

Ordnungsreduktion und Dominanzanalyse nichtlinearer Systeme

Boris Lohmann, Konstanz

Herrn Prof. em. Dr. rer. nat. Dr.-Ing. E.h. O. Föllinger zum 70. Geburtstag gewidmet



Dr.-Ing. Boris Lohmann arbeitet in der Entwicklungsabteilung für Briefsortieranlagen der AEG Electrocom, Konstanz. Hauptarbeitsfelder: Anlagensteuerung und -regelung, Theorie linearer und nichtlinearer Mehrgrößensysteme.

Es wird ein Verfahren zur Verringerung der Gleichungsanzahl nichtlinearer Systemmodelle vorgestellt. Der Grundgedanke ist dabei, die Nichtlinearitäten des Originalsystems ihrem Charakter nach ins reduzierte System zu übernehmen, jedoch alle Kopplungen von Zustandsgrößen untereinander und mit nichtlinearen Funktionen neu festzulegen. Forderungen nach stationärer Genauigkeit des reduzierten Systems können berücksichtigt werden. Ergänzend werden anschauliche Dominanzmaßzahlen eingeführt, die Hinweise auf günstige Systemordnungen geben und den Entwerfer bei der Vorgabe wesentlicher Zustandsgrößen unterstützen. Als Anwendungsbeispiel wird das Modell einer aktiven hydropneumatischen Kraftfahrzeugfederung behandelt.

Order reduction and dominance analysis of nonlinear systems

A method is presented which reduces the number of equations of nonlinear system models. The main idea is to take over the nonlinearities from the original system into the reduced system but to renew all couplings of state variables and nonlinear functions. Steady state error can be avoided by additional measures. Furthermore dominance numbers are introduced which help choosing a favourable system order and dominant state variables. As a technical example the model of an active hydropneumatic vehicle suspension is considered.

1 Einführende Übersicht

Grundlage für Simulationen, Analysen und Regelungs- und Steuerungsentwürfe sind in aller Regel mathematische Modelle der betreffenden dynamischen Systeme. Nicht selten steht dabei die Komplexität de-

taillierter Systemmodelle einer weiteren Verarbeitung im Wege, und es sind Verfahren gefragt, die Vereinfachungen der Systembeschreibungen erlauben. Im folgenden wird ein derartiges Verfahren vorgestellt, das speziell eine *Reduktion der Systemordnung* bewirkt, also die Zahl der systembeschreibenden Zustandsdifferentialgleichungen verringert. Ausgangspunkt ist die gängige Zustandsdarstellung eines zeitinvarianten Systems

$$\dot{x}(t) = f(x, u) \quad (1)$$

(mit dem n -dimensionalen Zustandsvektor x und dem p -dimensionalen Stellgrößenvektor u), die ohne Einschränkung der Allgemeinheit auch in der Form

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Fg(x, u) \quad (2)$$

angegeben werden kann. Der Vektor $g(x, u)$ enthält darin ausschließlich *nichtlineare* Terme in den Komponenten von x und u , und zwar jeden solchen Term nur einmal und von eventuellen konstanten Faktoren befreit. Ziel der Ordnungsreduktion ist die Gewinnung eines Systems niedrigerer Ordnung \tilde{n} ,

$$\dot{\tilde{x}}(t) = \tilde{f}(\tilde{x}, u), \quad (3)$$

welches das Verhalten des Originals (1) approximiert, das heißt eine Nachbildung zumindest der *wesentlichen* Zustandsgrößen gestattet.

Darüber, welche die wesentlichen oder *dominanten* Zustandsgrößen sind, bestehen häufig klare Vorstellungen: Es werden dies die Meß- und Rückführgrößen, die Regelgrößen und sonstige für übergeordnete Systeme wichtige Größen sein, aber auch innere, für das dynamische Verhalten besonders wichtige Größen. Sie lassen sich zum Vektor x_{do} zusammenfassen und hängen mit dem Originalzustandsvektor über

$$x_{do} = Rx \quad (4)$$

zusammen, worin die *Reduktionsmatrix* R in jeder Zeile eine Eins und sonst Nullen aufweist.

Der Spezialfall eines *linearen* Systems liegt vor, wenn der Vektor $f(x, u)$ in (1) ausschließlich *Linearkombinationen* der Elemente von x enthält und folglich der Summand $Fg(x, u)$ in der Darstellung (2) entfällt. Zur Ordnungsreduktion solcher Systeme stehen zahlreiche bewährte Verfahren verschiedenen Typs zur Verfügung ([1 bis 4], Übersichten in [5 bis 7]). Für nichtlineare

Systeme hingegen ist ihre Anzahl heute noch gering¹. Zu nennen ist ein Ansatz von *Hasenjäger* [8], der speziell ein Originalsystem der Gestalt

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_{do} \\ \dot{\mathbf{x}}_{rest} \end{bmatrix} = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{do}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (5)$$

voraussetzt, dann eine Ordnungsreduktion des *linearen* Systems $\dot{\mathbf{x}}^*(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}^*(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t)$ durch ein beliebiges Verfahren vorsieht, mit dem Ergebnis $\dot{\tilde{\mathbf{x}}}^*(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}^*(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t)$, das schließlich zum endgültigen Reduktionsergebnis

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \quad (6)$$

ergänzt wird. Beim Vorgang der Reduktion bleiben also nichtlineare Systemeigenschaften unberücksichtigt. Dem weiteren Nachteil der eingeschränkten Systemklasse (5) steht als Vorteil die kaum zu überbietende Übersichtlichkeit des Vorgehens gegenüber.

Von *Pallaske* wurde ein Verfahren vorgestellt [9; 10], das auf einer *orthogonalen Projektion* $\mathbf{z} = \mathbf{W}\mathbf{x}$ des Zustandsvektors des Systems (1) aufbaut. Die konstante (\tilde{n}, n) -Matrix \mathbf{W} wird dabei anhand von Zeitverläufen des Originalzustandsvektors \mathbf{x} ermittelt. Entsteht durch die näherungsweise Rücktransformation

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{W}^T \mathbf{z}(t) = \mathbf{W}^T \mathbf{W}\mathbf{x}(t) \quad (7)$$

kein zu großer Fehler, so darf man hoffen, die Transformation auch fehlerarm auf die *zeitlichen Ableitungen* von $\mathbf{x}(t)$ anwenden zu können. Es folgt zunächst also

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{W}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{W}\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (8)$$

und durch Einsetzen der Näherung $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{W}^T \mathbf{z}(t)$ anstelle von \mathbf{x} resultiert endgültig das System der Ordnung \tilde{n}

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{W}\mathbf{f}(\mathbf{W}^T \hat{\mathbf{x}}, \mathbf{u}), \quad (9)$$

aus dessen Zustandsvektor die Zeitverläufe des Originals durch $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{W}^T \hat{\mathbf{z}}$ approximiert werden können. Das Verfahren besitzt gegenüber dem zuerst beschriebenen den Vorteil, auf Systeme des allgemeinen Typs (1), (2) anwendbar zu sein. Allerdings reagiert es empfindlich, wenn die Approximation (7) nicht mit hoher Güte gelingt, da die Anwendung auf die Ableitung gemäß (8) den Fehler in unkontrollierter Weise ins reduzierte System weiterträgt. Fragen zum stationären Verhalten des reduzierten Systems bleiben – anders als beim *Hasenjäger*-Ansatz – gänzlich offen.

Verfahren der *singulären Perturbation* [11; 12] können in ihrer Grundidee als Verallgemeinerung einer physikalischen Ordnungsreduktion durch Vernachlässigung schneller Systemteile verstanden werden. Ausgangspunkt ist eine spezielle Zustandsdarstellung

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}), \quad (10)$$

$$\varepsilon \dot{\mathbf{x}}_2(t) = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{u}) \quad (11)$$

¹ Hingegen sind einige hilfreiche Verfahren bekannt, die nicht primär eine Reduktion der Systemordnung sondern *Vereinfachungen* der rechten Seite der Zustandsdifferentialgleichung zum Ziel haben [17 bis 19].

mit kleinem Wert ε , so daß der Teilzustandsvektor \mathbf{x}_1 einen *langsamen*, \mathbf{x}_2 einen *schnellen* Systemanteil kennzeichnen. Der dominante Anteil ist der langsamere, so daß es nahe liegt, ε gegen Null gehen zu lassen, und (11) dann nach dem Teilvektor \mathbf{x}_2 in der Form $\mathbf{x}_2 = \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{u})$ aufzulösen. Dieses Ergebnis wird in die erste Zustandsdifferentialgleichung (10) eingesetzt, mit dem Endergebnis

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = \mathbf{f}_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \mathbf{u}), \mathbf{u}). \quad (12)$$

Beispielsweise bei mechanischen Systemen treten Teilsysteme der Form (11) mit kleinem ε in natürlicher Weise auf, wenn kleine Massen oder große Federkonstanten beteiligt sind. Mit $\varepsilon \rightarrow 0$ werden diese aus dem System entfernt, mit dem gleichen Resultat, das eine Modellerstellung unter gänzlichem Verzicht auf diese Elemente erbracht hätte. Nicht immer gelingt aber eine Aufspaltung in schnelle und langsame Systemteile aus derartigen technischen Erwägungen. Weitere Schwierigkeiten können bei der Auflösung von (11) nach \mathbf{x}_2 auftreten.

Aufbauend auf diesem knapp skizzierten Stand der nichtlinearen Ordnungsreduktion und unter Einbeziehung verschiedener Zusammenhänge aus der *linearen* Ordnungsreduktion wird in den folgenden Abschnitten ein Reduktionsverfahren entwickelt, das das Spektrum der behandelbaren Systeme erweitert und die erzielbaren Ergebnisse verbessern kann. Im Abschnitt 2 wird der eigentliche Reduktionsformalismus hergeleitet (siehe auch [14; 15; 20]), im Abschnitt 3 werden sodann Maßnahmen zur Erzielung *stationärer Genauigkeit* erörtert. Gegenstand des vierten Abschnittes ist die *Dominanzanalyse* nichtlinearer Systeme. Abschnitt 5 bringt als technisches Anwendungsbeispiel das Modell einer *aktiven hydropneumatischen Kraftfahrzeugfederung*, dessen Ordnung von 10 auf 7 bzw. 5 bei abnehmender Approximationsgüte reduziert wird.

2 Ordnungsreduktion durch Gleichungsfehlerminimierung

Ausgehend von der allgemeinen Systemdarstellung (2) ist der Grundgedanke der folgenden Ausführungen, die in $\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ zusammengefaßten nichtlinearen Funktionen ins reduzierte System zu übernehmen, keine zusätzlichen Nichtlinearitäten vorzusehen und alle weiteren Kopplungen von Zustandsgrößen untereinander, mit Stellgrößen und mit den nichtlinearen Funktionen neu festzulegen. Das reduzierte System der Ordnung \tilde{n} wird daher in der Form

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{x}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{g}(\mathbf{W}\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}) \quad (13)$$

angesetzt. Die Matrizen $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$, $\tilde{\mathbf{F}}$, \mathbf{W} sind im folgenden derart zu bestimmen, daß $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ die Verläufe der *dominanten Zustandsgrößen* nachbildet, die vom Entwerfer vorab auszuwählen sind und in \mathbf{x}_{do} gemäß (4) zusammengefaßt sind. Denkt man sich die Ordnungsreduktion in idealer Weise gelungen, so werden Originalsystem (2) und reduziertes System (13) auf jede Anregung $\mathbf{u}(t)$ aus jeder Anfangsauslenkung $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ bzw.

$\tilde{x}(t_0) = x_{do}(t_0)$ heraus mit den gleichen Verläufen $x_{do}(t) = \tilde{x}(t_0)$ reagieren, und es wird auch $\dot{x}_{do}(t) = \dot{\tilde{x}}(t_0)$ gelten. Aus (13) wird durch Einsetzen dieser Beziehungen

$$\dot{x}_{do}(t) = \tilde{A}x_{do}(t) + \tilde{B}u(t) + \tilde{F}g(Wx_{do}, u). \quad (14)$$

Tatsächlich wird sich dieses Ideal nicht erreichen lassen. In Anlehnung an einen Ansatz zur Ordnungsreduktion *linearer* Systeme nach Eitelberg [13] kann man sich aber damit begnügen, (14) *näherungsweise* zu erfüllen und den *Gleichungsfehler*

$$d_1(t) = \dot{x}_{do}(t) - \tilde{A}x_{do}(t) - \tilde{B}u(t) - \tilde{F}g(Wx_{do}, u) \quad (15)$$

klein zu halten. Aus dieser Forderung lassen sich die Matrizen \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{F} , wie sich zeigen wird, geradlinig bestimmen. Von der Matrix W wird dagegen gefordert, daß sie ihre direkte Aufgabe, nämlich im Argument von g den gesamten Zustandsvektor x aus x_{do} näherungsweise zu rekonstruieren, gut erfüllt, also den Gleichungsfehler

$$d_2(t) = x(t) - Wx_{do}(t) \quad (16)$$

klein hält. Für welche Zeitverläufe aber sollen diese beiden Aufgaben gelöst werden? Geeignet sind sicherlich solche Verläufe, die durch das Originalsystem erzeugt werden können und durch Simulation desselben zu gewinnen sind. Um möglichst große Bereiche des Zustandsraumes abzudecken, wird es dabei notwendig sein, nicht nur eine, sondern mehrere Simulationen mit verschiedenen Anfangswerten und Anregungsfunktionen durchzuführen. Als Ergebnis stehen dann zu jeder der insgesamt r durchgeführten Simulationen Vektoren $x(t_{0i}), x(t_{1i}), \dots, x(t_{ei}), i = 1, \dots, r$, zur Verfügung. Die Fehlergleichung (16) kann nun zu den diskreten Zeitpunkten $t_{01}, \dots, t_{e1}, \dots, t_{0r}, \dots, t_{er}$ betrachtet werden: Um d_2 „klein“ zu halten, wird die gewichtete Summe der Betragsquadrate von $d_2(t)$ zu den genannten diskreten Zeitpunkten minimiert

$$J_2 = q^2(t_{01})|d_2(t_{01})|^2 + \dots + q^2(t_{er})|d_2(t_{er})|^2 \stackrel{!}{=} \min. \quad (17)$$

Die darin frei vorgebbaren positiv-reellen Gewichtungsfaktoren $q(t_{01}), \dots, q(t_{er})$ können zum einen zur Zeitgewichtung innerhalb einzelner Simulationen, zum anderen zur Gewichtung einzelner Simulationen gegeneinander verwendet werden. Faßt man die Fehlervektoren d_2 nebeneinander angeordnet zur Matrix D_2 zusammen und außerdem die Gewichtungsfaktoren q in der Diagonalmatrix Q , so läßt sich das Gütemaß J_2 in Matrixschreibweise

$$J_2 = \text{spur} \{D_2 Q Q^T D_2^T\} \quad (18)$$

angeben. Um hierin leicht einsetzen zu können, werden nun ebenfalls die Vektoren $x(t_i)$ und $x_{do}(t_i)$ zu Matrizen X und X_{do} zusammengesetzt, so daß $D_2 = X - WX_{do}$ gilt. Durch Auswerten der notwendigen Bedingung $\partial J / \partial W = 0$ für ein Minimum von J_2 läßt sich dann W bestimmen zu

$$W = X Q Q^T X_{do}^T (X_{do} Q Q^T X_{do}^T)^{-1}. \quad (19)$$

Um die zweite Teilaufgabe zu lösen, wird ganz entsprechend das Gütemaß

$$J_1 = q^2(t_{01})|d_1(t_{01})|^2 + \dots + q^2(t_{er})|d_1(t_{er})|^2 = \text{spur} \{D_1 Q Q^T D_1^T\} \quad (20)$$

betrachtet. Die Vektoren $d_1(t_i)$ sind zur Matrix D_1 zusammengefaßt, ebenso werden nun die Vektoren $\dot{x}_{do}(t_i)$ (gewonnen aus (2)) zu \dot{X}_{do} und die Vektoren $u(t_i)$ zu U zusammengefaßt. Außerdem werden die Nichtlinearitätenvektoren $g(Wx_{do}(t_i), u(t_i))$ zur Matrix Γ zusammengesetzt. Für D_1 kann dann geschrieben werden

$$D_1 = \dot{X}_{do} - \tilde{A}X_{do} - \tilde{B}U - \tilde{F}\Gamma = \dot{X}_{do} - [\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{F}] \begin{bmatrix} X_{do} \\ U \\ \Gamma \end{bmatrix} = \dot{X}_{do} - EM, \quad (21)$$

mit den Abkürzungen $E = [\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{F}]$ und $M^T = [X_{do}^T, U^T, \Gamma^T]$. Hiermit kann wie oben durch Auswerten der notwendigen Bedingung für ein Minimum von J_1 nach der gesuchten Matrix E aufgelöst werden:

$$E = [\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{F}] = \dot{X}_{do} Q Q^T M^T (M Q Q^T M^T)^{-1}. \quad (22)$$

Das reduzierte System (13) ist damit vollständig bestimmt², bemerkenswerterweise über iterationsfreie Formeln. Über die Approximation von $x_{do}(t)$ durch $\tilde{x}(t)$ hinaus kann mit Hilfe der Matrix W der *gesamte* Zustandsvektor des Originalsystems durch die Beziehung $\hat{x}(t) = W\tilde{x}(t)$ nachgebildet werden, also auch die *nicht* dominanten Zustandsgrößen.

3 Stationäre Genauigkeit

Mit den Ergebnissen (19) und (22) ist das Reduktionsverfahren bereits einsatzfähig. Abhängig von der vorgesehenen Verwendung wird man aber gelegentlich vom reduzierten System verlangen, daß es für bestimmte Anregungen *exakt* auf die gleichen Stationärwerte einschwingt wie das Original, daß also

$$\tilde{x}_{\text{stat}} = x_{do, \text{stat}} \quad (23)$$

gilt. Diese Forderung kann berücksichtigt werden, indem bei der Minimierung von J_1 eine Nebenbedingung der Form

$$L = EH \quad (24)$$

einbezogen wird, die sich im Endergebnis

$$E = \dot{X}_{do} Q Q^T M^T (M Q Q^T M^T)^{-1} + (L - \dot{X}_{do} Q Q^T M^T (M Q Q^T M^T)^{-1} H) \cdot (H^T (M Q Q^T M^T)^{-1})^{-1} H^T (M Q Q^T M^T)^{-1} \quad (25)$$

² Die benötigten Inversen in den Gleichungen (19), (22) existieren in der Regel, wenn die Anregungsfunktionen $u(t)$ derart gewählt sind, daß die Matrix U Höchststrang besitzt [14].

anstelle von (22) niederschlägt [14]. In \mathbf{H} ordnet man dabei *Ruhelagen* des Originalsystems gemäß

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{do,stat,1} & \cdots & \mathbf{x}_{do,stat,m} \\ \mathbf{u}_{stat,1} & \cdots & \mathbf{u}_{stat,m} \\ \mathbf{g}(\mathbf{W}\mathbf{x}_{do,stat,1}, \mathbf{u}_{stat,1}) & \cdots & \mathbf{g}(\mathbf{W}\mathbf{x}_{do,stat,m}, \mathbf{u}_{stat,m}) \end{bmatrix} \quad (26)$$

an und wählt $\mathbf{L} = \mathbf{0}$. Durch die Nebenbedingung wird so erzwungen, daß der Gleichungsfehlervektor \mathbf{d}_1 in den Ruhelagen *exakt* verschwindet. Dadurch werden auch dem reduzierten System diese Ruhelagen aufgeprägt. Sind die Ruhelagen gerade die *stationären Endwerte* des Originals zu besonders interessierenden Anregungen, so wird in der Regel auch das reduzierte System bei entsprechender Anregung auf diese Endwerte einschwingen und es gilt (23), wie gewünscht. Gelingt es, die Ruhelagen des Originalsystems für *beliebige* Anregungen zu bestimmen, so kann stationäre Genauigkeit häufig sogar für beliebige Anregungen erzielt werden. Dazu müssen in \mathbf{H} nur ausreichend viele Ruhelagen angeordnet werden, so daß der Rang von \mathbf{H} auf diesem Wege nicht mehr steigerbar ist.

Der beschriebene Formalismus erlaubt erstmals eine gezielte Einflußnahme auf das stationäre Verhalten ordnungsreduzierter nichtlinearer Systeme. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß Forderungen nach stationärer Genauigkeit mit Verschlechterungen des dynamischen Verhaltens einhergehen. Bei der Reduktion der Kraftfahrzeugfederung im fünften Abschnitt wird deshalb darauf verzichtet.

4 Festlegung dominanter Zustandsgrößen

Ein wesentliches Kennzeichen des beschriebenen Vorgehens ist die Vorgabe dominanter Zustandsgrößen, die in der Praxis aber gelegentlich Schwierigkeiten machen kann. Es stellt sich die Frage, ob nicht gewisse *Linearkombinationen* von Zustandsgrößen die geeigneteren dominanten Größen sind, oder noch weiter gefaßt: Läßt sich nicht eine *lineare Transformation* der Zustandsgrößen finden, mit deren Hilfe aussagekräftige *Dominanzmaßzahlen* angegeben werden können, ähnlich wie das die *Modaltransformation* [1; 5] oder die Transformation auf *balancierte Darstellung* [2] für *lineare* Systeme ermöglichen? Tatsächlich gelingt die Berechnung einer solchen Transformation, und zwar auf der Basis einer *Zeitverlaufsanalyse*, wie sie in Form von Steuerbarkeitsmatrizen auch Ausgangspunkt der *Moore'schen* Dominanzanalyse [2] für *lineare* Systeme war. Zunächst wird die Aufgabenstellung präzisiert: Gesucht ist eine reguläre, lineare Zustandstransformation

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{z}(t)} = \underset{(n,n)}{\mathbf{V}} \underset{(n,1)}{\mathbf{x}(t)} \quad (27)$$

mit der Eigenschaft, daß die Verläufe aller n Originalzustandsgrößen x_1, \dots, x_n aus den ersten \tilde{n} transformierten Größen $z_1, \dots, z_{\tilde{n}}$ zusammengefaßt in

$$\underset{(\tilde{n},1)}{\mathbf{z}_{oben}(t)} = \underset{(\tilde{n},n)}{\mathbf{V}_{oben}} \underset{(n,1)}{\mathbf{x}(t)}, \quad (28)$$

näherungsweise rückgewonnen werden können durch

$$\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{W}\mathbf{z}_{oben}(t), \quad (29)$$

und zwar optimal im Sinne minimaler gewichteter quadratischer Fehlerflächen

$$J = \sum_{t_i=t_0}^{t_e} (\mathbf{x}(t_i) - \hat{\mathbf{x}}(t_i))^T \mathbf{S}^T \mathbf{S} (\mathbf{x}(t_i) - \hat{\mathbf{x}}(t_i)) = \text{spur} \{ \mathbf{S}(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})^T \mathbf{S}^T \} \stackrel{!}{=} \min. \quad (30)$$

Die Komponenten von \mathbf{z}_{oben} sind dann dominant gegenüber den restlichen Komponenten von \mathbf{z} . In (30) bezeichnet \mathbf{S} eine reguläre Diagonalmatrix positiv-reeller Gewichtungsfaktoren s_1, \dots, s_n , über die der Entwerfer Einfluß auf die Approximationsgüte der einzelnen Zustandsgrößen erhält. Die Faktoren können zum Beispiel gleich den reziproken Maximalausschlägen der zugehörigen Zustandsgrößenverläufe gewählt werden.

Die Lösung der geschilderten Aufgabe kann über eine *Singulärwertzerlegung* [16] der Matrix $\Psi = \mathbf{S}\mathbf{X}$ geschehen. Diese numerisch wenig problematische Zerlegung liefert die orthogonalen Matrizen \mathbf{T} und \mathbf{P} sowie die Diagonalmatrix Σ der n reellen nichtnegativen und nach fallenden Beträgen sortierten *Singulärwerte* σ_i , mit der Eigenschaft

$$\Psi = \mathbf{T}\Sigma\mathbf{P}^T. \quad (31)$$

Durch die Wahl

$$\mathbf{V} = \mathbf{T}^T \mathbf{S}, \quad \mathbf{V}_{oben} = \mathbf{T}_L^T \mathbf{S}, \quad \mathbf{W} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{T}_L \quad (32)$$

(worin die Matrix \mathbf{T}_L die ersten \tilde{n} Spalten von \mathbf{T} umfaßt) wird dann das Gütemaß J minimal [16]. Anwendung der nun festliegenden Transformation (27) auf das Originalsystem (2) liefert die Darstellung

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{V}\mathbf{A}\mathbf{V}^{-1} \mathbf{z}(t) + \mathbf{V}\mathbf{B}\mathbf{u}(t) + \mathbf{V}\mathbf{F}\mathbf{g}(\mathbf{V}^{-1} \mathbf{z}, \mathbf{u}), \quad (33)$$

in welcher wunschgemäß die ersten \tilde{n} Komponenten des Zustandsvektors dominant sind. Das transformierte System (33) kann deshalb sofort gemäß Abschnitt 2 in der Ordnung reduziert werden. Aus den Verläufen $\tilde{\mathbf{z}}(t)$ des erhaltenen Systems

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{z}}(t) + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u}(t) + \tilde{\mathbf{F}}\mathbf{g}(\mathbf{W}\tilde{\mathbf{z}}, \mathbf{u}) \quad (34)$$

werden Approximationen der Originalverläufe durch $\hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{W}\tilde{\mathbf{z}}(t)$ gewonnen³.

Zur Einführung von *Dominanzmaßzahlen* wird der Fehler der Approximation (29) betrachtet, also der Wert des Gütemaßes J in seinem Minimum. Er kann mit Hilfe der oben errechneten Singulärwerte σ_i angegeben werden:

$$J_{opt}(\tilde{n}) = \sigma_{\tilde{n}+1}^2 + \dots + \sigma_n^2 = \sum_{i=\tilde{n}+1}^n \sigma_i^2. \quad (35)$$

³ Durch eine weitere Transformation kann den Zustandsgrößen des reduzierten Systems (34) auch wieder eine physikalisch anschauliche Bedeutung verliehen werden [14], falls die weitere Verwendung des reduzierten Modells dies erfordert.

Durch σ_i^2 ist demzufolge gerade der Wert gegeben, um den sich die quadratische Fehlerfläche J_{opt} vergrößert, wenn die Zustandsgröße z_i für *nicht-dominant* erklärt wird. Dieser i -ten Zustandsgröße kann deshalb der Singulärwert σ_i als Dominanzmaßzahl zugewiesen werden. Wie bei den Ordnungsreduktionsverfahren für lineare Systeme gestatten die Dominanzmaßzahlen eine Empfehlung zur Wahl der Systemordnung \tilde{n} : Sie sollte so gewählt werden, daß die Singulärwerte $\sigma_{\tilde{n}+1}, \dots, \sigma_n$ klein gegenüber den restlichen sind.

5 Hydropneumatische Kraftfahrzeugfederung

Eine aktive hydropneumatische Federung kann entscheidend zur Verbesserung von Fahrkomfort und -sicherheit beitragen, indem sie die Hub-, Wank- und Nickbewegungen des Fahrzeugaufbaus sowie die dynamischen Radlastschwankungen deutlicher reduziert, als das mit einem herkömmlichen passiven Feder-Dämpfer-System möglich ist. Aufgabe des beteiligten Reglers ist es, die zu- und abfließenden Ölvolumenströme des hydropneumatischen Federungssystems geeignet einzustellen. Durch eine Ordnungsreduktion des Streckenmodells können Simulationsstudien deutlich beschleunigt werden, darüber hinaus vereinfachen sich all diejenigen Regelalgorithmen, welche direkt das Streckenmodell nutzen, wie Beobachter-Zustandsregler-Anordnungen oder modellgestützte Vorsteuerungen.

Bild 1 zeigt den mechanischen Aufbau des Federungssystems für ein einzelnes Rad und die zugehörige Teilmasse des Fahrzeugaufbaus. Die Aufbaumasse m_A wird zum einen über eine *Stahlfeder*, zum anderen über einen *hydraulischen Stellzylinder* mit *Dämpferlager* auf das Rad abgestützt. Die nötige *Dämpfung* erhält das System durch eine speziell gedrosselte Verbindung zu einem Federspeicher, der in seinem oberen Teil mit Stickstoff und in seinem unteren Teil mit Hydrauliköl befüllt ist. Aktiv kann auf das System durch Zu- und Abfuhr $Q(t)$ von Hydrauliköl über ein Servoventil eingewirkt werden. Äquivalent zu Bild 1 kann das mecha-

Bild 1: Aufbau des hydropneumatischen Federungssystems.

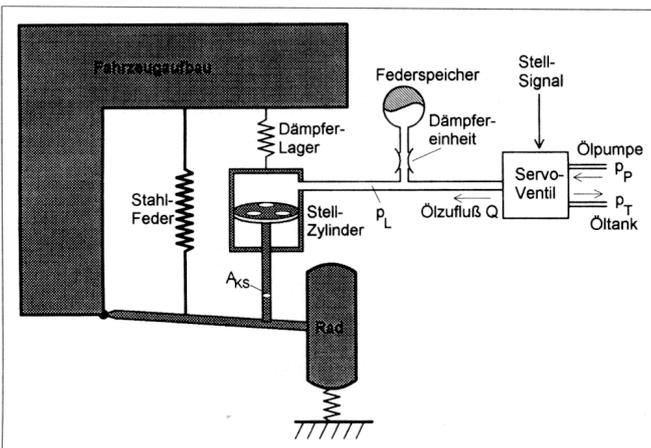
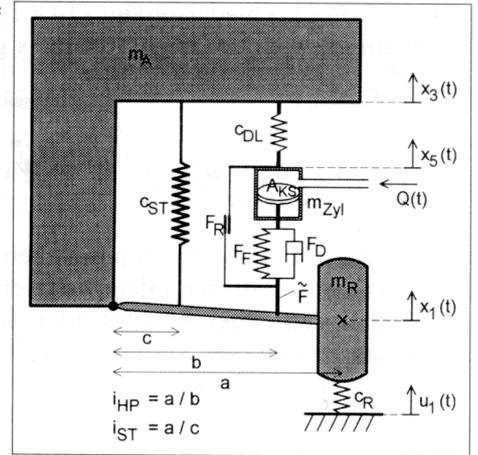


Bild 2: Äquivalente Darstellung des mechanischen Teilsystems mit konventionellen Feder-Dämpfer-Elementen.



nische Teilsystem durch Bild 2 beschrieben werden. Die Federkraft $F_F(z_F)$ folgt darin einer noch herzuleitenden nichtlinearen Beziehung, weiterhin ist eine trockene Reibung F_R berücksichtigt.

Bezeichnen x_1 die Auslenkung des Rades aus dem Nominalzustand sowie x_3 und x_5 die entsprechenden Auslenkungen des Fahrzeugaufbaus und der Stellzylindermasse, so gilt für das Rad die Bewegungsgleichung

$$m_R \ddot{x}_1(t) = \frac{c_{ST}}{i_{ST}^2} (x_3 - x_1) + c_R (u_1 - x_1) - \frac{1}{i_{HP}} \tilde{F}. \quad (36)$$

Die Kraft \tilde{F} setzt sich darin gemäß

$$\tilde{F} = F_F + F_D + F_R \quad (37)$$

aus der Federkraft, der Dämpferkraft und der trockenen Reibung zusammen. Entsprechende Betrachtungen für den Fahrzeugaufbau und die Stellzylindermasse führen auf

$$m_A \ddot{x}_3(t) = \frac{c_{ST}}{i_{ST}^2} (x_1 - x_3) + c_{DL} (x_5 - x_3) - \frac{i_{HP} - 1}{i_{HP}} \tilde{F}, \quad (38)$$

$$m_{Zyl} \ddot{x}_5(t) = c_{DL} (x_3 - x_5) + \tilde{F}. \quad (39)$$

Um aus den Differentialgleichungen (36), (38) und (39) Zustandsgleichungen zu erhalten, werden die Geschwindigkeiten x_2, x_4 , und x_6 von Rad, Aufbau und Zylinder eingeführt und deren Ableitungen eingesetzt. Es ergeben sich sechs Differentialgleichungen erster Ordnung, die im Anhang angegeben sind.

Die *trockene Reibung* F_R ist lediglich vom Vorzeichen der Geschwindigkeitsdifferenz zwischen Kolbenstange und Zylinder abhängig

$$F_R = F_{R0} \text{sign} \{ \Delta v \} = F_{R0} \text{sign} \left\{ x_4 + \frac{x_2 - x_4}{i_{HP}} - x_6 \right\}. \quad (40)$$

Die *Dämpferkennlinie* zeigt näherungsweise proportionales Verhalten zwischen Dämpferkraft F_D und der Geschwindigkeit \dot{z}_F der „Federeindrückung“, bei allerdings richtungsabhängigem Proportionalitätsfaktor

$$F_D = \begin{cases} d_{\text{Druck}} \dot{z}_F & \text{für } \dot{z}_F \geq 0 \\ d_{\text{Zug}} \dot{z}_F & \text{für } \dot{z}_F < 0 \end{cases} \quad (41)$$

Als maßgebliche Geschwindigkeit ist in (41) die „Eindruckgeschwindigkeit“ der hydropneumatischen Feder heranzuziehen, die aus

$$z_F = x_3 + \frac{x_1 - x_3}{i_{HP}} - x_5 + \frac{V_{zu}}{A_{KS}} \quad (42)$$

$$\text{zu } \dot{z}_F = x_4 + \frac{x_2 - x_4}{i_{HP}} - x_6 + \frac{Q}{A_{KS}} \quad (43)$$

bestimmt wird. V_{zu} bezeichnet dabei das zugeführte Ölvolumen und Q den zugehörigen Volumenstrom; A_{KS} ist die Kolbenstangenfläche, wie im Bild 2 angedeutet.

Die Federkraft F_F wird über eine polytrope Zustandsgleichung zu

$$F_F = F_s \left(1 - \frac{z_F A_{KS}}{V_s} \right)^{-n} - F_s \quad (44)$$

bestimmt, worin $F_s = A_{KS} p_s$ die Federkraft in der nominalen Ruhelage bezeichnet. Über z_F geht in (44) das Volumen V_{zu} in das Modell ein. Als weitere Zustandsgröße wird deshalb $x_7 = V_{zu}/A_{KS}$ mit der zugehörigen Differentialgleichung $\dot{x}_7 = Q/A_{KS}$ eingeführt.

Durch das Servoventil können positive wie negative Volumenströme $Q(t)$ erzeugt werden, sofern der Wert des Öldrucks p_L im Federungssystem zahlenmäßig zwischen den Drücken p_p der Ölpumpe und p_T im Öltank liegt. Abhängig von der Position x_9 eines Steuerschiebers wird eine der beiden Leitungen zur Pumpe und zum Tank freigelegt und so mit der Leitung zum Federungssystem verbunden. Der zugehörige Ölbeschleunigungsvorgang wird durch die stark nichtlineare achte Differentialgleichung beschrieben, die im An-

hang angegeben ist. Bild 3 zeigt ein Strukturbild des Gesamtsystems. Darin ist noch ein lineares Stellglied zweiter Ordnung für den Steuerschieber des Ventils berücksichtigt, die Systemordnung beträgt insgesamt also zehn.

Zur Durchführung der Ordnungsreduktion sind vorbereitend *Simulationen* des Originalsystems durchzuführen. Als Anregungsfunktionen werden für u_1 (= Fahrbahnhöhenverlauf) positive und negative Sprünge der Höhe 0,1 m vorgesehen, wie sie kräftigen Fahrbahnunebenheiten entsprechen. Für die Stellgröße u_2 des Servoventils werden positive und negative Rechtecks- und Dreiecksfunktionen vorgesehen. Insgesamt werden so 10 Stellgrößenverläufe aufgebaut:

$$\begin{aligned} u_1(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ u_{\text{Rechteck}}(t) \end{bmatrix}, & u_2(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ u_{\text{Dreieck}}(t) \end{bmatrix}, \\ u_3(t) &= -u_1(t), & u_4(t) &= -u_2(t), \\ u_5(t) &= \begin{bmatrix} 0,1 \sigma(t) \\ 0 \end{bmatrix}, & u_6(t) &= -u_5(t), \\ u_7(t) &= \begin{bmatrix} 0,1 \sigma(t) \\ u_{\text{Rechteck}}(t) \end{bmatrix}, & u_8(t) &= \begin{bmatrix} -0,1 \sigma(t) \\ u_{\text{Rechteck}}(t) \end{bmatrix}, \\ u_9(t) &= -u_8(t), & u_{10}(t) &= -u_7(t), \end{aligned}$$

mit $u_{\text{Rechteck}} = \sigma(t) - \sigma(t - 0,2)$ und $u_{\text{Dreieck}} = \max\{0, \min\{5t, 2 - 5t\}\}$, worin $\sigma(t)$ die Einheitsprungfunktion bezeichnet. Für alle Anregungen ist das System nach ungefähr einer Sekunde eingeschwenkt.

Für eine Reduktion nach Abschnitt 2 sind als nächstes dominante Zustandsgrößen festzulegen. Sicherlich sind die technisch besonders interessierenden Größen x_1, x_2, x_3, x_4 von Rad und Fahrzeugaufbau als domi-

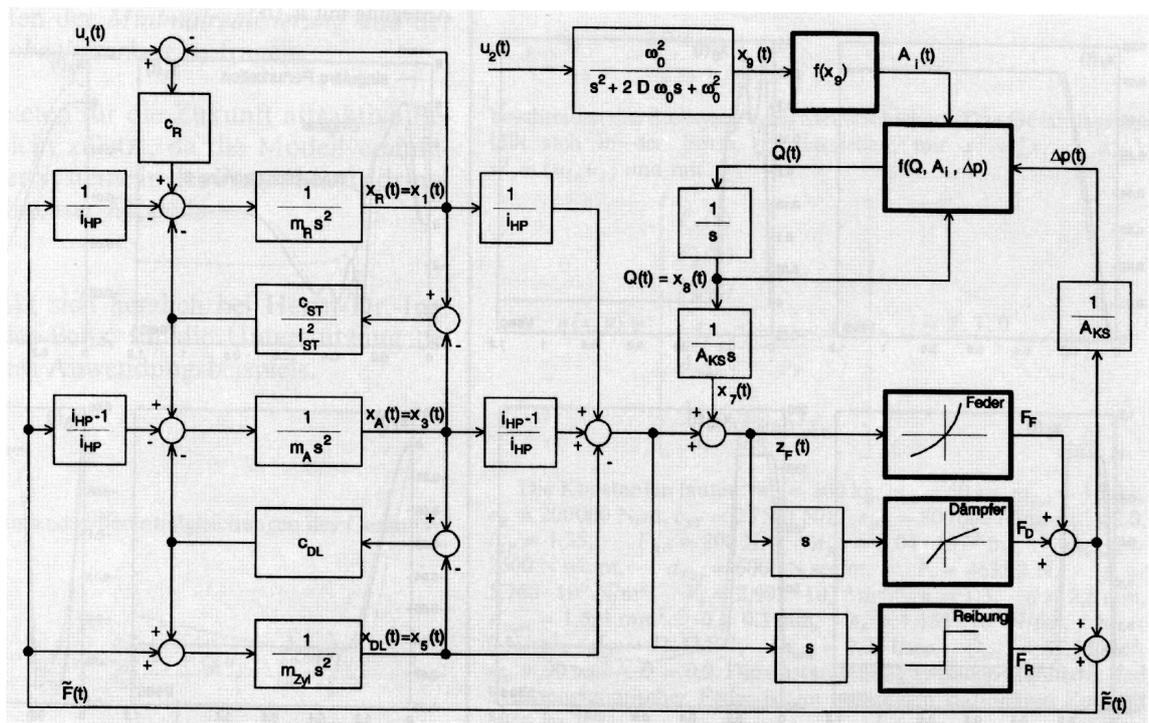
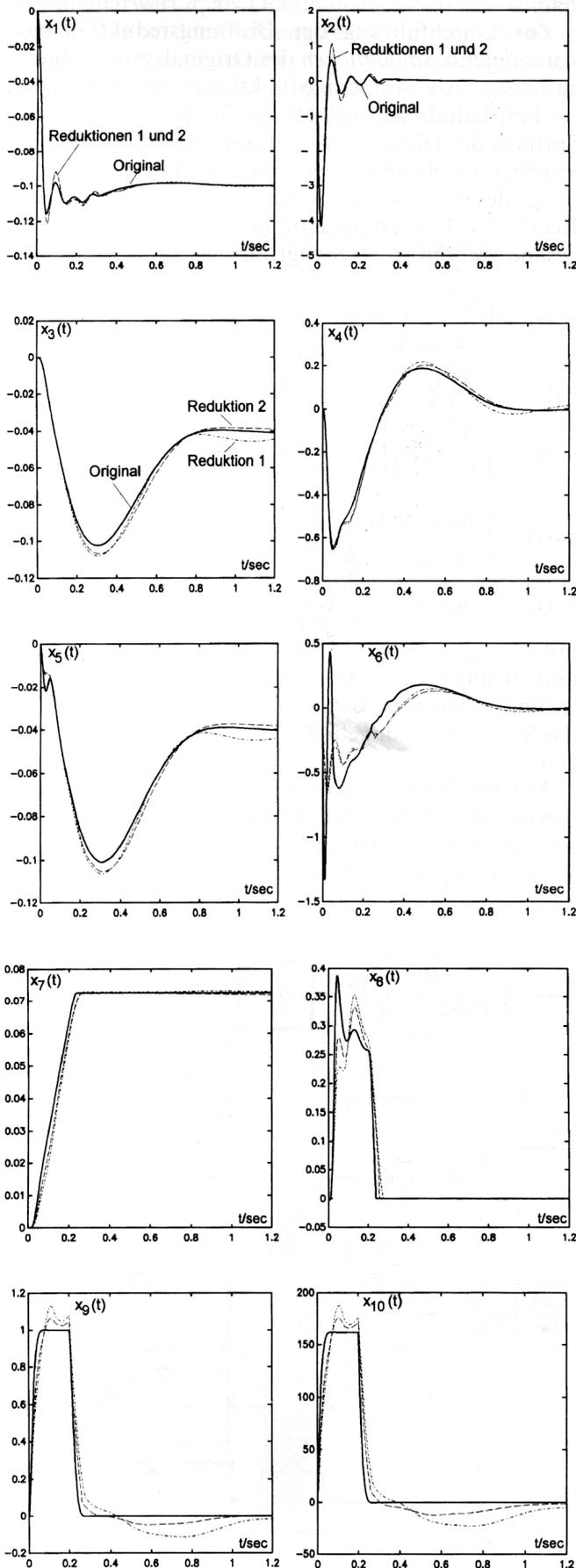


Bild 3: Strukturbild der aktiven hydropneumatischen Federung.

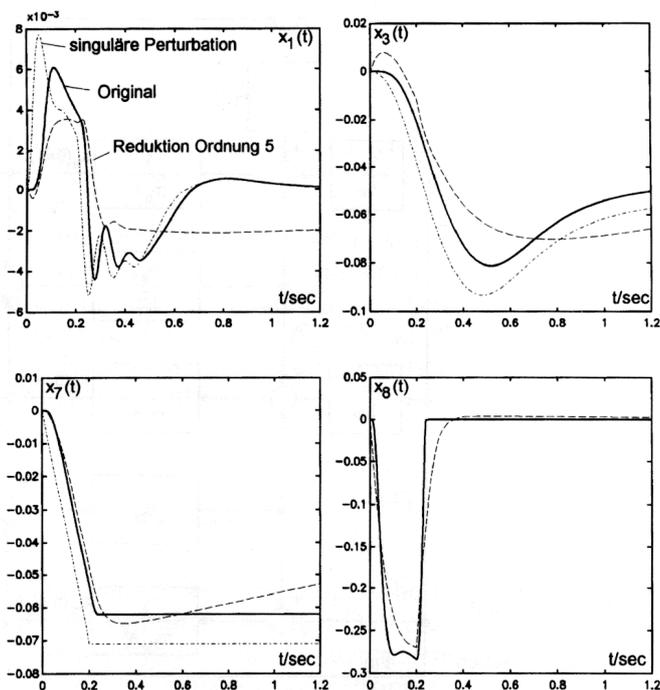
Bild 4: Zeitverläufe der zehn Zustandsgrößen des Originalsystems bei Anregung mit $u_8(t)$ und Approximationen durch die Systeme siebter Ordnung *ohne* Dominanzanalyse (= Reduktion 1, strichpunktiert gezeichnet) und *mit* Dominanzanalyse (= Reduktion 2, strichliert gezeichnet).



nant einzustufen. Das gleiche gilt für den Ölvolumenstrom x_8 und das bezogene Volumen x_7 . Schließlich ist die Steuerschieberstellung x_9 aufgrund ihrer nicht-linearen Verquickung mit dem Servoventil als dominant anzusehen. Damit sind sieben Größen festgelegt, es wird also ein reduziertes System der Ordnung sieben entstehen. Letzter Schritt der Reduktion ist die Berechnung der Matrizen \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{F} , W durch (19) und (22). Weil die Ausschläge der einzelnen Zustandsgrößen für jede der zehn Anregungen in ähnlichen Größenordnungen liegen, wird die Gewichtungsmatrix Q gleich der Einheitsmatrix gewählt. Die Ergebnisse für \tilde{A} , \tilde{B} , \tilde{F} , W sind zahlenmäßig im Anhang angegeben. Im Bild 4 sind die Verläufe der Zustandsgrößen des reduzierten Systems denen des Originals und denen einer weiteren noch durchzuführenden Reduktion beispielhaft für die Anregung $u_8(t)$ gegenübergestellt. Sie zeigen gute Übereinstimmung mit den Originalverläufen. Die Simulationszeiten (mit einem Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweitensteuerung) sinken gegenüber dem Original um den Faktor 10.

Zum Vergleich wurde eine Reduktion auf Ordnung sieben unter Einbeziehung der Dominanzanalyse nach Abschnitt 4 durchgeführt [14]. Die erhaltenen Zeitverläufe sind in Bild 4 zusätzlich eingetragen und zeigen merkbare Verbesserungen in allen Zustandsgrößen. Weiterhin wurde auf Ordnung *fünf* reduziert, bei allerdings deutlich schlechterer Approximationsgüte. Die erhaltenen Zeitverläufe sind im Bild 5 dargestellt; die Simulationszeiten verringern sich gegenüber dem Original um den Faktor 12. Bei Verzicht auf die Dominanzanalyse konnten übrigens keine akzeptablen Ergebnisse der Ordnung fünf erzielt werden.

Bild 5: Zeitverläufe $x_1(t)$, $x_3(t)$, $x_7(t)$, $x_8(t)$ des Originals, der Reduktion auf Ordnung fünf mit Dominanzanalyse und der Reduktion durch singuläre Perturbation (diese bildet x_8 nicht direkt nach) bei Anregung mit $u_3(t)$.



Unter erheblichem Aufwand gelingt eine Reduktion auf Ordnung fünf auch durch das eingangs skizzierte Verfahren der *singulären Perturbation*. Das erhaltene System verringert die Simulationszeiten aufgrund seiner Komplexität nur um den Faktor 8 gegenüber dem Original, bei allerdings sehr gutem dynamischem Verhalten und mäßigem stationärem Verhalten, siehe Bild 5. Andere nichtlineare Reduktionsverfahren konnten nicht angewandt werden oder lieferten gänzlich unbrauchbare Ergebnisse.

6 Ausblick

Es wurde ein übersichtliches und numerisch unproblematisches Verfahren zur Ordnungsreduktion allgemeiner nichtlinearer Systeme vorgestellt. Mit ebenso wie ohne Dominanzanalyse konnte eine zufriedenstellende Reduktion des betrachteten nichtlinearen (und nicht vernünftig linearisierbaren) Systems durchgeführt werden. Weitere Anwendungsbeispiele – auch unter Einbeziehung von Forderungen nach stationärer Genauigkeit – können in [14] nachgelesen werden. Zahlreiche Fragen zur nichtlinearen Modellvereinfachung sind heute aber noch offen:

- Zunächst ist zu fragen, durch welche Maßnahmen speziell das Verhalten von *Ausgangsgrößen* $y_i = c_i(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ verbessert werden kann.
- Sicherlich wäre wünschenswert, auf Simulationen des Originals ganz oder teilweise verzichten zu können.
- Die Beurteilung des Reduktionsergebnisses geschieht bei allen heute bekannten Verfahren durch subjektive Beurteilung der erhaltenen Zeitverläufe. Auch im Hinblick auf Untersuchungen des *Stabilitätsverhaltens* wäre hier eine Systematik hilfreich.
- Ähnlich wie in der Theorie linearer Systeme ist nach Zusammenhängen zwischen der Ordnungsreduktion und den Begriffen der *Minimalrealisierung* und der *Steuer- und Beobachtbarkeit* zu fragen.

Diese Punkte bieten für die Zukunft attraktive Betätigungsfelder, nicht zuletzt, da die Modellvereinfachung nichtlinearer Systeme in der Praxis häufig dringlicher ist, als die linearer Modelle.

Der Autor bedankt sich herzlich bei Herrn Dr.-Ing. H. Keller, Mercedes-Benz, für die Unterstützung bei der Behandlung des Anwendungsbeispiels.

Anhang

Die ersten sechs Zustandsdifferentialgleichungen des Gesamtsystems lauten [14]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= \frac{1}{m_R} \left((-c_{ST}/i_{ST}^2 - c_R)x_1 + \frac{c_{ST}}{i_{ST}^2} x_3 + c_R u_1 - \frac{1}{i_{HP}} \tilde{F} \right), \\ \dot{x}_3 &= x_4, \end{aligned}$$

$$\dot{x}_4 = \frac{1}{m_A} \left(\frac{c_{ST}}{i_{ST}^2} x_1 - (c_{ST}/i_{ST}^2 + c_{DL})x_3 + c_{DL}x_5 - \frac{i_{HP}-1}{i_{HP}} \tilde{F} \right),$$

$$\dot{x}_5 = x_6,$$

$$\dot{x}_6 = \frac{1}{m_{Zyl}} (c_{DL}x_3 - c_{DL}x_5 + \tilde{F}).$$

Die Kraft \tilde{F} setzt sich gemäß (37), (40), (41) und (44) zusammen. Die Zustandsgröße $x_7 = V_{zu}/A_{KS}$ hängt mit dem Volumenstrom $Q = x_8$ zusammen über

$$\dot{x}_7 = x_8/A_{KS}.$$

Die Ableitung $\dot{Q} = \dot{x}_8$ des Volumenstromes ist abhängig von der Steuerschieberstellung x_9 zu bestimmen, und zwar durch die achte Differentialgleichung

$$\dot{x}_8 = \begin{cases} \frac{A_P}{A_{\max}} \frac{p_P - p_s - \Delta p}{p_P} \dot{Q}_0 - \frac{d_{01}}{A_P/A_{\max}} Q^2 \text{sign}\{Q\} & \text{für } x_9 > \ddot{u} \\ \frac{A_T}{A_{\max}} \frac{p_T - p_s - \Delta p}{p_P} \dot{Q}_0 - \frac{d_{01}}{A_T/A_{\max}} Q^2 \text{sign}\{Q\} & \text{für } x_9 < -\ddot{u} \\ -\frac{d_{01}}{A_0/A_{\max}} Q^2 \text{sign}\{Q\} & \text{für } -\ddot{u} \leq x_9 \leq \ddot{u} \end{cases}$$

mit sehr kleinem A_0 . p_s bezeichnet den stationären Lastdruck bei ruhendem Fahrzeug, Δp die Abweichung hiervon, also $p_L = p_s + \Delta p$. d_{01} kann als Reibungskonstante des Hydrauliköls verstanden werden. Für die Flächen A_P und A_T zu Pumpe und Tank gilt

$$A_P = \frac{d^2}{4} \arccos \left\{ \frac{d - 2(x_9 - \ddot{u})}{d} \right\} - (d/2 - x_9 + \ddot{u}) \sqrt{(x_9 - \ddot{u})(d - x_9 + \ddot{u})},$$

$$A_T = \frac{d^2}{4} \arccos \left\{ \frac{d + 2(x_9 + \ddot{u})}{d} \right\} - (d/2 + x_9 + \ddot{u}) \sqrt{(-x_9 - \ddot{u})(d + x_9 + \ddot{u})}.$$

Darin bezeichnet d den Leitungsdurchmesser im Ventil, \ddot{u} ist eine konstante ventilinterne Länge. Weiterhin ist $\Delta p = (F_F + F_D)/A_{KS}$. Die beiden letzten Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_9 &= -2D\omega_0 x_9 + x_{10}, \\ \dot{x}_{10} &= -\omega_0^2 x_9 + \omega_0^2 u_2 \end{aligned}$$

beschreiben das Stellsystem des Steuerschiebers. Das Gesamtsystem läßt sich in der Form (1) darstellen, mit $\mathbf{x}^T = [x_1, \dots, x_{10}]$, $\mathbf{u}^T = [u_1, u_2]$ und mit

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} F_F(\mathbf{x}) \\ F_R(\mathbf{x}) \\ F_D(\mathbf{x}) \\ \frac{A_i}{A_{\max}} \frac{p_i - p_s - \Delta p}{p_P} \\ \frac{A_{\max}}{A_i} x_8^2 \text{sign}\{x_8\} \end{bmatrix}, \quad i = P, T, 0.$$

Die Konstanten lauten: $m_A = 500$ kg, $m_R = 50$ kg, $m_{Zyl} = 1,5$ kg, $c_R = 200000$ N/m, $c_{ST} = 25500$ N/m, $c_{DL} = 800000$ N/m, $i_{ST} = 2,0$, $i_{HP} = 1,35$, $F_{R0} = 200$ N, $A_{KS} = 8,04 \cdot 10^{-4}$ m², $d_{Druck} = 2500$ N sec/m, $d_{Zug} = 6000$ N sec/m, $F_s = 4635,2$ N, $p_s = 5,765 \cdot 10^6$ N/m², $V_s = 2,992 \cdot 10^{-4}$ m³, $\eta = 1,3$, $d = 2,5$ mm, $A_{\max} = 1,591$ mm², $\ddot{u} = 0,1$ mm, $p_P = 1,153 \cdot 10^7$ N/m², $p_T = 0$ N/m², $d_{01} = 71,43$ l⁻¹, $Q_{\max} = 0,35$ l/sec, $\dot{Q}_{\max} = 17,5$ l/sec², $\omega_0 = 90$ sec⁻¹, $D = 0,9$. Die Lastaufteilung zwischen Stahlfeder und hydropneumatischer Feder ist im nominalen stationären Zustand 30% zu 70%.

Die Ordnungsreduktion nach Abschnitt 2 führt auf die Systemmatrizen

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -8.8645e-006 & 1.0000e+000 & 7.0657e-006 & 1.4298e-007 & -9.0164e-006 & -7.3212e-008 & 2.0702e-006 \\ -5.0114e+003 & -7.8464e+000 & 6.7509e+002 & 4.2598e+000 & -7.1494e+002 & -2.9283e+001 & -2.4264e+001 \\ 5.2458e-005 & 2.6697e-008 & -3.1797e-005 & 1.0000e+000 & 4.0677e-005 & 3.9135e-006 & -1.1397e-005 \\ 1.0085e+002 & 7.9916e-001 & -6.6383e+001 & -4.1992e-001 & 7.0040e+001 & 3.1334e+000 & 2.3968e+000 \\ -7.7725e-006 & 3.7860e-008 & 6.4148e-006 & 2.4434e-007 & -7.9942e-006 & 1.2438e+000 & 1.2514e-006 \\ -7.6503e+000 & -1.3996e-001 & 4.7042e+000 & -3.6179e-001 & -8.4835e+000 & -9.7784e-001 & -2.3927e+000 \\ -1.0684e+002 & 3.1637e-001 & 8.6582e+001 & 1.8172e+000 & -1.1106e+002 & -6.8773e+000 & -1.0630e+001 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{B} = \begin{bmatrix} 1.7243e-006 & -1.3916e-006 \\ 4.3503e+003 & 8.7416e+000 \\ -2.0625e-005 & 7.4635e-006 \\ -3.5858e+001 & -8.6253e-001 \\ 1.1406e-006 & -7.7781e-007 \\ 4.5042e+000 & 6.3970e-001 \\ 1.9176e+001 & 2.2121e+001 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{F} = \begin{bmatrix} 3.9416e-010 & 1.9421e-010 & 4.7942e-012 & -4.4977e-007 & -4.3581e-006 \\ 2.7885e-002 & -1.9110e-002 & -1.0514e-002 & 4.0793e+001 & 2.6445e+001 \\ -1.7866e-009 & -8.6109e-010 & 2.8872e-011 & 2.1816e-006 & 1.8624e-005 \\ -2.7162e-003 & 1.8891e-003 & 1.0618e-003 & -4.1768e+000 & -2.6448e+000 \\ 3.7068e-010 & 2.8086e-010 & -1.0042e-011 & -4.1613e-007 & -5.6407e-006 \\ 5.7341e-004 & -1.2377e-004 & 8.7445e-005 & 2.0992e+001 & -6.4103e+001 \\ 4.6798e-003 & 3.8763e-003 & -1.6067e-004 & 5.5026e-001 & -8.9541e+001 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1.0000e+000 & -1.3386e-018 & 2.3451e-017 & 3.4656e-019 & 8.1791e-018 & 6.0444e-019 & -4.2012e-019 \\ 0 & 1.0000e+000 & 1.1981e-018 & 8.8745e-020 & 1.8969e-018 & -1.4758e-018 & 1.2769e-018 \\ 0 & 0 & 1.0000e+000 & 6.6138e-018 & -1.7337e-017 & -3.1678e-018 & 1.3978e-018 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0000e+000 & -4.1479e-016 & -9.2614e-018 & 3.3970e-018 \\ 1.0562e-002 & 3.1360e-003 & 9.8732e-001 & -1.9316e-003 & 1.8607e-002 & -4.6439e-003 & 2.1629e-003 \\ -2.0047e+000 & 1.1801e-001 & 1.8475e+000 & 9.8864e-001 & -1.9462e+000 & 1.3696e+000 & -2.7616e-001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000e+000 & -4.0516e-019 & 2.0059e-019 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000e+000 & 8.7227e-018 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1.0000e+000 \\ -2.1012e+001 & -2.3862e-001 & 2.6174e+001 & -4.2584e+000 & -4.2091e+001 & -6.6222e+001 & 1.8146e+002 \end{bmatrix}$$

Literatur

- [1] Litz, L.: Ordnungsreduktion linearer Zustandsraummodelle durch Beibehaltung der dominanten Eigenbewegungen. Regelungstechnik 27 (1979), S. 80–86.
- [2] Moore, B.C.: Principal Component Analysis in Linear Systems: Controllability, Observability and Model Reduction. IEEE Trans. Autom. Control 26 (1981), S. 17–32.
- [3] Glover, K.: All Optimal Hankel-Norm Approximation of Linear Multivariable Systems and their L_∞ -Error Bounds. Int. Journal Control 39 (1984), S. 1115–1193.
- [4] Kiendl, H. und Post, K.: Invariante Ordnungsreduktion mittels transparenter Parametrierung. Automatisierungstechnik 36 (1988), S. 92–101.
- [5] Bonvin, D. und Mellichamps, D.A.: A Unified Derivation and Critical Review of Modal Approaches to Model Reduction. Int. Journal Control 35 (1982), S. 829–848.
- [6] Föllinger, O.: Reduktion der Systemordnung. Regelungstechnik 30 (1982), S. 367–377.
- [7] Troch, I., Müller, P.C. und Fasol, K.H.: Modellreduktion für Simulation und Reglerentwurf. Automatisierungstechnik 40 (1992), S. 45–53, und S. 93–99.
- [8] Hasenjäger, E.: Digitale Zustandsregelung für Parabolantennen unter Berücksichtigung von Nichtlinearitäten. VDI-Fortschrittberichte, Reihe 8, Nr. 87, VDI-Verlag, Düsseldorf 1985.
- [9] Pallaske, U.: Ein Verfahren zur Ordnungsreduktion mathematischer Prozeßmodelle. Chem. Ing. Tech. 7 (1987), S. 59, MS 1617/87.
- [10] Löffler, H.P. und Marquardt, W.: Order Reduction of Nonlinear Differential-Algebraic Process Models. Journal of Process Control 1 (1991), S. 32–40.
- [11] Kokotovic, P.V., O'Malley, R.E. und Sannuti, P.: Singular Perturbations and Order Reduction in Control Theory – An Overview. Automatica 12 (1976), S. 123–132.
- [12] Saksena, V.R., O'Reilly, J. und Kokotovic, P.V.: Singular Perturbations and Time-Scale Methods in Control Theory: Survey 1976–1983. Automatica 20 (1984), S. 273–293.
- [13] Eitelberg, E.: Modellreduktion durch Minimierung des Gleichungsfehlers. Regelungstechnik 26 (1978), S. 320–322.
- [14] Lohmann, B.: Ordnungsreduktion und Dominanzanalyse nichtlinearer Systeme. VDI-Fortschrittberichte, Reihe 8, VDI-Verlag, Düsseldorf 1994.
- [15] Lohmann, B.: Order-Reduction Method for Nonlinear Dynamical Systems. Electronics Letters 28 (1992), S. 658–659.
- [16] Lawson, C.L. und Hanson, R.J.: Solving Least Squares Problems. Prentice-Hall, 1974.
- [17] Lin, C.S. und Chang, P.R.: Automatic Dynamics Simplification for Robot Manipulators. Proc. IEEE Conf. Decision and Control, Las Vegas (1984), S. 752–759.
- [18] Desrochers, A.A. und Al-Jaar, R.Y.: A Method for High Order Linear System Reduction and Nonlinear System Simplification. Automatica 21 (1985), S. 93–100.
- [19] Weber, W.: Reduktion von Robotermodellen für die nichtlineare Regelung. Automatisierungstechnik 38 (1990), S. 410–415 und S. 442–446.
- [20] Lohmann, B.: Order Reduction and Determination of Dominant State Variables of Nonlinear Systems. Proceedings of the IMACS Symposium on Mathematical Modelling, Vienna 1994, S. 239–243.

Manuskripteingang: 29. Oktober 1993.