

$$\mathbf{x} = \mathbf{T} \mathbf{x}_r \quad \text{mit} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_z \\ \mathbf{C}_z \mathbf{A} \end{bmatrix}^{-1}, \quad \mathbf{x}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix}, \quad (30)$$

die das System (26) überführt in

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{z}} \\ \ddot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_z \mathbf{A} \mathbf{T} \\ \mathbf{C}_z \mathbf{A}^2 \mathbf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_z \mathbf{b} \\ \mathbf{C}_z \mathbf{A} \mathbf{b} \end{bmatrix} u, \quad (31)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{T} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \dot{\mathbf{z}} \end{bmatrix}.$$

³ Die nötige Invertierbarkeit von \mathbf{T} ist in der Praxis fast immer gegeben. Hinreichende Existenzbedingungen fehlen allerdings noch; Hinweise hierzu finden sich auch in [22].

Hieraus können mit $\mathbf{c}^T \mathbf{T} = [1, 0, \dots, 0]$, $\mathbf{C}_z \mathbf{A} \mathbf{T} = [\mathbf{0} \ \mathbf{I}]$, $\mathbf{C}_z \mathbf{b} = \mathbf{0}$ und durch Vergleich mit (20), (21) sofort die Matrizen \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K} , $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}^T$ des gesuchten Modells (18), (19) abgelesen werden:

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}, \quad [-\mathbf{D} \quad -\mathbf{K}] = \mathbf{C}_z \mathbf{A}^2 \mathbf{T},$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{C}_z \mathbf{A} \mathbf{b}, \quad \bar{\mathbf{c}}^T = [1, 0, \dots, 0].$$

Zusammenfassend verläuft die Ordnungsreduktion eines Modells (18), (19) also in den folgenden Schritten:

- Aufstellen des äquivalenten Modells (20), (21);
- Reduktion nach Abschnitt 2 mit Gleichung (24) anstatt (13) und auf eine geradzahlige Ordnung q ;
- Wandeln des erhaltenen reduzierten Zustandsraummodells (10), (11) in ein solches der Form (31) und Ablesen der gesuchten Matrizen \mathbf{M} , \mathbf{D} , \mathbf{K} , $\bar{\mathbf{b}}$, $\bar{\mathbf{c}}^T$ des endgültigen reduzierten Modells vom Typ (20), (21) bzw. (18), (19).

Anzumerken bleibt, dass die obigen Schritte in geradliniger Weise auf Mehrgrößensysteme ausgedehnt werden können (\mathbf{R} in (27) umfasst dann entsprechend weniger Zeilen) und

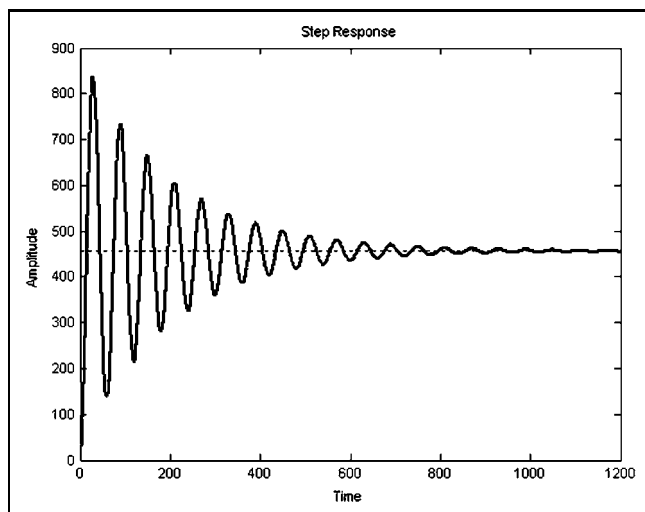


Bild 4: Sprungantwort des Biegebalkens.

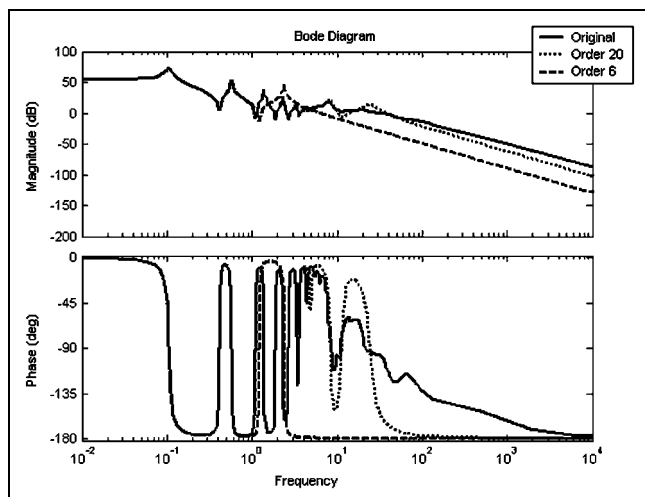


Bild 5: Frequenzgang des Biegebalkens.

auch auf Systeme mit Ausgängen $y = \bar{\mathbf{c}}_1^T \mathbf{z} + \bar{\mathbf{c}}_2^T \dot{\mathbf{z}}$ (\mathbf{R} umfasst dann \tilde{n} Zeilen und \mathbf{c}^T verschwindet aus \mathbf{C}_z), dann gegebenenfalls unter Verzicht auf das Verschwinden des Markov-Parameters, siehe auch [22].

Als Anwendungsbeispiel sei hier die Reduktion des Modells eines einseitig fixierten Biegebalkens aus [10; 30] angesprochen: Das Modell besteht nach räumlicher Diskretisierung aus 174 gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, entsprechend einer Ordnung von 348 in der Zustandsdarstellung (20), (21). Einzige Eingangsgröße des Modells ist eine äußere Kraft, die am freien Ende des Balkens wirkt, als Ausgangsgröße sei hier die Auslenkung an derselben Stelle betrachtet. Für die Nachbildung dieses Ausgangs bietet sich das zweiseitige Reduktionsverfahren nach Abschnitt 2 an. Bei Verwendung des Arnoldi-Algorithmus zur Berechnung von \mathbf{V} und \mathbf{W} gehen beide Abbruchkriterien (17) ab $q = 6$ auf verschwindend kleine Werte zurück, sodass auf Ordnung 6 reduziert wird, letztendlich also ein reduziertes Modell bestehend aus $\tilde{n} = 3$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung resultiert. Die Sprungantwort des reduzierten Modells ist im Rahmen der Zeichengenauigkeit nicht von der des Originals unterscheidbar (Bild 4). Deutliche Unterschiede treten aber im Frequenzgang zutage (Bild 5): Das Modell der Ordnung 6 kann Betrag und Phase nur bis hin zu Frequenzen oberhalb der zweiten Resonanzstelle gut nachbilden. Zum Vergleich ist in Bild 5 außerdem der Frequenzgang eines reduzierten Modells der Ordnung $q = 20$ wiedergegeben, mit deutlich besserer Approximation bei höheren Frequenzen.

6 Ausblick

Zur Reduktion großer linearer Modelle, bei denen herkömmliche Verfahren aus numerischen Gründen scheitern, etablieren sich Krylov-unterraumbasierte Verfahren aufgrund ihrer Einfachheit und numerischer Robustheit. Hinsichtlich der Approximationsgüte bleiben sie jedoch hinter dem bewährten Verfahren über die Balancierung [7; 8] zurück – sofern dieses anwendbar ist. Aktuelle Forschungsarbeiten zielen daher unter anderem darauf ab, die zur Balancierung nötigen Schritte mittels Krylov-Unterraummethoden anzunähern [10]. Die resultierenden Beziehungen lassen sich interessanterweise teilweise wiederum als Krylov-Unterraumverfahren des in Abschnitt 2 vorgestellten Verfahrens interpretieren. Die Hoffnung, allgemeine Stabilitätsbeweise und Fehlerschranken für derart reduzierte Modelle gewinnen zu können, hat sich bis heute nicht erfüllt.

In der Anwendung erweist sich, dass nur ungefähr die Hälfte der systemcharakteristischen Singulärwerte eines mittels Krylov-Unterraumverfahren reduzierten Modells sehr genau mit den größten Singulärwerten des Originalmodells übereinstimmt. Dieses empirische Erkenntnis kann folgendermaßen genutzt werden: Im ersten Schritt wird mittels Krylov-Unterraumverfahren eine Reduktion von

Ordnung n auf z.B. $3q$ durchgeführt, im zweiten Schritt eine erneute Reduktion mittels Balancierung von Ordnung $3q$ auf q . Die so gefundenen Ergebnisse sind denen einer Krylov-basierten direkten Reduktion von n auf q in der Regel deutlich überlegen.

Eine große Herausforderung stellt die Reduktion *nichtlinearer* Modelle dar. Ein möglicher Ansatz ist es, Projektionen, wie in Abschnitt 1 eingeführt, auf nichtlineare Modelle des Typs $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ anzuwenden, was auf reduzierte Modelle $\dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{V}^T \mathbf{f}(\mathbf{V}\mathbf{x}_r, \mathbf{u})$ führt. Die Projektionsmatrix \mathbf{V} kann dabei entweder aus einem linearisierten Modell oder durch Analyse von Simulationsergebnissen des Originalmodells gewonnen werden [23;24]. Andere Möglichkeiten entstehen durch „Identifikation“ nichtlinearer Modelle entlang (simulatorisch gewonnener) Trajektorien des Originals, wobei die charakteristischen Nichtlinearitäten des Originals vorzugsweise ins reduzierte Modell übernommen werden [25;26], oder durch Abspaltung nichtlinearer Systemanteile und Reduktion der linearen [29]. Den genannten Zugängen ist gemein, dass sie im Kern auf Ansätzen der *linearen* Theorie beruhen; in der praktischen Anwendung können sie aber fallabhängig zu sehr guten Ergebnissen führen. Jüngere bemerkenswerte Ergebnisse zur nichtlinearen Balancierung [27;28] bleiben aus rechentechnischen Gründen auf kleinere Systeme beschränkt.

Danksagung

Die Autoren danken den DFG-Projektpartnern des Instituts für Mikrosystemtechnik der Universität Freiburg (Prof. Dr. J. Korvink) und den Mitarbeitern der Prozessleittechnik-Fachstelle der BASF AG (Dr. J. Birk und Dr. J. Bausa) für die freundliche und konstruktive Zusammenarbeit und für die Bereitstellung von Modellen und der Bilder 1 und 2. Dank gilt ebenfalls den Autoren von [30] für ihr Modell und der DFG für die Förderung.

Literatur

- [1] E.B. Rudnyi, T. Bechtold, J.G. Korvink, C. Rossi: Solid Propellant Microthruster: Theory of Operation and Modeling Strategy. Nanotech'02, September 2002, AIAA paper 2002-5755.
- [2] T. Bechtold, E.B. Rudnyi, J.G. Korvink: Automatic Order reduction of Thermo-Electric Models for MEMS: Arnoldi versus Guyan. Proc. 4th ASDAM, 2001.
- [3] H. Kiendl, K. Post: Invariante Ordnungsreduktion mittels transparenter Parametrierung. Automatisierungstechnik 36 (1988) S. 92-101.
- [4] O. Föllinger: Regelungstechnik. 8. Auflage, Hüthig Verlag 1994.
- [5] J. Lunze: Regelungstechnik 2. 2. Auflage, Springer-Verlag 2002.
- [6] D. Bonvin, D.A. Mellichamps: A Unified Derivation and Critical Review of Modal Approaches to Model Reduction. Int. J. Contr. 35 (1982) S. 829-848.
- [7] B.C. Moore: Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction. IEEE Trans. Autom. Contr. AC-26 (1981) S. 17-32.
- [8] D. Hinrichsen, H.-W. Philippsen: Modellreduktion mit Hilfe balancierter Realisierungen. Automatisierungstechnik 38 (1990) S. 416-422.
- [9] K. Glover: All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ -error bounds. Int. J. Contr. 39 (1984) S. 1115-1193.
- [10] A.C. Antoulas, D. Sorensen: Approximation of Large-Scale Dynamical Systems: an Overview. Int. J. Appl. Math. and Computer Science, 11 (2001) S. 1093-1121.
- [11] B. Salimbahrami, B. Lohmann: Krylov Subspace Methods in Linear Model Order Reduction: Introduction and Invariance Properties. Sci. Report, IAT, Univ. Bremen, 2003. URL: <http://www.iat.uni-bremen.de/lohmann/papers>.
- [12] R.W. Freund: Passive Reduced-Order Modeling via Krylov Subspace Methods. Numerical Analysis Manuscript, (00-3-02), March 2000, also available at URL <http://cm.bell-labs.com/cs/doc/00>.
- [13] C. Villemagne, R.E. Skelton: Model Reductions using a projection formulation. Int. J. Contr. 46 (1987) S. 2141-2169
- [14] B. Salimbahrami, B. Lohmann, T. Bechtold, J. Korvink: Two-sided Arnoldi Algorithm and Its Application in Order Reduction of MEMS. Proc. 4th Mathmod, S. 1021-1028, Vienna, 2003.
- [15] W.E. Arnoldi: The Principle of Minimized Iterations in Solution of the Matrix Eigenvalue Problem. Quart. Appl. Math. 9 (1951) S.17-29.
- [16] C. Lanczos: An Iteration Method for the Solution of the Eigenvalue Problem of Linear Differential and Integral Operators. J. Res. Nat. Bureau Stan. 45 (1950) S.255-282.
- [17] D.L. Boley: Krylov Space methods on state-space control models. Circuits Syst. Signal Process 13 (1994) S. 733-758.
- [18] B. Lohmann, B. Salimbahrami: Introduction to Krylov-Subspace Methods in Model Order Reduction. In: Lohmann/Gräser (Hrsg.): Methoden und Anwendungen der Automatisierungstechnik. Shaker Verlag, Aachen, 2003.
- [19] G.H. Golub: Matrix Computations. The Johns Hopkins University Press, 3rd edition, 1996.
- [20] B. Salimbahrami, B. Lohmann, T. Bechtold: Two-Sided Arnoldi in Order Reduction of Large Scale MIMO Systems. Sci. Report, IAT, Univ. Bremen, 2002. URL: <http://www.iat.uni-bremen.de/lohmann/papers>.
- [21] B. Salimbahrami, B. Lohmann: Order reduction of Large Scale Second Order Systems Using Krylov Subspace Methods. Submitted to Linear Algebra and its Applications.
- [22] D.G. Meyer, S. Srinivasan: Balancing and Model Reduction for Second-Order Form Linear Systems. IEEE Trans. Autom. Contr. 41 (1996) S. 1632-1644.
- [23] H.P. Löffler, W. Marquardt: Order Reduction of Non-linear Differential-Algebraic Process Models. J. Proc. Contr. 1 (1991) S. 32-40.
- [24] S. Lall, J.E. Marsden, S. Glavaski: Empirical model reduction of controlled nonlinear systems. Technical Reports CIT/CDS 98-008, California Institute of Technology, 1998.
- [25] B. Lohmann: Ordnungsreduktion und Dominanzanalyse nichtlinearer Systeme. Automatisierungstechnik 42 (1994), S. 466-474.
- [26] B. Lohmann: Application of Model Order Reduction to a Hydropneumatic Vehicle Suspension. IEEE Trans. Contr. Sys. Tech. 3 (1995), S. 102-109.
- [27] J.M.A. Scherpen: Balancing for Nonlinear Systems. Ph.D. Dissertation, University of Twente, The Netherlands, 1994.
- [28] J.A. Newman, P.S. Krishnaprasad: Computing Balanced Realizations for Nonlinear Systems. Technical Report CD-CSS TR 2000-4, Institute for Systems Research, University of Maryland, 2000.

- [29] *B. Salimbahrami, B. Lohmann*: A Simulation Free Nonlinear Model Order Reduction Approach and Comparison Study. Proc. 4th Mathmod (2003) S. 429–435.
- [30] *Y. Chahlaoui, P. van Dooren*: A collection of Benchmark examples for model reduction of linear time invariant dynamical systems. SLICOT Working Note 2002-2: February 2002. URL: <http://www.win.tue.nl/niconet/NIC2/reports.html>.
- [31] *E.J. Grimme*: Krylov Projection Methods for Model Reduction. Ph.D. Thesis, ECE Dept. Univ. of Illinois, Urbana-Champaign.
- [32] *T.J. Su, R.R. Craig Jr.*: Model Reduction and Control of Flexible Structures Using Krylov Vectors. J. Guidance 14 (1989) S. 260–267.

Manuskripteingang: 11. April 2003.



Prof. Dr.-Ing. habil. Boris Lohmann ist kollegialer Leiter des Instituts für Automatisierungstechnik im Fachbereich 1, Physik/Elektrotechnik, der Universität Bremen und vertritt dort das Fachgebiet *Systemdynamik und Regelungstechnik*. Forschungsschwerpunkte liegen auf den Gebieten der Modellierung und Reduktion dynamischer Systeme, der aktiven Geräuschdämpfung im Kraftfahrzeug und der autonomen mobilen Systeme.

Adresse: Institut für Automatisierungstechnik, Otto-Hahn-Alle NW1, Universität Bremen, D-28359 Bremen, Tel.: +49 (0421) 218-4688, Fax: -4596, E-Mail: BL@iat.uni-bremen.de



M. Sc. Behnam Salimbahrami ist wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Automatisierungstechnik der Universität Bremen und beschäftigt sich im Rahmen einer DFG-Förderung mit der Modellvereinfachung linearer und nichtlinearer Systeme.

Adresse: siehe oben,
E-Mail: Salimbahrami@iat.uni-bremen.de

Regelungstechnik

Gerd Schulz
Regelungstechnik 1
Lineare und Nichtlineare
Regelung, Rechner-
gestützter Reglerentwurf
2., überarbeitete und erweiterte
Auflage 2004, 426 Seiten
Oldenbourg Lehrbücher für Ingenieure
€ 29,80
ISBN 3-486-27378-7



Regelungstechnik 1 behandelt die Gebiete Lineare Regelung, Nichtlineare Regelung und den Rechnergestützten Reglerentwurf und führt auf anschauliche Art und Weise und unter Verwendung vieler Schaubilder und Diagramme in die Thematik ein. Auch das notwendige theoretische Hintergrundwissen wird vermittelt.



Das neue Standardwerk für weiterführende Vorlesungen zur Regelungstechnik. Der Leser findet eine anschauliche Einführung in die Gebiete Mehrgrößenregelung, Digitale Regelung und Fuzzy-Regelung. Zum selbstständigen Erarbeiten des Lehrstoffes dienen viele durchgerechnete Beispiele und Aufgaben mit Lösungen.

Gerd Schulz
Regelungstechnik
Mehrgößenregelung –
Digitale Regelungstechnik –
Fuzzy-Regelung
2002, 452 Seiten
Oldenbourg Lehrbücher für Ingenieure
€ 29,80
ISBN 3-486-25858-3

Oldenbourg Wissenschaftsverlag, Rosenheimer Straße 145,
D-81671 München, Tel. 089 / 450 51-0, Fax 089 / 450 51-204

Bestellungen: <http://www.oldenbourg-verlag.de>

Oldenbourg

