

# Vollständige und teilweise Führungsentkopplung dynamischer Systeme durch konstante Zustandsrückführung

Complete and partial input-output decoupling of dynamical systems by constant state feedback

Boris Lohmann, Karlsruhe



Dr.-Ing. Boris Lohmann ist wissenschaftlicher Angestellter am Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme (Prof. Dr. rer. nat. Dr.-Ing. E. h. O. Föllinger) der Universität Karlsruhe. Sein Hauptarbeitsgebiet ist die Theorie von Mehrgrößenregelkreisen.

Adresse: Universität Karlsruhe, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Postfach 6980, W-7500 Karlsruhe 1, Tel. (0721) 608-3179.

Zur Entkopplung des Ein-Ausgangsverhaltens linearer Mehrgrößensysteme wird ein modales Entwurfsverfahren angegeben. Ausgehend davon werden Wege zu einer neuartigen teilweisen Führungsentkopplung nicht oder nicht stabil entkoppelbarer Systeme aufgezeigt, wobei sowohl die Anzahl unerwünschter, verkoppelnder Übertragungspfade als auch deren Einfluß minimal gehalten wird. Zwei Beispiele veranschaulichen die Vorgehensweise.

The decoupling of the input-output behaviour of linear multivariable systems is achieved by modal consideration. If the conditions for stability or existence of the controller are injured, the presented approach allows a partial and stable decoupling with generally only one output affected by several inputs. Two examples are given.

## 1. Einführende Übersicht

Betrachtet werden lineare zeitinvariante Regelstrecken mit gleicher Anzahl  $m$  von Ein- und Ausgangsgrößen. Die Zustandsdarstellung eines solchen Systems sei gegeben durch

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1}$$

$$y(t) = Cx(t), \tag{2}$$

worin  $x(t)$  den  $(n, 1)$ -Zustandsvektor,  $u(t)$  den  $(m, 1)$ -Eingangsvektor und  $y(t)$  den  $(m, 1)$ -Ausgangsvektor bezeichnen.  $A, B, C$  sind reelle konstante Matrizen passender Dimension. Die Aufgabe der Führungsentkopplung durch konstante Zustandsrückführung besteht darin, im Regelgesetz

$$u(t) = -Rx(t) + Fw(t) \tag{3}$$

den Zustandsregler  $R$  und das Vorfilter  $F$  so zu bestimmen,

daß im geregelten System jede Ausgangsgröße  $y_i(t)$  nur durch die zugehörige Führungsgröße  $w_i(t)$  beeinflusst wird. Gleichbedeutend dazu muß die Übertragungsmatrix

$$G_w(s) = C(sI - A + BR)^{-1}BF \tag{4}$$

des geregelten Systems, die zwischen den laplacetransformierten Führungs- und Regelgrößen den Zusammenhang  $Y(s) = G_w(s) \cdot W(s)$  herstellt, diagonalförmig sein, d. h. die Gestalt

$$G_w(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & g_{mm}(s) \end{bmatrix} \tag{5}$$

besitzen. Falb und Wolovich gaben in [1] eine Lösung zu dieser Aufgabe an (siehe auch [2]), die seither Gegenstand zahlreicher Arbeiten war und auch im Frequenzbereich, beispielsweise von Cremer in [3], behandelt wurde.

Hier sollen Zustandsraumbetrachtungen zum Ziel führen. In Abschnitt 2 werden, basierend auf der Entwurfsmethodik der Vollständigen Modalen Synthese [4, 5], Berechnungsvorschriften für Zustandsregler und Vorfilter hergeleitet. Wird eine der dort angegebenen Bedingungen für die Existenz des Reglers und die Stabilität des geregelten Systems verletzt, so kann auf eine teilweise Entkopplung ausgewichen werden, bei der man zuläßt, daß im geregelten System eine Ausgangsgröße  $y_j(t)$  von mehreren Führungsgrößen  $w_i(t)$  beeinflusst wird. Als Entwurfsziel der teilweisen Entkopplung wird also die Übertragungsmatrix

$$G_w(s) = \begin{bmatrix} g_{11}(s) & & 0 & & \\ g_{j1}(s) & \dots & g_{jj}(s) & \dots & g_{jm}(s) \\ & & 0 & & \\ & & & & g_{mm}(s) \end{bmatrix} \tag{6}$$

angesetzt, in der in nur einer Zeile Elemente außerhalb der Hauptdiagonalen auftreten. Die nötigen Entwurfsschritte sind in Abschnitt 3 hergeleitet, gefolgt von einigen ergänzenden Betrachtungen und einem Beispiel. In Abschnitt 7 schließlich wird angegeben, wie der unerwünschte verkoppelnde Einfluß der Nichtdiagonalelemente von  $G_w(s)$  minimiert werden kann.

Verfahren zur Block- oder Dreiecksentkopplung, wie sie in [6, 7] als Alternativen zur vollständigen Entkopplung vorgestellt wurden, liefern nur in Sonderfällen eine ebenso geringe Anzahl von Verkopplungselementen in  $G_w(s)$ , wie der hier vorgestellte neuartige Ansatz.

## 2. Vollständige Entkopplung durch konstante Zustandsrückführung

Um im Entwurfsziel (5) die noch offenen Diagonalelemente  $g_{11}(s), \dots, g_{mm}(s)$  geeignet vorgeben zu können, wird der Begriff der *Differenzordnung* benötigt, der folgendermaßen definiert ist:

Bezeichnet  $y_i^{(\delta_i)}(t)$  die niedrigste Ableitung von  $y_i(t)$ , die sprunghaft ist, d. h. durch eine Sprungfunktion an einem geeigneten Eingang ebenfalls zu einem Sprung veranlaßt werden kann, so nennt man  $\delta_i$  *Differenzordnung bezüglich  $y_i$* .

Die Summe

$$\delta = \delta_1 + \dots + \delta_m \quad (7)$$

heißt *Differenzordnung des Systems*, und es ist bekannt, daß  $\delta$  stets kleiner oder gleich der Systemordnung  $n$  ist [1, 2]. Ermitteln kann man  $\delta_i$ , indem man in der  $i$ -ten Zeile der Streckenübertragungsmatrix  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  das Element mit der geringsten Differenz zwischen Nenner- und Zählergrad sucht und  $\delta_i$  gleich dieser Differenz setzt. Auch anhand der Zustandsdarstellung des Systems läßt sich  $\delta_i$  ermitteln:

$\delta_i$  ist die kleinste ganze Zahl, für die  $c_i^T A^{\delta_i - 1} B \neq 0^T$  ist, wobei  $c_i^T$  die  $i$ -te Zeile von  $C$  bezeichnet. } (8)

Die Differenzordnungen werden durch das Regelungsgesetz (3) nicht verändert (siehe z. B. [1]), woraus für die Zähler- und Nennergrade der Elemente  $g_{11}(s), \dots, g_{mm}(s)$  der Übertragungsmatrix (5) des geregelten Systems folgt: Nennergrad $_i$  - Zählergrad $_i$  =  $\delta_i$ . Setzt man die Zähler als *Konstanten* an und fordert außerdem *stationäre Genauigkeit* des Übertragungsverhaltens, so müssen die  $g_{ii}(s)$  lauten:

$$g_{ii}(s) = \frac{\prod_{v=1}^{\delta_i} (-\lambda_{iv})}{(s - \lambda_{i1}) \cdot \dots \cdot (s - \lambda_{i\delta_i})}, \quad i = 1, \dots, m. \quad (9)$$

Wählt man die darin vorzugebenden Pole  $\lambda_{ik}$  paarweise voneinander verschieden, dann tritt offenbar jeder Pol  $\lambda_{ik}$  in genau *einem* Element von  $G_w(s)$  auf.

Durch Vergleich der allgemeinen Übertragungsmatrix (4) mit der gewünschten, vollständig entkoppelnden Matrix (5) soll nun der Zustandsregler  $R$  ermittelt werden, wozu die Dynamikmatrix  $A - BR$  des geregelten Systems zunächst auf Modalform transformiert wird

$$A - BR = VAV^{-1}. \quad (10)$$

$A$  ist darin die Diagonalmatrix der Regelungseigenwerte,  $V = [v_1, \dots, v_n]$  umfaßt die  $n$  Regelungseigenvektoren. Einsetzen in Gl. (4) ermöglicht die Summenschreibweise

$$G_w(s) = CV(sI - A)^{-1}V^{-1}BF = \sum_{\mu=1}^n \frac{C v_{\mu} w_{\mu}^T BF}{s - \lambda_{\mu}}, \quad (11)$$

worin die Vektoren  $w_{\mu}^T$  die Zeilen von  $V^{-1}$  bezeichnen. Da jeder Pol  $\lambda_{ik}$  nach Gl. (9) in nur einem Element von  $G_w(s)$  auftritt, müssen die zugehörigen Summanden  $C v_{ik} w_{ik}^T BF / (s - \lambda_{ik})$  der Gleichung (11) jeweils genau ein

Nichtnullelement besitzen. Notwendigerweise dürfen dann die Vektoren  $C v_{ik}$  ebenfalls nur ein Nichtnullelement besitzen, und wegen der multiplikativen Unbestimmtheit der Eigenvektoren kann man schreiben

$$C v_{ik} = e_i, \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m, \\ k = 1, \dots, \delta_i, \end{matrix} \quad (12)$$

wobei  $e_i = [0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]^T$  mit der Eins an der  $i$ -ten Stelle ist. Anschaulich gesprochen stellen die insgesamt  $\delta$  Forderungen (12) an die Regelungseigenvektoren die feste Bindung eines jeden Eigenwertes  $\lambda_{ik}$  an die  $i$ -te Zeile der Übertragungsmatrix  $G_w(s)$  sicher. Für die eventuell verbleibenden  $n - \delta$  Regelungseigenvektoren, die noch unberücksichtigt sind, gilt

$$C v_{\nu} w_{\nu}^T BF = 0, \quad \nu = \delta + 1, \dots, n, \quad (13)$$

denn die zugehörigen Eigenwerte  $\lambda_{\nu}$  treten laut Gl. (9) in  $G_w(s)$  nicht auf. Setzt man Steuerbarkeit voraus<sup>1)</sup>, also  $w_{\nu}^T BF \neq 0^T$ , dann folgt

$$C v_{\nu} = 0, \quad \nu = \delta + 1, \dots, n. \quad (14)$$

womit zusammen mit Gl. (12)  $n$  Forderungen an die  $n$  Regelungseigenvektoren des Systems formuliert sind.

Um zu einem Zustandsregler  $R$  zu gelangen, der diese Forderungen berücksichtigt, wird die Entwurfsmethodik der *Vollständigen Modalen Synthese* nach Roppenecker [4, 5] eingesetzt. Sie beruht auf der Tatsache, daß jedem Zustandsregler  $R$  genau ein Satz Regelungseigenwerte  $\lambda_{\mu}$  und invarianter Parametervektoren  $p_{\mu}$  zugeordnet ist, aus dem er über

$$R = [p_1, \dots, p_n][v_1, \dots, v_n]^{-1} \quad (15)$$

mit

$$v_{\mu} = (A - \lambda_{\mu}I)^{-1}Bp_{\mu}, \quad \mu = 1, \dots, n, \quad (16)$$

berechnet werden kann. Neben Gl. (16), über die die die Regelungseigenwerte  $\lambda_{\mu}$  vorgegeben werden können, sind aber die oben hergeleiteten Bedingungen (12) und (14) zu berücksichtigen. Kombiniert man (16) mit (12) bzw. (14) zu jeweils einer Vektorgleichung und ersetzt noch die Indizierung  $\mu = 1, \dots, n$  durch die zuvor eingeführte, so ergeben sich die Beziehungen

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_{ik}I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ik} \\ -p_{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_i \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} i = 1, \dots, m, \\ k = 1, \dots, \delta_i, \end{matrix} \quad (17)$$

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_{\nu}I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{\nu} \\ -p_{\nu} \end{bmatrix} = 0, \quad \nu = \delta + 1, \dots, n. \quad (18)$$

Gelingt es, sie nach den  $n$  Paaren  $v, p$  aufzulösen, so liegt der Zustandsregler  $R$  durch Gl. (15) fest und verleiht dem geregelten System die Eigenwerte  $\lambda_{11}, \dots, \lambda_{m\delta_m}$  und

<sup>1)</sup> Diese Voraussetzung kann fallen gelassen werden, ohne daß die folgenden Entwurfsschritte ihren *hinreichenden* Charakter für Entkopplung verlieren.

$\lambda_{\delta+1}, \dots, \lambda_n$ . Tatsächlich ist die Lösung der Gln. (17), (18) und die Berechnung von  $R$  unter folgenden Bedingungen möglich:

- Damit Gl. (18) eine nichttriviale Lösung besitzt, muß

$$\det \begin{bmatrix} A - \lambda I & B \\ C & \mathbf{0} \end{bmatrix} = 0 \tag{19}$$

gelten. Da die Lösungen  $\lambda$  der Gl. (19) gerade die *invarianten Nullstellen* der Strecke definieren [8], müssen also die Regelungseigenwerte  $\lambda_v$  *gleich* diesen Nullstellen vorgegeben werden. Invariant sind die Nullstellen übrigens gegenüber konstanter Zustandsrückführung und regulärer Vorfilterung, sie bleiben also im geregelten System erhalten.

- Gl. (17) ist eindeutig nach  $v_{ik}, p_{ik}$  auflösbar, wenn die Eigenwerte  $\lambda_{ik}$  beliebig, aber *verschieden* von allen invarianten Nullstellen vorgegeben werden, denn dann ist die Matrix in Gl. (17) regulär.
- Es läßt sich zeigen, daß die in Gl. (15) benötigte Inverse  $[v_1, \dots, v_n]^{-1}$  existiert, wenn die Systemordnung  $n$  vermindert um die Differenzordnung  $\delta$  gleich der Zahl der endlichen invarianten Nullstellen des Systems ist [13]. Diese Forderung heißt *Entkoppelbarkeitsbedingung* und beschreibt eine *Systemeigenschaft*, die im Gegensatz zu den oben aufgeführten Bedingungen nicht durch geeignete Wahl freier Entwurfsparameter beeinflussbar ist.

Zu bestimmen bleibt noch das konstante Vorfilter  $F$ . Um die gewünschte stationäre Genauigkeit des Übertragungsverhaltens sicherzustellen, muß es der Gleichung

$$F = \lim_{s \rightarrow 0} [C(sI - A + BR)^{-1} B]^{-1} \tag{20}$$

genügen und bewirkt zusammen mit dem Zustandsregler  $R$  vollständige Entkopplung nach Gl. (5), (9) [12, 13].

Die Entwurfsschritte können nun zusammengefaßt werden: Die  $\delta$  Pole  $\lambda_{ik}$  der Elemente der gewünschten Diagonalmatrix  $G_w(s)$  werden frei (auch konjugiert komplex), innerhalb eines Elementes voneinander verschieden und *verschieden* von den invarianten Nullstellen des Systems vorgegeben; die zugehörigen Vektoren  $v_{ik}, p_{ik}$  lassen sich nach Gl. (17) bestimmen. Die restlichen  $n - \delta$  Eigenwerte  $\lambda_v$  werden *gleich* den invarianten Nullstellen gesetzt, wodurch Gl. (18) lösbar wird. Die erhaltenen  $n$  Vektorpaare  $v, p$  legen über Gl. (15) den Zustandsregler  $R$  fest; das Vorfilter  $F$  wird nach Gl. (20) bestimmt. Notwendige und hinreichende Bedingung für das Gelingen dieses Vorgehens ist die

Entkoppelbarkeitsbedingung: Die Zahl der invarianten Nullstellen des Systems muß gleich  $n - \delta$  sein. Gleichwertig dazu ist die in [1] angegebene Bedingung: Die Matrix

$$D^* = \begin{bmatrix} c_1^T A^{\delta_1 - 1} B \\ \vdots \\ c_m^T A^{\delta_m - 1} B \end{bmatrix}$$

muß regulär sein (Äquivalenzbeweis in [9]).

}

(21)

*Beispiel*

Gegeben sei das Zweigrößensystem

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -6 & -6 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

das zunächst mit dem Element  $c_{12} = 0$  der Matrix  $C$  betrachtet wird. Die Differenzordnungen sind  $\delta_1 = 1$ , da  $c_1^T B \neq \mathbf{0}^T$  und  $\delta_2 = 1$ , da  $c_2^T B \neq \mathbf{0}^T$ . Aus Gl. (19) ergibt sich als einzige invariante Nullstelle  $\eta = 3$ , das System ist also entkoppelbar laut (21). In jedem Element der diagonalförmigen Übertragungsmatrix  $G_w(s)$  kann nun ein Pol frei vorgegeben werden (vgl. Gl. (9)), also z. B.

$$G_w(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{2}{s+2} \end{bmatrix} \tag{23}$$

als Entwurfsziel gefordert werden. Die Lösungen der Gl. (17) für  $\lambda_{11} = -1$  und  $\lambda_{21} = -2$  lauten dann

$$v_{11} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 3/2 \end{bmatrix}, \quad p_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/8 \end{bmatrix},$$

$$v_{21} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 1/2 \\ 3/5 \end{bmatrix}, \quad p_{21} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ -3/20 \end{bmatrix}.$$

Der dritte Eigenwert wird gleich der invarianten Nullstelle vorgegeben,  $\lambda_3 = \eta = 3$ , und führt mit Gl. (18) auf

$$v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad p_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1/4 \end{bmatrix}.$$

Der Regler  $R$  gemäß Gl. (15) ist

$$R = [p_{11}, p_{21}, p_3] [v_{11}, v_{21}, v_3]^{-1} = \begin{bmatrix} -6 & -6 & -2 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

das Vorfilter  $F$  nach Gl. (20) lautet

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Einsetzen dieses Ergebnisses in Gl. (4) bestätigt die Richtigkeit der Rechnung:  $G_w(s)$  erfüllt die Entwurfsforderung (23). Allerdings ist das System instabil, denn der Eigenwert  $\lambda_3$  wurde zur Erfüllung von Gl. (18) in die rechte komplexe Halbebene gelegt.

Da Instabilität wie in diesem Beispiel immer eintreten wird, wenn invariante Nullstellen rechts liegen, gilt allgemein: *Nichtminimalphasige* Systeme, worunter hier Systeme mit zumindest einer invarianten Nullstelle in der geschlossenen rechten komplexen Halbebene verstanden werden sollen, lassen sich durch die beschriebene Vorge-

hensweise *nicht stabil* entkoppeln, denn Gl. (18) verlangt die Vorgabe von Eigenwerten *gleich* den invarianten Nullstellen. Obwohl die Eigenwerte nicht als Pole in der Übertragungsmatrix des geregelten Systems auftreten – sie werden vielmehr in ihrer Wirkung durch die Nullstellen unterdrückt, und man spricht von *Kompensation* – entscheiden sie dennoch über das Stabilitätsverhalten des Entwurfs. *Minimalphasige* Systeme, die entkoppelbar nach (21) sind, können nach den in diesem Abschnitt vorgestellten Entwurfsschritten stets *stabil* entkoppelt werden.

Der klassische Entwurf nach *Falb/Wolovich* [1], der nach ganz anderem Rechengang auf die gleichen Regler führt, liefert demnach ebenfalls instabile Regler bei nichtminimalphasiger Strecke.

### 3. Teilweise Entkopplung nichtminimalphasiger Systeme

Um Stabilität auch bei Vorliegen einer reellen nichtnegativen invarianten Nullstelle  $\eta$  (oder eines Paares konjugiert komplexer Nullstellen  $\eta, \bar{\eta}$  in der rechten Halbebene) zu ermöglichen, werden die Entwurfsschritte des letzten Abschnittes so modifiziert, daß die Übertragungsmatrix  $G_w(s)$  die teilweise entkoppelnde Struktur nach Gl. (6) erhält. Zunächst wird für die Diagonalelemente  $g_{ii}(s)$ ,  $i \neq j$  der Matrix  $G_w(s)$  wieder das Übertragungsverhalten nach Gl. (9) angesetzt. Die Wahl der verkoppelnden  $j$ -ten Zeile von  $G_w(s)$  und die Gestalt ihrer Elemente  $g_{j1}(s), \dots, g_{jm}(s)$  werden hier bewußt offen gelassen und später diskutiert. Ganz entsprechend wie in Abschnitt 2 erhält man durch Vergleich von (6), (9) mit (11) Forderungen an die Produkte  $Cv$ :

$$Cv_{ik} = e_i + a_{ik}e_j, \quad i = 1, \dots, m, \quad i \neq j, \\ k = 1, \dots, \delta_i. \quad (24)$$

Die freien Parameter  $a_{ik}$  werden eingeführt, weil das Auftreten der Pole  $\lambda_{ik}$  (diese gehören zu den Diagonalelementen  $g_{ii}(s)$  außerhalb der Verkopplungszeile  $j$ ) in Elementen der  $j$ -ten Zeile von  $G_w(s)$  ausdrücklich zugelassen werden muß. Zusammen mit Gl. (16) resultieren die Bestimmungsgleichungen für die Paare  $v_{ik}, p_{ik}$ :

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_{ik}I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ik} \\ -p_{ik} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_i \end{bmatrix} + a_{ik} \begin{bmatrix} 0 \\ e_j \end{bmatrix}, \\ i = 1, \dots, m, \quad i \neq j, \quad k = 1, \dots, \delta_i. \quad (25)$$

Zu reellen  $\lambda_{ik}$  werden die  $a_{ik}$  reell, zu konjugiert komplexen  $\lambda_{ik}$  konjugiert komplex gewählt. Bei Vorliegen einer reellen „instabilen“ invarianten Nullstelle können die verbleibenden  $n - \delta - 1$  „stabilen“ Nullstellen wie in Abschnitt 2 über die Forderung  $Cv_v = 0$  durch Eigenwerte an gleicher Stelle kompensiert werden, was durch Erfüllen der Gleichung

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_v I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_v \\ -p_v \end{bmatrix} = 0, \\ v = \delta + 2, \dots, n \quad (v = \delta + 3, \dots, n), \quad (26)$$

geschieht. Liegt ein konjugiert komplexes Paar  $\eta, \bar{\eta}$  „instabiler“ Nullstellen vor, so sind nur  $n - \delta - 2$

Nullstellen zu kompensieren; in den Gleichungen (26), (27), (28) sind dann die in Klammern angegebenen Indexbereiche zu benutzen. Durch Gl. (25) und (26) liegen zusammen  $n - \delta_j - 1$  (bzw.  $n - \delta_j - 2$ ) Vektorpaare  $v, p$  fest, die verbleibenden Vektoren  $v$  müssen der Bedingung

$$Cv_{jk} = e_j, \quad k = 1, \dots, \delta_j + 1 \quad (k = 1, \dots, \delta_j + 2), \quad (27)$$

genügen, wodurch die zugehörigen Pole an die  $j$ -te Zeile der Übertragungsmatrix  $G_w(s)$  gebunden werden. Aus Gl. (27) folgt mit (16) die Bestimmungsgleichung

$$\begin{bmatrix} A - \lambda_{jk}I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{jk} \\ -p_{jk} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e_j \end{bmatrix}, \\ k = 1, \dots, \delta_j + 1 \quad (k = 1, \dots, \delta_j + 2), \quad (28)$$

für die restlichen  $v, p$ , wobei die  $\lambda_{jk}$  frei, voneinander verschieden und verschieden von allen invarianten Nullstellen vorgegeben werden. Der Regler  $R$  liegt durch Gl. (15) fest; er existiert, falls das System  $A, B, C$  *stabilisierbar* ist, d. h. keine nicht steuerbaren Eigenwerte mit nichtnegativem Realteil besitzt [13]. Das Vorfilter  $F$  wird aus Gl. (20) gewonnen; es existiert, falls keine invariante Nullstelle in Null liegt. Beide Bedingungen werden von sinnvoll regelbaren Systemen stets erfüllt.

#### Wahl des verkoppelten Kanals

Die Wahl der verkoppelnden Zeile  $j$  in der vorzugebenden Matrix  $G_w(s)$  nach Gl. (6) unterliegt folgender Einschränkung:

Verkopplung kann in der  $j$ -ten Zeile von  $G_w(s)$  vorgegeben werden, falls das  $j$ -te Element des Vektors  $q^T$  von Null verschieden ist, wobei  $q^T$  über die Lösung von

$$[r^T, q^T] \begin{bmatrix} A - \eta I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = 0^T. \quad (30)$$

definiert ist.

Gl. (30) besitzt sicher eine nichttriviale Lösung  $[r^T, q^T] \neq 0^T$ , denn die auftretende Matrix ist laut Gl. (19) singulär. Es gilt sogar  $q^T \neq 0^T$ , denn der obere Block  $[A - \eta I, B]$  besitzt Höchststrang<sup>2)</sup>, weshalb kein nichttrivialer Vektor  $[r^T, 0^T]$  die Gl. (30) erfüllen kann. Es findet sich also stets zumindest *eine* Zeile  $j \in [1, \dots, m]$ , für die Verkopplung vorgegeben werden kann; sind *alle* Elemente von  $q^T$  von Null verschieden, so ist die Wahl der verkoppelnden Zeile in  $G_w(s)$  frei.

Um die Notwendigkeit der Auswahlbedingung (29) zu zeigen, wird Gl. (30) von rechts mit zwei günstig gewählten, regulären Matrizen multipliziert:

$$[r^T, q^T] \begin{bmatrix} A - \eta I & B \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ -R & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & -(A - BR - \eta I)^{-1} BF \\ 0 & I \end{bmatrix} = \\ = [r^T, q^T] \begin{bmatrix} A - BR - \eta I & 0 \\ C & G_w(\eta) \end{bmatrix} = 0^T. \quad (31)$$

<sup>2)</sup> Diese Aussage gilt unter der Voraussetzung, daß die betrachtete Strecke stabilisierbar ist, also keine nichtsteuerbaren Eigenwerte mit nichtnegativem Realteil besitzt. Dann folgt aus dem Steuerbarkeitskriterium von *Hautus* [2] direkt der Höchststrang für alle  $\eta$  in der geschlossenen rechten Halbebene.

Die Inverse  $(A - BR - \eta I)^{-1}$  existiert, da  $\eta$  für Stabilität kein Regelungseigenwert sein darf. Aus (31) erhält man

$$q^T G_w(\eta) = 0^T, \tag{32}$$

eine Bedingung, die von *allen* durch  $R$  und  $F$  erzielbaren Übertragungsmatrizen  $G_w(s)$  erfüllt wird. Einsetzen der *gewünschten* Übertragungsmatrix (6) liefert

$$q^T G_w(\eta) = [q_1 g_{11}(\eta) + q_j g_{j1}(\eta), \dots, q_j g_{jj}(\eta), \dots, q_m g_{mm}(\eta) + q_j g_{jm}(\eta)] = 0^T, \tag{33}$$

worin  $q_1, \dots, q_m$  die Elemente von  $q^T$  bezeichnen. Angenommen,  $G_w(s)$  verletze die Auswahlbedingung (29), es sei also  $q_j = 0$ , dann lautet das  $i$ -te Element von  $q^T G_w(\eta)$  gerade  $q_i g_{ii}(\eta)$ , ein Ausdruck, der nicht für alle  $i = 1, \dots, m, i \neq j$  verschwinden kann, denn es gilt  $q^T \neq 0^T$  und  $g_{ii}(\eta) \neq 0$  laut Gl. (9). Gl. (33) kann also mit einer verkoppelnden Matrix  $G_w(s)$  nach (6) und  $q_j = 0$  nicht erfüllt werden, folglich keine passende Rückführung  $R, F$  gefunden werden. Der Beweis des hinreichenden Charakters des Auswahlkriteriums ist in [13] zu finden.

*Gestalt der Nichtdiagonalelemente von  $G_w(s)$*

Für die Elemente  $g_{j1}(s) \dots g_{jm}(s)$  der verkoppelnden  $j$ -ten Zeile von  $G_w(s)$  werden nun noch Beziehungen angegeben. Aus Gl. (33) liest man sofort  $g_{jj}(\eta) = 0$  ab, die „instabile“ invariante Nullstelle ist also Nullstelle des Diagonalelementes  $g_{jj}(s)$ , es lautet

$$g_{jj}(s) = \frac{s - \eta}{(s - \lambda_{j1}) \cdot \dots \cdot (s - \lambda_{j, \delta_j + 1})} \cdot \frac{\prod_{v=1}^{\delta_j + 1} (-\lambda_{jv})}{(-\eta)}, \tag{34}$$

bzw.

$$g_{jj}(s) = \frac{(s - \eta)(s - \bar{\eta})}{(s - \lambda_{j1}) \cdot \dots \cdot (s - \lambda_{j, \delta_j + 2})} \cdot \frac{\prod_{v=1}^{\delta_j + 2} (-\lambda_{jv})}{\eta \cdot \bar{\eta}} \tag{35}$$

für ein Paar konjugiert komplexer Nullstellen. Die nicht kompensierten Nullstellen  $\eta$  heißen auch *Übertragungsnulstellen* [10], denn im Gegensatz zu den durch Gl. (26) kompensierten Nullstellen wirken sie auf das Übertragungsverhalten. Gibt man beim Entwurf alle  $a_{ik} = 0$  vor (Gl. (25)), so besitzen die Nichtdiagonalelemente  $g_{ji}(s)$  die Pole  $\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{j, \delta_j + 1}$  (bzw.  $\lambda_{j1}, \dots, \lambda_{j, \delta_j + 2}$ ) und müssen zur Erhaltung der Differenzordnung und der stationären Genauigkeit von der Form

$$g_{ji}(s) = \frac{h_{ji} \cdot s}{(s - \lambda_{j1}) \cdot \dots \cdot (s - \lambda_{j, \delta_j + 1})}, \tag{36}$$

$i = 1, \dots, m, \quad i \neq j,$

sein, bzw.

$$g_{ji}(s) = \frac{h_{ji1} s + h_{ji2} s^2}{(s - \lambda_{j1}) \cdot \dots \cdot (s - \lambda_{j, \delta_j + 2})} \tag{37}$$

für ein Paar konjugiert komplexer „instabiler“ Nullstellen. Die darin noch unbekanntes Zählerfaktoren  $h_{ji}$  bzw.  $h_{ji1}, h_{ji2}$  lassen sich durch Auswertung von Gl. (33) mit diesem Ansatz unmittelbar bestimmen zu

$$h_{ji} = -\frac{1}{\eta} \cdot \frac{q_i}{q_j} g_{ii}(\eta) \cdot (\eta - \lambda_{j1}) \cdot \dots \cdot (\eta - \lambda_{j, \delta_j + 1}) \tag{38}$$

bzw.

$$\begin{bmatrix} h_{ji2} \\ h_{ji1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \eta & 1 \\ \bar{\eta} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} z_{ji}(\eta) \\ z_{ji}(\bar{\eta}) \end{bmatrix}, \tag{39}$$

worin abkürzend

$$z_{ji}(\eta) = -\frac{1}{\eta} \cdot \frac{q_i}{q_j} g_{ii}(\eta) \cdot (\eta - \lambda_{j1}) \cdot \dots \cdot (\eta - \lambda_{j, \delta_j + 2}) \tag{40}$$

gesetzt wurde. Damit sind (für  $a_{ik} = 0$ ) alle Elemente der Matrix  $G_w(s)$  in Abhängigkeit von den Streckendaten und den frei vorgebbaren Polen bekannt. Um in Abschnitt 5 den Einfluß der zusätzlichen freien Entwurfparameter  $a_{ik}$  zur Verringerung der Verkopplungswirkung nutzen zu können, werden noch die Nichtdiagonalelemente für  $a_{ik} \neq 0$  angegeben (hier nur für den Fall einer einfachen reellen „instabilen“ Nullstelle  $\eta$ ) [11]:

$$g_{ji}(s, a_{ik}) = g_{ji}(s) + f_{ji}(s, a_{ik}) \tag{41}$$

mit  $g_{ji}(s)$  nach (36) und

$$f_{ji}(s, a_{ik}) = \sum_{k=1}^{\delta_i} a_{ik} \frac{r_{ik}}{\lambda_{ik}} \cdot \frac{\prod_{v=1}^{\delta_j + 1} (\lambda_{ik} - \lambda_{jv})}{(\lambda_{ik} - \eta)} \cdot \frac{s(s - \eta)}{(s - \lambda_{ik}) \prod_{v=1}^{\delta_j + 1} (s - \lambda_{jv})}, \tag{42}$$

worin  $r_{ik}$  das Residuum des Poles  $\lambda_{ik}$  in der Funktion  $g_{ii}(s)$  bezeichnet, also

$$r_{ik} = \lim_{s \rightarrow \lambda_{ik}} [g_{ii}(s) \cdot (s - \lambda_{ik})]. \tag{43}$$

Liegt der äußerst seltene Fall einer Regelstrecke mit mehreren, reellen nichtnegativen Nullstellen oder mehreren rechts gelegenen komplexen Nullstellenpaaren vor, so kann der Ansatz teilweiser Entkopplung leicht erweitert werden, wodurch die Zahl der verkoppelnden Zeilen in  $G_w(s)$  im allgemeinen *nicht* wächst [13].

**4. Bedingung für vollständige stabile Entkoppelbarkeit**

Ein interessanter Sonderfall der teilweisen Entkopplung tritt ein, wenn der aus (30) errechnete Vektor  $q^T$  nur *ein* Nichtnullelement enthält: Laut Gln. (38), (39) verschwinden dann alle Koeffizienten in den Zählerpolynomen der Nichtdiagonalelemente (36), (37), und es tritt *vollständige Entkopplung* ein. Anschaulich gesprochen ist die Wirkung der Nullstellen  $\eta$  in diesem Fall auf den Ausgang  $y_j$  beschränkt, *Koussiouris* bezeichnet sie in [7] als „non-interconnecting zeros“. Die Diagonalelemente von  $G_w(s)$  folgen Gl. (34) bzw. (35) und Gl. (9) für  $i \neq j$ . In Abschnitt 2 konnte dieser Fall der Entkopplung nicht berücksichtigt werden, weil dort *alle* Diagonalelemente als nullstellenfrei angesetzt waren. Minimalphasige Systeme können demnach stets nach Abschnitt 2 bei gesicherter Stabilität entkoppelt werden, nichtminimalphasig-

ge Systeme können nur im eben erläuterten Sonderfall stabil entkoppelt werden. Daraus folgt allgemein die

$$\left. \begin{array}{l} \text{Notwendige und hinreichende Bedingung} \\ \text{für stabile, vollständige Entkoppelbarkeit:} \\ \text{Die zu den invarianten Nullstellen mit} \\ \text{nichtnegativem Realteil gehörigen Vektoren} \\ \mathbf{q}^T \text{ nach (30) dürfen je nur ein Nicht-} \\ \text{nullelement besitzen, außerdem muß Be-} \\ \text{dingung (21) erfüllt sein.} \end{array} \right\} \quad (44)$$

Verschwenden nur einzelne Elemente  $q_i$  des Vektors  $\mathbf{q}^T$ , so verschwinden laut Gln. (38), (39) die entsprechenden Nichtdiagonalelemente  $g_{ji}(s) \equiv 0$ , wenn alle  $a_{ik} = 0$  gewählt werden.

### 5. Beispiel zur teilweisen Entkopplung

Um das System (22) zu stabilisieren, wird zu teilweiser Entkopplung übergegangen. Der Vektor  $\mathbf{q}^T$  zur Nullstelle  $\eta = 3$  wird aus Gl. (30) errechnet (bei offenem  $c_{12}$ ),

$$\mathbf{q}^T = [2, 1 - c_{12}], \quad (45)$$

und erlaubt laut Bedingung (29) die Vorgabe von Verkopplung in Zeile 1 von  $\mathbf{G}_w(s)$  oder in Zeile 2, falls  $c_{12} \neq 1$ . Unter Berücksichtigung von (9) und (34) wird vorgegeben

$$\mathbf{G}_w(s) = \begin{bmatrix} \frac{-(s-3)}{(s+1)(s+3)} & g_{12}(s) \\ 0 & \frac{2}{s+2} \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Die Entwurfsgleichung (28) liefert mit  $\lambda_{11} = -1$ ,  $\lambda_{12} = -3$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{11} &= \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 3/2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_{11} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/8 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{v}_{12} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{p}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \end{aligned} \quad (47)$$

aus Gl. (25) erhält man mit  $\lambda_{21} = -2$  bei noch offenem  $a_{21} = a$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{21} &= \begin{bmatrix} (c_{12} - 6 - 2a)/10 \\ 1/2 \\ (6a - 3c_{12} + 3)/5 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{p}_{21} &= \begin{bmatrix} (c_{12} - 6 - 2a)/10 \\ (c_{12} - 6 - 2a)/40 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (48)$$

Regler und Vorfilter folgen aus Gl. (15) und (20) zu

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} 0 & (c_{12} - 6 - 2a)/5 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{F} &= \begin{bmatrix} -1 & (3c_{12} - a - 8)/5 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (49)$$

Setzt man dies Ergebnis zur Probe in  $\mathbf{G}_w(s)$  nach Gl. (4) ein, so erhält man das gewünschte Verhalten nach Gl. (46) mit

$$g_{12}(s) = \frac{s[8(s+2)(c_{12}-1) - a(s-3)]}{5(s+1)(s+2)(s+3)}, \quad (50)$$

was in Einklang mit der Formel (41) für das Nichtdiagonalelement steht. Mit der Vorgabe  $a = 0$  kürzt sich darin die Nennernullstelle  $-2$  und es bleibt

$$g_{12}(s) = \frac{8s(c_{12}-1)}{5(s+1)(s+3)}, \quad (51)$$

in Einklang mit Gl. (36). Besitzt der Vektor  $\mathbf{q}^T$  nach Gl. (45) nur ein Nichtnullelement (das Element  $c_{12}$  der Matrix  $\mathbf{C}$  muß dazu gleich Eins sein), so liefert der Entwurf nach Abschnitt 3 vollständige, stabile Entkopplung, was durch das Ergebnis (51) bestätigt wird.

(wird fortgesetzt)

### Literatur

- [1] Falb, P.L., und Wolovich, W.A.: Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems. IEEE Trans. on Autom. Control 12 (1967), S. 651-659.
- [2] Föllinger, O.: Regelungstechnik. 6. Auflage. Hüthig-Verlag, Heidelberg 1990.
- [3] Cremer, M.: Festlegen der Pole und Nullstellen bei der Synthese linearer entkoppelter Mehrgrößenregelkreise. Regelungstechnik und Prozeßdatenverarbeitung 21 (1973), S. 144-150 und S. 195-199.
- [4] Roppenecker, G.: Vollständige modale Synthese linearer Systeme und ihre Anwendung zum Entwurf strukturbeschränkter Zustandsrückführungen. Fortschritt-Berichte der VDI-Zeitschriften, Reihe 8, Nr. 59, VDI-Verlag, Düsseldorf 1983.
- [5] Roppenecker, G.: Zeitbereichsentwurf linearer Regelungen - Grundlegende Strukturen und eine allgemeine Methodik ihrer Parametrierung. R. Oldenbourg Verlag, München 1990.
- [6] Commault, C., und Dion, J.M.: Transfer Matrix Approach to the Triangular Block Decoupling Problem. Automatica 19 (1983), S. 533-542.
- [7] Koussiouris, T.: A frequency domain approach to the block decoupling problem. Int. J. Control 32 (1980), S. 443-464.
- [8] MacFarlane, A.G.J., und Karcanias, N.: Poles and Zeros of linear multivariable systems: a survey of the algebraic, geometric and complex-variable theory. Int. J. Control 24 (1976), S. 33-74.
- [9] Roppenecker, G., und Lohmann, B.: Vollständige Modale Synthese von Entkopplungsregelungen. Automatisierungstechnik 36 (1988), S. 434-441.
- [10] Roppenecker, G., und Preuß, H.-P.: Nullstellen und Pole linearer Mehrgrößensysteme. Regelungstechnik 30 (1982), S. 219-225 und S. 255-263.
- [11] Windpassinger, R.: Implementierung und Erprobung eines modalen Entwurfsverfahrens zur Führungsentkopplung. Diplomarbeit, Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe 1989.
- [12] Lohmann, B.: Partial Decoupling of Non-Minimum Phase Systems by constant State Feedback. Preprints of the IFAC-Workshop on System Structure and Control: State Space and Polynomial Methods, Prag 1989.
- [13] Lohmann, B.: Vollständige und teilweise Führungsentkopplung im Zustandsraum. Dissertation, Universität Karlsruhe 1990.

Manuskripteingang: 13. Juli 1990.

# Vollständige und teilweise Führungsentkopplung dynamischer Systeme durch konstante Zustandsrückführung

Complete and partial input-output decoupling of dynamical systems by constant state feedback

Boris Lohmann, Karlsruhe

Teil 2, Fortsetzung von Heft 9/1991.  
Der Autor wurde am Anfang des Teiles 1 vorgestellt.

Zur Entkopplung des Ein-Ausgangsverhaltens linearer Mehrgrößensysteme wird ein modales Entwurfsverfahren angegeben. Ausgehend davon werden Wege zu einer neuartigen teilweisen Führungsentkopplung nicht oder nicht stabil entkoppelbarer Systeme aufgezeigt, wobei sowohl die Anzahl unerwünschter, verkoppelnder Übertragungspfade als auch deren Einfluß minimal gehalten wird. Zwei Beispiele veranschaulichen die Vorgehensweise.

The decoupling of the input-output behaviour of linear multivariable systems is achieved by modal consideration. If the conditions for stability or existence of the controller are injured, the presented approach allows a partial and stable decoupling with generally only one output affected by several inputs. Two examples are given.

## 6. Teilweise Entkopplung nicht entkoppelbarer Systeme

Auch wenn die Verletzung der Entkoppelbarkeitsbedingung (21) den Entwurf nach Abschnitt 2 oder 3 verbietet, läßt sich häufig teilweise Entkopplung erzielen, und zwar dann, wenn die Zahl der endlichen invarianten Nullstellen kleiner als  $n - \delta$  ist. Systeme mit mehr als  $n - \delta$  Nullstellen besitzen eine singuläre Übertragungsmatrix  $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$  für alle  $s$ , was bewirkt, daß die Ausgänge des Systems nicht mehr unabhängig voneinander einflußbar sind. Solche Systeme sind im Hinblick auf Führungsverhalten nicht sinnvoll zu behandeln und werden hier ausgeklammert.

Als Entwurfsziel wird wie in Abschnitt 3 die teilweise entkoppelnde Matrix  $G_w(s)$  nach Gl. (6) vorgegeben, für die Diagonalelemente  $g_{ii}(s)$ ,  $i \neq j$ , das bekannte Übertragungsverhalten nach Gl. (9). Vom System wird vorausgesetzt, daß  $n - \delta - 1$  endliche invariante Nullstellen existieren, die allesamt in der linken komplexen Halbebene liegen. Dann ergeben sich durch Vergleich von Gl. (6) mit (11) die gleichen Beziehungen zur Bestimmung der  $n$  Vektorpaare  $v, p$ , wie im dritten Abschnitt: Zu den  $n - \delta - \delta_j$  frei vorgebbaren Polen  $\lambda_{ik}$  werden über Gl. (25)

die zugehörigen  $v_{ik}, p_{ik}$  errechnet, die Parameter  $a_{ik}$  ermöglichen zusätzliche Einflußnahme auf die Nichtdiagonalelemente von  $G_w(s)$ . Die  $n - \delta - 1$  „stabilen“ Nullstellen werden über Gl. (26) durch Eigenwerte kompensiert. Die verbleibenden frei vorgebbaren  $\delta_j + 1$  Eigenwerte  $\lambda_{jk}$  werden in Gl. (28) berücksichtigt. Der Zustandsregler ist dann aus Gl. (15) zu bestimmen, das Vorfilter aus Gl. (20).

Die Auswahlvorschrift für die verkoppelnde Zeile  $j$  der Übertragungsmatrix muß gegenüber Abschnitt 3 modifiziert werden: Hier wird ein Vektor  $\tilde{q}^T$  herangezogen, der die Beziehung

$$\tilde{q}^T D^* = 0^T \tag{52}$$

erfüllt, wobei  $D^*$  die in Bedingung (21) eingeführte (hier singuläre!) Entkoppelbarkeitsmatrix ist. Aus (52) kann eine nichttriviale Lösung  $\tilde{q}^T$  berechnet werden. Man hat so den Satz [13]:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Verkopplung kann in der } j\text{-ten Zeile von} \\ \mathbf{G}_w(s) \text{ vorgegeben werden, wenn das } j\text{-te} \\ \text{Element des Vektors } \tilde{q}^T \text{ nach Gl. (52) von} \\ \text{Null verschieden ist.} \end{array} \right\} \tag{53}$$

Im Übertragungsverhalten des geregelten Systems wird, wie bei der teilweisen Entkopplung nichtminimalphasiger Systeme nach Abschnitt 3, nur eine Ausgangsgröße durch mehrere Führungsgrößen beeinflusst. Die Übertragungsmatrix folgt Gl. (6) mit den Diagonalelementen nach Gl. (9),  $i \neq j$ , und dem Diagonalelement

$$g_{jj}(s) = \frac{\prod_{v=1}^{\delta_j+1} (-\lambda_{jv})}{(s - \lambda_{j1}) \cdot \dots \cdot (s - \lambda_{j,\delta_j+1})} \tag{54}$$

in der verkoppelnden,  $j$ -ten Zeile. Für die Nichtdiagonalelemente der Matrix  $G_w(s)$  gelten die in Abschnitt 3 angegebenen Beziehungen (36), (41), (42), wobei allerdings der Zählerkoeffizient

$$h_{ji} = -\frac{\tilde{q}_i}{\tilde{q}_j} \prod_{v=1}^{\delta_i} (-\lambda_{iv}) \tag{55}$$

zu setzen ist und in Gl. (42) der Grenzwert für  $\eta \rightarrow \infty$  zu nehmen ist. In Abschnitt 8 wird ein nicht entkoppelbares System mit technischem Hintergrund nach den hier angegebenen Schritten teilweise entkoppelt.

### 7. Optimale Wahl der Verkopplungsparameter

Die bei teilweiser Entkopplung auftretenden Entwurfparameter  $a_{ik}$  (siehe Gl. (25)) erlauben neben der Polvorgabe eine Einflußnahme auf die Nichtdiagonalelemente der Übertragungsmatrix (6). Ausgehend von der allgemeinen Formel für diese Nichtdiagonalelemente (41) läßt sich eine geschlossene Lösung zur optimalen Wahl der  $a_{ik}$  im Sinne eines quadratischen Gütemaßes herleiten.

Minimiert wird die *quadratische Fläche der Sprungantwort* eines Nichtdiagonalelementes der Übertragungsmatrix  $G_w(s)$ , also

$$J = \int_0^\infty h_{ji}^2(t, a_{ik}) dt, \tag{56}$$

worin  $h_{ji}(t, a_{ik})$  die Sprungantwort von  $g_{ji}(s, a_{ik})$  nach Gl. (41) ist. Nach Vorgabe aller Regelungeigenwerte zur Erzielung des gewünschten dynamischen Verhaltens bleiben in  $g_{ji}(s, a_{ik})$  lediglich die Parameter  $a_{ik}$  variabel zur Minimierung des Gütemaßes  $J$ . Zunächst wird eine Partialbruchzerlegung von

$$h_{ji}(s, a_{ik}) = g_{ji}(s, a_{ik}) \cdot \frac{1}{s} \tag{57}$$

vorgenommen, die mit den sich ergebenden Residuen  $r_{jv}^0, r_{jv}^k, q_{ik}$  lautet

$$h_{ji}(s, a_{ik}) = \sum_{v=1}^{\delta_j+1} \frac{r_{jv}^0}{s - \lambda_{jv}} + \sum_{k=1}^{\delta_i} a_{ik} \left( \frac{q_{ik}}{s - \lambda_{ik}} + \sum_{v=1}^{\delta_j+1} \frac{r_{jv}^k}{s - \lambda_{jv}} \right). \tag{58}$$

Die erste Summe entsteht dabei aus der Zerlegung von  $g_{ji}(s)/s$ , ist also von den  $a_{ik}$  unabhängig, die zweite entsteht aus  $f_{ji}(s, a_{ik})/s$  nach Gl. (42). Nach Rücktransformation in den Zeitbereich

$$h_{ji}(t, a_{ik}) = h_0(t) + \sum_{k=1}^{\delta_i} a_{ik} h_k(t) \tag{59}$$

mit den Abkürzungen

$$h_0(t) = \sum_{v=1}^{\delta_j+1} r_{jv}^0 e^{\lambda_{jv} t} \tag{60}$$

$$h_k(t) = q_{ik} e^{\lambda_{ik} t} + \sum_{v=1}^{\delta_j+1} r_{jv}^k e^{\lambda_{jv} t}, \quad k = 1, \dots, \delta_i \tag{61}$$

läßt sich  $h_{ji}(t, a_{ik})$  schreiben

$$h_{ji}(t, a_{ik}) = h_0(t) + [h_1(t), \dots, h_{\delta_i}(t)] \begin{bmatrix} a_{i1} \\ \vdots \\ a_{i\delta_i} \end{bmatrix} = h_0(t) + \mathbf{h}^T(t) \cdot \mathbf{a}, \tag{62}$$

woraus der Integrand des Gütemaßes

$$h_{ji}^2(t, a_{ik}) = (h_0(t) + \mathbf{h}^T(t) \cdot \mathbf{a})^2 = h_0^2(t) + 2h_0(t) \cdot \mathbf{h}^T(t) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \mathbf{h}(t) \mathbf{h}^T(t) \mathbf{a} \tag{63}$$

resultiert. Mit den Abkürzungen

$$\mathbf{u} := \int_0^\infty h_0^2(t) dt, \tag{64}$$

$$\mathbf{v}^T := \int_0^\infty h_0(t) \mathbf{h}^T(t) dt, \tag{65}$$

$$\mathbf{W} := \int_0^\infty \mathbf{h}(t) \mathbf{h}^T(t) dt \tag{66}$$

lautet das Gütemaß (56) dann

$$J = u + 2 \mathbf{v}^T \mathbf{a} + \mathbf{a}^T \mathbf{W} \mathbf{a}. \tag{67}$$

Glücklicherweise lassen sich die Ausdrücke  $u, \mathbf{v}, \mathbf{W}$  durch elementare Operationen geschlossen berechnen (die Integranden sind Produkte abklingender Exponentialfunktionen), so daß die notwendige Bedingung für ein Minimum von  $J$

$$\frac{dJ}{d\mathbf{a}} = 2 \mathbf{v} + 2 \mathbf{W} \mathbf{a} \stackrel{!}{=} \mathbf{0} \tag{68}$$

unmittelbar auf den gesuchten Optimalvektor

$$\mathbf{a}_{opt} = - \mathbf{W}^{-1} \mathbf{v} \tag{69}$$

führt. Daß dieses einzige Extremum tatsächlich ein Minimum darstellt, ist plausibel, denn durch ungünstige Wahl der  $a_{ik}$  kann die quadratische Fläche unter der Funktion  $h(t)$  nach Gl. (59) beliebig vergrößert werden, so daß kein Maximum existieren wird.

### 8. Anwendung auf ein reales System

Das vorgestellte Entkopplungsverfahren wurde an einem elektromechanischen Labormodell eines Hinterachsprüfstandes am Institut für Regelungs- und Steuerungssysteme, Universität Karlsruhe, erprobt. Die stark schwingungsfähige Strecke ist von fünfter Ordnung, besitzt drei Stell- und drei Regelgrößen und wird (normiert) durch

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0,0345 & -2,23 & 0 & 0 & 2,23 \\ 47,1 & 0 & -23,55 & -23,55 & 0 \\ 0 & 0,304 & -0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0,304 & 0 & -0,01 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -8,70 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,608 & 0 \\ 0 & 0 & -0,608 \\ 8,70 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0,40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 & 0 \end{bmatrix}$$

beschrieben. Die Differenzordnungen sind  $\delta_1 = 2$ , da  $\mathbf{c}_1^T \mathbf{B} = \mathbf{0}^T$ ,  $\mathbf{c}_1^T \mathbf{A} \mathbf{B} \neq \mathbf{0}^T$  und  $\delta_2 = \delta_3 = 1$ , da  $\mathbf{c}_2^T \mathbf{B} \neq \mathbf{0}^T$ ,  $\mathbf{c}_3^T \mathbf{B} \neq \mathbf{0}^T$ . Das System besitzt keine invariante Nullstelle, denn die Determinante (19) ist eine Konstante. Vor dem

Entwurf ist die Entkoppelbarkeit anhand des Kriteriums (21) zu prüfen: Die Systemordnung  $n = 5$  vermindert um die Differenzordnung  $\delta = 4$  ist *nicht* gleich der Zahl der invarianten Nullstellen, die Strecke ist also *nicht* entkoppelbar. Zum Entwurf einer teilweise entkoppelnden Regelung wird nach Abschnitt 6 vorgegangen und zunächst aus Gl. (52) der Vektor

$$\mathbf{q}^T = [0, 106, 1, 1] \quad (70)$$

ermittelt, der laut Kriterium (53) freie Wahl bei der Festlegung einer verkoppelnden Zeit in  $\mathbf{G}_w(s)$  läßt. Die Verwirklichung von

$$\mathbf{G}_w(s) = \begin{bmatrix} \frac{50}{(s^2 + 4s + 5)(s + 10)} & g_{12}(s) & g_{13}(s) \\ 0 & \frac{1}{s + 1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s + 1} \end{bmatrix} \quad (71)$$

erfordert die Vorgabe von  $\lambda_{11} = -2 - j$ ,  $\lambda_{12} = -2 + j$ ,  $\lambda_{13} = -10$  in Gl. (25) und  $\lambda_{21} = \lambda_{31} = -1$  in Gl. (28). Mit der Wahl von  $a_{21} = a_{31} = 0$  (in Gl. (25)) resultieren

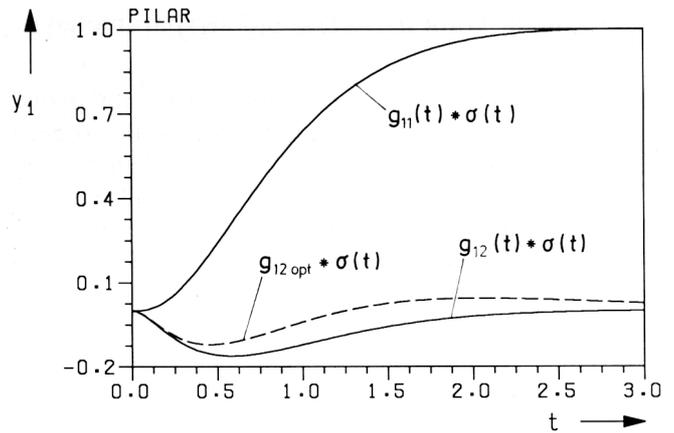
$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -3,12 & -1,55 & 1,88 & 1,88 & -0,605 \\ 0 & -0,50 & -1,63 & 0 & 0 \\ 0 & -0,50 & 0 & -1,63 & 0 \end{bmatrix}, \quad (72)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0,137 & 0,335 & 0,335 \\ 0 & -1,645 & 0 \\ 0 & 0 & -1,645 \end{bmatrix}$$

und bewirken  $\mathbf{G}_w(s)$  nach Gl. (71) mit

$$g_{12}(s) = g_{13}(s) = \frac{-9,42s}{(s^2 + 4s + 5)(s + 10)}$$

In Bild 1 sind die Zeitverläufe bei sprungförmiger Anregung durch  $w_1(t)$  bzw.  $w_2(t)$  dargestellt. Die verkoppelnde Wirkung von  $g_{12}(s)$  ist zwar schon recht gering, kann aber noch durch optimale Wahl des Entwurfsparameters  $a_{21}$  nach Abschnitt 7 verbessert werden: Mit  $a_{21} = 0,523$  erhält man die in Bild 1 gestrichelt gezeichnete Sprungantwort des Elementes  $g_{12\text{opt}}(s)$ . Die Stellgrößen bleiben bei beiden Entwürfen innerhalb der zulässigen Grenzen.



**Bild 1.** Regelgröße  $y_1(t)$  bei sprungförmiger Anregung durch die Führungsgrößen  $w_1(t) = \sigma(t)$  bzw.  $w_2(t) = \sigma(t)$ .

### 9. Abschließende Bemerkungen

Ausgehend vom Entwurf führungsentkoppelnder Zustandsregelungen für „gutartige“, also vollständig und stabil entkoppelbare Systeme wurden Wege zur teilweisen Entkopplung nichtminimalphasiger und nicht entkoppelbarer Systeme aufgezeigt. Dabei wurde stets das *konstante* lineare Regelgesetz (3) zugrunde gelegt. Weitere interessante Möglichkeiten zur Behandlung von nicht oder nicht stabil entkoppelbaren Systemen ergeben sich durch den Einsatz *dynamischer* Regelungsstrukturen. Wie solche Strukturen angesetzt werden können, und wie die Festlegung der Reglerparameter auf die hier vorgestellten Entwürfe zurückgeführt werden kann, soll Gegenstand einer späteren Arbeit sein.

Zur Führungsentkopplung *diskreter* Systeme kann grundsätzlich nach den gleichen Schritten vorgegangen werden, wie hier für zeitkontinuierliche Systeme beschrieben, wenn anstelle der Laplacetransformation mit der z-Transformation gearbeitet wird [13].

Literatur siehe Teil 1, Heft 9/1991, Seite 334.

Manuskripteingang: 13. Juli 1990.