

Vollständige Entkopplung durch dynamische Zustandsrückführung

Complete decoupling by dynamic state feedback

Boris Lohmann, Karlsruhe



Dr.-Ing. Boris Lohmann ist wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme (Prof. Dr. rer. nat. Dr.-Ing. E. h. O. Föllinger) der Universität Karlsruhe. Sein Hauptarbeitsgebiet ist die Theorie von Mehrgrößenregelkreisen.

Adresse: Universität Karlsruhe, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Postfach 6980, W-7500 Karlsruhe 1, Tel. (0721) 608-3179.

1. Einführende Übersicht

Betrachtet werden lineare zeitinvariante Regelstrecken mit gleicher Anzahl m von Ein- und Ausgangsgrößen in der Zustandsdarstellung

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

$$y(t) = Cx(t). \quad (2)$$

Zur Führungsentkopplung eines solchen Systems sind aus der Literatur verschiedene Verfahren bekannt, nach denen der Zustandsregler R und das Vorfilter F im konstanten Regelungsgesetz

$$u(t) = -Rx(t) + Fw(t) \quad (3)$$

so festgelegt werden können, daß im geregelten, störungsfreien System jede Ausgangsgröße $y_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, ausschließlich durch die zugehörige Führungsgröße $w_i(t)$, $i = 1, \dots, m$, beeinflusst wird [1 bis 4]. Die Führungsübertragungsmatrix

$$G_w(s) = C(sI - A + BR)^{-1}BF \quad (4)$$

des geregelten Systems, die zwischen den laplacetransformierten Führungs- und Regelgrößen den Zusammenhang $Y(s) = G_w(s) \cdot W(s)$ herstellt, ist dann diagonalförmig, besitzt also die Gestalt

$$G_w(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & 0 & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & & g_{mm}(s) \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Zur Entkopplung des Ein-Ausgangsverhaltens linearer Mehrgrößensysteme werden dynamische Regelungsstrukturen vorgestellt. Diese ermöglichen auch für Systemklassen, die durch konstante Zustandsrückführung nicht geeignet regelbar sind, eine vollständige und stabile Führungsentkopplung. Die Festlegung der Reglerparameter geschieht über Zustandsraumbetrachtungen und wird auf die Berechnung konstanter Zustandsregler zurückgeführt.

Dynamic controllers for the decoupling of linear multi-variable systems are presented. They allow – even for systems which cannot be controlled appropriately by constant state feedback – a complete and stable decoupling of the input-output behaviour. The choice of the controller parameters is done by state-space methods and is led back to the design of constant state-feedback controllers.

Nicht allen Strecken läßt sich aber durch das Gesetz (3) entkoppeltes Verhalten bei gesicherter Stabilität aufprägen, vielmehr sind zwei Bedingungen zu erfüllen:

1. *Entkoppelbarkeitsbedingung*: Ein entkoppelndes Paar R, F existiert genau dann, wenn die *Zahl der invarianten Nullstellen*, welche definiert sind als die Lösungen η von

$$\det \begin{bmatrix} A - \eta I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = 0, \tag{6}$$

gleich der *Systemordnung* n vermindert um die *Differenzordnung* δ ist. Die Differenzordnung errechnet man als Summe $\delta = \delta_1 + \dots + \delta_m$ der kleinsten positiven ganzen Zahlen δ_i , für die $c_i^T A^{\delta_i - 1} B \neq 0^T$ gilt (c_i^T ist die i -te Zeile von C). Man kann übrigens zeigen [5], daß diese Bedingung genau dann erfüllt ist, wenn die sogenannte *Entkoppelbarkeitsmatrix* [1, 7]

$$D^* = \begin{bmatrix} c_1^T A^{\delta_1 - 1} B \\ \vdots \\ c_m^T A^{\delta_m - 1} B \end{bmatrix} \tag{7}$$

regulär ist.

2. *Stabilitätsbedingung*: Unter den entkoppelnden Paaren R, F existieren solche, die den Regelkreis stabilisieren, wenn entweder

- keine invarianten Nullstellen existieren, oder
- alle invarianten Nullstellen der Strecke in der offenen linken komplexen Halbebene liegen, oder
- zu jeder rechts gelegenen invarianten Nullstelle η ein Vektor q^T mit nur einem Nichtnullelement gehört, wobei q^T aus der nichttrivialen Lösung des homogenen Gleichungssystems

$$[r^T, q^T] \begin{bmatrix} A - \eta I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = 0^T \tag{8}$$

resultiert.

Diese Bedingungen besitzen geometrische Eigenschaften und sind in [3, 4] - neben einem modalen Entwurfsverfahren zur Führungsentkopplung - ausführlich dargestellt. Dort und in [5] finden sich außerdem Vergleiche zu den in [1] und [2] beschriebenen äquivalenten Bedingungen für Entkoppelbarkeit und Stabilität.

Ist eine der beiden Bedingungen verletzt, so muß entweder vom Entwurfsziel Abstand genommen werden, und es kann beispielsweise zu einer stabilen *teilweisen* Entkopplung übergegangen werden [3, 4], oder es muß vom konstanten Regelgesetz (3) zu einer *dynamischen* Rückführung der Zustandsgrößen übergegangen werden. Die letztgenannte Alternative ist Inhalt der nächsten Abschnitte, in denen zunächst Maßnahmen gegen die Nicht-Entkoppelbarkeit, dann gegen die Nicht-Stabilisierbarkeit ergriffen werden. Die zugrunde liegende Idee ist dabei, der Regelstrecke in geeigneter Weise dynamische Teilsysteme zuzufügen, so daß das entstehende Gesamtsystem durch konstante Zustandsrückführung stabil und vollständig entkoppelt werden kann. Neu ist die konsequente Behandlung dieser Aufgabe im Zustandsraum im Unterschied zu vergleichbaren Frequenzbereichsansätzen [2, 6].

2. Nicht entkoppelbare Systeme

Das Phänomen der Nicht-Entkoppelbarkeit einer Regelstrecke läßt sich an der in Bild 1a dargestellten Struktur, bestehend aus Verzögerungsgliedern erster Ordnung, veranschaulichen: Wird das System durch eine sprunghafte Stellgröße $u_1(t) = 1 \cdot \sigma(t)$ angeregt, so werden sowohl $y_1(t)$ als auch $y_2(t)$ mit einfachem Verzögerungsverhalten auf von Null verschiedene Endwerte y_{1stat}, y_{2stat} übergehen. Um im Sinne einer Entkopplung den Endwert y_{2stat} zu Null zu machen, kann außerdem eine konstante Stellgröße $u_2(t)$ aufgeschaltet werden, die $x_{2stat} = -1$ und damit $y_{2stat} = 0$ bewirkt. Allerdings existiert *keine* endliche Stellgröße $u_2(t)$, die $y_2(t) \equiv 0$ garantieren könnte, denn u_2 wirkt *verzögert* auf die Summationsstelle, kann also die Wirkung der sprunghaften Stellgröße u_1 auf das Verzögerungsglied 3 nicht kompensieren.

Eine naheliegende Gegenmaßnahme besteht im Vorschalten eines Verzögerungsgliedes vor den Streckeneingang u_1 , wie in Bild 1b dargestellt. In dieser Anordnung kann stets ein $u_2(t)$ ermittelt werden, so daß $x_2(t) = -u_1(t)$ und folglich $y_2(t) \equiv 0$ gilt. Tatsächlich ist die Strecke im Bild 1a auch im Sinne der Entkoppelbarkeitsbedingung des ersten Abschnitts *nicht entkoppelbar*, während die Strecke im Bild 1b die Bedingung erfüllt.

Faßt man das Verzögerungsglied 4 als konstant rückgekoppeltes I-Glied auf, so kann an dieser Stelle auf die Vorgabe der zugehörigen Zeitkonstanten verzichtet werden, indem zur Struktur 1c übergegangen wird. Die Festlegung der Rückführverstärkung von x_4 auf u_1^* zur Realisierung des Blockes 4 aus 1b kann später in *einem* Schritt mit dem Entwurf der vollständig entkoppelnden Zustandsrückführung geschehen. Auch die Struktur 1c erfüllt die Entkoppelbarkeitsbedingung, wie im Beispiel am Ende dieses Abschnittes verifiziert werden wird.

Betrachtet werden nun allgemeine, nicht entkoppelbare Mehrgrößensysteme (1), (2). Bild 2 zeigt die in Anlehnung an Bild 1c entstandene Struktur eines *erweiterten* dynamischen

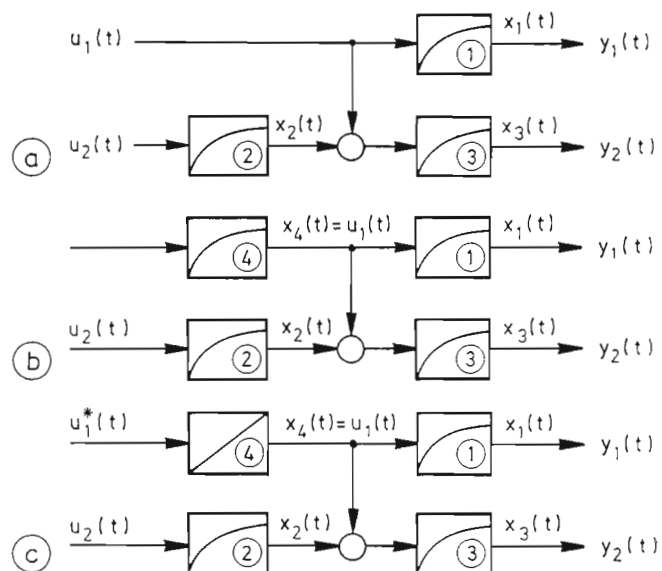


Bild 1. a) Struktur einer einfachen nicht entkoppelbaren Regelstrecke, b) dynamische Erweiterung zu einem entkoppelbaren System, c) reduzierte Darstellung.

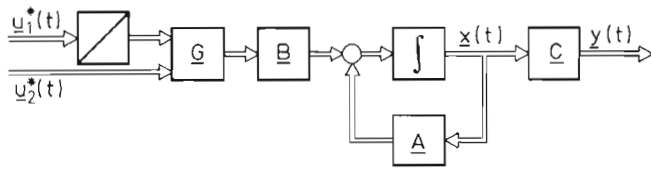


Bild 2. Regelstrecke mit vorgeschalteten I-Gliedern zur Behebung der Nicht-Entkoppelbarkeit.

schen Systems, in dem $\alpha - 1$ Stellgrößen $u_1^*, \dots, u_{\alpha-1}^*$ über Integrierer – diese übernehmen die Funktion des Blockes 4 in Bild 1c – und $m - \alpha + 1$ Stellgrößen $u_{\alpha}^*, \dots, u_m^*$ direkt auf ein quadratisch reguläres konstantes Vorfilter G gegeben werden.

Die Systemmatrizen $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$ der erweiterten Struktur lauten

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} A & BG_1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & BG_2 \\ I & 0 \end{bmatrix}, \tilde{C} = [C, 0], \quad (9)$$

worin abkürzend die ersten $\alpha - 1$ Spalten von G in G_1 und die letzten Spalten von G in G_2 zusammengefaßt sind, also $G_1 = [g_1, \dots, g_{\alpha-1}]$ und $G_2 = [g_{\alpha}, \dots, g_m]$ gilt. Durch Einsetzen in die Definitionsgleichung (6) kann man zeigen, daß sich die invarianten Nullstellen dieses Gesamtsystems weder in ihrer Anzahl noch in ihrer Lage von den Nullstellen des ursprünglichen Systems A, B, C unterscheiden. Der Übersichtlichkeit halber wird im weiteren der einfachste Fall der Nicht-Entkoppelbarkeit betrachtet, bei dem die Zahl der invarianten Strecken-Nullstellen gleich $n - \delta - 1$ ist¹⁾, also um eins zu klein, um Entkopplung zu ermöglichen, und bei dem Rang $D^* = m - 1$ ist. α und G sind dann so festzulegen, daß die Differenzordnung $\tilde{\delta}$ des erweiterten Systems um α gegenüber der Differenzordnung δ des Systems A, B, C wächst, wodurch Entkoppelbarkeit eintritt, denn die Systemordnung $\tilde{n} = n + \alpha - 1$ vermindert um die Differenzordnung $\tilde{\delta} = \delta + \alpha$ wird dann gleich der Zahl der invarianten Nullstellen $n - \delta - 1$.

Zunächst wird eine nichttriviale Lösung \tilde{q}^T der homogenen Gleichung

$$\tilde{q}^T D^* = 0^T \quad (10)$$

ermittelt, worin D^* die hier singuläre Entkoppelbarkeitsmatrix (7) bezeichnet. Unter der Annahme, daß die ersten β Elemente des Vektors \tilde{q}^T von Null verschieden sind²⁾, werden aus den unterbestimmten Gleichungssystemen

$$\begin{bmatrix} d_2^{*T} \\ \vdots \\ d_m^{*T} \end{bmatrix} g_i = e_i, \quad i = 1, \dots, m - 1 \quad (11)$$

die Spalten g_1, \dots, g_{m-1} der Matrix G bestimmt. Darin sind die Zeilen $d_2^{*T}, \dots, d_m^{*T}$ der Matrix D^* (wegen $q_1 \neq 0$)

linear unabhängig, was die Lösbarkeit von Gl. (11) sicherstellt, (e_i bezeichnet den Einheitsvektor mit der 1 an i -ter Stelle). Die noch fehlende Spalte g_m wird aus

$$D^* g_m = 0 \quad (12)$$

errechnet und die Zahl vorzuschaltender I-Glieder wird mit $\beta - 1$ festgesetzt, d.h. es wird $\alpha = \beta$ gewählt. Die Differenzordnung $\tilde{\delta}$ des erweiterten Systems ist dann gleich $\delta + \alpha$, wie sich durch Untersuchung der Ausdrücke $\tilde{c}_i^T \tilde{A}^k \tilde{B}, k = 0, 1, \dots$ und Bestimmung der Zahlen $\tilde{\delta}_i$ zeigen läßt [4]. Damit ist, wie oben erläutert, Entkoppelbarkeit des Systems (9) erreicht.

Zur Behandlung nicht entkoppelbarer Systeme mit weniger als $n - \delta - 1$ invarianten Nullstellen müssen die geschilderten Schritte geringfügig modifiziert bzw. wiederholt werden [4]. Es bleibt aber bei dem Vorgehen, die Systemordnung durch geeignetes Zufügen von I-Gliedern schwächer zu erhöhen als die Differenzordnung, wodurch Entkoppelbarkeit stets erreicht werden kann.

Für die erhaltene erweiterte Struktur (9) kann schließlich ein konstantes entkoppelndes Regelungsgesetz (3) nach einem der in [1, 2, 3] beschriebenen Verfahren bestimmt werden. Damit liegt eine dynamische Rückführung der Zustandsgrößen der Strecke vor, denn die zugefügten I-Glieder sind in der Realisierung dem Regler zuzuordnen.

Akademisches Beispiel

Die Systemmatrizen A, B, C der Regelstrecke nach Bild 2 lauten

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

bei willkürlich gewählten Zeitkonstanten und Verstärkungen der P-T₁-Glieder. Zur Bestimmung der invarianten Nullstellen der Strecke wird die Determinante nach Gl. (6) gebildet. Sie ergibt sich zu -2 , es existiert also keine Lösung η der Gleichung (6) und folglich keine invariante Nullstelle. Die Differenzordnung der Strecke ist $\delta = 2$, denn es ist $c_1^T B \neq 0^T$ und $c_2^T B \neq 0^T$. Die Entkoppelbarkeitsbedingung ist also verletzt, denn die Systemordnung 3 vermindert um die Differenzordnung 2 ist nicht gleich der Zahl der Nullstellen.

Zum Entwurf einer entkoppelbaren erweiterten Regelstrecke (9) ist zunächst ein Vektor \tilde{q}^T aus Gl. (10),

$$\tilde{q}^T D^* = \tilde{q}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0^T, \quad (14)$$

zu ermitteln, also beispielsweise $\tilde{q}^T = [1, -1]$. Dann wird aus Gl. (11),

$$[1, 0] \cdot g_1 = 1, \quad (15)$$

die erste Spalte der Matrix G ermittelt, also beispielsweise $g_1 = [1, 0]^T$.

¹⁾ Systeme mit mehr als $n - \delta$ invarianten Nullstellen besitzen eine singuläre Übertragungsmatrix $G(s) = C(sI - A)^{-1} B$ für alle s [3, 4] und sind deshalb durch keine regelungstechnische Maßnahme entkoppelbar. Sie werden hier, wie auch in [2, 5], ausgeschlossen.

²⁾ Diese Konstellation läßt sich jederzeit durch Umordnen der Ausgangsgrößen herbeiführen.

Gl. (12) liefert schließlich $g_2 = [0, 1]^T$, womit das reguläre Vorfilter G gleich der Einheitsmatrix gewählt werden kann. Die Anzahl vorzuschaltender I-Glieder ist wegen $\beta = 2$ gerade gleich Eins, womit die Struktur nach Bild 2 in die schon aus Plausibilitätsbetrachtungen gefundene Struktur nach Bild 1c übergeht. Die erweiterte Regelstrecke (9) lautet

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\tilde{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

und ist entkoppelbar, denn die Systemordnung $n = 4$ vermindert um die Differenzordnung $\delta = 4$ ist gleich der Zahl der invarianten Nullstellen, nämlich Null.

3. Nicht stabil entkoppelbare Systeme

Besitzt die Regelstrecke invariante Nullstellen in der geschlossenen rechten komplexen Halbebene, so muß trotz erfüllter Entkoppelbarkeitsbedingung keine konstante Zustandsrückführung (3) existieren, die das System stabilisiert und entkoppelt. Es läßt sich in einem solchen Fall aber stets eine *dynamische* Zustandsrückführung gewinnen, die vollständige Entkopplung und Stabilität sichert.

Die gegebene Strecke A, B, C besitze eine reelle nichtnegative invariante Nullstelle η mit einem zugehörigen Vektor q^T nach Gl. (8), von dessen Elementen die ersten α Stück von Null verschieden seien. Durch Zufügen eines Teilsystems A', B' der Ordnung $\alpha - 1$ erhält man die erweiterte Struktur nach Bild 3 mit den systembeschreibenden Matrizen

$$\tilde{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} A' & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{bmatrix}}_{\substack{\alpha-1 \\ n}}, \quad \tilde{B} = \underbrace{\begin{bmatrix} B' \\ B \end{bmatrix}}_{m}^{\alpha-1}, \quad \tilde{C} = [\mathbf{0}, C]. \quad (17)$$

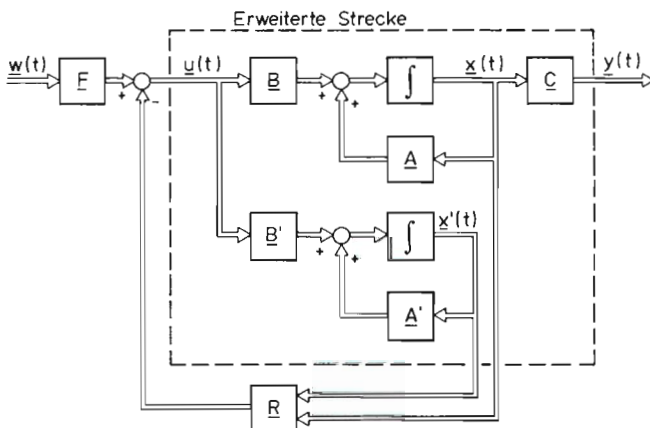


Bild 3. Erweiterte Regelungsstruktur zur Entkopplung von Strecken mit rechts gelegenen Nullstellen.

Gelingt es, die Matrizen A', B' so zu bestimmen, daß das Gesamtsystem die α -fache Nullstelle η besitzt und die zugehörigen Vektoren q_1^T, \dots, q_α^T je nur ein Nichtnullelement besitzen, so ist die Stabilitätsbedingung des ersten Abschnittes erfüllt, und es kann nach einem Verfahren zum Entwurf konstanter Zustandsrückführungen [2, 3, 4] entworfen werden. Um der Nullstelle η die Vielfachheit α zu verleihen, wird $A' = \eta I$ gewählt, womit sich die invarianten Nullstellen der erweiterten Strecke als Lösungen s von

$$\det \begin{bmatrix} \tilde{A} - sI & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \eta I - sI & \mathbf{0} & B' \\ \mathbf{0} & A - sI & B \\ \mathbf{0} & C & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \det(\eta I - sI) \cdot \det \begin{bmatrix} A - sI & B \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} = 0 \quad (18)$$

ergeben. Die Vielfachheit der Nullstelle $s = \eta$ ist damit $(\alpha - 1)$ -fach durch den Anteil $\det(\eta I - sI)$ des zugefügten Teilsystems und *einfach* durch das ursprüngliche System A, B, C , zusammen also α -fach.

Zu bestimmen bleibt B' so, daß α nichttriviale Lösungen $[r_{iL}^T, r_{iR}^T, q_i^T]$, $i = 1, \dots, \alpha$ der Gleichung (8)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} r_{iL}^T & r_{iR}^T & q_i^T \\ & & r_i^T \end{bmatrix}}_{r_i^T} \begin{bmatrix} \eta I - \eta I & \mathbf{0} & B' \\ \mathbf{0} & A - \eta I & B \\ \mathbf{0} & C & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{0}^T, \quad i = 1, \dots, \alpha \quad (19)$$

existieren, die gleichzeitig $q_i^T = e_i^T$ erfüllen. Die α Vektorgleichungen (19) lauten in Matrizenform

$$z \begin{bmatrix} R_L & R_R & I & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & B' \\ \mathbf{0} & A - \eta I & B \\ \mathbf{0} & C & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{matrix} \alpha-1 \\ n \\ m \end{matrix} = \mathbf{0} \quad (20)$$

mit

$$R_L = \begin{bmatrix} r_{1L}^T \\ \vdots \\ r_{\alpha L}^T \end{bmatrix}, \quad R_R = \begin{bmatrix} r_{1R}^T \\ \vdots \\ r_{\alpha R}^T \end{bmatrix}. \quad (21)$$

Auswertung des zweiten Spaltenblocks

$$R_R (A - \eta I) + [I, \mathbf{0}] C = \mathbf{0} \quad (22)$$

führt auf die Lösung

$$R_R = -[I, \mathbf{0}] \cdot C \cdot (A - \eta I)^{-1}, \quad (23)$$

falls η nicht Streckeneigenwert ist³⁾. Auswertung des dritten Spaltenblocks führt auf

$$R_L \cdot B' = -R_R B. \quad (24)$$

Eine Lösung R_L dieser Gleichung existiert, falls

$$\text{Rang} \begin{bmatrix} B' \\ R_R B \end{bmatrix} = \text{Rang} [B']. \quad (25)$$

³⁾ Diese Annahme bedeutet keine Einschränkung, da ein Eigenwert $\lambda = \eta$ stets durch vorherige Zustandsrückführung verschoben werden kann, *Stabilisierbarkeit* [3; 7] des Systems vorausgesetzt.

Die Matrix B' muß deshalb so gewählt werden, daß die α Zeilen von $R_R B$ Linearkombinationen der $\alpha - 1$ Zeilen von B' sind. Das ist natürlich nur möglich, wenn $\text{Rang}[R_R B] < \alpha$, was sich glücklicherweise in wenigen Schritten zeigen läßt [4]. Dann aber kann B' einfach aus den linear unabhängigen Zeilen von $R_R B$ zusammengesetzt werden, so daß Gl. (25) erfüllt wird und folglich Gl. (20) lösbar wird. Alle Blöcke der erweiterten Strecke liegen nunmehr fest und die Stabilitätsbedingung des ersten Abschnittes wird erfüllt.

Akademisches Beispiel

Betrachtet wird das schon in [3] diskutierte System

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -6 & -6 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (26)$$

das eine invariante Nullstelle in $\eta = +3$ besitzt und von der Differenzordnung $\delta = 2$ ist, die Entkoppelbarkeitsbedingung also erfüllt. Das System ist durch konstante Zustandsrückführung jedoch nicht stabil entkoppelbar, denn zur Nullstelle $\eta = 3$ errechnet sich aus Gl. (8) der Vektor $q^T = [2, 1]$ mit zwei Nichtnullelementen. Zum Entwurf einer dynamischen Streckenerweiterung ist im vorliegenden Fall mit $\alpha = 2$ ein Zusatzsystem der Ordnung $\alpha - 1 = 1$ zuzufügen, dessen Dynamikmatrix $A' = \eta = 3$ skalar ist. Aus Gl. (23) erhält man

$$R_R B = -C(A - \eta I)^{-1} B = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} -1 & -16 \\ 2 & 32 \end{bmatrix}. \quad (27)$$

Da B' aus den linear unabhängigen Zeilen von $R_R B$ gebildet werden soll, kann z.B. $B' = [1, 16]$ gewählt werden, womit das erweiterte System 4-ter Ordnung durch Gl. (17) festliegt. Zum Entwurf einer konstanten Zustandsrückführung für dieses System kann zum Beispiel das in [3], Abschnitt 3 beschriebene Verfahren herangezogen werden. Es liefert zur Verwirklichung eines entkoppelten Führungsübertragungsverhaltens

$$G_w(s) = \begin{bmatrix} \frac{-(s-3)}{(s+1)(s+3)} & 0 \\ 0 & \frac{-2(s-3)}{(s+2)(s+3)} \end{bmatrix} \quad (28)$$

das Regelungsgesetz der Form (3)

$$u(t) = - \begin{bmatrix} -6/5 & 6/5 & -6/5 & 0 \\ 3/8 & -1/8 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1/4 \end{bmatrix} w(t) \quad (29)$$

für das erweiterte System. Das nicht der ursprünglichen Strecke zuzuordnende, sondern im Regler zu realisierende dynamische Teilsystem A', B' (vgl. Bild 3) besitzt im vorliegenden Fall die Ordnung 1 und lautet

$$\dot{x}_1(t) = 3x_1(t) + [1, 16] u(t), \quad (30)$$

oder nach Laplace-Transformation

$$X_1(s) = \frac{1}{s-3} \cdot [1, 16] U(s).$$

Durch Einsetzen dieser Beziehung in das (ebenfalls zu transformierende) Regelungsgesetz (29) läßt sich das dynamische Regelungsgesetz für die Strecke (26) auch ohne weiteres im Bildbereich der Laplace-Transformation ausdrücken.

Nachteilig im Zeitverhalten der Regelung wirkt sich das Auftreten der invarianten Nullstelle η in beiden Diagonalelementen von $G_w(s)$ aus: Die Sprungantworten zeigen unerwünschtes Unterschwingen, das bei der in [3] vorgestellten teilweisen Entkopplung in nur einem Übertragungspfad auftrat. Im Einzelfall ist abhängig von der Lage der rechts gelegenen Nullstellen zwischen beiden Verfahren abzuwägen, wobei weit vom Ursprung entfernt gelegene Nullstellen das hier vorgestellte Verfahren vorteilhaft erscheinen lassen.

4. Vergleichendes Beispiel

Anhand eines nicht entkoppelbaren Systems mit technischem Hintergrund soll die hier vorgestellte vollständige Entkopplung durch dynamische Zustandsrückführung mit der in [3] beschriebenen teilweisen Entkopplung durch konstante Zustandsrückführung verglichen werden.

Die auf Modalform transformierten Systemmatrizen einer Automobil-Gasturbine [8] lauten

$$A = \text{diag} [-0.932, -0.934, -0.217, -0.216, -11.6, -8.06],$$

$$B = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \\ 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 1.0 \\ 1.98 & 1.34 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 0.68 & -1.64 & 0.125 & 0.223 & 1.42 & 0.0 \\ -0.041 & 0.156 & 0.0217 & 0.064 & -1.556 & 1.0 \end{bmatrix}.$$

Die Regelgrößen sind die Drehzahl y_1 und die Turbinentemperatur y_2 , die Stellgrößen sind die Kraftstoffzufuhr u_1 und die Laufgitterstellung u_2 . Das System besitzt drei reelle invariante Nullstellen in der linken komplexen Halbebene, ist jedoch nicht entkoppelbar, denn die Differenzordnung ist $\delta = 2$ (wegen $c_1^T B \neq 0^T, c_2^T B \neq 0^T$).

Um die Nichtentkoppelbarkeit zu beheben, ist laut Abschnitt 2 zunächst der Vektor \tilde{q}^T aus Gl. (10) zu bestimmen. Er ergibt sich mit

$$D^* = \begin{bmatrix} 0.805 & 0 \\ 1.96 & 0 \end{bmatrix}$$

zu $\tilde{q}^T = [-2.43, 1]$, besitzt also $\beta = 2$ von Null verschiedene Elemente. Aus Gl. (11) ist sodann die erste Spalte der

(2,2)-Vorfiltermatrix G zu berechnen, aus Gl. (12) die zweite Spalte von G . Man erhält

$$G = \begin{bmatrix} 0.51 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Der Regelstrecke ist wegen $\alpha = \beta = 2$ ein Integrierer vorzuschalten, das erweiterte System (9) erhält damit die Ordnung $n = 7$ und ist entkoppelbar. Zum Entwurf einer vollständig entkoppelnden Zustandsrückführung (3) kann eines der in [1, 2, 3] beschriebenen Verfahren eingesetzt werden und beispielsweise das Führungsübertragungsverhalten

$$G_w(s) = \begin{bmatrix} \frac{11.25}{(s+3-1.5j)(s+3+1.5j)} & 0 \\ 0 & \frac{2.815}{(s+1.5-0.75j)(s+1.5+0.75j)} \end{bmatrix}$$

das die in [8] gestellten Entwurfsanforderungen erfüllt, erzielt werden. Regler und Vorfilter für das erweiterte System lauten:

$$R = \begin{bmatrix} 1.73 & -4.14 & 0.538 & 1.01 & -90.4 & 36.4 & -3.44 \\ -0.249 & 0.602 & -0.0689 & -0.122 & -9.69 & 0.999 & -0.236 \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} 4.47 & 2.35 \\ -0.629 & 0.0645 \end{bmatrix}$$

Verzichtet man auf die Forderung nach vollständiger Entkopplung und läßt in einer Zeile der Führungsübertragungsmatrix von Null verschiedene Nichtdiagonalelemente zu, so kann nach dem in [3] geschilderten Verfahren eine *teilweise* Entkopplung durch *konstante* Zustandsrückführung erreicht werden. Unter Berücksichtigung der Differenzordnung $\delta = 2$ der Strecke wird hier das Übertragungsverhalten

$$G_w(s) = \begin{bmatrix} \frac{11.25}{(s+3-1.5j)(s+3+1.5j)} & g_{12}(s) \\ 0 & \frac{1.5}{s+1.5} \end{bmatrix}$$

vorgegeben, das (mit der optimalen Wahl $a_{21} = 0.205$ des auftretenden Verkopplungsparameters) geringe Verkopplungswirkung des Elementes $g_{12}(s)$ aufweist und die Entwurfsanforderungen erfüllt. Bild 4 zeigt die Antworten der Regelgröße $y_1(t)$ auf die sprungförmigen Anregungen $w_1(t) = \sigma(t)$ bzw. $w_2(t) = \sigma(t)$. Der zuvor beschriebene vollständig entkoppelnde Entwurf liefert als Reaktion auf $w_1(t) = \sigma(t)$ das gleiche Verhalten, während $y_1(t)$ dort bei $w_2(t) = \sigma(t)$ vollständig in Ruhe bleibt (strichliert gezeichnet). Bild 5 zeigt die Antwort der zweiten Regelgröße $y_2(t)$ auf $w_2(t) = \sigma(t)$. Hier ist die vollständige Entkopplung im Nachteil, denn bei ungefähr gleichem Stellaufwand müssen Einbußen in der Schnelligkeit hingenommen werden.

Abhängig von den Eigenschaften der vorliegenden Regelstrecke ist also abzuwägen, ob vollständige Entkopplung durch ein dynamisches Regelungsgesetz erkaufte werden soll, oder ob die verkoppelnde Wirkung der Nichtdiagonalelemente bei teilweiser Entkopplung toleriert werden kann zugunsten eines einfacheren Regelungsgesetzes und eventuell geringfügig schnellerer Dynamik. Welche Variante auch gewählt wird, mit den beiden

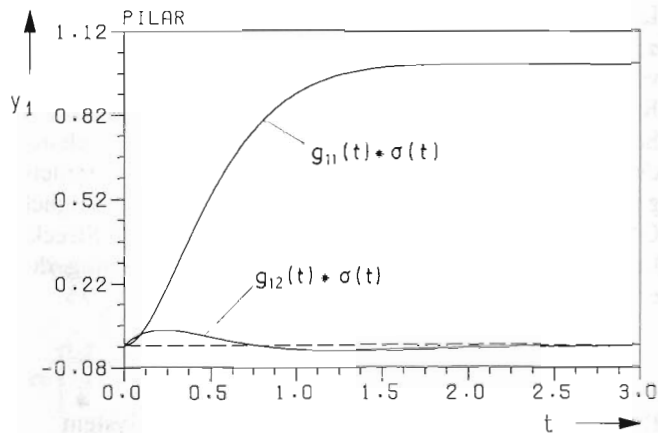


Bild 4. Regelgröße $y_1(t)$ bei sprungförmiger Anregung durch die Führungsgröße w_1 bzw. w_2 .

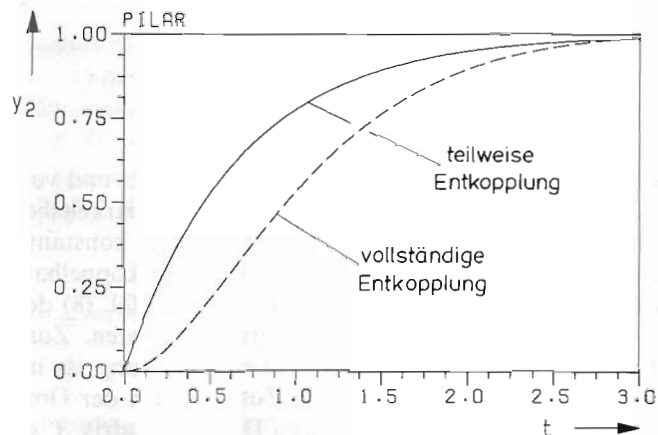


Bild 5. Vergleich der Verläufe von $y_2(t)$ bei teilweiser und vollständiger Entkopplung und sprungförmiger Anregung $w_2(t) = \sigma(t)$.

alternativen Wegen stehen wirkungsvolle Entwurfswerkzeuge zur Behandlung nicht oder nicht stabil entkoppelbarer Regelstrecken zur Verfügung, die eine interessante Erweiterung der behandelbaren Systemklassen und des erzielbaren Übertragungsverhaltens darstellen.

Literatur

- [1] Falb, P.L., und Wolovich, W.A.: Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems. IEEE Trans. on Autom. Control 12 (1967), S. 651-659.
- [2] Cremer, M.: Festlegen der Pole und Nullstellen bei der Synthese linearer entkoppelter Mehrgrößenregelkreise. Regelungstechnik und Prozeßdatenverarbeitung 21 (1973), S.144-150 und S.195-199.
- [3] Lohmann, B.: Vollständige und teilweise Führungsentkopplung dynamischer Systeme durch konstante Zustandsrückführung. Automatisierungstechnik 39 (1991), S. 329-334 und S.376-378.
- [4] Lohmann, B.: Vollständige und teilweise Führungsentkopplung im Zustandsraum. Dissertation, Universität Karlsruhe 1991.
- [5] Roppenecker, G., und Lohmann, B.: Vollständige Modale Synthese von Entkopplungsregelungen. Automatisierungstechnik 36 (1988), S. 434-441.
- [6] Moness, M., und Amin, M.H.: Minimal Order Precompensators for decoupling linear Multivariable Systems. Int. J. Control 47 (1988), S. 1925-1936.
- [7] Föllinger, O.: Regelungstechnik. 6. Auflage. Hüthig-Verlag, Heidelberg 1990.
- [8] Patel, R., und Munro, N.: Multivariable System Theory and Design. Pergamon Press, New York 1982.

Manuskriptengang: 6. August 1990.